The University of Osaka
Institutional Knowledge Archive

Title	ボロノイ図による累積関数近似と適応的大域最適化
Author(s)	廣川, 敬康; 藤田, 喜久雄
Citation	日本機械学会論文集 C編. 2006, 72(716), p. 1759-1768
Version Type	VoR
URL	https://hdl.handle.net/11094/2938
rights	
Note	

The University of Osaka Institutional Knowledge Archive : OUKA

https://ir.library.osaka-u.ac.jp/

The University of Osaka

日本機械学会論文集 (C 編)
72 巻 718 号 (2006-6)

論文 No. 05-0364

ボロノイ図による累積関数近似と適応的大域最適化 *

廣 川 敬 康 *1, 藤 田 喜 久 雄 *2

Voronoi Diagram based Cumulative Function Approximation and Adaptive Global Optimization*

Noriyasu HIROKAWA*3 and Kikuo FUJITA

*3 *Department of Mechanical Engineering and Biomimetics, Kinki University, 930 Nishi-mitani, Uchita, Wakayama 649-6493, Japan*

This paper proposes a cumulative function approximation based on Voronoi diagram, a technique of computational geometry, and an adaptive global optimization by using the approximation. The proposed approximation method represents a global function by blending local quadratic polynomials approximating the subspaces around respective sample points based on the geometric structure that is manipulated by Voronoi diagram. It can be used as an adaptive medium between system analysis and optimization computation under its superposability. That is, an adaptive global optimization scheme is configured by the iteration of estabilishing approximation with initial samples, executing optimization over approximation, adaptively arranging new samples and refining approximation. It can gradually update the fidelity of approximation in a process of optimization and find the global optimum with less times of system analysis. The validity and effectiveness of the proposed scheme is ascertained through numerical examples.

Key Words : Design Optimization, Cumulative Function Approximation, Response Surface, Global Optimization, Voronoi Diagram

1 緒 言

最適設計は設計問題の数学的な定式化のもとで数理計画法により最適解を求める方法である．近年，適用範囲の拡大のもと，繰返し計算である最適化過程において対象問題の解析に要する計算コストが無視できなくなったり，また，比較的探索性能の良い勾配法を用いようにも対象の微小な局所変動の影響で適切な計算が行えなかったりするなどの事態もみられるようになっている．それらに対する解決方法の一つは応答曲面法(1)(2)を用いることである．応答曲面法は，最適化計算における解の解析をあらかじめ構成した近似関数で代替するが，最適解についての先見情報がない段階でサンプリングを行い近似関数を構成するため，得られる解の精度に不足が生じたり，それを解消するには応答曲面法を繰り返して行う必要があったりするなどの弊害も伴っている．

本研究では，サンプル点の配置と応答曲面の構成および最適化計算を同時に進めることによって，上記の弊害を解決するための累積関数近似(3)の方法とそれを用いた大域的最適化の一手法を提案する．具体的には，計算幾何学におけるボロノイ図(4)に基づいてサンプル点の配置を操作することを基本とし，各サンプル点近傍の 2 次近似式をボロノイ図の構造に基づいて重ね合わせることにより大局的な関数近似を構成する一方，最適化計算の結果から導き出されるサンプリングが必要な領域に適応的にサンプル点を配置することを繰り返しながら，近似精度の向上と大域的な最適化を並行的に行う計算法を提案する．あわせて，例題への適用を通じて有効性を検証する．

2 累積関数近似による適応的最適化

2.1 最適設計の枠組み 最適設計の枠組みは，応答曲面法にみられるような近似関数の活用という視点から図 1 のように分類することができる．近似関数を用いない場合，図 1 (i) に示すように，何らかの情報を得るたびに解析計算を繰り返す必要があり，そのことは計算コストがかさむことの要因となる．これに対して，いわゆる応答曲面法は，図 1 (ii) に示すように，あらかじめ設定した複数のサンプル点での解析計算に基づいて近似関数を構成し，そのもとで最適化計算を行うものであり，解析計算の回数を低減することができる．以下では，このような方法を「一括近似」

* 原稿受付 2005 年 4 月 1 日
*1 正員, 近畿大学生物理工学部 (〒 649-6493 和歌山県那賀郡打田町西三谷 930).
*2 正員, 大阪大学大学院工学研究科 (〒 565-0871 吹田市山田丘 2-1).
Email: hirokawa@waka.kindai.ac.jp

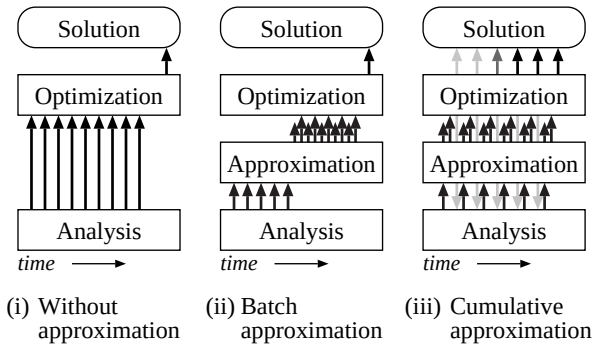


Fig. 1 Frameworks of optimization and approximation

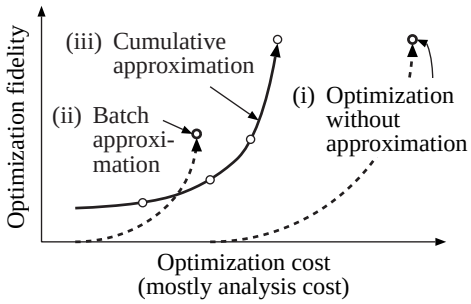


Fig. 2 Fidelity versus cost in optimization

による最適化と呼ぶ．これに対して，Rasmussen[3]による着想を参考にしつつ本研究で展開する「累積近似」による最適化計算とは，図 1 (iii) に示すように，一定のサンプル点での解析結果から近似関数を構成しつつ，そのもとでの最適化計算を通じて近似精度を高めるべき領域を割り出し，そこへのサンプル点の追加のもとで近似関数を重ね合わせにより更新することを繰り返すというものである．

2.2 計算コストと解の精度のトレードオフ

上述の各最適化計算法における計算コストと解の精度との関係は図 2 のように期待される．近似を利用しない最適化では，図 2 (i) に示すように，精度の高い解が得られたとしても，解析計算の繰り返しにより計算コストが大きなものになることが予想される．一括近似による最適化では，図 2 (ii) に示すように，あらかじめ設定したサンプル点でのみ解析計算を行うため，必要となる計算コストは抑制できるものの，得られる解の精度は構成した応答曲面に依存して十分ではないことも予想される．これに対して，適応的な累積近似による最適化は，図 2 (iii) に示すように，適応的なサンプル点の追加を通じて段階的に近似関数の精度を向上させていき，計算の途中であってもそれに応じた設計解を保持しつつ，最終的にも比較的少ない計算コストで精度が高い解を得ることを目指すものである．

3 ボロノイ図を用いた局所情報の重ね合わせによる累積関数近似

3.1 局所情報の重ね合わせによる関数近似

適応的な累積関数近似を構成するために，サンプル点 $\boldsymbol{x}_k$ $(k = 1, 2, \cdots, K)$ における局所情報 $L^{(k)}(\boldsymbol{x})$ を次式により重ね合わせる[3]ことを考える．

$$P^{(K)}(\boldsymbol{x}) = \frac{\sum_{k=1}^{K} \Psi^{(k)}(\boldsymbol{x})\, L^{(k)}(\boldsymbol{x})}{\sum_{k=1}^{K} \Psi^{(k)}(\boldsymbol{x})} \tag{1}$$

ここで，$\Psi^{(k)}(\boldsymbol{x})$ は個々のサンプル点における局所情報に対する影響度関数 (blending function) であり，一般には，サンプル点からの距離が大きくなるにしたがって減少するように定める．

上式による近似関数を優れたものとするには，$L^{(k)}(\boldsymbol{x})$ や $\Psi^{(k)}(\boldsymbol{x})$ の構成方法のみならず，サンプル点の配置と近似関数の合成方法との連動方法が重要なポイントとなる．本研究では，これらに関して，空間内における点の分布について最適な配置を求めるための計算モデルの一種であるボロノイ図[4]を用いる．

3.2 ボロノイ図 図 3 は 2 次元空間でのボロノイ図の例である．図は，$P_1, P_2, \cdots, P_9$ などの各母点を与えた上で，対となる母点間に垂直 2 等分線を作成することによって多角形となるボロノイ領域を構成したものである．ボロノイ図では，任意の点からの最も距離が小さい母点が，その点が存在するボロノイ領域を支配する母点となる．施設配置などを考える場合に，母点を施設に，ボロノイ領域をその施設の利用者の存在範囲に対応させれば，このボロノイ図の性質に基づいて，地域の住民に最も近い施設を求めたり，住民の利便性を最大化するように施設の最適な新設位置を決定したりすることが容易に行えることから，計算幾何学における主要なモデルとなっている[4]．

ボロノイ図における操作は，母点の隣接関係を表すグラフの位相構造に基づいて行われるため，数値誤差に対して頑強である，母点の追加や微小な移動によるボロノイ図の変更が局所的な変更のみによって行われるため，ボロノイ図を変更するための計算コストが少ない (ただし，実装上は，空間の次元数があるレベルを超えると，計算コストは急速に大きくなる)，などの性質を持っている．また，ボロノイ図は任意の次元において構成でき，より高次の空間にも理論的には適用可能であることから，累積近似のための基盤として用いることができる．なお，以下の記述では説明の利便上，2 次元のボロノイ図を用いる．

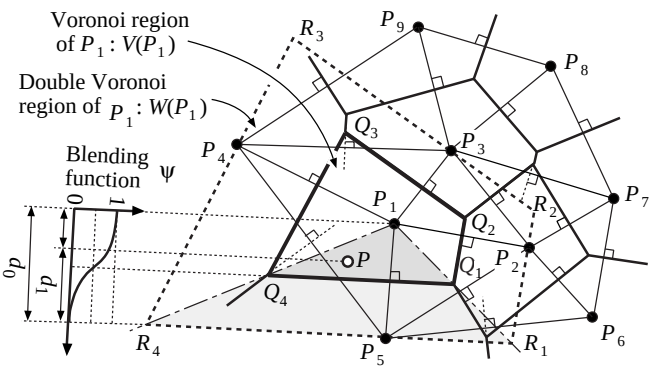


Fig. 3 Voronoi diagram and blending funtion

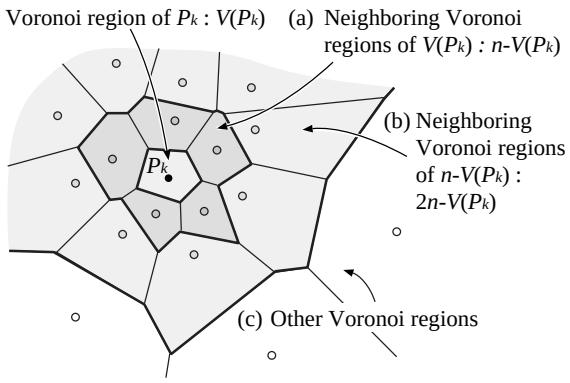


Fig. 4 Selection of sample points for establishing quadratic approximation

3.3 ボロノイ図に基づく重ね合わせ ボロノイ領域がある母点の支配する領域を表していることに着目し，式 (1) による近似関数を構成するにあたり，サンプル点を母点に対応させる．そのもとで，影響度関数 $\Psi^{(k)}(\boldsymbol{x})$ は着目する点からの距離が最も小さいサンプル点の影響が最大となるように定める．そのために，母点を中心としてボロノイ領域を相似的に 2 倍に拡大した 2 倍ボロノイ領域を導入する．図 3 において，多角形 $Q_1Q_2Q_3Q_4$ から構成されるボロノイ領域 $V(P_1)$ に対して，多角形 $R_1R_2R_3R_4$ が 2 倍ボロノイ領域 $W(P_1)$ に相当する．2 倍ボロノイ領域においては，母点 P_1 に隣接する母点 P_2, P_3, P_4, P_5 はそれぞれ，2 倍ボロノイ領域の辺 $R_1R_2, R_2R_3, R_3R_4, R_4R_1$ 上に存在する．この性質のもと，各母点において近似関数が真の関数値に一致するように，影響度関数が母点において 1.0，2 倍ボロノイ領域 $W(P_1)$ の辺上とその外側において 0.0，ボロノイ領域 $V(P_1)$ の辺上において 0.5 となるように $\Psi^{(k)}(\boldsymbol{x})$ を設定する．以上の考え方に基づく近似関数の構成方法は以下のようになる．

(1) 点 P が含まれる 2 倍ボロノイ領域を列挙する．図 3 では P は $W(P_1), W(P_4), W(P_5), \cdots$ に存在する．
(2) 点 P が含まれるすべての 2 倍ボロノイ領域に対して，以下の操作を行う．
  (a) 2 倍ボロノイ領域内で，P が存在する三角形領域を求める．図 3 では，P は $W(P_1)$ に対しては，$\triangle P_1R_4R_1$ に存在する．
  (b) 点 P と辺 R_4R_1 の距離 d_1，点 P_1 と辺 R_4R_1 の距離 d_0 を用いて，影響度関数を $\Psi(\boldsymbol{x}) = \dfrac{1}{2}\left\{1+\cos\left(1-\dfrac{d_1}{d_0}\right)\pi\right\}$ により計算する．
(3) すべてのサンプル点における局所情報に影響度関数を乗じて重ね合わせることにより，近似関数値を式 (1) により計算する．

ステップ (3) でのすべての母点における関数値を重ね合わせる操作は，2 倍ボロノイ領域の辺と外部においては影響度関数は 0 であることから，点 P が存在する 2 倍ボロノイ領域についてのみ行えばよく，比較的小さい計算コストで近似関数値を計算できる．

3.4 局所情報の 2 次関数近似 サンプル点 P_k における局所情報 $L^{(k)}(\boldsymbol{x})$ は，比較的少ないパラメータで制御可能であり一定の精度も確保できる 2 次関数により表すものとし，周辺のサンプル点での情報を用いて最小 2 乗法により推定する．具体的には，まず，サンプル点における局所情報を，$L^{(k)}(\boldsymbol{x}) = F(\boldsymbol{x}_k) + \sum_{i=1}^{n}\beta_i\left(x_i - x_{k_i}\right) + \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=i}^{n}\beta_{ij}\left(x_i - x_{k_i}\right)\left(x_j - x_{k_j}\right)$ とし，未知パラメータをボロノイ図における母点の隣接関係に基づいて選択したサンプル点での関数値 $F(\boldsymbol{x}_{k'})$ を利用して決定する．本研究では，$N_q = n(n+1)/2 + n = n(n+3)/2$ 個の未知パラメータに対し，サンプル点の総数を N_s として，$M = \min(2N_q, N_s - 1)$ 個のサンプル点を用いる．

選択するサンプル点は，サンプル点 P_k に近いものから，(i) ボロノイ領域 $V(P_k)$ に隣接するボロノイ領域 n-$V(P_k)$ (図 4 (a))，(ii) ボロノイ領域 n-$V(P_k)$ に隣接する $V(P_k)$ 以外のボロノイ領域 $2n$-$V(P_k)$ (図 4 (b))，(iii) その他のボロノイ領域 (図 4 (c)) の順で，個数が M に達するまで選択する．次に，各サンプル点における関数値と P_k による局所情報の誤差の 2 乗和 $E = \sum_{m=1}^{M}\left[\dfrac{F(\boldsymbol{x}_{k,m}) - L(\boldsymbol{x}_{k,m})}{\left|\boldsymbol{x}_{k,m} - \boldsymbol{x}_k\right|}\right]^2$ が最小となるように，連立 1 次方程式 $\frac{\partial E}{\partial \beta_{ij}} = \boldsymbol{0}$, $\frac{\partial E}{\partial \beta_i} = \boldsymbol{0}$ を解いて未知パラメータを求める．ここで，分母の $|\bullet|$ は，各母点からの影響を正規化するためのユークリッドノルムである．

3.5 類似手法との相違 以上の方法は累積近似を具体化するものであるが，ある近似関数のもとでの最適化の暫定結果に基づいたサンプル点の追加による近似関数の改善と最適化計算の繰り返しにより同様の成果を得ようとする方法は，式 (1) のような重ね合わせによる近似に基づかないものであれば，いくつかのものが示されている．

例えば，荒川ら[5]は，サンプル点を中心とするガウス関数を重ね合わせた RBF ネットワークにおいて，サンプル点を，順次，追加していく枠組みを提案しているが，現状では，近似精度がガウス関数の半径の決定方法に左右されるなどの課題も伴っている．また，形式的には，サンプル点の追加を行った際には，近似モデルそのものの全体を再構成する (ネットワークを構成しているすべての重み係数を再計算する) 必要があり，この点において，提案方法とは基本的な考え方が異なっている．また，Sasena ら[6]は，Kriging モデルによる関数近似において，サンプル点を追加していくことによりその精度を改善していく方法を提案している．この方法は，主に追加したサンプル点に関連する情報のみを更新して近似関数を高精度化する点で本研究の考え方とも類似するが，そもそもの Kriging モデルでの計算が容易ではない点や，サンプル点で原関数値に一致する近似関数を構成できない点などにおいて課題が潜んでいる．

以上の相違は，式 (1) の形式とボロノイ図による空間情報に基づいて近似関数を構成していることによるものである．それらに加えて，提案方法は，後者の点により，サンプル点を追加すべき位置をより豊富な情報に基づいて選定できるようになるなど，独自の特徴を持つ関数近似を構成できるものとなっている．

4 累積関数近似を用いた適応的大域最適化

4.1 全体構成 累積関数近似を用いて構成する適応的な最適化計算法の構成は以下の通りである．

(i) 初期サンプル点をランダムに設定し，各点で解析計算を行う．
(ii) ボロノイ図を作成または更新した上で，サンプル点での 2 次近似関数を導出するなどして，累積近似関数を構成する．
(iii) 累積近似関数のもとで，何らかの最適化計算を行い，暫定最適解を得る．
(iv) 最適解の精度が十分であるか，計算コストが制限値を超えていれば，最適化計算を終了する．
(v) 各種の情報をもとに新しいサンプル点を追加し，追加したサンプル点において解析計算を行って，ステップ (ii) に戻る．

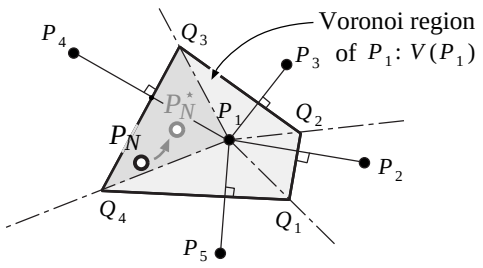


Fig. 5 Addition of a new sampling point around a tentative optimum

4.2 サンプル点の追加 前項のステップ (v) では，以下の 3 つの基準によるサンプル点をそれぞれ 1 点ずつ追加する．

(1) 最適解付近の精度向上のための追加 最適解付近の精度を向上させるために，ステップ (iii) で求めた暫定最適解の近傍にサンプル点を追加する．ただし，解が境界最適解となる場合に，サンプル点を暫定最適解の位置に直接追加していくと，繰返しの中でサンプル点が直線状に並ぶことになりボロノイ領域が非等方的となって近似関数の精度が悪化する．そこで，図 5 にも示すように，暫定最適解 P_N が存在するボロノイ領域内で P_N が存在する三角形領域 $\triangle P_1 Q_3 Q_4$ の中でランダムに決定した点 $P_N^\star$ にサンプル点を追加するようにして，ボロノイ領域の準等方性を維持する．

(2) 大域的な近似精度向上のための追加 近似関数の大域的な精度を向上させるために，サンプル点が最も疎な領域にもサンプル点を追加する．ボロノイ図においては，各ボロノイ点 (ボロノイ領域の頂点) はその近傍において周囲の母点からの距離が最も大きいことから，ボロノイ点の中でも周囲の母点からの距離が最も大きな点にサンプル点を追加する．すなわち，ボロノイ点を Q_k $(k = 1, 2, \cdots)$，Q_k の周囲の母点を $P_{k,\ell}$ $(\ell = 1, 2, \cdots)$ と表記した時，$\forall \ell_1, \forall \ell_2, \ell_1 \neq \ell_2$，に対して，$\overline{Q_k P_{k,\ell_1}} = \overline{Q_k P_{k,\ell_2}} = \overline{Q_k P_*}$ が成立し，$\overline{Q_{k^*} P_*} = \max_k \overline{Q_k P_*}$ となるボロノイ点 Q_{k^*} にサンプル点を追加する．ここで，$\overline{\bullet}$ は 2 点の距離を表す．

(3) ボロノイ図の自己相似性維持のための追加

上記の 2 種類の点にサンプル点を追加した場合，暫定最適解付近にサンプル点が密集した結果，その種の領域とそれぞれの周囲のサンプル点が疎な領域との境界でボロノイ領域のサイズが急変することになり，ひいては，応答曲面の精度が悪化することがある．本研究では，そのような状況を回避するために，暫定最適解付近とサンプル点が疎な領域の中間の領域にサン

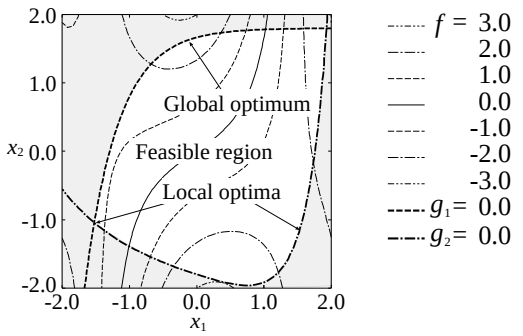


Fig. 6 Contour plot of two-dimensional optimization problem

プル点を追加して，ボロノイ図の自己相似性を保持する．具体的には，ボロノイ点 Q_k $(k = 1, 2, \cdots)$ の中で，$\max_k \left[\overline{Q_k P_*} \left(1 - \alpha \frac{\overline{Q_k P_N}}{d_{max}} \right) \right]$ となるような点 $Q_{k^\diamond}$ にサンプル点を追加する．ただし，P_N は暫定最適解，$d_{max} = \max_k \overline{Q_k P_N}$ であり，$0 < \alpha < 1$ である．ここで，$\alpha = 0$ であれば $Q_{k^\diamond}$ は最も疎なボロノイ点 Q_{k^*} となり，$\alpha = 1$ であれば $Q_{k^\diamond}$ は暫定最適解 P_N となる．次節の計算例においては，$\alpha = 0.75$ とした．

4.3 最適化アルゴリズム 機械システムの最適設計問題は一般に制約条件つきの非線形最適化問題となり，関数が多峰性関数となる場合も多い．本研究では，ステップ (iii) において，遺伝的アルゴリズム (GA)[7] により大域的な探索を行い，得られた解を初期解として逐次 2 次計画法 (SQP) により局所的な探索を行って厳密に暫定最適解を求める．

5 数値計算例

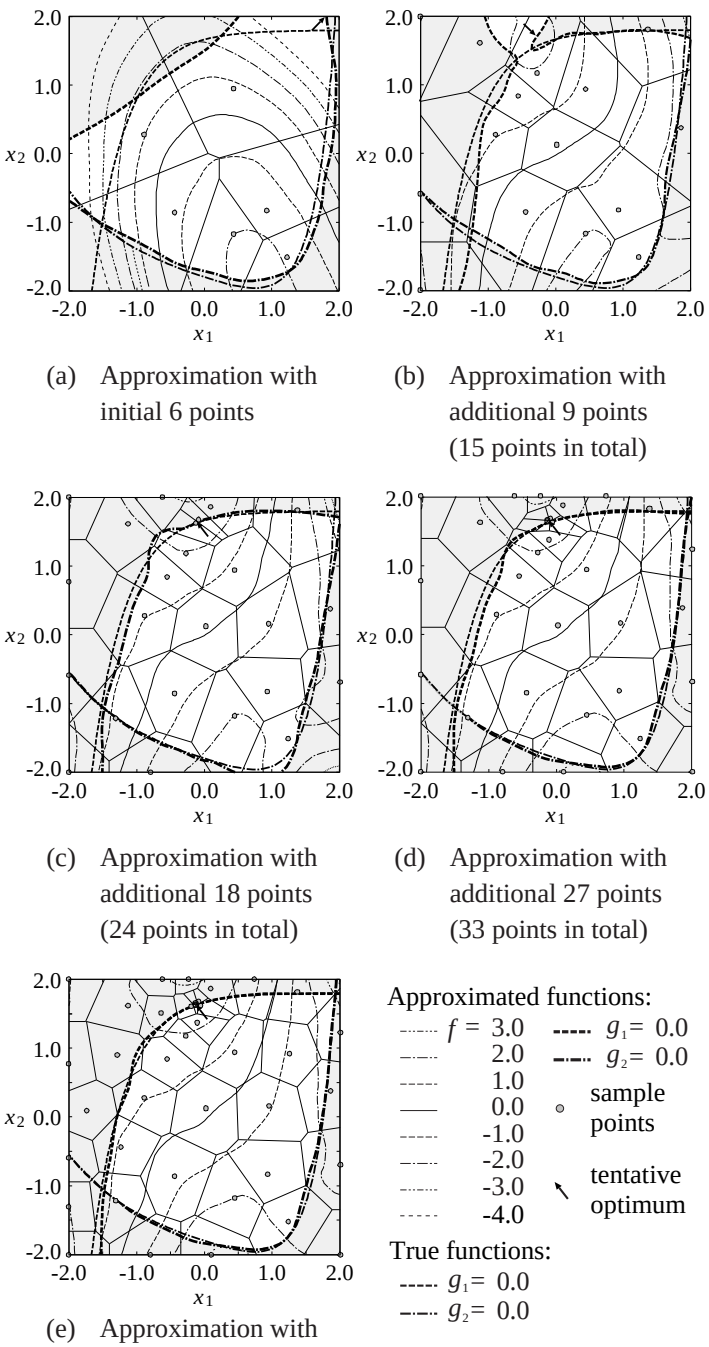
本報では，提案方法を 2 つの最適設計における例題[8]に適用して提案手法の検証を行う．

5.1 2 変数関数の最適化問題への適用

(1) 最適化問題の構成 まず，以下の 2 変数関数の最適化問題への適用例を示す．

$$\left.\begin{aligned} &\text{minimize} \\ &\quad f(x_1,x_2) = x_1 x_2 \sin x_1 + \frac{{x_1}^2}{10} + x_1 - 1.5 x_2 \\ &\text{subject to} \\ &\quad g_1(x_1,x_2) = \exp(-2x_1 - 2) + x_2 - 1.8 \le 0 \\ &\quad g_2(x_1,x_2) = \frac{{x_1}^4}{4} + {x_1}^2 + 2x_1 x_2 \\ &\qquad\qquad + 2x_1 - 5x_2 - 9 \le 0 \\ &\quad -2 \le x_1 \le 2, \quad -2 \le x_2 \le 2 \end{aligned}\right\} \quad (2)$$

この問題は $(-0.138, 1.622)$ に大域的最適解を持っており，他に 2 個の局所最適解 $(-1.522, -1.042)$, $(1.510, -1.213)$ を伴っている．図 6 に，この問題の実行可能領域と目的関数の等高線を示す．



(a) Approximation with initial 6 points

(b) Approximation with additional 9 points (15 points in total)

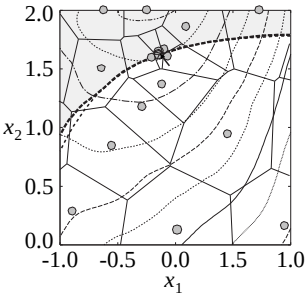
(c) Approximation with additional 18 points (24 points in total)

(d) Approximation with additional 27 points (33 points in total)

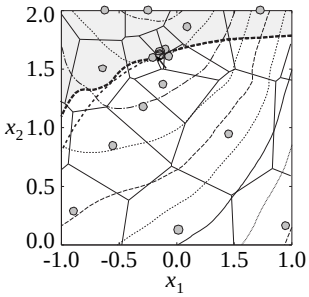
(e) Approximation with additional 36 points (42 points in total)

Fig. 7 Shapes of approximated functions during cumulative global optimization

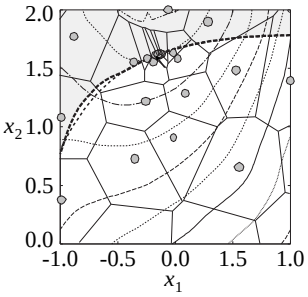
(2) 最適化計算結果 図 7 は，ある最適化計算の過程においてサンプル点の分布，近似関数，暫定最適解の位置が変化していく様子を示したものであ



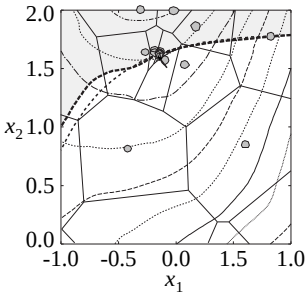
(a) The enlarged image of Fig. 7 (e)



(b) Using linear approximation as local information



(c) Arranging new samples directly to tentative optima without the mechanism shown in Fig. 5



(d) Without arranging samples for maintaining self-similrity of Voronoi diagram

Approximated functions: True functions:

f = 1.0, 0.5, 0.0, -0.5, -1.0, -1.5, -2.0, -2.5, -3.0

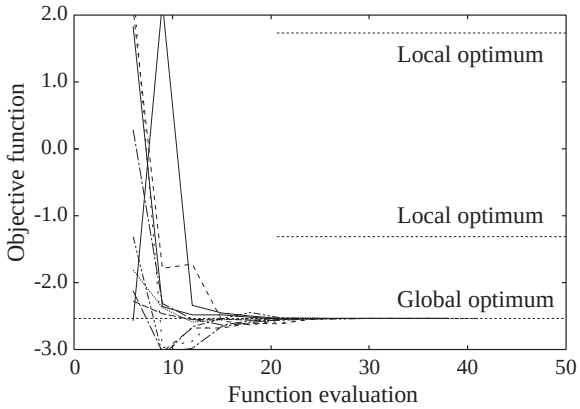
g_1 = 0.0

g_1 = 0.0

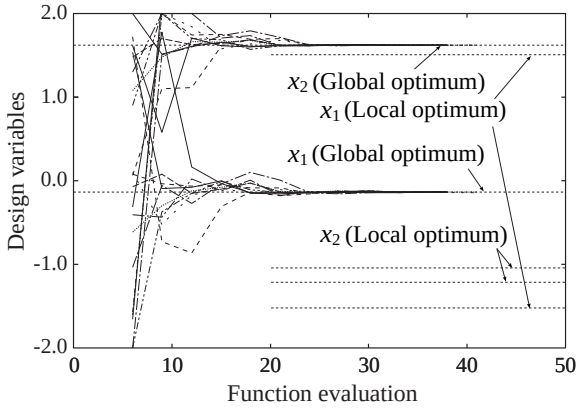
sample points

tentative optimum

Fig. 8 Effects of several mechanisms used in cumulative approximation



(a) History of objective function



(b) History of design variables

Fig. 9 Optimization history of a two-dimensional problem through the cumulative global optimization (ten trials)

る．図 7 (a) は 6 個の初期サンプル点による状態であり，近似関数は真の関数とかなり異なっているのみならず，暫定最適解も真の最適解からは大きく異なっている．図 7 (b) は最適化計算を 3 回実行した後の 15 個のサンプル点による状態であり，左上部での誤差が著しいものの，全体としての近似精度は改善され，暫定最適解も真の最適解に近いものが求まりつつある．さらに最適化計算を進めていけば，図 7 (c), (d), (e) に示すように近似関数と暫定最適解がそれぞれ真の値に近づき，最終的に真の大域的最適解にほぼ一致する解 $(-0.140, 1.621)$ が求められている．

(3) 局所情報とサンプル点の追加方法に関する検討 次に，局所情報の 2 次式近似とサンプル点の追加方法に関する効果について検討する．図 8 (a) は提案手法により得られた近似関数であり，図 7 (e) における最適解近傍を拡大したものである．これに対し，同図 (b) は局所情報として 1 次式を用いた場合であり，近似関数が局所的にゆがんでいる．また，同図 (c) はサンプル点を暫定最適解に直接追加した場合であり，ボロノイ領域が短冊状となるため，最適解近傍で近似関数がゆがんでいる．さらに，同図 (d) は自己相似性を考慮するためのサンプル点を追加しない場合であり，最適解付近でボロノイ領域のサイズが急変していて，近似関数の精度も低下している．

(4) 評価回数についての検討 図 9 は，異なる 10 組の初期サンプル点に対し最適化計算を行った際の関数の評価回数に対する目的関数と設計変数の履歴を示したものである．この問題には 2 個の局所最適解が存在しているが，全ての試行において解の評価を約 30 回行うことにより，大域的最適解が求められて

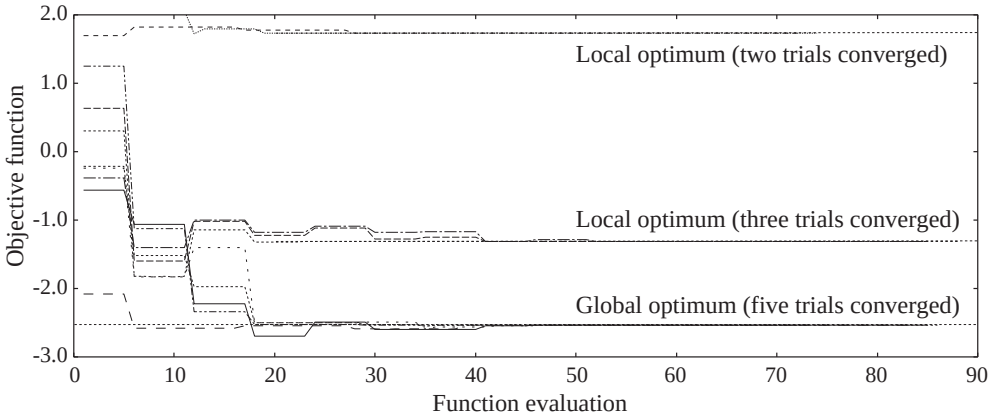


Fig. 10　Optimization history of a two-dimensional problem through SQP (ten trials)

いることを確認できる．図 10 は，比較のために，10 個の初期解をランダムに生成して勾配法の一つである SQP により最適化計算を行った際の目的関数の履歴を示したものであり，5 回は局所最適解に陥り，大域的最適解を求めることができなかった．また，大域的最適解を求めることができた場合も，解を求めるまでに約 60 回の解の評価を要した．以上により，提案手法が多峰性関数においても，SQP と同程度の計算コストで大域的最適解を求められることが確認できる．

5.2　溶接はりの最適設計問題への適用

(1)　最適化問題の構成　次に，図 11 に示す先端に荷重 P が作用する片持ち溶接はりについて，はりの形状や溶接部の寸法を，曲げ応力やせん断応力，座屈，たわみ等の制約のもとで材料と溶接のコストを最小にするように決定する問題[8]への適用例を示す．定式化は以下のとおりである．

$$\left.\begin{array}{ll}
\text{find } \boldsymbol{x}=[h,l,t,b]^T=[x_1,x_2,x_3,x_4]^T & \\
\text{that minimizes} & \\
\quad f(\boldsymbol{x})=1.10471\,x_1{}^2\,x_2+0.04811\,x_3\,x_4\,(L+x_2) & \\
\text{subject to} & \\
g_1(\boldsymbol{x})=\tau(\boldsymbol{x})-\tau_{\max}\le 0 & g_2(\boldsymbol{x})=\sigma(\boldsymbol{x})-\sigma_{\max}\le 0 \\
g_3(\boldsymbol{x})=x_1-x_4\le 0 & g_4(\boldsymbol{x})=0.125-x_1\le 0 \\
g_5(\boldsymbol{x})=\delta(\boldsymbol{x})-\delta_{\max}\le 0 & g_6(\boldsymbol{x})=P-P_c(\boldsymbol{x})\le 0 \\
0.1\le x_1,\,x_4\le 2.0 & 0.1\le x_2,\,x_3\le 10.0
\end{array}\right\} \tag{3}$$

ここで，$\tau(\boldsymbol{x})$ は溶接部の最大せん断応力，$\sigma(\boldsymbol{x})$ ははりの最大曲げ応力，$\delta(\boldsymbol{x})$ ははり先端のたわみ，$P_c(\boldsymbol{x})$ ははりの座屈荷重であり，それぞれは，$\tau(\boldsymbol{x})=\sqrt{(\tau')^2+2\,\tau'\,\tau''\,\frac{x_2}{2R}+(\tau'')^2}$，$\sigma(\boldsymbol{x})=\frac{6PL}{x_4\,x_3{}^2}$，$\delta(\boldsymbol{x})=\frac{4PL^3}{E\,x_3{}^3\,x_4}$，$P_c(\boldsymbol{x})=\frac{4.013\sqrt{EI\alpha}}{L^2}\left[1-\left(\frac{x_3}{2L}\right)\sqrt{\frac{EI}{\alpha}}\right]$ として与えられる．ただし，$\tau'=\frac{P}{\sqrt{2}\,x_1\,x_2}$ であり，τ'' は，溶接部中央に作用するモーメント $M=P\left[L+\frac{x_2}{2}\right]$, 回転

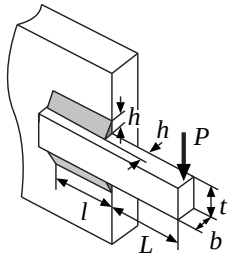


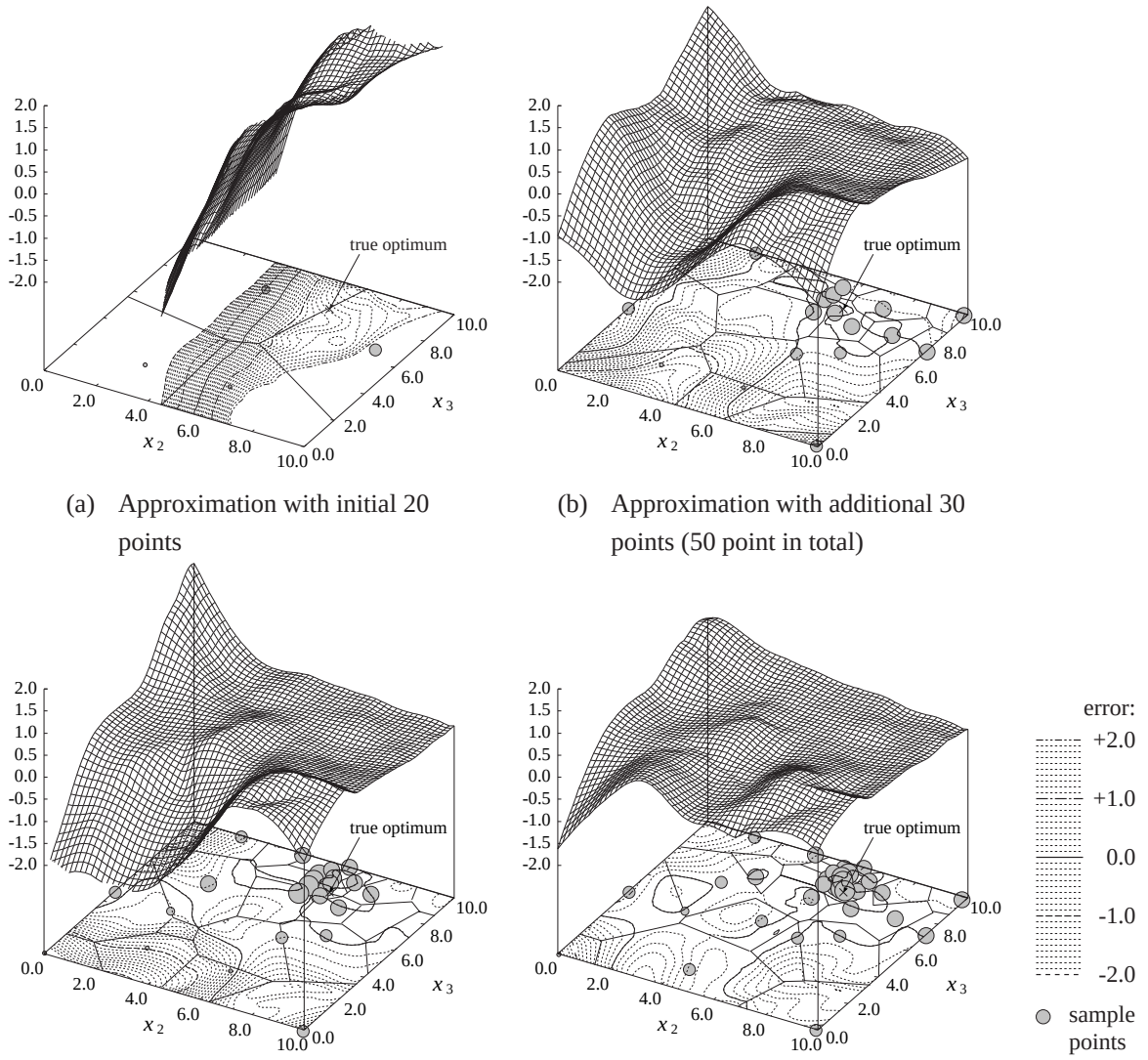
Fig. 11　Design problem of welded beam structure

半径 $R=\sqrt{\left(\frac{x_2{}^2}{4}\right)+\left(\frac{x_1+x_3}{2}\right)^2}$，断面二次モーメント $J=\sqrt{2}\,x_1\,x_2\left[\frac{x_2{}^2}{12}+\left(\frac{x_1+x_3}{2}\right)^2\right]$ を用いて，$\tau''=\frac{MR}{J}$ として計算される．E は縦弾性係数，G は横弾性係数であり，$I=\frac{1}{12}\,x_3\,x_4{}^3$, $\alpha=\frac{1}{3}G\,x_3\,x_4{}^3$ である．なお，$\cdot_{\max}$ は当該の変数の限界値を意味する．

本論文では，各係数を，$P=6000\,\mathrm{lb}$, $L=14\,\mathrm{in}$, $E=30\times10^6\,\mathrm{psi}$, $G=12\times10^6\,\mathrm{psi}$, $\tau_{\max}=13,600\,\mathrm{psi}$, $\sigma_{\max}=30,000\,\mathrm{psi}$, $\delta_{\max}=0.25$ in とした．その際の最適解は，$\boldsymbol{x}^*=[0.2455, 6.1960, 8.2730, 0.2455]^T$ であり，$f(\boldsymbol{x}^*)=2.386$ となる．

(2)　最適化計算結果　図 12 は，ある最適化計算における目的関数の近似誤差の変化を最終的な最適解を含むある 2 次元断面において示したものである．図 12 中の丸印は，その断面にサンプル点を投影した位置を示しており，直径が大きいほど断面に近いことを表している．この図より，サンプル点が最適解付近とそれ以外の領域に適応的に追加されることにより，近似関数の局所的，大域的な精度が徐々に向上していき，特に最適解付近の近似誤差が最終的にほぼ 0 になっていることが確認できる．

図 13 は，図 12 のものも含めて 5 組の異なる初期



(a) Approximation with initial 20 points

(b) Approximation with additional 30 points (50 point in total)

(c) Approximation with additional 60 points (80 point in total)

(d) Approximation with additional 90 points (110 point in total)

Fig. 12 Cumulative approximation error in an optimization history of welded beam problem

サンプル点集合のもとで最適化計算を行った際の解析回数に対する目的関数と設計変数の履歴である．同図より，いずれの試行においても暫定最適解が安定して真の最適解に近づいており，比較的少ない解析回数で最適解が得られていることがわかる．なお，比較のために，SQP による最適化計算を行ったが，解を求めるまでに約 200 回の解析計算を必要とした．

(3) サンプル点の追加に関する検討 最後に，4.2 項に示したサンプル点の追加方法についての検討を行う．図 14 に図 5 に示した調整を行わずにサンプル点を暫定最適解に直接的に追加した場合の目的関数の変化を示す．また，図 15 に自己相似性を維持するための第 3 のサンプル点を追加しない場合の目的関数の変化を示す．いずれの場合も，最適化計算の中盤から終盤にかけて解が振動的に変化して収束が進まない状況がみられる．これらのことから，解を安定的に収束させる上で，4.2 項に示した 3 つのサンプル点の追加方法が有効に作用していることを確認できる．

5.3 プログラムの実装と計算コスト 各最適化計算を実行するためのプログラムは，ボロノイ図の処理には複雑なデータ操作に適した Allegro Common Lisp (ACL) を用い，GA と SQP による最適化計算には C 言語を用い，ACL の外部言語処理機能を利用して両者を連係させて，実装した．これによる Sun Blade 1000 Model 1750 (UltraSPARC-III 750 MHz, 512MB Memory) での計算時間は，5.1 項の 2 変数の問題では

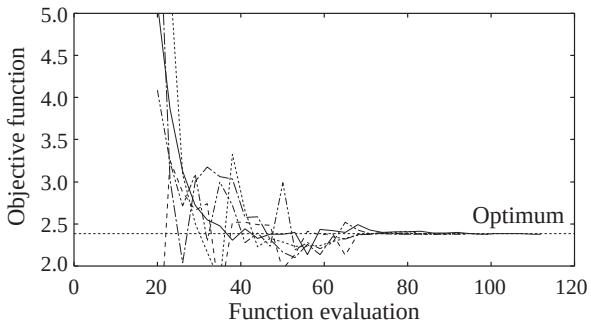


Fig. 13 Optimization history of welded beam problem through the cumulative global optimization (five trials)

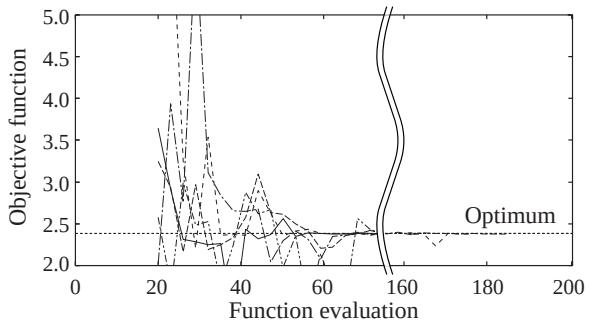


Fig. 14 Optimization history of welded beam problem without local adjustment of new sample points for the optimum (five trials)

約 5 分，5.2 項の 4 変数の溶接はりの設計問題では約 56 分であった．なお，ボロノイ図についての処理は任意の次元が扱えるプロトタイプを簡便に実装して提案手法の可能性を検証するために，ボロノイ図を構成する母点，ボロノイ領域，ボロノイ面，ボロノイ点の間の相互の関連を Lisp のデータ構造を活用して表現し，例えば，母点を追加した際のボロノイ図の更新処理も，それらの関連の中から更新の必要なボロノイ面を抽出した上で，それぞれを，逐一，新たなものに置き換えていく独自の処理により実装している．3.2 節でも述べたように，ボロノイ図の処理に要する計算コストは空間の次元や母点の数に対して増加していき，例えば，d 次元空間に n 個の母点が存在する場合にボロノイ図を作成するための最適な計算量は $O\left(n\log n+n^{\lceil d/2\rceil}\right)$ とされている[4]など，現在のものを，そのまま，高次元の問題に展開していくことはできないものの，各計算例は累積関数近似という枠組みが持つ特徴と有用性を例示するものである．

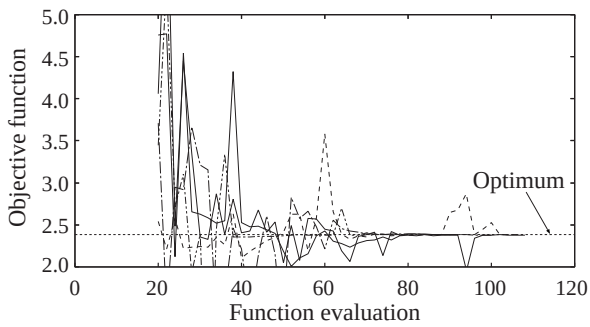


Fig. 15 Optimization history of welded beam problem without addition to the third type of new sample points (five trials)

6 結　言

本研究では，ボロノイ図による累積関数近似とそれによる適応的大域最適化法を提案し，具体的な最適化問題に適用して有効性を検証した．提案した累積関数近似法は対象関数の局所的な精度と大域的な精度を同時に向上させていくことが可能であり，この性質のもとで構成した適応的な最適化計算法は多峰性を伴う問題においても比較的少ない計算コストで大域的な最適解を求めることができるようになっている．このような特質は累積関数近似が最適設計問題における解析計算と最適化計算の間でのキャッシュとして機能している[9]ことによるものであり，複合領域最適設計やロバスト最適設計などのように，設計解の評価に大規模な解析や複数点での解析が必要となる場合に対する展開での有効性に期待が持たれる．一方，ボロノイ図は高次元空間へも適用可能ではあるものの，現状では次元数の増加に伴う計算コストの増大が著しく，このことは提案方法そのものについての検討課題である．

最後に，プログラム開発に協力してくれた元大阪大学大学院生 立川智哉君，岩瀬鉄平君，田鶴洋君に謝意を表する．なお，本研究の一部は，文部科学省科学研究費若手研究 B13750119 の援助によるものである．

文　献

(1) Bathelemy, J. -F. M. and Haftka, R. T., Approximation Concepts for Optimum Structural Design – a Review, *Structural Optimization*, Vol. 5, (1993), pp. 129-144.
(2) Yamakawa, H. *ed.*, Optimal Design Handbook, (2003), pp. 162-170, Asakura. (*in Japanese*)
(3) Rasmussen, J., Nonlinear Programming by Cumulative Approximation Refinement, *Structural Optimization*, Vol. 15, (1998), pp. 1-7.
(4) Asano T., *Computational Geometry: Algorithms and Applications*, (by de Berg, M. *et al.*, (1997), Springer), (2000), Kindaikagaku. (*in Japanese*)

(5) Arawawa, M., Nakayama, H. and Ishikawa, H., Optimum Design Using Radial Basis Function Network and Adaptive Range Genetic Algorithms (1st Report: Consideration in Unconstrained Optimization), *Transactions of the Japan Society of Mechanical Engineers, Series C,* Vol. 67, No. 655 (2001), pp. 789-796. (*in Japanese*)
(6) Sasena, M. J. *et al.*, Improving an Ergonomics Testing Procedure via Approximation-based Adaptive Experimental Design, *Transactions of the ASME, Journal of Mechanical Design,* Vol. 127, No. 5 (2005), pp. 1006-1013.
(7) Fujita, K. *et al.*, Genetic Algorithm Based Optimization Method of Mechanical Systems and Its Application to Optimal Design of Automotive Engine, *Transactions of the Japan Society of Mechanical Engineers, Series C,*, Vol. 65, No. 630 (1999), pp. 821-828. (*in Japanese*)
(8) Ragsdell, K. M. and Philips, D. T., Optimal Design of a Class of Welded Structures using Geometric Programming, *Transactions of the ASME, Journal of Engineering for Industry*, No. 98 (1976), pp. 1021-1025.
(9) Hirokawa, N. and Fujita, K., The Potential Role of Cache Mechanism for Complicated Design Optimization, *Proceedings of the Second China-Japan-Korea Joint Symposium on Optimization of Structural and Mechanical Systems* (*CJK-OSM2*), (2002), pp. 331-334.