【12】

氏名・(本籍)	下田節郎（しもだせつろう）
学位の種類	理学博士
学位記番号	第 989 号
学位授与の日付	昭和 41 年 6 月 15 日
学位授与の要件	学位規則第5条第2項該当
学位論文題目	**2階半線型楕円型偏微分方程式に対する境界点の正則性について**
論文審査委員	(主査) 教授 南雲 道夫 (副査) 教授 池田 信行 教授 遠木 幸成

論文内容の要旨

近代ポテンシャル論において Laplace 方程式 $\Delta u=0$ の境界値問題 (Dirichlet 問題) を取扱うに当り，領域 (有界) の境界点の正則性をしばしば問題にするが，その正則性の定義には，目ぼしいものとして，

1) Lebesgue, Bouligand の仕事に根拠をおくものと

2) Dirichlet 問題の解の存在に対する Wiener, Perron の結果に根拠をおくものとがある。

さて，偏微分方程式論の立場からは，Laplace 方程式 $\Delta u=0$ の一応の拡張として

(1) $$\mathfrak{P}u=\sum_{j,k=1}^{n} a_{jk}(x)\frac{\partial^2 u}{\partial x_j \partial x_k}=F(x, u, \nabla u)$$

のような半線型のものを考えることができる。ここに $a_{jk}(x)$ は与えられた領域 $\mathfrak{D}$ において至るところ対称かつ正の定符号であるとする。(1) の右辺函数 F が適当な範囲で与えられていて不等式

(2) $$|F(x, u, \nabla u)|\leqq B|\nabla u|^2+\Gamma$$

を満すとき，$\bar{d}\subset\mathfrak{D}$ な有界領域 d において (1) の Dirichlet 問題を取扱っていくと，結局，∂d 上の連続な境界値 $\chi(s)$ に対する (1) の解 $u=u_\chi(x)$ が ∂d の点 Ξ において

(3) $$\lim_{\substack{x\to\Xi \\ (x\in d)}} u(x)=\chi(\Xi)$$

を満すか否かという問題にぶつかる。これについて著者は

S. Simoda; Sur la condition frontière dans le problème de Dirichlet pour les équations semi-linéaires du type elliptique et du second ordre. Proc. Japan Acad., 35 (1959), 115–119.

S. Simoda; Nouveau dessin de construction des barrière-fonctions dans le problème de Dirichlet pour les équations semi-linéaires du type elliptique et du second ordre. Mem. Osaka Gakugei Univ., B,

8 (1959), 1–3. において，Ξ の適当な近傍 V と

$$(4)\quad \begin{cases} \mathfrak{P}\Psi(x) \leqq -1 & (x \in V \cap d) \\ \Psi(x) > 0 & (x \in V \cap d) \\ \lim\limits_{\substack{x \to \Xi \\ (x \in d)}} \Psi(x) = 0 \end{cases}$$

を満す $\Psi \in \boldsymbol{C}^2(V \cap d)$ が存在すれば，

$$(5)\qquad |u(x)| \leqq M \qquad (x \in d)$$

を満すような（1）の解 $u = u_\chi$ に対し，$\chi \in \boldsymbol{C}(\partial d)$ および $M \geqq 0$ の如何にかかわらず，Ξ の近傍で barrière-fonctions を構成することができてその結果として（3）が成立することを示した。この考えは，

K. Akô; On Perron's process associated with second order elliptic differential equations II. J. of the Fac. of Science, Univ. of Tokyo, Sec. I, Vol. X (1964), Part 2, 81–87. において（1）に対する Dirichlet 問題の解の存在定理に活用され成功することが示されている。

Laplace 方程式の直接の拡張である 2 階楕円型線型方程式

$$(6)\quad \left\{ \begin{aligned} &\mathfrak{L}u = \sum_{j,k=1}^{n} a_{jk}(x) \frac{\partial^2 u}{\partial x_j \partial x_k} + \\ &\quad + \sum_{l=1}^{n} b_l(x) \frac{\partial u}{\partial x_l} + c(x)u = f(x) \\ &\left(\begin{aligned} &\text{ただし領域において至る} \\ &\text{ところ } c(x) \leqq 0 \text{ とする} \end{aligned}\right) \end{aligned} \right.$$

についても，$\Xi \in \partial d$ の d に対する正則性を $\varDelta u = 0$ の場合と全く同様に定義することが出来る。即ち

[Wiener-Perron の意味の正則性] Ξ は次の場合かつその場合に限り d に対し（6）に関し *W-P* の意味で正則であるという： ∂d 上の任意の有界函数 $\chi(s)$ に対応する Perron の意味での（6）の解 $\bar{u}(x)$, $\underline{u}(x)$ についてつねに

$$(7)\quad \left\{ \begin{aligned} &\lim_{\substack{x \to \Xi \\ (x \in d)}} \sup \bar{u}(x) \leqq \lim_{\substack{s \to \Xi \\ (s \in \partial d)}} \sup \chi(s) \\ &\text{および} \\ &\lim_{\substack{x \to \Xi \\ (x \in d)}} \inf \underline{u}(x) \geqq \lim_{\substack{s \to \Xi \\ (s \in \partial d)}} \inf \chi(s) \end{aligned} \right.$$

が成立つ。

[Lebesgue-Bouligand の意味の正則性] Ξ は次の場合かつその場合に限り d に対し $\mathfrak{L}u = 0$ に関し *L-B* の意味で正則であるという： Ξ の適当な近傍 V と

$$(8)\quad \begin{cases} \Phi(x) > 0 & (V \cap d \text{ において}) \\ \lim\limits_{\substack{x \to \Xi \\ (x \in V \cap d)}} \Phi(x) = 0 \end{cases}$$

なる $\mathfrak{L}u = 0$ に対する superfunction $\Phi(x)$ が $V \cap d$ で存在する。

これらの正則性と，（4）の $\mathfrak{P}$ を $\mathfrak{L}$ に変えた条件を満す近傍 V および $\Psi \in \boldsymbol{C}^2(V \cap d)$ が存在す

ること――simply regular であるという――との間に親近な関係があると考え，これについて次の結果を得た。取扱いを簡明にするため（6）において首部以下の係数 $b_l(x), c(x)$ および $f(x)$ はすべて $\bar{d}$ において Hölder 連続，$a_{jk}(x)$ は $\mathfrak{D}$ においてすでに Hölder 連続であるとする（そのとき（6）の解としては $C^2(d)$ なるものを考えることが出来る。かつ解というときはそういうものだけを考える)。

定理 A. Ξ が d に対し（6）に関して $W\text{-}P$ の意味で正則であるために必要かつ十分なる条件は，Ξ が d に対し $\mathfrak{L}u=0$ について simply regular であることである。

この場合（6）の右辺の $f(x)$ は任意の 1 つを固定して成立つ。従って正則性は，$f(x)$をとりかえても変らない。

定理 B. Ξ が d に対し $\mathfrak{L}u=0$ について simply regular であるために必要かつ十分なる条件は，Ξ が d に対し $\mathfrak{P}u=0$ について simply regular であることである。

以上の結果によれば，（6）については $\Xi\in\partial d$ の正則性は $W\text{-}P$ の意味でも simple regularity の意味でも，また首部以下の部分があってもなくても，どのように変更されても，全く同じことになる。

最後に，$L\text{-}B$ の意味の正則性と simple regularity との関係であるが，両者の同等性の得られることは勿論望ましいけれど，現在のところでは次の諸結果が得られている。

定理 C. $\Xi\in\partial d$ が d に対し $\mathfrak{L}u=0$ について simply regular ならば，d に対し $\mathfrak{L}u=0$ に関し $L\text{-}B$ の意味で正則である。

これは殆んど自明である。さらに，

定理 D. Ξ が d に対し $\mathfrak{L}u=0$ について simply regular であるために必要かつ十分なる条件は，Ξ が d に対し $\mathfrak{L}u=0$ に関して $L\text{-}B'$ の意味で正則であることである。

ここに $L\text{-}B'$ の意味の正則性は次のように定義される。$\Xi\in\partial d$ は次の場合かつその場合に限り$\mathfrak{L}u=0$ に関し $L\text{-}B'$ の意味で正則であるという： Ξ の適当な近傍 V と

$$
(9)\qquad \begin{cases} \lim\limits_{\substack{x\to s\\(x\in V\cap d)}} \inf\ \Phi(x)>0 \\ \qquad\qquad \left(\begin{array}{l}\Xi\neq s\in((\partial d)\cap d \text{ なる}\\ \text{すべての } s \text{ に対して}\end{array}\right) \\ \lim\limits_{\substack{x\to\Xi\\(x\in V\cap d)}} \Phi(x)=0 \end{cases}
$$

を満足する $\mathfrak{L}u=0$ に対する super function が $V\cap d$ で存在する。

論文の審査結果の要旨

2 階楕円型の偏微分方程式の第 1 種境界値問題 (Dirichlet 問題) について，有界領域が一般の場合に境界点の正則性が問題であり，これについて既に多くの研究がある。すなわち方程式

$$L[u]=\sum a_{ij}(x)D_{ij}u+\sum b_i(x)D_iu=0$$

の係数に適当な滑らかさがあれば，この方程式に対する境界点の正則性は，ラプラス方程式 $\Delta u=0$ に対する正則性と一致することが知られている。下田君の論文は，線型方程式 $L[u]=0$ に対する境界点の正則性に相当するものが，半線型方程式の場合にもなりたつことを示すものである。すなわち線型方程式 $L[u]=0$ に対して正則な境界点については，半線型方程式 $L[u]=F(x, u, D_xu)$ についても，u が有界な範囲では（$F(x, u, p)$ が p について2次以下の大きさ，$|F(x, u, p)|\leqq\beta|p|^2+\gamma$ となる場合には，その境界点の近傍において制御函数（barrier）が存在することを証明した。

まず主論文中の始めの方のもので，Wiener-Perron よりも強い形式の正則条件，すなわち境界点 Ξ の近傍で $L[\Psi]\leqq-1$, $\Psi(x)\geqq0$, $\overline{\lim_{x\to\Xi}}\Psi(x)\leqq\varepsilon$・（任意正の$\varepsilon$），となる $\Psi(x)$ の存在を仮定して $L[u]=F(x, u, D_xu)$ に対する制御函数（優，劣）の存在を証明した。

つぎに主論文中の後の方のもので，$L[u]=0$ に対する，この強い正則性の条件が Wiener-Perron の条件，また Lebegue-Bouligand の条件とも同等となることを証明した。

下田君には，主論文の他に多くの参考論文があり，その中にも独創性の見るべきものもある。

以上　下田君の論文は2階楕円型偏微分方程式論（とくに半線型の場合）において学界に寄与するところが少なくない。従ってこの論文は理学博士の学位論文として十分価値があるものと認める。