【 5 】

氏名・(本籍)	**平 松 豊 一**（ひら まつ とよ かず）
学位の種類	理 学 博 士
学位記番号	第 1054 号
学位授与の日付	昭 和 41 年 12 月 17 日
学位授与の要件	理学研究科数学専攻 学位規則第5条第1項該当
学位論文題目	**−1次元の保型形式に付随した Eichler 類**
論文審査委員	(主査) 教 授 中岡 稔 (副査) 教 授 南雲 道夫 教 授 大嶋 勝

論 文 内 容 の 要 旨

−1次元の保型形式については殆んど文献はないと云っていい。しかし最近に，それが数論，特に Artin の L 函数と結びつくと云う徴候が現われ，その意味で，−1次元の保型形式を研究することは十分価値あるものと思われる。

さて，本論文ではこの−1次元の保型形式を取扱う。即ち，Selberg は弱対称リーマン空間の位相解析を駆使して，いわゆる Selberg の trace formula を導き，$-k$ 次元の保型形式 (k は偶数) に関する Hecke 作用素 T_p の trace を求めることに成功した[1]。Kuga は更に，この Selberg 理論の保型形式への応用を進めた。即ち，Γ を $SL(2, \boldsymbol{R})$ の discrete subgroups で，$SL(2, \boldsymbol{R})/\Gamma$: compact, $\Gamma \ni \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ とし，Γ に関する $-k$ 次元の holomorphic な保型形式 ($k>0$) の作る linear space を $S_k(\Gamma)$ とする。また，連立固有値問題：

$$\begin{cases} f \in C^\infty(\tilde{S}/\Gamma) \\ \dfrac{\partial}{\partial \phi} f(z, \phi) = -ikf(z, \phi) \\ \tilde{\Delta} f(z, \phi) = -k\left(k+\dfrac{1}{2}\right) f(z, \phi) \end{cases}$$

(記号については，本論文§2参照) の固有空間を $\mathfrak{M}\left(k, -k\left(k+\frac{1}{2}\right)\right)$ とすれば，各 $k(>0)$ に対してこの固有空間は有限次元であり，$S_k(\Gamma)$ と $\mathfrak{M}\left(k, -k\left(k+\frac{1}{2}\right)\right)$ との間に，もしも $k>1$ ならば，

$$\mathfrak{M}\left(k, -k\left(k+\frac{1}{2}\right)\right) = \{e^{-ik\phi} y^{k/2} f(z) / f(z) \in S_k(\Gamma)\}$$

従って

$$\dim_{\boldsymbol{C}} \mathfrak{M}\left(k, -k\left(k+\frac{1}{2}\right)\right) = \dim_{\boldsymbol{C}} S_k(\Gamma)$$

なる関係のあることを導いた。しかし，$k=1$ の場合，即ち $S_1(\Gamma)$ と $\mathfrak{M}\left(1, -\frac{3}{2}\right)$ との間に如何なる関係があるかについては，非常に困難な問題であるとして，そのまゝ問題として残された[2]。

さて今，

$$\begin{cases} d=\dim_{C} S_1(\Gamma) \\ d_0=\dim_{C} \mathfrak{M}\left(1, -\frac{3}{2}\right) \end{cases}$$

とし，Kuga の方法に従えば，この両者の間に

$$d \leqq d_0 \leqq 2d$$

なる関係を導くことは容易に出来る（本論文の Theorem 1)．しかし，それ以上進むこと，即ち d と d_0 との間のある種の等式を導くためには，更に何らかの idea が必要であった。

一方，Eichler は，$-k$ 次元の保型形式（k は >2 なる偶数）に付随した一般化された Abel 積分を定義し，cocycles がその積分の periods として現われる first cohomology groups を導入し，Hecke 作用素 T_p の trace を求めるのに成功した[3]。更に Gunning は，この first cohomology groups を -1 次元の場合も含めて一般的に導入し（これを Gunning は，Eichler の cohomology groups と呼んだ)，ある種の duality theorem を導いた。しかし $k=1$, 即ち -1 元の保型形式に対しては，duality theorem を導くことに成功せず，conjectures として問題を残した[4]。

本論文では，この予想の一部を解決した。即ち，$S_1(\Gamma)\ni f(z)$ に対し，Selberg 理論からの natural な積分

$$\int_{z_0}^{z} \frac{-2i}{\xi-z} f^*(\xi)d\xi \qquad (I_m\,\xi<0)$$

を導入すれば（本論文の Page 8)，その periods として現われる $C(\sigma; z)$ が，丁度 Gunning の意味での $f(z)$ に付随した Eichler の first cohomology groups $H^1(\Gamma, \mathfrak{N})$ の cocycles になる（本論文の Page 9)，そして，$S_1(\Gamma)$ と $H^1(\Gamma, \mathfrak{N})$ との間に，対応 $f(z)\to C(\sigma; z)$ によって monomorphism があることを示した（本論文の Theorem 2, Page 14)．この定理 2 は，Gunning の conjectures の一部の解決を与える。そして，この定理 2 の系として，実は $S_1(\Gamma)$ と $\mathfrak{M}\left(1, -\frac{3}{2}\right)$ との間には，

$$\mathfrak{M}\left(1, -\frac{3}{2}\right)=\{e^{-i\phi}y^{1/2}f(z)/f(z)\in S_1(\Gamma)\}$$

即ち，

$$d=d_0$$

なる関係があると云う結論を導いた（本論文の corollary).

従来，Selberg 理論と Eichler 理論とは全く独立であるように思われて来た。しかし，今までに述べられた事実は，この両者の間に深い関係のあるであろう可能性の一つの徴候とも云えよう。

注

1) A. Selberg: Harmonic analysis and discontinuous groups in weakly symmetric Riemannian spaces with applications to Dirichlet series, J. Indian Math. Soc. 20 (1956), pp. 47～87.

2) M. Kuga: On a uniformity of distribution of 0-cylcles and the eigenvalues of Hecke's operators, II, Sci. Pap. Coll Gen. Ed. Univ. Tokyo 10 (1960). pp. 171～186.

3) M. Eichler: Modular correspondences and their representations, J. Indian Math. Soc. 20 (1956), pp. 163～206.

M. Eichler: Eine Verallgemeinerung der Abelschen Integrale, Math. Z. 67 (1957), pp. 267～298.

4) R.C. Gunning: The Eichler cohomology groups and automorphic forms, Trans. Amer. Math. Soc. 100 (1961).pp. 44～62.

参考論文題名。Modular forms obtained from L-functions with Grössen-characters of $\boldsymbol{Q}(\sqrt{-3})$.

Hecke は，虚2次体の量指標の L 函数から Mellin 変換で得られる函数が，いわゆる Hecke 群に関する multiplier をもつ保型形式になることを示した[1]。しかし，この Hecke 群は色々な意味で扱いにくい。そこで，これら虚2次体の量指標の L 函数から得られる保型形式のうち，inhomogeneous modular groups Γ の index finite な subgroups (これを普通，modular subgroups と云う) に関する multiplier 1 の保型形式はどれだけあるかと云う問題が起る。

本論文では，特に，虚2次体 $\boldsymbol{Q}(\sqrt{-3}$ の exponent $2k-1(k>0)$ をもつ量指標の L 函数から Mellin 変換で得られる保型形式が，Γ の交換子群 Γ^c に関する $-2k$ 次元の cusp forms になることを示し，更にこの Γ^c の性質を利用して，Γ^c に関する $-2k$ 次元の cusp forms の作る linear space の次元を求め，その basis をも explicite に与えた (本論文の Theorem 1).

Gunning は，保型形式に関する lecture note[2] の中で次のように述べている：

'It would be of interest to know explicitly a basis for the space of cusp forms, and the linear relations satisfied by the Poincaré series. Unfortunately, little is known about these questions, even in the simplest cases.' 定理1は，この Gunning の云う興味ある問題に対し，Γ^c の場合の解答を与えるものでもある。

本論文の定理2では，$\boldsymbol{Q}(\sqrt{-3})$ の量指標の L 函数から得られる cusp forms が，上で与えた basis の如何なる一次結合で表わされ得るかについて，その explicite な linear 係数を与えるものである。これは又，交換子群 Γ^c に関する Hecke 作用素の固有函数を求めていることを意味し，Schoeneberg の結果[3] の統一的な拡張にも当っている。

注

1) E. Hecke: Dirichlet-Reihen mit Funktionalgleichung und ihre Nullstellen auf der Mittelgeraden, Mathematische Werke, pp. 708～730 の特に Page 717.

2) R.C. Gunning: Lectures on modular forms, Annals of Math. Studies No. 48, Princeton Univ. Press, Princeton, N.J. (1962). の Page 39.

3) B. Schoeneberg: Über den Zusammenhang der Eisensteinschen Reihen und Thetareihen mit der Discriminante der elliptischen Funktionen, Math. Annalen 126 (1953), pp. 177～184.

論文の審査結果の要旨

Γを2次の実特殊線型群 $SL(2; \boldsymbol{R})$ の不連続部分群とし，剰余空間 $SL(2; \boldsymbol{R})/\Gamma$ はコンパクトと仮定するとき，Γ に関する $-k$ 次元の正則な保型形式のつくる線型空間 $S_k(\Gamma)$ はゼータ函数，L函数の数論的デリクレー級数の研究において重要な役割をなす。$k>1$ に対しては $S_k(\Gamma)$ の次元に関し Selberg を始め多くの人達の研究があるが，$k=1$ の場合は，技術的に一般論を適用することができないという意味で取残されていた。

本論文は，この残された問題に解答を与えたものである。すなわち著者は-1次元保型形式を $SL(2; \boldsymbol{R})$ が可遷的に作用している弱対称リーマン空間 $\boldsymbol{R}$ (正確には複素上半平面と実トーラスとの直積) 上の $SL(2; \boldsymbol{R})$—不変な微分作用素の同時固有函数として実現し得ること，さらにその同時固有空間が Eichler-Gunning により定義されたある種の1次元コホモロジー群に同型となることを示すことにより $S_1(\Gamma)$ の次元を決定したのである。

なお，参考論文では，著者は虚2次体 $\boldsymbol{Q}(\sqrt{-3})$ の奇数帯をもつ量指標の L 函数から Mellin 変換で得られる保型形式について論じている。

以上の通り，著者は技術的困難をよく克服して保型函数に関する未解決の問題に解答を与えた。さらに従来は独立であると思われていた Selberg と Eichler の理論の間に一つの道を拓いた。よってこの論文は理学博士の学位論文として十分価値あるものと認める。