【26】

氏名・(本籍)	熊ノ郷　準（くまのごう　ひとし）
学位の種類	理　学　博　士
学位記番号	第　444　号
学位授与の日付	昭和 38 年 8 月 29 日
学位授与の要件	学位規則第5条第2項該当
学位論文題目	**Cauchy 問題の解の一意性について**
論文審査委員	(主査) 教授 南雲 道夫　(副査) 教授 村上 信吾　教授 遠木 幸成

論 容 内 容 の 要 旨

我々は，座標 $(t, x)=(t, x_1,\cdots, x_\nu)$ を持つ $(\nu+1)$ 一次元ユークリッド空間の原点の近傍で，複素数値変数係数を持つ微分作用素

(1) $$L=L_0+\sum_{i+m|\alpha:\bar{m}|\leqq m-1} b_{i,\alpha}(t, x)\frac{\partial^{i+|\alpha|}}{\partial t^i\partial x^\alpha},$$

$$L=\sum_{i+m|\alpha:\bar{m}|=m} a_{i,\alpha}(t, x)\frac{\partial^{i+|\alpha|}}{\partial t^i\partial x^\alpha}\quad (a^{m,0}(t, x)=1)$$

$$\left(\begin{array}{l}\alpha=(\alpha_1,\vdots, \alpha_\nu),\qquad x^\alpha=x_1^{\alpha 1}\cdots x_\nu^{\alpha\nu},\\ |\alpha|=\alpha_1+\cdots+\alpha_\nu,\ |\alpha:\bar{m}|=\alpha^I/m_1+\cdots+\alpha_\nu/m_\nu\end{array}\right.$$

を考える。ここで $(m, \bar{m})=(m, m_1,\cdots, m_\nu)$ $(m^j\leqq m;\ j=1,\cdots, \nu)$ は正整数を要素とする実ベクトル，$a_{i,\alpha}\in C^\infty_{(t,x)}$, $b_{i,\alpha}\in L^\infty$ とする，L の主部 L_0 に対応する微分多項式

(2) $L_0(t, x, \lambda, \xi)=\sum_{i+m|\alpha:\bar{m}|=m} a_{i,\alpha}(t, x)\lambda^i\xi^\alpha$ を特性多項式を呼び，λ についての特性方程式

$L_0(t, x, \lambda, \xi)=0$ の根 $\lambda(t, x, \xi)$ に対する条件のもとに Cauchy 問題の解の一意性を証明する。

まず，実ベクトル $\xi=(\xi_1,\cdots, \xi_\nu)\neq 0$ に対して変換 $\gamma=\gamma(\xi)$ を方程式

(3) $F(\gamma, \xi)\equiv\sum_{j=1}^{\nu}\xi_j^2\gamma^{-2/mj}=1$ の正根として定義し，行列 R を

$R=\begin{pmatrix}\gamma^{1/m_1} & 0\\ 0 & \gamma^{1/m\nu}\end{pmatrix}$ と定義すると，(2) の L_0 を単位球面上で

$L_0(t, x,\lambda, \sqrt{-1}\eta|\eta|^{-1})=\prod_{i=1}^{m}(\lambda+\lambda_{0,i}(t, x, \eta))$ と分解した時，一般の ξ については

$L_0(t, x, \lambda, \sqrt{-1}\xi)=\prod_{i=1}^{m}(\lambda+\lambda_{0,i}(t, x, \xi R^{-1})\gamma^{1/m})$

と表現出来る事を示した。

次に，Calderon & Zygmund の特異積分作用素の拡張として $C^{m}_{\underline{m}}$ elass の作用素を定義して，前者と同様の性質を満す事及び (ξ)— 空間について議論を局所化出来る事を示した。所で γ の定義 (3) より $\lambda_{0,i}(t, x, \xi R^{-1})$ は $C^{m}_{\underline{m}}$ class の作用素の Symbols となる事がわかり，作用素 Λ を $\widetilde{\Lambda u}=\gamma^{1/m}\tilde{u}$ （～ はFourier 変換）で定義するとLは $C^{m}_{\underline{m}}$ class の作用素と Λ を用いて表現出来，次の結果を得た。

定理　微分作用素 L (1) の特性多項式 L_0 を

$L_0(t, x, \lambda\sqrt{-1}\xi)=\prod_{i=1}^{k}\left(\lambda+\lambda_i^{(1)}(t, x, \xi)\right)\prod_{j=1}^{m-k}\left(\lambda+\lambda_j^{(2)}(t, x, \xi)\right)$ と分解して次の仮定をおく：

$\lambda_i^{(1)}(i=1,\cdots, k)$ 及び $\lambda_j^{(2)}(j=1,\cdots,m-k)$ はそれぞれ相異なり，$\lambda_j^{(2)}$ の実部 $\neq 0$ $(\xi\neq 0)$ とし，$\lambda_i^{(1)}(i=1,\cdots,k)$ については，$\lambda_i^{(1)}=p_i+\sqrt{-1}\,q_i$ と書く時，$C^{m}_{\underline{m}}$ class の作用素の Symbols h_i で以って

$$\frac{\partial}{dt}p_i+\sum_{j=1}^{\nu}\left\{\frac{\partial}{\partial x_j}p_i\frac{\partial}{\partial \xi_j}q_i-\frac{\partial}{\partial x_j}q_i\frac{\partial}{\partial \xi_j}p_i\right\}=h_i p_j$$

$(|\xi|\geqq 1$；松村の条件）と書ける。

この時，もし $Lu=0$ の解 $u\in C^{m}_{(t,x)}$ の台 $-\{0\}'$ が半平面 $(t>0)$ に含まれるなら，u は原点の近傍で恒等的に零となる。

この結果は S. Mizohata が得た結果“2階放物型方程式に於て時間軸に平行な面に初期値を与えた時Cauchy 問題の解の一意性が成立する”を一般的な立場から説明出来る。併ここで導かれた積分不等式は解の一意性のみならず存在定理及び正則性の伝播を調べる上にも有効である。

論文の審査結果の要旨

熊ノ郷準君の主論文は一般的な線型偏微分方程式の Cauchy 問題，すなわち非特性の初期値問題に対する解の一意性，および一般的な楕円型の線型偏微分方程式の解に関する一致の定理の証明を取扱っている。

一般に線型偏微分方程式の Cauchy 問題の解の一意性について，1954年 Plis は係数が無限回連続微分可能で解も無限回連続微分可能であると仮定しても，なお Cauchy 問題の解が一意とならぬ例を与えて問題の困難性を示した。1958年には Calderon は特性方程式の根の単純性を条件として実係数の函数を係数とする偏微分方程式について，Cauchy 問題の解の一意性を証明した。しかし独立変数が丁度3個のときには階数が4以上の場合が残されたが，これは京大の溝畑氏（1959年）によって解かれた。またそれによって複素係数の場合にも拡張されることがわかった。

以上の解決はすべて特性方程式の根の単純性を条件としておこなわれている。これを全面的に除くことは Plis の反例で不可能であるが，ある特殊な微分方程式については（根の重複があっても）一致の定理

の成立することが溝畑，Protter, Bernstein 等によって証明された。そこで熊ノ郷君は根の単純性の条件をゆるめて，上述の特殊な場合を包含するような比較的に一般的方法を工夫してその証明に成功した。これは二つの部分から成り立っている。

すなわち第一部では，複素数値の函数を係数とする微分作用素の主部に対応する多項式（特性式）を1次因子に分解するとき：

1）これが局所的に滑らかとなること。

2）これを二つの適当な群に分けると，それぞれの群のうちでは根が重複せぬこと。

3）第一群のものは松村氏（京大）の条件をみたし（実係数ならば成立する），第二群のものは根が実数とならぬこと（楕円的）。

以上の3条件が成立する場合，または主部が以上の3条件をみたすような，S個の微分作用素の積でその階数がmとなり，残りの部分の階数がm－S以下である場合について，Cauchy 問題の解が一意となることを証明した。なお微分作用素が楕円的（特殊方程式の根が実とならぬ）の場合には，上と同様な条件の下で，解の存在域内の一点で exp (αr^{-L}) $(\alpha>0)$ 任意）以上の速さで零に近づく解は恒等的に0となるという一致の定理を証明している。

第二部においては，第一部での微分作用素の主部は斉次性をもっている（階数がそろっている）ものを考えたが，溝畑（京大），白田（阪大），Protter 等が放物型の偏微分方程式についての一致の定理を論じたことに刺戟されて微分作用素の主部の斉次性を，独立変数ごとにその次数の割合を変えて一般化した場合に第一部の結果を拡張した。すなわち $(t, x)=(t, x_1,\cdots, x_\nu)$ を独立変数とし，$\alpha=(\alpha_1\cdots\alpha_\nu)$（$\alpha_j$ は0または自然数），$|\alpha:\overline{m}|=\alpha_1/m_1+\cdots\cdots+\alpha_\nu/m_\nu$（$m_j$ は m 以下の自然数）

として，微分作用素の主部が

$$L_0=\sum_{j+m|\alpha:\overline{m}|=m} a_{j,\alpha}(t, x)\frac{\partial^{|j+\alpha|}}{\partial t^j\partial x^\alpha} \qquad (\text{ただし} a_{m,0}\equiv 1)$$

残部が

$$\sum_{j+m|\alpha:\overline{m}|\leqq m-1} b_{j,\alpha}(t, x)\frac{\partial^{j+|\alpha|}}{\partial t^j\,\partial x^\alpha}$$

となる場合を論じて第一部の結果をこの場合に拡張した。そこで Calderon-Zygmund の特異積分作用素と作業素 Λ をこの場合に適切な形式に拡張して，京大の溝畑，山口，松村氏の方法を巧みに，この場合に変形して応用した。とくに $\gamma=\gamma(\xi)$ をば方程式

$$\sum_{j=1}^{\nu}\xi_j^2\gamma^{-2/m_j}=1$$

の根として $\widetilde{\Lambda}=\widetilde{\gamma}(\xi)^{1/m}$（～は Fouries 変換を示す）によって Λ を定義して $\Lambda(\xi)$ とそのすべての導函数の評価を導いている点が著しい。

以上の主論文は偏微分方程式の Cauchy 問題および楕円型の偏微分方程式の解の一致の定理について特性根の単純性をゆるめることおよび主部の斉次性を拡張することの両点において世界の最近の研究の進歩に重要な寄与を与えたもので理学博士の学位論文として十分の価値あるものと認める。