



Title	1次元の保型形式に付隨したEichler類
Author(s)	平松, 豊一
Citation	大阪大学, 1966, 博士論文
Version Type	
URL	<a href="https://hdl.handle.net/11094/29082">https://hdl.handle.net/11094/29082</a>
rights	
Note	著者からインターネット公開の許諾が得られていないため、論文の要旨のみを公開しています。全文のご利用をご希望の場合は、 <a href="https://www.library.osaka-u.ac.jp/thesis/#closed">https://www.library.osaka-u.ac.jp/thesis/#closed</a> 大阪大学の博士論文について

*The University of Osaka Institutional Knowledge Archive : OUKA*

<https://ir.library.osaka-u.ac.jp/>

The University of Osaka

氏名・(本籍)	平	松	豊	一
	ひら	まつ	とよ	かず
学位の種類	理	学	博	士
学位記番号	第	1054	号	
学位授与の日付	昭和41年12月17日			
学位授与の要件	理学研究科数学専攻			
	学位規則第5条第1項該当			
学位論文題目	-1次元の保型形式に付隨した Eichler 類			
論文審査委員	(主査) 教授 中岡 稔			
	(副査) 教授 南雲 道夫 教授 大嶋 勝			

## 論文内容の要旨

-1次元の保型形式については殆んど文献はないと言つていい。しかし最近に、それが数論、特に Artin の L 関数と結びつくと云う徵候が現われ、その意味で、-1次元の保型形式を研究することは十分価値あるものと思われる。

さて、本論文ではこの-1次元の保型形式を取扱う。即ち、Selberg は弱対称リーマン空間の位相解析を駆使して、いわゆる Selberg の trace formula を導き、-k 次元の保型形式 ( $k$  は偶数) に関する Hecke 作用素  $T_p$  の trace を求めるに成功した<sup>1)</sup>。Kuga は更に、この Selberg 理論の保型形式への応用を進めた。即ち、 $\Gamma$  を  $SL(2, \mathbf{R})$  の discrete subgroups で、 $SL(2, \mathbf{R})/\Gamma$ : compact,  $\Gamma \ni \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$  とし、 $\Gamma$  に関する -k 次元の holomorphic な保型形式 ( $k > 0$ ) の作る linear space を  $S_k(\Gamma)$  とする。また、連立固有値問題：

$$\begin{cases} f \in C^\infty(\mathfrak{S}/\Gamma) \\ \frac{\partial}{\partial \phi} f(z, \phi) = -ikf(z, \phi) \\ \tilde{\Delta} f(z, \phi) = -k\left(k + \frac{1}{2}\right)f(z, \phi) \end{cases}$$

(記号については、本論文 §2 参照) の固有空間を  $\mathfrak{M}\left(k, -k\left(k + \frac{1}{2}\right)\right)$  とすれば、各  $k (> 0)$  に対してこの固有空間は有限次元であり、 $S_k(\Gamma)$  と  $\mathfrak{M}\left(k, -k\left(k + \frac{1}{2}\right)\right)$  の間に、もしも  $k > 1$  ならば、

$$\mathfrak{M}\left(k, -k\left(k + \frac{1}{2}\right)\right) = \{e^{-ik\phi} y^{k/2} f(z) / f(z) \in S_k(\Gamma)\}$$

従つて

$$\dim_c \mathfrak{M}\left(k, -k\left(k + \frac{1}{2}\right)\right) = \dim_c S_k(\Gamma)$$

なる関係のあることを導いた。しかし、 $k=1$  の場合、即ち  $S_1(\Gamma)$  と  $\mathfrak{M}\left(1, -\frac{3}{2}\right)$  との間に如何なる関係があるかについては、非常に困難な問題であるとして、そのまま問題として残された<sup>2)</sup>。

さて今、

$$\begin{cases} d = \dim_{\mathbb{C}} S_1(\Gamma) \\ d_0 = \dim_{\mathbb{C}} \mathfrak{M}\left(1, -\frac{3}{2}\right) \end{cases}$$

とし、Kuga の方法に従えば、この両者の間に

$$d \leq d_0 \leq 2d$$

なる関係を導くことは容易に出来る（本論文の Theorem 1）。しかし、それ以上進むこと、即ち  $d$  と  $d_0$  との間のある種の等式を導くためには、更に何らかの idea が必要であった。

一方、Eichler は、 $-k$  次元の保型形式（ $k$  は  $>2$  なる偶数）に付随した一般化された Abel 積分を定義し、cocycles がその積分の periods として現われる first cohomology groups を導入し、Hecke 作用素  $T_p$  の trace を求めるのに成功した<sup>3)</sup>。更に Gunning は、この first cohomology groups を $-1$  次元の場合も含めて一般的に導入し（これを Gunning は、Eichler の cohomology groups と呼んだ）、ある種の duality theorem を導いた。しかし  $k=1$ 、即ち $-1$  次元の保型形式に対しては、duality theorem を導くことに成功せず、conjectures として問題を残した<sup>4)</sup>。

本論文では、この予想の一部を解決した。即ち、 $S_1(\Gamma) \ni f(z)$  に対し、Selberg 理論からの natural な積分

$$\int_{z_0}^z \frac{-2i}{\xi - z} f^*(\xi) d\xi \quad (I_m \xi < 0)$$

を導入すれば（本論文の Page 8）、その periods として現われる  $C(\sigma; z)$  が、丁度 Gunning の意味での  $f(z)$  に付随した Eichler の first cohomology groups  $H^1(\Gamma, \mathfrak{R})$  の cocycles になる（本論文の Page 9），そして、 $S_1(\Gamma)$  と  $H^1(\Gamma, \mathfrak{R})$  との間に、対応  $f(z) \rightarrow C(\sigma; z)$  によって monomorphism があることを示した（本論文の Theorem 2, Page 14）。この定理 2 は、Gunning の conjectures の一部の解決を与える。そして、この定理 2 の系として、実は  $S_1(\Gamma)$  と  $\mathfrak{M}\left(1, -\frac{3}{2}\right)$  との間には、

$$\mathfrak{M}\left(1, -\frac{3}{2}\right) = \{e^{-i\phi} y^{1/2} f(z) / f(z) \in S_1(\Gamma)\}$$

即ち、

$$d = d_0$$

なる関係があると云う結論を導いた（本論文の corollary）。

従来、Selberg 理論と Eichler 理論とは全く独立であるように思われて来た。しかし、今までに述べられた事実は、この両者の間に深い関係のあるであろう可能性の一つの徵候とも云えよう。

注

- 1) A. Selberg: Harmonic analysis and discontinuous groups in weakly symmetric Riemannian spaces with applications to Dirichlet series, J. Indian Math. Soc. 20 (1956), pp. 47~87.
- 2) M. Kuga: On a uniformity of distribution of 0-cycles and the eigenvalues of Hecke's operators, II, Sci. Pap. Coll. Gen. Ed. Univ. Tokyo 10 (1960). pp. 171~186.

- 3) M. Eichler: Modular correspondences and their representations, J. Indian Math. Soc. 20 (1956), pp. 163~206.
- M. Eichler: Eine Verallgemeinerung der Abelschen Integrale, Math. Z. 67 (1957), pp. 267~298.
- 4) R.C. Gunning: The Eichler cohomology groups and automorphic forms, Trans. Amer. Math. Soc. 100 (1961).pp. 44~62.

参考論文題名。Modular forms obtained from L-functions with Grössen-characters of  $\mathbf{Q}(\sqrt{-3})$ .

Hecke は、虚 2 次体の量指標の L 函数から Mellin 変換で得られる函数が、いわゆる Hecke 群に関する multiplier をもつ保型形式になることを示した<sup>1)</sup>。しかし、この Hecke 群は色々な意味で扱いにくい。そこで、これら虚 2 次体の量指標の L 函数から得られる保型形式のうち、inhomogeneous modular groups  $\Gamma$  の index finite な subgroups (これを普通、modular subgroups と云う) に関する multiplier 1 の保型形式はどれだけあるかと云う問題が起る。

本論文では、特に、虚 2 次体  $\mathbf{Q}(\sqrt{-3})$  の exponent  $2k-1 (k>0)$  をもつ量指標の L 函数から Mellin 変換で得られる保型形式が、 $\Gamma$  の交換子群  $\Gamma^c$  に関する  $-2k$  次元の cusp forms になることを示し、更にこの  $\Gamma^c$  の性質を利用して、 $\Gamma^c$  に関する  $-2k$  次元の cusp forms の作る linear space の次元を求め、その basis をも explicite に与えた (本論文の Theorem 1).

Gunning は、保型形式に関する lecture note<sup>2)</sup> の中で次のように述べている：

'It would be of interest to know explicitly a basis for the space of cusp forms, and the linear relations satisfied by the Poincaré series. Unfortunately, little is known about these questions, even in the simplest cases.' 定理 1 は、この Gunning の云う興味ある問題に対し、 $\Gamma^c$  の場合の解答を与えるものもある。

本論文の定理 2 では、 $\mathbf{Q}(\sqrt{-3})$  の量指標の L 函数から得られる cusp forms が、上で与えた basis の如何なる一次結合で表わされ得るかについて、その explicite な linear 係数を与えるものである。これは又、交換子群  $\Gamma^c$  に関する Hecke 作用素の固有函数を求めていることを意味し、Schoeneberg の結果<sup>3)</sup> の統一的な拡張にも当っている。

注

- 1) E. Hecke: Dirichlet-Reihen mit Funktionalgleichung und ihre Nullstellen auf der Mittelgeraden, Mathematische Werke, pp. 708~730 の特に Page 717.
- 2) R.C. Gunning: Lectures on modular forms, Annals of Math. Studies No. 48, Princeton Univ. Press, Princeton, N.J. (1962). の Page 39.
- 3) B. Schoeneberg: Über den Zusammenhang der Eisensteinschen Reihen und Thetareihen mit der Discriminante der elliptischen Funktionen, Math. Annalen 126 (1953), pp. 177~184.

## 論文の審査結果の要旨

$\Gamma$  を 2 次の実特殊線型群  $SL(2; \mathbf{R})$  の不連続部分群とし、剩余空間  $SL(2; \mathbf{R})/\Gamma$  はコンパクトと仮定するとき、 $\Gamma$  に関する  $-k$  次元の正則な保型形式のつくる線型空間  $S_k(\Gamma)$  はゼータ函数、L 函数の数論的デリクレー級数の研究において重要な役割をなす。 $k > 1$  に対しては  $S_k(\Gamma)$  の次元に関し Selberg を始め多くの人達の研究があるが、 $k = 1$  の場合は、技術的に一般論を適用することができないという意味で取残されていた。

本論文は、この残された問題に解答を与えたものである。すなわち著者は一 1 次元保型形式を  $SL(2; \mathbf{R})$  が可遷的に作用している弱対称リーマン空間  $\mathbf{R}$  (正確には複素上半平面と実トーラスとの直積) 上の  $SL(2; \mathbf{R})$  一不変な微分作用素の同時固有函数として実現し得ること、さらにその同時固有空間が Eichler-Gunning により定義されたある種の 1 次元コホモロジ一群に同型となることを示すことにより  $S_1(\Gamma)$  の次元を決定したのである。

なお、参考論文では、著者は虚 2 次体  $\mathbf{Q}(\sqrt{-3})$  の奇数帯をもつ量指標の L 函数から Mellin 変換で得られる保型形式について論じている。

以上の通り、著者は技術的困難をよく克服して保型函数に関する未解決の問題に解答を与えた。さらに従来は独立であると思われていた Selberg と Eichler の理論の間に一つの道を拓いた。よってこの論文は理学博士の学位論文として十分価値あるものと認める。