【31】

| | |
|---|---|
| 氏名・(本籍) | 松田道彦（まつだ みちひこ） |
| 学位の種類 | 理学博士 |
| 学位記番号 | 第 1463 号 |
| 学位授与の日付 | 昭和 43 年 3 月 28 日 |
| 学位授与の要件 | 学位規則第5条第2項該当 |
| 学位論文名 | **微分形式の Cartan および倉西による Prolongation と Lagrange および Jacobi による Prolongationとの結合** |
| 論文審査委員 | (主査) 教授 村上 信吾 (副査) 教授 池田 信行 教授 尾関 英樹 |

## 論 文 内 容 の 要 旨

本論文では次の古典的な問題に一つの解答を与えた。

一般の偏微分方程式系を prolongation することによって，有限回の操作で involulive な系かまたは incompatible な系に帰着せしめ得るか？

倉西はこの問題を解くために，Cartan の方法を継承して standard prolongation を構成した。彼は，standard prolongation によって involutive な系に帰着されるための系がみたすべき必要十分条件を与えた。しかしながら解を有するにもかかわらず，standard prolongation によっては involutive な系に帰着できない系の例が存在する。

Lagrange 及び Jacobi は，特別な型の方程式系に関しては，我々の問題を肯定的に解決している。

ここに我々は，彼等の古典的な方法を Cartan 及び倉西の近代的な方法に結合して，一つの prolongation を構成する。そしてこの prolongation によって，すべての偏微分方程式系が involutive な系かまたは incompatible な系に帰着されることを示す。

主定理を述べるために，次の記号を定める。

$(M, N\ ;\ \Pi)$ : a fibered manifold,

$J^{\ell}(M, N\ ;\ \Pi)$ : the space of $\ell$-jets (略号 $J^{\ell}$),

$O(J^{\ell})$ : the sheaf of germs of real analytic functions on $J^{\ell}$,

$\Phi$ : a subsheaf of ideals in $O(J^{\ell})$

($\Phi$ は N上の $\ell$ 階の微分方程式系と呼ばれる),

$I(\Phi) = \{X \in J^{\ell}\ ;\ \varphi(X) = 0 \text{ for } \forall\varphi \in \Phi\}$

${}_{p}\Phi$ : the prolongation of $\Phi$ defined by Kuranishi,

$\rho_{\ell}^{\ell+1}$ : $J^{\ell+1}$ から $J^{\ell}$ への自然な封影,

$Q_X(J^{\ell}) = \mathrm{Ker}\ (d\rho_{\ell-1}^{\ell}) \subset T_X(J^{\ell})$,

$C_X(\varPhi) = \{X \in Q_X(J^{\ell})\ ;\ d\varphi(X) = 0 \text{ for } \forall\varphi \in \varPhi\}$, ($C_X(\varPhi)$ は $X \in I(\varPhi)$ にたいして定義する)

定義 $\varPhi$ が $X \in J^1$ で involutive であるとは次の条件 (i)〜(iii) がみたされるときにいう。

(i) $X \in I(\varPhi)$.

(ii) $Cx(\varPhi)$ は $Qx(J^{\ell})$ の involutive subspace である。

(iii) $\rho_{\ell}^{\ell+1}\tilde{X} = X$ をみたす $\tilde{X} \in I(p\varPhi)$ が存在して, X のある近傍 U にたいして

$(\tilde{U} \cap I(p\varPhi),\ U \cap I(\varPhi)\ ;\ \rho_{\ell}^{\ell+1})$

が fibpred manifold となる様な近傍 $\tilde{U}$ をもつ。

我々は以下の様にして, the p-closure of $\varPhi$ を定義する。

$p_0\varPhi = p\varPhi \cap O(J^{\ell})$,

$p_0^n\varPhi = p_0(p_0^{n-1}\varPhi)$, $n = 2, 3, 4, \cdots\cdots$

$(\text{d-closure of } \varPhi) = \bigcup_{n=1}^{\infty} p_0^n\varPhi$.

与えられたに $\varPhi$ たいして, 我々は以下な様な prolongation を構成する。

$\varPhi_0 = \varPhi$

$\varPsi_0 = (\text{p-closure of } \varPhi_0)$

$\varPhi_n = p\varPsi_{n-1}$, $(n = 1, 2, 3, \cdots\cdots)$

$\varPsi_n = (\text{p-closure of } \varPhi_n)$.

主定理。すべての n に対して, $X_n \ni I(\varPsi_n)$ が存在して,

$\rho_{\ell+n}^{\ell+n+1}(X_{n+1}) = Xn$

をみにするならば, 十分大きい n に対して, $\varPsi n$ は $X_n$ で involutive である。

## 論 文 の 審 査 結 果 の 要 旨

与えられた非線型偏微分方程式の過剰決定系に対して, その系に局所解が存在するか否かを有限回の操作により判定できるかという問題は, 前世紀以来 Lagrange, Jacobi, E. Cartan などによりいくつかの場合に肯定的に解決されている。そして与えられた偏微分方程式系は, これを延長して回帰的と呼ばれる, Cauchy-Kowalevski 型の偏微分方程式を次々に解いて解が得られるような系となるか, もしくは解の全くない系となることが示されていた。最近, 倉西氏などによって, この問題が一般的に詳細に研究され, 倉西氏は回帰的となる偏微分方程式系を特徴ずけること, および一般の系について彼のいわゆる標準延長によって回帰的系が得られるための必要かつ十分な条件を与えた。しかしながら, 系が解をもつにも拘らず標準延長によって回帰的系が得られないような簡単な例があり, しかもこの例の場合には Jacobi と Lagrange による古典的な延長法により回帰的系が得られること

が知られていた。

松田君の仕事は，この最後に述べた事実に注目し，同君は倉西氏の標準延長と Jacobi と Lagrange との古典的延長を巧みに組合せることによって解をもつ偏微分方程式はつねに回帰的な系に延長できることを証明するのに成功した。このため松田君はまず偏微分方程式系についてP閉苞および準回帰的という，Jacobi と Lagrange の結果に示唆された，二つの概念を導入し，これを用いて回帰的な系の一つの特徴ずけを与えてた。これと最近 Serre によって証明された純代数的な補題を適用することにより，松田君は次の主定理を証明した。一つの1階実解析的偏微分方程式系$\Phi$は，局所解が存在するときにはみたされるような適当な条件を満足すれば，P閉苞をとることと，標準延長を定義するときの各段階である次数を一階上げる延長とを，交互に適用して有限回の操作により回帰的な系に延長できる。さらに松田君はこの定理によって偏微分方程式系の特異解がその松田式延長系の正則解となることをいくつかの古典的実例について説明している。

以上の松田君の仕事は偏微分方程式系の解の存在について，古典的結果を最近の立場から見直し，これと最近の倉西氏の結果とを組合せて一つの統一的理論を作ったものとして高く評価することができ，この理論の応用も将来十分期待されるもので理学博士の学位論文として十分価値あるものと認める。