OUKA
The University of Osaka
Institutional Knowledge Archive

Title	ベッセル関数の高精度計算に関する研究
Author(s)	牧之内, 三郎
Citation	大阪大学, 1965, 博士論文
Version Type	
URL	https://hdl.handle.net/11094/29055
rights	
Note	著者からインターネット公開の許諾が得られていないため、論文の要旨のみを公開しています。全文のご利用をご希望の場合は、大阪大学の博士論文についてをご参照ください。

The University of Osaka Institutional Knowledge Archive : OUKA

https://ir.library.osaka-u.ac.jp/

The University of Osaka

【43】

氏名・(本籍)	牧之内(まきのうち) 三(さぶ) 郎(ろう)
学位の種類	工学博士
学位記番号	第 813 号
学位授与の日付	昭和40年12月1日
学位授与の要件	学位規則第5条第2項該当
学位論文題目	**ベッセル関数の高精度計算に関する研究**
論文審査委員	(主査) 教授 城 憲三
	(副査) 教授 熊谷 三郎 教授 篠田 軍治 教授 千田 香苗
	教授 吉永 弘 教授 吉岡 勝哉 教授 竹内 竜一
	教授 庄司 一郎 教授 藤田 茂 教授 鈴木 達朗

論文内容の要旨

本論文は第1種ベッセル関数 $J_\nu(x)$, 第2種ベッセル関数 $Y_\nu(x)$, 第1種変形ベッセル関数 $I_\nu(x)$ ならびに第2種変形ベッセル関数 $K_\nu(x)$ の関数値, および $J_\nu(x)$, $Y_\nu(x)$ の零点の高精度計算を行なう方法について述べる。また, 本研究の結果として, 少なくとも29桁正しいこれらの関数値および零点の値を例示する。ただし $\nu \geqq 0$, $x>0$ とする。

使用した電子計算機は大阪大学計算センターに設置されている NEAC－2206 である。本研究の目的を達成するため, 3倍精度 (triple precision) の浮動小数点方式4則演算ルーチンを作成した。このルーチンで扱われる数値 x の桁数は33桁であり, その絶対値の大きさは

$$10^{-501} \leqq |x| < 10^{+500}$$

である。

緒論では本研究の意義および目的について述べ, 第1章では諸種の定数について説明する。

第2章では, ベッセル関数の高精度計算に必要な初等関数およびガンマ関数の近似公式について述べる。また, えられた近似式を用いて, これらの関数値を求めるサブルーチン作成について述べる。

第1章および第2章はベッセル関数の高精度計算を行なうための準備段階を示している。

第3章ではベッセル関数の近似計算法の概要について述べる。また, チエビシェフ近似多項式の作成の一例, Phase-Amplitude 法に関する Goldstein, Thaler の計算式の係数の追加, 訂正等についても述べる。

しかし, 近似多項式あるいは漸近展開式を用いて, 広範囲の ν, x の値に対するベッセル関数の高精度計算を行なうことは困難である。

本論文では “漸化式を用いる近似計算法” によってベッセル関数の高精度計算を行なった。これに

ついては第4章で詳述する。とくに，第1種ベッセル関数 $J_\nu(x)$ および $I_\nu(x)$ の計算誤差を解明することによって，ベッセル関数の高精度計算が非常に容易になったことを示す。

第5章では $J_\nu(x)$ および $Y_\nu(x)$ の零点の高精度計算について述べる。ほとんどの場合，McMahon 級数によって零点の第1近似値を求め， Newton 法によってこれら零点の高精度計算を行なった。このとき，“漸化式を用いるベッセル関数の近似計算法”の手法を併用することによって，関数値 $J_\nu(x)$ 等をまったく計算することなく $J_\nu(x)$ の零点を求めることができた。すなわち，ν の整数，非整数にかかわらず短かい計算時間で簡単に $J_\nu(x)$ の零点が求められることを述べる。

結論では本研究の成果について述べる。

論文の審査結果の要旨

本論文は，第1種ベッセル関数 $J_\nu(x)$，第2種ベッセル関数 $Y_\nu(x)$，第1種変形ベッセル関数 $I_\nu(x)$ ならびに第2種変形ベッセル関数 $K_\nu(x)$ の関数値および $J_\nu(x)$，$Y_\nu(x)$ の零点の高精度計算を行なう方法について述べたもので，緒論，本論5章と結論からなっている。

本研究の結果として，少なくとも29桁正しいこれらの関数値および零点の値を例示している。ただし $\nu\geqq 0$, $x>0$.

使用された計算機は大阪大学計算センターに設置されている NEAC—2206 である。本研究の目的を達成するために，3倍精度の浮動小数点方式4則演算ルーチンが作成されている。このルーチンで扱われる数値 x の桁数は33桁であり，その絶対値の大きさは

$$10^{-501}\leqq |x| <10^{+500}$$

となっている。

緒論では本研究の意義および目的が述べられている。

第1章では諸種の定数について説明している。

第2章では，ベッセル関数の高精度計算に必要な初等関数およびガンマ関数の近似公式について述べている。また，えられた近似式を用いて作られたサブルーチンについても述べている。

第1章および第2章はベッセル関数の高精度計算を行なうための準備段階を示したものである。

第3章ではベッセル関数の近似計算法の概要について述べている。また，チエビシェフ近似多項式の作成の一例，Phase-Amplitude 法に関する Goldstein, Thaler の計算式の係数の追加，訂正等についても述べている。しかし，このような近似多項式あるいは漸近展開式を用いて，広範囲の ν, x の値に対するベッセル関数の高精度計算を行なうことは困難であることを述べている。

第4章では“漸化式を用いる近似計算法”を用いてベッセル関数の高精度計算を行なう方法について詳述している。とくに，第1種ベッセル関数 $J_\nu(x)$ および $I_\nu(x)$ の計算誤差を解明することによって，ベッセル関数の高精度計算が非常に容易になったことを示している。

第5章では $J_\nu(x)$ および $Y_\nu(x)$ の零点の高精度計算について述べている。ほとんどの場合，McMahon 級数によって零点の第1近似値を求め，Newton 法によってこれらの零点の高精度計算を行

なっている。このとき“漸化式を用いるベッセル関数の近似計算法”の手法を併用することによって関数値 $J_\nu(x)$ 等をまったく計算することなく $J_\nu(x)$ の零点が求められることを述べている。すなわち ν の整数，非整数にかかわらず短かい計算時間で簡単に $J_\nu(x)$ および $Y_\nu(x)$ の零点が求められている。

結論では，上記の研究結果を総括して述べている。

本論文は，$\nu \geqq 0$ および $x>0$ の値いかんにかかわらず，できるだけ統一的方法によってベッセル関数 $J_\nu(x)$, $Y_\nu(x)$, $I_\nu(x)$ および $K_\nu(x)$ の高精度計算を行なう方法について研究を行ない，所要の精度で，できるだけ簡単にこれらの関数値を機械計算する方法を明らかにしたものである。その結果として，$J_\nu(x)$ および $Y_\nu(x)$ の零点の高精度計算も非常に容易になったことが例示されている。

このように，本論文は計算機による科学，技術計算に寄与するところ大であり，博士論文として価値あるものと認める。