Title	有界領域における反射壁ブラウン運動の構成
Author(s)	福島, 正俊
Citation	大阪大学, 1967, 博士論文
Version Type	
URL	https://hdl.handle.net/11094/29411
rights	
Note	著者からインターネット公開の許諾が得られていないため、論文の要旨のみを公開しています。全文のご利用をご希望の場合は、大阪大学の博士論文についてをご参照ください。

【13】

氏名・(本籍)	福 島 正 俊（ふく しま まさ とし）
学位の種類	理 学 博 士
学位記番号	第 1274 号
学位授与の日付	昭和 42 年 9 月 12 日
学位授与の要件	学位規則第5条第2項該当
学位論文名	**有界領域における反射壁ブラウン運動の構成**
論文審査委員	(主査) 教 授 渡辺 毅 (副査) 教 授 池田 信行 教 授 田辺 広城

論 文 内 容 の 要 旨

N次元ユークリッド空間の領域Dが充分滑らかな境界 ∂D をもつ場合，熱方程式 $\frac{\partial}{\partial t} u(t, x) = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}\frac{\partial^2}{\partial x_i^2} u(t,x)$, $t>0$, $x \in D$ の基本解で，境界条件 $\frac{\partial}{\partial n_x} u(t,x) = 0$, $t>0$, $x \in \partial D$（但し n_x は x に於ける inner normal）を満すものが一意的に存在することが知られている。この基本解を遷移確率の密度とする $D^u\partial D$ 上のマルコフ過程をわれわれは $D^u\partial D$ 上の反射壁ブラウン運動と呼んでいる。これは吸収壁ブラウン運動と並んでいわゆる拡散過程（path が確率1で連続な強マルコフ過程）のうちの基本的なものである。しかし ∂D が滑らかでない場合は反射壁ブラウン運動の定義も，従がってもちろん，その存在も明らかでなかった。この論文の目的は，R^N の任意の有界領域に対し反射壁ブラウン運動に相当するものを構成することにある。著者の得た結果は第1節に定理1及び定理2としてまとめてあるが，この2つの定理は第2節以下で次の手順によって証明される。

第2節　任意に固定した領域（有界）D 上のある resolvent density の構成

第3節　D の完備化 D^* と D^* 上の強マルコフ過程 X の構成

第4節　X の path が確率1で連続であることの証明

以下各節の概略の説明を行なう。

（第2節の説明）　各 $\alpha>0$ に対して D 上の α 位の調和関数のうちその一階偏導関数も込めて2乗可積分なもの全体を $|\mathbf{H}|_\alpha$ とする。各 $x \in D$ について，$|\mathbf{H}|_\alpha$ の元 R_α^x で次の条件を満たすものが一意的に存在する。任意の $v \in |\mathbf{H}|_\alpha$ に対し $\int_D \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial R_\alpha^x(y)}{\partial y_i}\frac{\partial v(y)}{\partial y_i}\,dy + 2\alpha\int_D R_\alpha^x(y)\,v(y)dy = 2v(x)$。$G_\alpha^0(x,y)$ をDでの吸収壁ブラウン運動の resolvent density とするとき $G_\alpha(x,y) = G_\alpha^0(x,y) + R_\alpha^x(y)$ が対称な保存的なD上の resolvent density になっていることを示すのが2節の内容である。

（第３節の説明）　上述の $G_1(x,y)$ による D の Martin 型の完備化を D^* とし，それに伴なって作られる D^* 上のマルコフ過程を X とする。D^* は D の１つの compact 化であり，X は一般に Ray〔20〕の意味の分岐点を D^*-D に含む。X の強マルコフ性が国田-野本〔９〕の方法で示さわる。X は〔20〕〔９〕にある一般的性質の他に pats の D 内での連続性，quasi-left continuity 等の正則性を持つことが証明される。

（第４節の説明）　D^* 上の excessive function の potential 表示（定理３），それを通じての D^* 上の関数 u の X に関する Dirichlet norm $|||u|||_x$ の定義を行なう。次に充分多くの関数 u についての等式 $|||u|||_x{}^2 = \int_D \left(\frac{\partial u(x)}{\partial x_i}\right)^2 dx$ を示す（定理４）。この結果，平均０の加法的 functional A_t による確率積分 $\int \chi_\Delta(x_t)\,dA_t$ が０に等しいことがわかる（定理５）。但し $\Delta=D^*-D$, χ_Δ は indicator fuuction。定理５は X の path が Δ で jump しないための充分条件である（補題４，５）。

第４節の最後に以下の事実が示される（定理６）。∂D が定分滑らかな場合，D^* 上の拡散過程 X は $D^u\partial D$ 上の反射壁ブラウン運動と同等である。

論 文 の 審 査 結 果 の 要 旨

Markov 過程の境界および境界条件の問題は，1952年から57年頃にかけて W. Feller によって提出され，現代確率論における最も重要な研究テーマの１つに数えられる。この問題については数多くの重要な結果が得られているが，反射壁境界条件に関する研究はきわめて少ない。すでに Feller 自身はこの境界条件の重要性を指摘し，理想境界における“法線微分の類似物”を発見的に導いた。しかし Feller の方法を厳密に基礎づけることは，種々の技術的困難から一般的にはいまだに未解決である。(福島君の副論文のうち２つは，特別な仮定の下で Feller の構成を厳密に論じたものである)。

福島君は，本論文において上記 Feller の接近と全く異なる方法を用いて Brown 運動の反射壁の問題を完全に解決した。その特徴と主な結果を述べれば，境界条件として法線微分（あるいはその拡張）を考えるかわりに，Dirichlit norm 有限な α 次の調和関数のつくる Hilbert 空間上のある方程式を束縛条件にとる。この束縛条件は任意の有界領域にたいし定義可能であり，とくに領域が滑らかな境界をもつ場合には，法線微分による古典的反射壁境界条件と同等である。かくて反射の概念が，任意の有界領域において定義される。つぎに，反射壁の束縛条件をみたす Brown 運動の構成を論じ，最後にその見本過程がある自然な方法で導かれる理想境界（古典的な場合は，通常の境界となる）を含めた空間の上で連続になることを示している。この部分の証明は，解析的方法と確率論的方法を巧みに結合したもので，証明法自体きわめて興味深い。さらに著者の研究は，ポテンシャル論，偏微分方程式論などにおいてしばしば用いられる functional space（特別な付帯条件をもつ Hilbert 空間，Banach 空間など）の方法が反射壁の問題に有効であることを示した点で，一般な Markov 過程への拡張を示唆するものと思われる。

以上福島君の論文は，結果の重要性，方法の新しさ，一般化への寄与の可能性などから見て，理学博士の学位論文として十分価値あるものと認める。