数学における非言語的思考[i]

ディーター・ローマー

要旨

数学における非言語的思考という主題の短い概略のあと、これに関連する中心的な現象学的手段、すなわち形相的方法が打ち立てられる。数学的な証明における形相的方法に特有な形式は、暗黙の変更である。そしてこの手順は、単純な幾何学の事例で打ち立てられる３つの規則を伴う。それから、数学におけるアナロジー的な思考の難しさと長所が、これまでとは異なる側面から議論される。数学において非言語的思考を行うことについての新しい現象学的理解を背景に、数学的思考の大部分は言語の使用なしに行われるという B. L. ファン・デル・ヴェルデンのよく知られた主張が新しい観点から議論される。

キーワード

非言語的思考、数学的証明、形相的方法、暗黙の変更、アナロジーモデル

1.　主題の概略

数学には非言語的な思考があるという主張はよく知られている。同じことが、次のようなことにも当てはまる。多くの数学者は、例えばアインシュタインのように、言語をほとんど用いずに理論を概念化し、定理を証明することができる。B. L. ファン・デル・ヴェルデンの論文では、この主張が体系化される。

しかしながら、数学における非言語的な思考が、一握りの人に限られた個人的な現象なのか、私たち皆が同じように行えるものなのかどうかは明らかではない。本稿では、私たち皆が言語を用いずに数学的な思考ができるということが判明するだろう。私は、この主張を明らかにしてみたい。

数学における非言語的思考の使用には別の問題もある。この思考は、数学的な命題や証明のアイディアの発明に役立つのみなのか、あるいは、数学における非言語的思考の本質的な遂行は、定理を証明する過程にも見出されるのか。私の考えでは、この点ではどちらか一方というわけではなく、多かれ少なかれ、どちらもあるだろう。非言語的思考は発明の方法であり、数学的な洞察の直観的証明の方法でもある。

古代ギリシャの数学では直接的で直観的な洞察として考えられていた公理という概念に、より多くの疑問が集中している。しかし 19 世紀の数学では、ただ任意に選ばれた最初の命題としての公理という新しい概念（操作の可換性、結合性、過渡性など）が発展している。私たちは、どちらの公理おいて、非言語的思考がより突出しているかを明らかにするべきだろう。

もし公理を直接的で直観的な洞察だと考える場合、私たちはよく、アナロジーモデルを活用して考え出す数学的な対象を考えるだろう。そしてこれらのアナロジーモデルはよく、暗黙的に、強い前提を伴っている。直接的な直観はよく、アナロジー的な意味を前提にしている。例えば、私たちは a+b=b+a がそれ以上の手段なしに正しいとわかることができるように見える。しかし、この直接的な洞察にある暗黙の前提は、私たちは a や b のような数字を拡張された実在（量）、例えばある長さの線、と同一視してもよいということである。これは対象（この場合は数字）、関係や操作のアナロジー的な表象である。すなわち、二つの数字の加算 a+b は、二つの線の長さ a と b を一本にすることとして理解される。この結果は、異なる順序 b+a で二つの線を一本にしたものと同じ結果である。同じ指示で線を一本にする順番は無関係で、アナロジー的な操作”+”が可換的なのである。しかし私たちは、この洞察が、選ばれた特定のアナロジーモデル次第であることを、はっきりとわかる。

私たちは次のような異議を唱えるだろう。この加算の可換性の“証明”は、一方では、私たちがこのアナロジーを基礎として当然と思う場合にのみ容認可能であるということ。そしておそらくさらに、たとえこのアナロジーを受け入れても、私たちは二つの確定的だが任意の値 a と b の関係（他のあらゆる値の関係ではない）を調べただけなので、a+b=b+a の**普遍的な妥当性**には不確かさがあるということ。したがって私たちは何らかの方法で、この主張の普遍性に達するためには、二つの確定した値ごとの関係を証明し、二つの値 a と b の**変更を暗黙的に心の中**で行うことで充分であると確信していることが明らかになる。つまり、二つの値 a と b を想像の中で拡大したり縮小したりして、あらゆ

る変更においても a+b=b+a という一般的な関係に変化がないことを理解する。結論として、この洞察が、値の可能な範囲から、あらゆる a と b に妥当し、この過程が関係の一般性を証明する暗黙の変更であることを理解する[1]。この暗黙の変更は、なぜか注目されず、よく言及されないままである。時折、私たちは、次のような手順が“一般性を制限することなしに”行われているという、証明の議論における手引きを見出す。例えば、一般性を制限しているかのように思われる完全な帰納の過程において（私たちが n=2,3,4 の場合をそれぞれ分けて証明したけれども）n>4 を前提する場合である。しかし多くの場合、可能なあらゆる場面の一部に証明を制限することで、なぜ一般性が制限されないのかを明確にする議論はほんのわずかしかない。したがって暗黙の変更は、たとえ言及されていないとしても、数学的な議論において中心的な要素なのである。

暗黙の変更は、証明の議論が値の任意の選択に依存していないことを確かめる方法である。この手順は、フッサールの形相的方法（本質直観）に非常に似ている。後期の発生的現象学の用語において、形相的変更として理解する場合は、特にそうである。この方法は、提案された主張の普遍性に、したがって証明する議論の必要な妥当性に直観的洞察を提供する。フッサールの明証理論の観点から、数学的な命題に必要とされる必当然的な明証を与える。私たちは、幾何学において顕著にこの方法を見出すことができる。しかし、この例においてのみ議論しただけで、この方法は形式数学においても、固有の位置をもつ。それにもかかわらず、議論されるべき違いがある。

フッサールによれば、幾何学は質料的な数学分野に属する。というのも、彼は形式的な公理数学の哲学者だっただけではなく、彼の研究は、基本的な対象や概念が（形式数学においてと同様に）代数的変数によって完全に取って代わられないような質料的数学分野に関連していたからである。彼が質料的数学と呼ぶ分野は、例えば初等算術やユークリッド幾何学である[2]。立体、面、線、点、角度、序数、集合、次数などは、幾何学や初等算術のそれ以上簡単にできない基本的な対象である[3]。質料的な数学的分野として考えられる、ユークリッド幾何学は、空間のアプリオリな構造を扱う科学である。

形相的変更の方法は、アプリオリという特有の現象学的概念[4]を定める。形相的変更は、経験の対象で始まる。それは想像の中で任意に変えられる。例えば任意の人から始めて、私たちは彼の大きさや体重、色や姿勢、形態などを変えられる。しかし、あらゆる変更の中で同一化できるものが、直立で正面からの標準的な形態における、彼の体の一般的な形態である。つまり、私たちは何らかの仕方で、私たちに現れる歪んだパースペクティブな

表象から標準的な形態を想像する能力を使っているということである。この変更の間、私たちは、あらゆる可能な変更の中で同一のままである特性に、例えば標準的な形態に、気をつけて注意する。同一のアスペクトを捉えると、私たちは同じ対象のあらゆる変更の中に生じる合致の総合へと方向づけられる。それゆえ、形相的変更は、たとえ大部分が想像の遂行に基づいているとしても、認識の事例である[5]。それゆえ、形相的経験は実在や特定の位置関係に依存する。私たちはただ、この変更を実際に行うことによって、あらゆる変形において同一であるものを経験する。形相的変更の後でのみ、私たちは、どの一致の総合が生じたのかを知る。現象学的アプリオリは、あらゆる可能な経験に対して妥当であるが､私たちは､変更を実際に行ったあとにのみアプリオリの具体的な中身を知るのであって、あらかじめ知ることはない。このことは数学において形相的方法を使用するときも真のままである。しかしながら、重要な違いがある。私たちが実在の対象に見出し―上記のように変更しなければいけない―異なる特性の範囲は、とても豊かである。これと対照的に数学において変えられようとしている特性の範囲はかなり限られている。このことを論じるために、私は幾何学の証明のとても簡単な事例を取り上げようと思う。

平面上で平行していない二つの直線は一点で交わるというアプリオリな洞察を、私たちはどのように得られるのだろうか。このことをわかるために、私たちは、あらゆる想像された平行していない平面上の直線を変えなければならない。これをする中で、私たちは、想像された二直線が前進的に接近するのを示すひとつの方向を、あらゆる場合において、見つけることができる。それゆえ、私たちは、あらゆる可能な場合において二直線の交点があるであろうことを確信することができる。このことは、私たちが探している必当然的な明証を提供する。それはフッサールの意味で妥当なアプリオリである。

別の幾何学的な事例を取り上げてみよう。直線の両端に二つの等しい円を作図し、その円の二つの交点を結ぶことで、一本の直線を二等分する方法は、誰もが知っている。この証明で私たちがしていることは、作図である。すべての段階で、私たちは三つの一般的なルールへと厳密に方向づけられている。1．作図で用いるおのおのの値は同じにすること。2．作図の範囲を特定のケースに限定しないこと。3．作図が可能な方法で作図に必要な要素を選ぶこと。最初のルールは特別な注釈を要求しない。そこで私はあとの二つに集中したい。

ルール 3 について。たとえコンパスを調整して作図を始めたとしても、私たちはこの作図があらゆる直線で可能かどうかを自分自身に尋ねるだろうか。もし私たちが特定のサ

イズの紙に制限されたとしても、それゆえ恣意的な制限を見出すだろうが、このことが原理的な作図の可能性を制限するわけではない。容易に想像で紙を大きくしてもよい。しかしながら、このことが唯一のありうる困難ではない。というのも、最初の試みで、私たちは二つの円の半径の値をとても小さくしてしまうかもしれないからだ。その結果、円は交わらないだろう。しかし私たちは、コンパスを調整して線そのものの長さをただ伸ばせばいいことをもちろん知っている。そうすれば二つの円の作図は、新しい直線を容易に結ぶことができる二つの点で交わるだろう。このように私たちは、最初の直線の二つの部分があらゆる可能な場合において等しいことを、簡単に証明することができる。

ルール２について。実際に、私たちは二つの円の作図で用いられる半径すべての値を試したわけではない。私たちは、交点の余地を残した（すなわち直線の半分より長い）半径で始めなければならない。それゆえ実際に、私たちは作図においてある特定の値しか用いていない。しかしこのことは、私たちの作図を特定のケースに限定するわけではない。作図の過程は対象一般、すなわちこの場合は直線一般や、交点と新しい直線一般が生じる値一般としての半径に基づく円へと向けられている。そのようにすることで、私たちは絶えず意識的に、結果として生じる三角形[ii]の議論のあらゆる段階が、たとえ異なる半径が選ばれたとしても、妥当のままであることを確認しなければならない。私たちは、二つの等しい円の半径に関する作図で、暗黙の変更を理解する。半径の拡大にのみ限られたことだったので、このことは現実の事物のあらゆる側面における広い変更と同じではない。私たちは特性に関してとても“貧しい”対象に向けられていたので、このことは可能なのである。円は中心と半径によって完全に描かれ、すでに私たちは中心を選んでいたので、ただ半径を変えることができ、変えなければならないだけである。しかし私たちは、この変更を明示的に行う必要はない。つまり、意識的にあらゆる段階で、次のような議論の無制限が含まれていることを明確にすることで充分である。したがって私たちは、半径の値に関するあらゆる可能な変更の全クラス、すなわち円一般を代表する特定の円をもつ。そして、これによって、たとえ私たちの具体的な作図が、円の半径の特定の値しか使っていないとしても、必当然的な明証のもとで事態の一般的な事情の洞察を得ることができる。

バークリーやヒュームの抽象観念の理論において、私たちはすでに、明示的に行われていないにもかかわらず、何らかの仕方で“心の中で”行われるある変更を伴う解決の基礎的な要素を見出すことができる。二人とも、ロックの“一般的な三角形”の考えに反対している。三角形のような幾何学的な対象に関して、私たちはあるサイズや確定した角度な

どを持つ、紙に描かれた特定の対象に向けられていないという考えを、ロックは守ろうとしている。彼は、“一般的な三角形”は三角形が持ちうる可能な特性を何も持っていないと同時に、それらのすべてを持っていると主張している。これは矛盾した考えである。しかし、バークリーやヒュームと同様に、幾何学的思考にとって、そのような考えは、証明において考えられなければならないあらゆる代案を伴うために、魅力的である。

バークリーの『人知原理論』の序章第 16 節における議論（フッサールが『論理学研究』の第二研究で引用した）は、私たちは、特定の三角形を描いているという事実にもかかわらず、証明においてその三角形に特定の性質を用いていないので、三角形の観念を用いる幾何学的な証明はよくうまくいく、と主張する[6]。ヒュームは、バークリーと同じ方法でロックの直観を用いようとした。彼はバークリーの唯名論における代表という観念を採用した。ヒュームは抽象的な観念をそれ自身個的に存在するものとみなしたが、同時に、それらの観念が代表するものについては一般的なものとみなした。そのような代表機能のために、１つの言葉は１つの観念を生き生きと名付ける。しかしまた、特定の概念の下に包括される対象の代わりである他の１つの観念を想像する傾向も呼び起こす。例えば、もし私たちが、“一つの三角形のすべての角が等しい”という命題を証明しようとするときに“三角形”という語を使うなら、等辺三角形で始めるだろう[7]。しかしそのとき、他の三角形も挙がる、例えば、等辺でも直角でもないものである。このことは、提示された命題が偽であることに私たちを導く。ここで、暗黙の変更という要素が、明確な仕方で存在している。バークリーとヒュームは、数学的な証明の場合にのみ、この変更に関する隠れた傾向について言及した。フッサールによる経験論者の抽象理論への批判に注意を払わず、私の考えでは、数学の証明についての経験論者の理論に関する上で述べられた要素と、フッサールの数学的証明の理論と解釈された形相的方法とのあいだには重要な関連がある。

2. アナロジーモデルの難しさ

私たちは、幾何学では暗黙の変更が証明の方法として容認可能だろう、ということを理解した。しかし、あらかじめ選ぶモデルの問題や、その結果がこのアナロジーの基礎次第であることを思い出そう。幾何学ではこのようなことがあるだろうか。もし平面上の平行な直線は交わらないと主張するユークリッドの平行の公理を考えるなら、この可能性に気付く。この主張を証明するために、私たちは想像的な暗黙の変更を用いるかもしれない、

すなわち、いわば、想像上の平行線に沿って進んでみて、二直線の間の距離が決して変わらないという洞察を得るかもしれない。しかしながら、この洞察は、私たちが日々の経験からよく知っているあるタイプの空間を空間一般と隠れて同一化することにおいて成立する隠れた前提にかかっている。前者の空間は、触覚（Tastsinn）の具体的な空間。私たちは、それを触覚空間 (Tastraum) と呼んでもよい。

この触覚空間 (Tastraum) は、平行な直線があらゆる可能な場所で同じ距離を保っているという経験によって特徴づけられる。これは、視覚の助けを得て経験するタイプの空間の場合のことではない。私たちは、この空間を視覚空間 (Sehraum) と呼んでもいいだろう。この視覚空間において、列車の線路のような場合に、平行な直線が交わるのを見る。つまり二直線が実際にお互いに近づきあって、そうして交わるところも "見る" ことができる。二つの感覚領域によって示された二つのタイプの空間の逆説的な矛盾は、バークリーを、空間を現実として認めないことへ導いた。

3.　公理についての異なる概念

私たちが理解しなければいけないことは、直覚や直観的洞察といった考えは、強固な前提なしに理解することは容易でないことである。それにもかかわらず、アナロジーモデルの前提は相対的にもっともらしい、そのため古代では議論の余地がなかった。しかしこのことに関して、19 世紀の間に決定的な発展があった。今日私たちは、もはや公理を即座に直観的なものとしてみなさず、任意に意識的に置かれた前提としてみなす。さらに、アナロジーモデルから諸々の洞察を引き継ぐ方法は、19 世紀の終わりには時代遅れとみなされた。

非ユークリッド幾何学の発展は、この態度の変化において、決定的な役割を演じている。なぜなら、19 世紀の中ごろまで、ユークリッドの平行原理に代わるあらゆる可能な案が、矛盾へ導かれる疑いがあったからである。非ユークリッド幾何学でのボーヤイやロバチェフスキーの仕事や非ユークリッド幾何学の無矛盾性に関する F. クラインの証明は公理の可変性への道を開いた。今日、私たちは公理を自由な選択の領域とみなすが、それにもかかわらず、その自由は制限されている。つまり、もし公理の組み合わせが矛盾する結論を導くなら、それはもはや学問の基礎として受け取られない。というのも、その矛盾から人はあらゆるものを演繹してしまうかもしれないからである。

特性をモデルから類比された対象へと移すアナロジー的な転移の原理的な問題は、私たちが、たとえ際立ってもっともらしく見えても、自由にアナロジーとモデルを選ばなければならないことである。例えば、数と特定の長さを持つ直線の単純なアナロジーをとる場合、私たちは a ＋ b=b ＋ a の洞察に容易に到達することができる。しかし異なるモデルで対象と操作を類比した場合、結果はまったく異なる。つまり、数を日常行為と解釈した場合、即座に困難を見出す。a= “花瓶を赤く塗る”、b= “花瓶を投げる”、“＋” という操作を連続する行為の結合と見なすなら、a ＋ b=b ＋ a はもはや妥当しない（したがって、これはハミルトンの四元数 [iii] でもそうである）。数を行為と類比することは、特に代数的な方法で集合の一群を考慮に入れる場合、見た目ほど不合理ではない。この a ＋ b=b ＋ a が普遍的に妥当しないことは、非アーベル群 [iv] の特徴である。

4.　発明法としてのアナロジー的な転移

今まで、私たちは、数学的な洞察の証明という文脈において（非言語的な）アナロジーの転移を用いることを調べてきた。この文脈には次の二つのことがある。証明で用いられるが、またこのアナロジーの転移の制限でも用いられる有効な手順があること、そして、この手順はアナロジーの転移がうまくいくかどうかという疑問に依存しているということ。しかしまた数学にはアナロジーモデルの異なる用い方がある。すなわち、新しい発明のよりよい方法を見出すだけではなく、複雑な理論を理解し暗記するのに役立つはずである。

ときに絵を思わせるアナロジーが、複雑な理論の理解をより容易にすること、あるいは、記憶の補助を提供することだけに用いられる。すなわち理論の中心的な特性をより記憶しやすい絵が用いられる。私の代数の先生は、キッチンにある単純な混ぜ合わせ器（ミキサー）の動きで、ガロア群の対称的な部分群の機能を説明する。この説明が充実し、機能し始めたら、全体の内容を即座に混合せず、しかし、ただその部分を混合するだろう。ミキサーが動き始め、底にある素材を限界まで混合し、ようやく後になって、素材全体を混合する。アナロジー的な関係は、関係する多項式の根号でのガロア群の対称的な部分群の行動に見出される。しかしこれは強力なアナロジーであって、証明では用いられない。

にもかかわらず、このような絵を思わせるアナロジーは、数学者の具体的な仕事で役立ちうる。フッサールは、科学の証明における発明法に対する統覚的な着想 (apperzeptiver

Einfall) の役割を議論している。統覚的な着想は派生的な受動性に特有の事例で、述定的な判断あるいはその基礎にあるカテゴリー的直観の突然な洞察を含む概念である。例えば、犯罪の話を読んで、「庭師が殺人犯だ！」という解決の着想を突然得る、といった場合である。しかしこの突然な洞察は、よく基づけられた判断の十全な明証をもっていない。これはまだ認識ではなく、熟考の次の段階で間違いが明らかになるかもしれない解決の明確な可能性にすぎない。私たちがこの突然な洞察を得たあとでのみ、適切な証明や動機を持つ明証、殺人者のように行動する能力や可能性を見出し始める。数学でも同じである。ある見込みのある着想は、他の証明からアナロジー的に受け取られるかもしれない。私たちは、「これは正しいかもしれない！」とただ思う。そして、そのあとでのみ本当に証明を行おうとする。

5. 数学におけるアナロジー的な思考

私たちは、命題や解法の手順の場合の内に、そして、代数的な用語で、例えば完全な帰納法（vollständige Induktion）で公式化される他の確信の場合の内に、アナロジー的な転移を見出すことができる。もしある命題が自然数列の最初の要素、例えば 1、に対して真であり、また、もし私が n から n ＋ 1 へのステップの妥当性を証明したなら、つまり、もしその命題が数 n に対して真であれば n ＋ 1 に対しても真であるなら、それゆえに、その命題はすべての自然数に対して真である。例えば、あらゆる数 n に対する $x < x^2 + 1$ 。この完璧な帰納のルールは、数論の初等体系の公理や算術において見出される。しかし我々にこのルールを納得させるものは何か。それは、公理に対する古代の感覚では明証的だったのか。

私たちが、アナロジー的な転移の要素を心に留めておきながら、この手順を反省的に見直してみると、命題の正しさの証明が、比喩的に言えば、最も低い数から高い数へとどんどん進んでおり、より上へとあがることを止める適切な議論はない、ということがわかる（というのも、その命題が n に対して真ならば、次の数に対しても真であるに違いないことを証明したことにもなるからだ)。それゆえ、数列のあらゆる要素に対して真でなければならないことが、私たちには明証的であるように思われる。しかしここで注意するべきである。これはアナロジー的な転移からの明証なのだ。

他の例を見てみよう。もし、二つの数の最大公約数を決める、よく知られたユークリッ

ドのアルゴリズム（割り算や平方根の数を抜き出すアルゴリズム）のような解法の手順を考えるとしたら、私たちは、この手順の実行可能性と成功をまったく確信する。例えば、この手順が決定的な時点で終わるだろう、と私たちは確信している。しかし数論から学んだように、このことを形式的な手段で証明することは簡単ではない。なぜならユークリッドのアルゴリズムの決定的な終わりを述べる命題は、いわゆる算術の'深くある（deep lying）'命題だからである。

そのような深くある諸命題は、よく（算術や代数、解析などにおける）'根本命題'と呼ばれる。もしそれらが命題である（公理として導入されない）ならば、それらを証明するために、あらゆる他の公理を用いなければならない。そしてその結論は、理論の完全に明白で明確に分けられた一部を作っている。算術の根本的な定理はそのような命題である。深くある命題は、算術の手順がある特定の時点で中断することを主張する。

ユークリッドのアルゴリズムは、私たちがあらゆる組み合わせの自然数aとb（たいてい、一方の数は他方よりも大きい）の公約数を見つけられると仮定している[v]。加えて、二つの数の最大公約数を見つける規則的な手順を提供している。しかしながら、全手順は、その実行可能性を直観的に洞察するのに十分なほどわかりやすくはない。

しかし私たちがアナロジー的な転移によって直ちにつかむことは、手順の各段階において導かれた二つの数は、それ以前の段階の数のペアよりも小さいということである。そしてこのこと以外に、この手順のあらゆる段階が最初の数よりも半分以上小さい数で終わること、したがって、少なくともアナロジー的な関心から、"本当の手順"があることがわかる。もし素の約数がある場合、それは２か２よりも大きな数であり、その結果、導かれる数の大きさは最初の数の半分よりも小さいという事実に、この洞察は支えられている。この理由によって、アルゴリズムが確かにある段階で終わると結論づけることは簡単であるように見える。しかしこのことは多かれ少なかれ、アナロジー的な転移に基づいた明証である。というのも、アルゴリズムが中断することを形式的に正しく証明することは、各自然数を素数に約分することを要求する代数の根本理論を用いなければならないので、まったく難しいし、このことをわかりやすくすることも簡単ではない。

6. B. L. ファン・デル・ヴェルデンによる、言語を用いない数学的思考

よく知られた数学者B. L. ファン・デル・ヴェルデンは、論文で、数学的思考は大部分

で言葉を用いずに進むと主張している[8]。幾何学から取った事例、ブライス・パスカルの蝸牛線（リマソン）で、彼は議論を始めている。グラフを作るときのルールは簡単である。円を書き、円上に任意の点を選ぶ。その点から、他のすべての円上の点を通る直線を引く、次に、その直線と円の交点から出発して、直線の両側に一定の距離で点をとる。そのつながった点が、パスカルがリマソンと呼ぶ曲線になる[vi]。

結合という方法によって結ばれた、この曲線には３つの異なる考えがある。(1) 曲線がどのように描かれるのかについての、支配的な運動の考え、(2) 曲線の視覚的な考え、(3) 曲線の名前。この３つのうち、最初のものについてのみ知る必要がある。というのも、もしそれを忘れたら、曲線の概念を持つことがなくなるからだ。このことは、ファン・デル・ヴェルデンが、言語の指示を用いずに、言語的な手段を活用して作図ルールを説明せずに、概念の意味を形成していることを示している。言語における指示は任意である。それゆえ重要ではない。曲線の視覚的な形も、作図のルールを用いるときはいつもこの形を再現できるため、重要ではない。

したがってこの曲線に関わる４つ目の考えがある。つまり、このグラフの方程式（$x^2+ y^2 - ax$）$^2 = b^2$（x^2+y^2）はもっとも重要なものではない。なぜなら作図のルールから簡単に得られるからだ。同じことが蝸牛線の作図の基礎をなす概念、例えば円、直線やその他の幾何学的操作にも当てはまる。この観点において、幾何学的対象の言語的側面は二次的である。

幾何学的な概念を越えて、私たちは幾何学的事実、例えば、曲線は交点（Knotenpunkt）を持つという事実を伝えるだろう。曲線の視覚的な表現において、このことをただちに見ることができるが、またこの洞察を、「曲線上を進むことで、二度同じ値に至るが、これは異なる方向の運動による」[9] と表現することによって、運動の考えに言い換えることができる。

ファン・デル・ヴェルデンの議論は、作図のルールを構成する運動の考えが簡単に言語を用いずに伝えられるという手がかりによって、例えば、耳が聞こえない人に私はこのことを伝えることができるし、あるいは逆の場合も同様である、という手がかりによって強化されるかもしれない。他方で、大抵の場合子どもへ言葉によって伝えられる実践や指示を、作図の正しい方法が求めることに、私たちは反対するだろう。例えば、直線を正しい方法で書こうとするなら、まっすぐな線から外れることは許されないということを知っていなければならない。このことを知った結果、私たちは「この逸脱はもはや直線ではない！」

という指示の1つの要点を聞いたに違いない。しかし作図のルールにおけるこのような規範的な要素でさえ、言語なしに伝えられうる。なぜなら、（これをするな、という）規範的な指示を表す象徴や記号を選びさえすればよいからである。これらは幾何学的な作図だけではなく、子どももよく知っているダイニングテーブルでのよいマナーにも役立つ記号である。すでに、ある行動から逸れたり、ある行動を妨げたりすることは、このような規範を伝えている（それゆえまた霊長類のグループでも可能である）。

ファン・デル・ヴェルデンが概念を言語の名称としてのみとらえており、それゆえ、実際に意図された作図のルールと言語表現の堅い結びつきを見落としていることに、私たちは反対するかもしれない。しかしながら、このことは、カントにざっと目を通すことで簡単に説明できることではない。カントは、対象の感性的な表象を生み出すという目的を伴う、感性に基づいた総合的で感性的な行為のルールとして、概念を解釈している。そして、そのようなルールのパラダイムは、幾何学における作図のルールである。

したがって、論理で考えて結論を出すことについて、ファン・デル・ヴェルデンは、結論の基礎を立証することも正当化することも論理的な原理のうちには見出せされないという共通意見を受け入れていない。彼の意見ではすでに、論理的な結合（なぜなら、したがって、そこから、それゆえ、そこに由来する、など—なぜなら、だから、それゆえ、したがって、それだから）を名づける言葉の多さや違いが次のことを指し示している。それは、私たちの言語がそもそも論理的な推論に対する正確な言葉を持っておらず、それゆえ、より正確な同時性、空間的合致、空間的起源、目的あるいは類似性[10]を名づける表示が用いられるということである。推論の言語的表示は実際には、私たちが前提から結論を得る思考過程を思い出させるものである[11]。推論の正しさは直接、思考や認識によって直観されるのであって、言語のルールを用いることによってではない。論理的なルールは、それゆえ、私たちが前提の文脈の中で推論を直接直観している具体的な事例の形式化された抽象である。完全な帰納でさえ、（私たちが以前に見たような）直観を他の起源から得て、言語の形式からは得ないタイプの推論の単純な事例と見なされるべきである。同じことが、技術的な思考だけではなく日常の思考にも当てはまる。

ファン・デル・ヴェルデンの主張に対してさらに可能な異議は、数学的な思考は、公式で考えることとよく同一視されるという事実、そして、この思考は言語で行われるという事実であるかもしれない。彼の議論に従って私たちは、公式が作図を導くルールの代数的な再公式化でしかないというこの異議に答えなければならない。公式は思考を促進するが、

それらは私たちに（非言語的な意味において）概念を使用させない。

非言語的な概念が数学的な思考には必要であるという主張について他の議論は、抽象的な概念を思考の対象の象徴として使用することにある。私たちは、この議論を円錐曲線(Kegelschnitt) の例に見ることができる。というのも、私たちは円錐曲線を想像することはできるが、円錐曲線の概念について適切で像的な理解を持っていないからである[12]。それゆえ、この場合、私たちは、具体的で像的な理解の代わりに象徴か公式を用いることが必要だと考える。しかしながらファン・デル・ヴェルデンは、私たちが円錐曲線を考える場合、特定の切断面（例えば楕円）を想像するが、楕円の特性から注意深く抽象していることに反対する。このことは、私の議論が他のあらゆる円錐曲線に妥当するかどうかを、全思考段階において、注意深くチェックすることを意味する[13]。私の議論において、私は特定の円錐曲線（すなわち楕円、円、双曲線、放物線など）を一般的な理解の代表として用いるが、他のあらゆる場面にも妥当するという推論のみを注意深く受け入れている。

言語の強みは、私たちが単純な言語的概念で、簡単で気楽な方法ですべての複雑な考えに言及することができるという可能性のうちにのみ見出される。“a” という語（“f(x,y) を円錐曲線にしよう”）で行われる普遍性の言語的な指示は、ルールを指し示す。つまり私たちは、円錐曲線のあらゆる特定の場合において、あらゆる他の特定の場合でも利用できる操作や推論のみを受け入れる証明の中の代表として〔その語を〕用いることに注意しなければならない、というルールである。ファン・デル・ヴェルデンが述べたように、同じことが公式にも当てはまる。公式は気楽、つまり用いることが簡単で効果的である。それゆえ、私たちは公式を十分持っているので、それらをよく用いる。これらの議論は、大部分、バークリーやヒュームによってすでに示された数学的な思考において、明白さと一般性へと至る暗黙の変更の方法のすでに議論された役割と一致する。それゆえファン・デル・ヴェルデンは次のように結論する。“言語なしの思考は可能である。しかし言語は思考を促進し、思考の新しい対象を作り出す”、しかし実際は、実用的な基礎として思考が用いる特定の種類の観念（言語、公式、図など）は、まったく副次的である、と[14]。

しかしながら、言語を通して思考は共通で共同の活動となるので、言語が思考の結果の改良、発明や認識の対象にたいして大きな強みを持っていることを強調することは重要である。問題や解決の手掛かりは、言語によって他人へと伝えることができ、その人が前任者のやめたところから仕事を続けることが可能になる。この効果を通してのみ、数学や科学は共同活動として可能になる。

この側面で、ファン・デル・ヴェルデンは、霊長類が発明的知性に関して驚くほど発揮することを多くの実験で明らかにしたマイケル・トマセロのような現代の比較心理学者と意見を一致させる。二つの種の現実の行為の間にある大きな違いは、大部分、技術的な発明や認識における伝統的な知性の違いによるものである。言語は、多くの発明家が技術的な発明、あるいは認識的な発明の改良で共に働くことを可能にする。小さな発明でさえ失われずに積み重なる、その結果、一度到達した解決のレベルは失われない。言語とコミュニケーション共同体のおかげで、逆戻りすることはない。トマセロはこの効果を言語の歯止め効果と呼んでいる。このように、私たちは、数学においてさえ、言語は思考や認知の基礎ではなく、積み重なっていく活動に対して最も重要な道具であることを知るのである。

文献

- Berkeley G (1901) *A treatise concerning the principles of human knowledge*. In: Fraser AC (ed) *The works of George Berkeley*, vol. 1. Oxford University Press, Oxford
- Hume D (1888) In: Selby-Bigge LA (ed) *A treatise of human nature*. Oxford University Press, Oxford
- Husserl E (1974) *Formale und transzendentale Logik*. (Husserliana vol. XVII). Nijhoff, Den Haag 1974
- Husserl E (1976) *Ideen zu einer reine Phänomenologie und phänomenologischen Philosophie. Erstes Buch. Allgemeine Einführung in die reine Phänomenologie*. Text der 1.-3. Auflage. Hrsg. K. Schuhmann. (Husserliana III/1). Nijhof, Den Haag
- Lohmar D (1989) *Phänomenologie der Mathematik*. Phaenomenologica 114. Kluwer Publishers,Dordrecht
- Lohmar D (2002) *Husserl's concept of categorical intuition.* In: Zahavi D, Stjernfelt F (eds) *Hundred years of phenomenology.* Kluwer Publishers, Dordrecht. pp 125–145
- Lohmar D (2010) *Intuition in mathematics*. On the function of eidetic variation in mathematical proofs. In: Haaparantha L, Hartimo M (eds) *Phenomenology and mathematics*. Springer, Heidelberg
- van der Waerden BL (1954a) Denken ohne Sprache. In: Révész G (ed) *Symposium thinking and speaking*. Published in: *Acta Psychologica*, Amsterdam, 10 (1954), 165–174
- van der Waerden BL (1954/1955) Einfall und Überlegung in der Mathematik I, In: *Elem. Math.* 8 (1954), 121–129, Einfall und Überlegung in der Mathematik II, III, in: *Elem. Math.* 9 (1955), 1–9 and 49–56

注

1　特に、形式的数学における暗黙の変更の使用に関するより詳しい議論については、Lohmar (2010) を参照。

2　Husserl(1974) 53,84,89 頁 と Husserl(1976) 150 頁 を参照

3　この文脈では、フッサールがすでに、紙の上に実際になされた作図をその作図が意味する理念化された対象から区別するという理念化を前提していることを、私たちは心に留めておくべきである。

4　フッサールのアプリオリ概念は、カントのアプリオリ概念と同一視できないことを忘れないで注意することは重要である。Husserl(1974) 255 頁の註にある重要なメモを参照。カントは、あらゆる経験から独立して達することができ、あらゆる経験に先だって妥当する場合に、知識をアプリオリとみなした。

5　フッサールのカテゴリー的直観という概念については、Lohmar (1989) 2 章と Lohmar (2002) 125-145 頁を参照。

6　「正確な角度、等しさ、辺の確定した長さは、証明でまったく関わっていない」Berkeley (1901)、序章第 16 節

7　Hume (1888) 1 巻、パート 1、セクション 7 を参照。

8　van der Waerden (1954) と van der Waerden (1954/1955) を参照

9　ファン・デル・ヴェルデンは次のように書いている。「人が曲線を通る時、さまざまな方向で同じ点を二度通る」（van der Waerden (1954) 167 頁）

10　彼らは「本来な同時性、空間的な一致、空間的な起源、目的と類似性」を名付ける。van der Waerden (1954) 168 頁

11　van der Waerden (1954) 168 頁を参照

12　van der Waerden (1954) 170 頁を参照

13　van der Waerden (1954) 171 頁を参照

14　「言語を用いない思考は可能である。しかし言語は思考を容易にし、思考の新しい対象を作り出す」、そして「それによって思考が働く、ある種の表象は、思考に対して副次的な役割のみを果たしている」とファン・デル・ヴェルデンは書いている。（van der Waerden (1954) 172 頁）

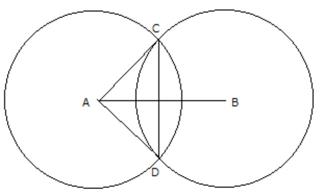
訳注

i　本翻訳は、Lohmar, Dieter “Non-Language Thinking in Mathematics” *Axiomathes*; Mar2012, Vol. 22 Issue 1, pp.109-120 の全訳である。

原著者のディーター・ローマー教授は 2014 年現在、ドイツのケルン大学にあるフッサール文庫（本部はベルギーのルーヴァン大学にある）の所長を務める現象学者である。彼の研究は、現象学・経験論・人間学と超越論的哲学に焦点を当てる一方で、数学にも関心を向けている。そのことは、彼の単著『数学の現象学 フッサールによる数学的認識の現象学的解明の諸要素』や、今回訳出された論文が示している。彼の詳しい経歴や業績は、『臨床哲学』第 13 号に掲載された彼の翻訳論文「非言語的な思考とコミュニケーション　― AAC への応用という側面とともに」の浜渦辰二教授による解題に記載されているので、そちらを参照していただきたい。

訳者は、平成 24 年度、GCOE（卓越した大学院拠点形成支援補助金）における研究プロジェクト「コンフリクトの人文学国際研究教育拠点」の RA（リサーチ・アシスタント）に採用されたので、「科学と科学論におけるコンフリクトの現象学的研究」という研究テーマの下、「ドイツの資料調査・収集」業務として、ローマー教授の論文をここに訳出した。

ii　直線 AB の両端に同じ半径（直線の半分よりも長い半径）の円を描くと、交点 C と D が出来る。ここで述べられている三角形は、直線 AB と交点 C と D によって出来る三角形 ACD と三角形 BCD のことだと思われる。



iii　アイルランドの数学者ウィリアム・ローワン・ハミルトンが、複素数を拡張して形成した数体系を指す。４つの基底（1 , i , j , k）をとり、実数 a , b , c , d に対して a1 + bi + cj + dk の形で書き表される数を、四元数という。

iv　群を形成する要素の間に、交換則（例えば a+b=b+a , ab=ba）が成り立つとき、その群をアーベル群（ま

たは可換群）と呼ぶ。逆に交換則が成り立たない群を、非アーベル群（非可換群）と呼ぶ。

v　ユークリッド互除法のことを指す。これは、次の操作を繰り返して、自然数 a と b の最大公約数を求める方法である。

1）a を b で割ったときの余りを r とする。

2）r=0（すなわち割り切れる）ならば、b が a と b の最大公約数である。

r ≠ 0 ならば、r を b に、b を a に置き換えて、1) に戻る。

同じ操作を繰り返すと、余りは必ず 0 になる。

例えば、943 と 1058 の最大公約数を求める場合、以下のようになる。

1058÷943=1 余り 115（a=1058 , b=943 , r=115）

943÷115 ＝ 8 余り 23（a=943 , b=115 , r=23）

115÷23 ＝ 5（a=115 , b=23 , r=0）

よって、最大公約数は 23 になる。

vi　蝸牛線の作図

直径 OA（長さ a）の円上に動く点 Q がある（図 1）。直線 OQ 上に、PQ=P'Q（長さ b）となる点 P と P' をとる。このときの点 P と P' が描く軌跡が蝸牛線と呼ばれる曲線になる。例として、a>b のときに成り立つ曲線（図 2）を下に載せる。

図 1

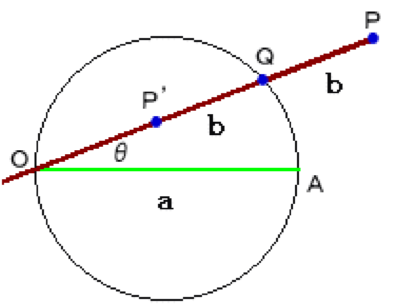
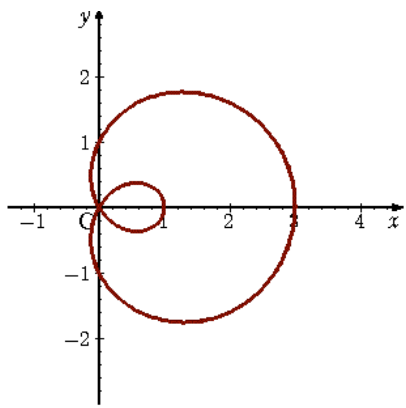


図 2



（訳 山口弘多郎・浜渦辰二）