【34】

氏名・(本籍)	春木　博（はるき　ひろし）
学位の種類	理学博士
学位記番号	第 819 号
学位授与の日付	昭和40年12月15日
学位授与の要件	学位規則第5条第2項該当
学位論文題目	**解析函数論の見地から見た或る種の函数方程式の研究**
論文審査委員	(主査) 教授 南雲 道夫 (副査) 教授 池田 信行　教授 遠木 幸成

論文内容の要旨

§2 において $f(u)$ は $|u|<+\infty$ において1価有理型函数，$F(u, v)$ は $|u|<+\infty, |v|<+\infty$ において定義された1価複素数値函数とするとき函数方程式

$$f(x+y)=\{f(x), f(y)\}$$

の非定数解は $f(u)=\dfrac{au+b}{cu+d}$ (a, b, c, d は任意の複素定数で $ad-bc\neq 0$ とする)　および

$f(u)\ \dfrac{a\exp(kx)+b}{c\exp(kx)+d}$ (a, b, c, d, k は任意の複素定数で $k(ad-bc)\neq 0$ とする)にかぎることを解析函数論の諸定理をもちいて証明した。

§4 において中線定理に関する函数方程式をのべ以下の諸節の論に備えた。

§3, §5, §6, §7, §9, §17 においては与えられた函数不等式の解を解析函数論における Liouville の定理をもちいて常微分方程式を作り出すことによりすべて求めることを論じ函数方程式への応用をのべた。

§8 においては楕円函数論における σ 函数に関する函数方程式を論じ §10 においてはピタゴラス型函数方程式を論じた。

§11 においては或る性質をもった有理型（全複素平面において）函数族の特有性質を明らかにしそのすべての元を決定し函数方程式への応用をのべた。§12 においては §11 において論じた有理型函数族と密接な関係にある或る調和（全 xy 平面において）函数族のすべての元を決定し函数方程式への応用をのべた。

§13, §14, §15, §16, §18 においては円錐曲線，対数渦線の族に密接な関係をもつ函数方程式5個を多様な角度から見てそれらの解法を論じた。

以上18節にわたって解析函数論の見地から見たある種の函数方程式を論じた。複素数の絶対値が中心となり，各節の函数方程式は互に密接な関係をもつ。

論文の審査結果の要旨

この論文は種々な結合的函数方程式について，その解析的正則解とくに整函数の解を求める方法の研究をまとめたものである。

その方法のうちで最も主なものは，函数の絶対値に関する結合的函数不等式を充すような整函数の解を求めて，これを種々な結合的函数方程式に応用することにある。

本論文は，多くの項目や多くの例からなっているが，その主要な結果をつぎに挙げよう。

1　加法定理をもつような，有理型函数を決定すること。それは1次分数函数か，または指数函数の1次分数函数にかぎることを証明している。

2　函数不等式

$$|f(x+y)| \leqq |f(x)g(y)| + |f(y)g(x)|$$

をみたすような整函数$f(x)$ および $g(x)$　$f(0)=0, f'(0)\neq 0, g(0)=1$ となるものを決定する。それは

$$f(x)=a\exp(bx)\sin cx,\ g(x)=\exp(bx)\cos cx$$

$(a, b, c$ は複素定数で $ab\neq 0)$,

または，$f(x)=ax\exp(bx)$, $g(x)=\exp(bx)$

にかぎることを示す。この証明には

$$p(y)=|f(x+y)g(x-y)|^2+|f(x-y)g(x+y)|^2$$

とおくとき，$p(y)$ が $y=0$ で極小となることを示し，$p''(0)\geqq 0$ から，Liouville の定理によって，f と g とがみたすべき連立微分方程式をみちびいて，これを解く。

3　絶対値 $|f(z)|$ が Z の凸函数となるような整函数 $f(z)$ を決定すること。それは az, $\exp(az+b)$ または $a\sin bZ(a, b$ は複素定数)にかぎることを示す。その証明には $p(y)=|f(x+y)|^2+|f(x-y)|^2$ が $y=0$ で極小となることを示し，$p''(0)\geqq 0$ から，Liouville の定理によって，微分方程式 $f(x)f''(x)=cf'(x)^2$ をみちびいて，これを解く。

以上のほかに，なおいろいろな結合的函数方程式や結合的函数不等式を取扱っており，あるいは巾級数展開を用い，あるいは上述のような極値の考察から微分方程式をみちびいて，これを解くことによって整函数の解を求めている。

4　なお，本論文の後半では，有理型函数$f(z)$ について

$\varphi(x, y)=|f(x+iy)|$ とおくとき，φ_x/φ_y が，x のみの函数と y のみの函数との積（$A(x)B(y)$ の型）となるような $f(z)$ を求めることを論じ，それを応用して，いろいろな結合的函数方程式の整函数の解を求めている。そのために，このような函数 f の対数微分を $f'/f=g$ とおくとき，微分方程式

$$g'^2 = ag^4 + bg^2 + c \quad (a,\ b,\ c \text{ は実定数})$$

がなりたつことをみちびく。（したがって g は有理函数，指数函数の有理函数〔三角函数〕または楕円函数に属する）それから f の型を決定している。

以上を総合すれば，春木君は本論文において，多くの種々な主として古典的な結合的函数方程式を絶対値に関する結合的函数不等式などの立場から，その整函数解を求める問題に帰して，これを取扱っており，その方法には著者の独創的な手法が見られる。この論文は結合的函数方程式の研究に一つの新しい見地を与えたもので，この方面の研究に寄与するところが多いものと考えられる。したがって本論文は理学博士の学位論文として十分の価値あるものと認める。