



Title	非線形フィルタリングとその応用に関する研究
Author(s)	西口, 憲一
Citation	大阪大学, 1994, 博士論文
Version Type	VoR
URL	<a href="https://doi.org/10.11501/3097477">https://doi.org/10.11501/3097477</a>
rights	
Note	

*The University of Osaka Institutional Knowledge Archive : OUKA*

<https://ir.library.osaka-u.ac.jp/>

The University of Osaka

非線形フィルタリングと  
その応用に関する研究

1994年 1月

西口 憲一



①

非線形フィルタリングと  
その応用に関する研究

1994年 1月

西口 憲一

# 目次

<b>1</b>	<b>序論</b>	<b>1</b>
1.1	研究の背景	1
1.2	過去の研究の概要	3
1.3	本論文の目的と構成	9
<b>2</b>	<b>非線形フィルタリングの基礎理論</b>	<b>12</b>
2.1	まえがき	12
2.2	連続時間の非線形フィルタ	13
2.2.1	状態変数の確率微分方程式による表現	13
2.2.2	非線形フィルタの方程式	15
2.2.3	非線形フィルタのモーメント方程式	22
2.2.4	Kallianpur-Striebel の公式	24
2.3	離散時間の非線形フィルタ	24
2.4	確率システムにおける特異摂動法	28
2.4.1	平均化法	28
2.4.2	Papanicolaou-Stroock-Varadhan の極限定理	30
2.4.3	線形特異摂動システム	31
2.5	まとめ	32
<b>3</b>	<b>パラメータが固定の場合の適応推定</b>	<b>35</b>
3.1	まえがき	35
3.2	適応推定のモデル	36
3.3	非線形フィルタの方程式	37
3.4	非線形フィルタの漸近的特性の解析	38
3.4.1	条件つき確率密度関数	38
3.4.2	条件つき確率密度関数の漸近形	39
3.4.3	条件つきモーメントの漸近評価	41
3.5	非線形フィルタの近似によるアルゴリズムの構成	44
3.5.1	特異摂動型の方程式系	44
3.5.2	アルゴリズムの構成	45
3.5.3	Ljung のアルゴリズムについて	47
3.6	まとめ	48
付録	補題と定理の証明	49

4	パラメータが緩やかに変動する場合の適応推定	63
4.1	まえがき	63
4.2	適応推定のモデルと非線形フィルタ	64
4.3	非線形フィルタの漸近的特性の解析	66
4.3.1	パラメータの条件つき確率密度関数の漸近形	66
4.3.2	条件つきモーメントの漸近的評価	68
4.3.3	パラメータの最適推定値の誤差の漸近評価	69
4.4	非線形フィルタの近似によるアルゴリズムの構成	71
4.5	シミュレーションによる検討	74
4.5.1	パラメータ推定値の漸近最適性	74
4.5.2	3次の条件つきモーメントの重要性	75
4.6	まとめ	80
	付録 (4.10) 式の導出	81
5	低次元化モデルに基づいた適応推定	82
5.1	まえがき	82
5.2	適応推定のモデル	84
5.3	パラメータの条件つき確率密度関数	85
5.4	パラメータ推定値のバイアス	89
5.5	バイアス除去の方法	91
5.6	シミュレーション結果	93
5.7	考察	94
5.8	まとめ	96
6	マルコフジャンプ過程の状態推定	97
6.1	まえがき	97
6.2	状態推定のモデル	98
6.3	状態推定の評価関数	99
6.3.1	ジャンプに関する仮説のもとでの条件つき期待値	100
6.3.2	ジャンプに関する仮説の事後確率	101
6.3.3	評価関数の導出	102
6.4	ニューロコンピューティングによる状態推定	103
6.4.1	エネルギー関数の変形	103
6.4.2	ニューラルネットの構成	104
6.4.3	計算例	106
6.5	移動窓型フィルタ	108
6.6	速度がジャンプする過程への拡張	110
6.7	まとめ	115
	付録 補遺	117
7	ジャンプを伴うマルコフ過程の学習と推定	121
7.1	まえがき	121
7.2	状態推定のモデル	122
7.2.1	モデルとエネルギー関数	122

7.2.2	ニューロコンピューティング	123
7.3	状態推定の評価関数と推定性能	124
7.3.1	AICによるエネルギー関数の導出	125
7.3.2	推定性能の $\alpha$ への依存性	126
7.4	評価関数の学習	128
7.4.1	学習の評価関数	128
7.4.2	確率近似法による学習	128
7.5	まとめ	130
8	結論	132
	謝辞	137
	参考文献	138

# 第1章

## 序論

### 1.1 研究の背景

フィルタリングは雑音が含まれる観測データから、そのもとになった信号や未知パラメータを推定する技術である。1960年代の始めに発表された Kalman フィルタはその代表的なアルゴリズムであるが、Kalman フィルタの最初の応用が人工衛星の軌道決定であったように、宇宙・航空の分野でフィルタリングの必要とされる問題は多い。たとえば、飛行物体の軌道推定、宇宙構造物の状態やパラメータの推定などがそうである。そして、このような問題に対するこれまでのアプローチのほとんどは Kalman フィルタをベースにおいたものであった。

Kalman フィルタは、モデルが以下の条件を満たすときに最適な推定値を与えるものである。

- i) 推定すべき状態はガウス過程である。すなわち、状態は白色ガウス雑音で駆動される線形の確率微分方程式あるいは確率差分方程式で記述される。
- ii) 観測機構は線形でかつ観測雑音は白色ガウス過程である。
- iii) システムの性質は既知である。すなわち、状態方程式や観測機構のパラメータと雑音の共分散があらかじめわかっている。

一方、応用上の殆どすべての問題は、多かれ少なかれ非線形性を有しており、i) か ii) が満たされない。また、iii) についても、あらかじめ完全に決めることは困難である。

それにもかかわらず、これまで多くのフィルタリングの問題に Kalman フィルタが用いられてきたのは次のような理由からである。

- a) 雑音が比較的小さい場合には、推定値のまわりでシステムを線形化して Kalman フィルタを適用できる。これは拡張 Kalman フィルタと呼ばれている。
- b) 雑音の大きさが未知の場合には、少し大きめに見積もっておけば、Kalman フィルタの安定性は損なわれない。
- c) Kalman フィルタのアルゴリズムは単純で計算量は少なく、手軽に利用できる。

このような理由から Kalman フィルタは、1960 年代の米国のアポロ計画を中心とする宇宙開発計画において応用研究が盛んになり、それ以後、宇宙・航空の分野のみならず、制御、通信、経済、統計など広範な分野で活用されてきている。

しかしながら、宇宙・航空の分野においては、宇宙開発の進展や、機器の高性能化・複雑化に伴う要求性能の高度化により、線形フィルタリングの延長では解決できない問題が出てきた。そのような問題の例として次のようなものがある。

#### A) 大規模宇宙構造物 (LSS) の状態とパラメータとの同時推定

大規模な宇宙構造物は極端な軽量化が図られるため、減衰の遅い低周波振動があらわれやすく、姿勢制御系との干渉により不安定になる可能性がある。したがって、大規模宇宙構造物の姿勢制御のためには、システムの正確なモデルと正確な状態の情報を得ることが重要になる [80]。しかしながら、このようなシステムは地上では再現できず、したがって、地上では十分に動特性を把握することができないため、宇宙での軌道上でパラメータの同定を行わざるを得ない。すなわち、観測データをもとに、状態とパラメータの同時推定が必要になる。その際、状態とパラメータとをあわせたものを拡大された状態ベクトルと考えると、状態方程式は右辺に 2 次の項が含まれる非線形方程式になる。

#### B) マヌーバを行う目標の追尾 [8], [67]

レーダやソナーのようなセンサから得られる観測データをもとに、航空機や艦船などの位置や速度を推定する目標追尾 (Target tracking) の問題においては、目標がマヌーバ (操舵) を行ったときに、状態変数中の速度もしくは加速度が大きくステップ状に変化する。精度良く目標を追尾するためには、このようなジャンプを検出することが必要になる。ところが、線形フィルタリングが適用できて最適な推定値が得られる問題というのは、状態変数がガウス過程に限定されていて、

そのサンプルパスは連続でなければならない。したがって、この問題はその枠組みからはずれる。

これらの問題は非線形フィルタリングの問題ということになる。フィルタリングの基本原則は、対象のダイナミクスを事前情報として Bayes の法則を適用することである。これは、線形であれ非線形であれ共通の原理であって、上にあげた非線形フィルタリングの問題に対しても適用されるものである。しかしながら、これらの問題に対して従来からとられてきた様々なアプローチは、必ずしも非線形フィルタリングの基本原則に基づくものではなかった。その主な理由は、基礎方程式からアルゴリズムを導出したり、性能の原理的な限界を評価したりすることが困難であったこと、あるいは、得られた非線形フィルタを実現するのが困難であったことによる。

そのような困難に対して、近年の、非線形フィルタリングの特異摂動法に基づく近似理論の発展や、ニューラルネットの並列、分散、学習といった特徴を生かした新たな情報処理方式の展開により、打開の糸口が見え始めてきた。

本研究は、そのような背景のもとになされたもので、宇宙・航空の分野における非線形推定問題 A), B) に対する有効なアルゴリズムの開発をねらいとして、非線形フィルタリングの基本原則から出発して上記の新たな理論や手法を活用することにより、非線形フィルタリングの応用に関する基礎的な課題を解決することをめざしている。

## 1.2 過去の研究の概要

フィルタリングの歴史は、惑星の軌道パラメータを最小 2 乗法を用いて推定したガウスにまでさかのぼることができるが、雑音の本格的な取扱いを含めて、最適性の観点からフィルタリングの理論的な枠組みを作ったのは Wiener [86] である。

Wiener の扱った問題は定常時系列の推定であり、Wiener-Hopf の積分方程式を解くことにより最適フィルタの伝達関数が得られることを示した。しかしながら、この Wiener フィルタは定常時系列の推定に限定されており、同じ方法を非定常時系列の推定へ拡張することには限界があった。

この限界は、1960 年代初頭に Kalman と Bucy [35], [36] の線形フィルタリング理論によって乗り越えられた。彼らは、状態空間と直交射影の方法とを用いて、Riccati 方程式を解くことにより非定常時系列信号の最適フィルタ (いわゆる Kalman フィルタ) が得られることを示した。

Kalman フィルタは、システムと観測機構が線形で雑音がガウシアンの場合に、誤差の分散が最小という意味での最適フィルタになっている。

線形システムに対するフィルタリングの理論を非線形システムへ一般化しようという試みは、既に1960年代の半ばには始まっている。Kushner [45], [46] は観測値に基づく状態量の条件つき確率密度関数の従う方程式を導いた。これは確率偏微分方程式で、Kushner の方程式と呼ばれている。

Kushner の方程式では、システム雑音と観測雑音は正規白色雑音に限定されており、その導出は数学的厳密さを欠くものであったが、その後の1970年代の研究により、数学的に厳密で一般的な理論が完成した。Fuzisaki-Kallianpur-Kunita [16] は Kushner の方程式を拡張して、雑音に関するもっと一般的な仮定のもとで、数学的に厳密な意味での最適フィルタの方程式を導いた。

一方、Bucy [12] は上記のような発展方程式型の最適フィルタの方程式ではなく、バッチ処理型の最適推定値の経路を与える公式を導いた。これは関数空間上での Bayes の公式に相当するものである。この公式の数学的に厳密な証明は Kallianpur-Striebel [34] によって与えられ、Kallianpur-Striebel の公式と呼ばれている。

さて、Kushner の方程式は、連続時間における非線形フィルタリングの基礎方程式であり、最適フィルタの挙動を完全に記述するものであるが、これから直ちに、最適推定値を求めるアルゴリズムが導かれるわけではない。

Kushner の方程式からすぐに導かれるのは、各次数の条件つきモーメントの時間発展を表わす方程式系である。1次の条件つきモーメントは条件つき期待値に等しく、これは条件つき分散を最小にするという意味で最適推定値になる。したがって、条件つきモーメントの方程式系を解けば最適推定値が得られるということになるが、残念なことにこの方程式系は、線形システムの場合を除き一般に有限次元では閉じていない。すなわち、1次の条件つきモーメントの方程式は2次以上の条件つきモーメントを含み、2次の条件つきモーメントの方程式は3次以上の条件つきモーメントを含み、…というような構造になっているため、無限個の方程式を同時に解かなければ最適推定値を得ることができない。

そこで、最適推定値を求めるアルゴリズムを導くためには、何らかの近似が必要になる。そのため、拡張 Kalman フィルタ [31] をはじめ、2次確率モーメントフィルタ (truncated second-order filter) [30]、正規形2次確率モーメントフィルタ (Gaussian second-order filter) [14]、マルコフ等価線形化法 [75] など数多くの手法が提案された

[76]。しかし、いずれもヒューリスティックな導出によるものであったため、いかなる場合にいかなる近似アルゴリズムが適切かを判定するための理論的根拠がなく、シミュレーションによって性能比較を行なわざるを得なかった。

非線形フィルタの漸近的ふるまいを解析するために、あるいは近似フィルタを理論的に構成するために、近年、摂動論的なアプローチをとる研究が増えてきている [11], [39], [69], [71], [25], [10]。この場合、通常、雑音の大きさが小さいパラメータとして選ばれるから、非摂動系は雑音の入らない推定問題ということになって退化が生じ、したがって特異摂動論が必要になる。

非線形フィルタリングへの特異摂動論的アプローチの基本的なアイデアは、WKB (Wentzel, Kramers, Brillouin) 展開 [79] の応用である。WKB 展開を行なうためには、 $\epsilon$  を小さいパラメータとして、展開すべき関数が  $C \exp\{-\frac{1}{\epsilon}\Phi(x)\}$  という形になることが条件として課される。この条件は、問題によっては始めから仮定されることも多いが、一般には、そうなることを証明する必要が生じる。雑音が小さいという仮定のもとでの非線形フィルタリングの問題の場合、条件つき確率密度関数が上記の  $C \exp\{-\frac{1}{\epsilon}\Phi(x)\}$  のような形になることは Hijab [25] により、大偏差理論を用いて証明された。

WKB 展開を用いれば、 $\epsilon$  の様々な次数の精度での近似フィルタが構成できる [39], [69]。また、それらとの比較から、拡張 Kalman フィルタ、統計的線形化法、2次フィルタなど古典的でヒューリスティックな近似フィルタの正当化が行える [69]。

特異摂動法の非線形フィルタリングへの少し違った適用法として Schuss ら [71], [10] の境界層の方法を用いたものがある。彼らは、通信の分野における代表的な非線形フィルタである PLL (Phase-locked loop) のサイクルスリップの確率を、雑音が小さいという仮定のもとで、境界層の方法を用いて漸近的に評価した。

非線形フィルタリングの中で課題 A) は、適応推定 [52], [5]、あるいは適応フィルタリング [54], [20] と呼ばれている。適応推定は、状態とパラメータをあわせたものを拡大された状態ベクトルと考えると状態方程式が非線形方程式になり、非線形フィルタの問題になる。

この適応推定の問題に対しては、Mehra の研究 [53], [54] をかわきりに、様々な仮定のもとで、理論とシミュレーションの両面から多くの研究が行なわれてきた [20], [38]。従来の適応推定へのアプローチは3種類にわけられる。すなわち、並列 Kalman フィルタ、システム同定手法の適用、拡張 Kalman フィルタの適用である。

(a) 並列 Kalman フィルタ [72], [48]

未知パラメータ  $\theta$  を離散化して有限個の値  $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n$  をとるものとし、各  $\theta_i$  ごとに Kalman フィルタを組む。各 Kalman フィルタから得られる推定値をそれぞれの共分散行列の逆行列で重み付けした和が状態推定値となる。この方法は安定ではあるが、離散化されたパラメータの個数がよほど少ないかぎり実現はむずかしい。たとえば5個のパラメータをそれぞれ10個に離散化すると  $10^5$  個の Kalman フィルタが必要ということになり、実際的な問題への適用は限定される。

(b) システム同定手法の適用 [38, 9.3 節]

システム同定はシステムの動特性のモデリング技術であるが、特に線形システムのパラメータ推定のために数多くの手法が研究されてきた。線形システムであれば、モデルが決まれば直ちに Kalman フィルタにより状態推定値が求められるから、殆どの逐次型のシステム同定のアルゴリズムはそのまま適応推定の問題へ適用できる。逐次型システム同定アルゴリズムの代表的なものには次のようなものがある。

- ・ 逐次型最小2乗法 (RLS: Recursive Least Squares method)
- ・ 一般化最小2乗法 (GLS: Generalized Least Squares method)
- ・ 補助変数法 (IV: Instrumental Variable method)
- ・ 拡大最小2乗法 (ELS: Extended Least Squares method)
- ・ 最尤推定法 (ML: Maximum Likelihood method)
- ・ 予測誤差法 (Prediction Error method)

これらのシステム同定アルゴリズムが対象としているのは、ARX モデルや ARMAX モデルのような差分方程式で記述されるモデルである。システム同定法は、基本的にシステムをブラックボックスとみてのモデリングであるから、すべてのパラメータが未知であっても適用できるかわりに、多入力多出力システムの場合には推定すべきパラメータの数が膨大になり、推定が困難になる。したがって、構造物のパラメータ推定のように、あらかじめシステムの性質がかなりわかっている場合には、上にあげたような一般的なシステム同定法をそのまま適用するのはあまり得策ではない。

(c) 拡張 Kalman フィルタの適用 [5, pp.284-285], [19, sec.9.1]

線形システムの状態とパラメータとをあわせて拡大された状態とみなし、この拡大された状態のフィルタリングを行う。これは非線形のフィルタリングの問題になるが、推定値のまわりでシステムを線形化して拡張 Kalman フィルタを適用することができる。この方法は単純であるがため、適応推定の研究の初期の頃から様々な問題に対して適用されてきた。しかしながら、この方法はそのまま用いるとモデルによってバイアスや発散が生じる危険性があり、それを回避するためには Ljung [51] が行ったような補正を加える必要がある。

一方、課題 B) は状態遷移にジャンプを伴うような確率過程の推定であり、非線形フィルタリングの問題の中でも特に非線形性の強い問題になる。というのは、ジャンプの直後には、状態の観測値に関する条件つき分布が、状態がジャンプ以前にあったところとジャンプで移ったところとの2ヶ所に峰をもつようになり、正規分布からはかけ離れた分布になるからである。このような、ジャンプを伴う確率過程の推定問題の例として、先にあげた目標追尾の問題以外にも次のようなものがある。

● 故障検知 (Fault detection) [87], [57]

運転中のシステムの出力を常時監視することにより、その特性の変化から、システムの故障を検知することができる。このシステム特性の変化は、ダイナミカルシステムのパラメータのジャンプとして表わされる。

● 画像のエッジ検出

雑音で汚された画像データからもとの画像を復元するためには、雑音を除去する空間フィルタが用いられる。しかしながら、この空間フィルタが単なるローパスフィルタであれば、雑音を除去すると共にエッジをもなませ、画像をぼやけさせてしまうから、鮮明な画像を得るためには、エッジ検出が必要になる。

このようなジャンプの検出が必要な推定問題に対して、従来から多くの統計的手法が研究されてきた。そのうち、理論的に最良の結果を与えるのは、多重仮説に基づく方法である [87]。この方法は完全に定式化すれば、離散化された各時刻ごとに、ジャンプが生じたか否か、あるいはどこにジャンプしたかで仮説を分岐させていく。各仮説ごとに、その仮説に基づく状態推定値とその仮説が真である事後確率とを求めておき、前者を後者で重み付けして和をとりそれを状態推定値とする。この方法は誤差の分散が最小になるという意味で最適な推定値を与えるものであるが、仮説の数が時間の経

過と共に指数関数的に増大し、膨大な計算が必要となるためそのままでは実装に適さない。

そこで、性能を若干犠牲にして、実現の容易なアルゴリズムを導くという立場から様々な方法が提案されてきた。その多くは残差系列に統計的仮説検定論を適用するもので [57], 中でも簡単なのは  $\chi^2$  検定を用いる方法である。これは、“ジャンプをしていない”という仮説が正しい場合には残差系列が白色ガウス、すなわち、その2乗和が  $\chi^2$  分布になることを利用して、その仮説の真偽の判定を行なうものである。この  $\chi^2$  検定を用いる方法は、その単純さから、目標追尾 [8], [67] や故障検知 [87] などで広く用いられている。しかしながらこの方法は、二者択一の決定を与えるだけのものではなく、たとえば、目標追尾に用いる場合には、目標の運動モードが変化したということの検出しか行えないし、故障検知においては、異常のアラーム機能を与えるにすぎない。また、ジャンプが発生した時間も正確に推定できない。

これらの点を改善するために提案されている手法として、一般化尤度比検定 [89] と逐次確率比検定がある [57]。このうち一般化尤度比検定は、ジャンプの発生した時間、方向、大きさまで最尤法で決定しようというもので、故障検知 [88] や、目標追尾におけるマヌーバの検出 [42] などへの応用が試みられている。また、逐次確率比検定は、2種類の誤り率（誤警報率と誤検出率）を与えたとき、ジャンプの有無の決定に要する時間が最小になるという特徴を有する。

このように、仮説検定論においてアルゴリズムに改良を加えていけば、推定値の精度を高め、引き出す情報を多くすることもできるが、一方でアルゴリズムは複雑になり、計算量も膨大になっていくというジレンマに陥る。

ここで再び Bayes 推定の立場に戻って考えてみると、ジャンプ過程の推定というのは、各時刻でのジャンプの有無の組合せの中で、観測データと確率過程に関する事前情報に最も適合するものを見つける問題としてみることができる。これは、先に述べた多重仮説の集合を探索空間とし、Bayes 推定における事後確率を評価関数とするような、組合せ最適化問題になる。よく知られているように、観測時間が長くなれば、組合せの数は爆発的に増加し、総当り式に調べていくことは不可能になる。

このような組合せ最適化問題に対して、最近、ニューラルネットワークを用いた新たな解決法が出てきた [26], [27], [2], [55], [41], [7], [1]。これは、大規模な分散並列処理により、組合せ最適化問題の準最適解を高速に見いだそうとするもので、巡回セールスマン問題を始めとして、多くの問題への適用例 [1], [41] が報告されている。先に、推

定問題の例としてあげた、画像のエッジ検出に対しても、Geman-Geman [18] は、ジャンプに関する多重仮説に相当する“ラインプロセス”を用いて、ニューロコンピューティングによるエッジ検出、および画像復元を行なっている。ニューラルネットワークの非線形フィルタリングへの応用はまだ始まったばかりであり、今後の発展が期待される。

### 1.3 本論文の目的と構成

本研究は以上のような過去の研究を顧みてなされたもので、宇宙・航空の分野における非線形推定問題に対する有効なアルゴリズムの開発をめざして、そこに含まれる非線形フィルタリングの基礎的な課題を解決する事を目的としている。

非線形フィルタリングの基本原理は、対象のダイナミックスを事前情報として Bayes の法則を適用することである。これは、連続時間の場合には Kushner の方程式という確率偏微分方程式で表わされる。このように原理は明確であるが、これから直ちに、非線形フィルタリングのアルゴリズムが導かれるわけではない。それは、基礎となる方程式が有限次元では閉じていないためであり、問題に応じて様々な近似法が必要となる。また、推定値の性能を評価する際にも、問題に応じた近似法が必要となる。

本研究では、宇宙・航空の分野での非線形フィルタリングの問題の例として、適応推定と、ジャンプ過程の推定の2つの問題を取り扱う。前者は柔軟な宇宙構造物の状態とパラメータとの同時推定への応用をめざしたものであり、後者はマヌーバを行なう目標の追尾への応用をめざしたものである。

適応推定は、従来から様々なアルゴリズムが提案され、研究も行なわれているが、非線形フィルタリングの基礎方程式から出発して、最適性の観点から、推定性能の原理的な限界は何か、そしてその限界に到達するためのアルゴリズムは何か、という疑問にはまだ十分な解答が得られていない。特に、未知パラメータが変動するような場合にそうである。本研究はこれらの疑問に対する明確な解答を与えることを目的としている。

一方、ジャンプ過程の推定に関しては、従来から仮説検定論を用いる推定法の研究は多く行なわれているが、非線形フィルタリングの立場から、どのような推定法が効果的かということは明らかにされていない。本研究では、非線形フィルタリングによるアプローチをとり、Bayes の法則から出発して、効果的な推定アルゴリズムを導くことを目的とする。特に、このような推定問題へのニューロコンピューティングの適用

法についての検討を行なう。

本論文は、序論、本論 6 章、および結論の 8 章からなっている。

序論（第 1 章）では、本研究の背景ならびに本研究に関する従来の研究について概説するとともに、本研究の目的と概略とを述べる。

第 2 章では、後の章で必要になる非線形フィルタリングの基礎的事項をまとめて示す。

第 3 章～第 5 章では、線形確率システムの状態とパラメータとを同時に推定する適応推定の問題を取りあげ、非線形フィルタによるアプローチと特異摂動法を用いて、推定性能の原理的な限界とそれに到達するための近似アルゴリズムの構成法を論じる。これは、宇宙の大規模構造物のような地上では動特性の把握が難しいシステムの、宇宙での状態とパラメータの同時推定への応用を目的としたものである。

第 3 章では、パラメータが固定の場合の適応推定を非線形フィルタの問題として考察し、Kushner 方程式の漸近特性を解析して、最適なパラメータ推定値の漸近的な挙動を明らかにする。さらに、特異摂動法を用いて、漸近的に最適な推定値を与える適応推定アルゴリズムを導く。

第 4 章は第 3 章の拡張であり、パラメータが時間と共に緩やかに変動する場合の適応推定について論じる。ここでも特異摂動法を用いることにより、パラメータが変動する場合の適応推定の原理的な性能限界は、Hamilton-Jacobi の方程式で記述されることを明らかにする。さらに、漸近的に最適な推定値を与えるアルゴリズムを導き、シミュレーションにより漸近最適性を検証する。

第 5 章では、大規模構造物のモデリングに当たって不可欠な低次元化の問題を取りあげ、低次元化モデルに基づく適応推定においてパラメータ推定値は、速い変数を無限に速くしていったときの極限において、必ずしもフルオーダーモデルに基づくパラメータ推定値と一致しないことを明らかにする。これは低次元化モデルに基づく状態推定の場合には現われなかった現象であり、パラメータ推定値のバイアスの原因を分析して、バイアスを生じさせないためのモデルの条件を示す。

第 6 章および第 7 章では、状態遷移にジャンプを伴うような確率過程の推定を取りあげ、ニューロコンピューティングによる状態の推定法と、推定器の中のパラメータの学習法を論じる。これは、マヌーバ目標の追尾のような、速度や加速度にジャンプを伴う過程の推定への応用を目的としたものである。

第 6 章では、ジャンプを伴う過程に対し、ニューラルネットによる分散処理で状態

推定を行なう方法を論じる。まず、マルコフジャンプ過程を取りあげ、状態推定をあるエネルギー関数の極値探索問題に帰着させる方法を示す。次に、シミュレーション結果を用いて、ニューラルネットで求めた状態推定値がジャンプを正しく検出していることを示す。さらに、この方法を速度がジャンプする過程の推定へ拡張する。

第 7 章では、第 6 章で導いた推定法の一般化のために、エネルギー関数を入出力データから決める学習の問題を論じる。まず推定性能がエネルギー関数の中に含まれるあるパラメータに大きく依存していることを示し、その適切な値は、確率近似法を用いることによりデータから推定することができることを示す。

第 8 章は本研究のまとめである。

## 第2章

# 非線形フィルタリングの基礎理論

### 2.1 まえがき

この章では、あとの章で必要となる非線形フィルタリングの基礎的事項についてまとめる。また、あとの章で非線形フィルタの解析やアルゴリズムの構成のためにしばしば用いる確率システムの特異摂動法についても要約して示す。

非線形フィルタリングで中心となる概念は、過去から現在までの観測結果を条件として与えたときの状態量の条件つき分布である。この分布は密度関数を用いて、条件つき確率密度関数として表現されることが多い。推定のための評価基準を適当に定めれば、この関数から最適な推定値を求めることができる。代表的な推定値に、条件つき期待値と事後最大確率 (MAP: Maximum A Posteriori Probability) 推定値がある。このうち条件つき期待値は、条件つき分散を最小にするという意味で最適な推定値であり、条件つき確率密度関数に状態量の座標を掛けて積分すれば得られる。また、MAP 推定値は条件つき確率密度関数の最大値を与えるような点である。

状態量の確率モデルとしては、通常、マルコフ過程が用いられる。それは、実用上出会う多くの確率過程が、次元を適当に拡大することによってマルコフ過程にできるということと、確率論的な取り扱いが単純になるということのためである。これは、連続時間でも離散時間でも同様である。特に連続時間のマルコフ過程は、確率微分方程式によって等価な表現ができるため、見通しよくモデリングを行うことができる。これに対して離散時間の場合には、線形システムの場合を除いてマルコフ過程と等価な確率差分方程式は存在しないから、直接、推移確率を用いて定式化せざるを得ない。ただし、状態や観測値の径路の関数空間を考えるとときには、離散時間の場合も有限次元ですむから理論的には平易になる。

観測値は一般に状態の非線形写像に雑音が付加されたものとして表現される。このうちの非線形写像は観測機構をモデル化したものであり、雑音はセンサー雑音や通信路に加わる雑音をモデル化したものである。

非線形フィルタリング理論で考察の対象とするのは、観測値に基づく状態の条件つき分布の時間発展である。原理的には時間が連続でも離散でも同一であるが、状態変数のモデルであるマルコフ過程の表現の違いから、時間が連続の場合と離散の場合とは基礎方程式に違いが出てくる。あとの第3章～第5章では適応推定問題を取り上げるが、そこでは連続時間の非線形フィルタリングの基礎方程式である Kushner の方程式を出発点として用いる。また第6章、第7章ではジャンプを伴う過程の状態推定問題を取り上げるが、そこでは離散時間の非線形フィルタリングとしての定式化のもとで Bayes 型公式を出発点として用いる。

そこで本章では、連続時間と離散時間のそれぞれの場合について、あとの章で用いる非線形フィルタリングの基礎方程式を示すことにする。なお、連続時間の Kushner の方程式ではシステム雑音と観測雑音が独立であることが条件になっているが、第3章での応用に際してはそれらに相関がある場合への拡張が必要になる。その拡張もあわせてこの章で示す。

また、あとの第3章～第5章での適応推定問題においては、非線形フィルタの解析やアルゴリズムの構成に特異摂動法をしばしば用いる。これは、確率システムに対する漸近的方法であり、確率過程論における極限定理を利用するものである。この方法についてもまとめてこの章で示すことにする。

### 2.2 連続時間の非線形フィルタ

#### 2.2.1 状態変数の確率微分方程式による表現

状態  $X_t$  は  $n$  次元ユークリッド空間  $R^n$  のマルコフ過程としてモデル化されるものとする。連続時間のマルコフ過程は、そのサンプルパスが連続な場合には、Itô の確率微分方程式を用いて等価な表現ができるから、始めからそれを用いてモデル化を行えばよい。ここではそのような、サンプルパスが連続なマルコフ過程を考えることにして、状態  $X_t$  は Itô の確率微分方程式

$$dX_t = f(X_t)dt + G(X_t)dV_t \quad (2.1)$$

で記述されるものとする。ここで、 $V_t$  は  $n_v$  次元の標準ブラウン運動とし、 $f(\cdot)$ 、 $G(\cdot)$  は  $\mathbf{R}$  から、それぞれ  $\mathbf{R}^n$ 、 $\mathbf{R}^{n \times n_v}$  への滑らかな関数とする。(2.1) 式で与えられるモデルの場合には、マルコフ過程に付随する生成作用素  $\mathcal{L}$  は  $\varphi(x)$ 、 $x \in \mathbf{R}^n$  を任意の滑らかなスカラー関数として

$$\mathcal{L}\varphi = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n Q_{ij}(x) \frac{\partial^2 \varphi(x)}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^n f_i(x) \frac{\partial \varphi(x)}{\partial x_i} \quad (2.2)$$

と表わせ、その共役作用素  $\mathcal{L}^*$  は

$$\mathcal{L}^*\varphi = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} [Q_{ij}(x)\varphi(x)] - \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} [f_i(x)\varphi(x)] \quad (2.3)$$

と表わせる。ここで、行列  $Q = \{Q_{ij}\}$  を

$$Q(x) = G(x)G^T(x) \quad (2.4)$$

と定義した。

上で導入した2つの作用素  $\mathcal{L}$ 、 $\mathcal{L}^*$  は、 $X_t$  と次のような関連をもつ。

#### (a) $X_t$ の任意の関数の時間発展

$\varphi(x)$ 、 $x \in \mathbf{R}^n$  を任意の滑らかな関数とする。そのとき  $\varphi(X_t)$  の時間増分は、Itô の公式を用いて計算することができて次式のようにになる。

$$d\varphi(X_t) = \mathcal{L}\varphi(X_t)dt + \frac{\partial \varphi(X_t)}{\partial x^T} G(X_t) dV_t \quad (2.5)$$

ここで、 $\mathcal{L}$  は (2.2) 式で定義した生成作用素であり、また

$$\frac{\partial \varphi(X_t)}{\partial x^T} \equiv \left. \frac{\partial \varphi(x)}{\partial x^T} \right|_{x=X_t} \quad (2.6)$$

$$\frac{\partial \varphi(x)}{\partial x^T} \equiv \left( \frac{\partial \varphi(x)}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial \varphi(x)}{\partial x_n} \right)^T \quad (2.7)$$

と略記した。以後も同様の略記法を用いる。

#### (b) Fokker-Planck 方程式

状態  $X_t$  の確率密度関数  $p(t, x)$  の時間発展は次の Fokker-Planck 方程式で記述される。

$$\frac{\partial}{\partial t} p(t, x) = \mathcal{L}^* p(t, x) \quad (2.8)$$

ここで、 $\mathcal{L}^*$  は (2.3) 式で定義した生成作用素  $\mathcal{L}$  の共役作用素である。(2.3) 式を代入すれば

$$\frac{\partial}{\partial t} p(t, x) = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} [Q_{ij}(x)p(t, x)] - \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} [f_i(x)p(t, x)] \quad (2.9)$$

となる。

#### 2.2.2 非線形フィルタの方程式

状態は前節の (2.1) 式で、また、観測値  $Y_t \in \mathbf{R}^m$  は次式で与えられるものとする。

$$dY_t = h(X_t)dt + DdW_t \quad (2.10)$$

ここで、 $W_t$  は  $m_w$  次元の標準ブラウン運動とし、 $h(\cdot)$  は  $\mathbf{R}^n$  から  $\mathbf{R}^m$  への滑らかな関数とする。また、 $D$  は  $m \times m_w$  行列で

$$R \equiv DD^T \quad (2.11)$$

が正則になることを仮定する。

非線形フィルタリングで求めたいのは、過去から現在までの観測値

$$Y_0^t \equiv \{Y_s, 0 \leq s \leq t\} \quad (2.12)$$

が与えられたときの、状態  $X_t$  の条件つき確率密度関数  $p_t(x) \equiv p(t, x | Y_0^t)$  である。システム雑音と観測雑音が独立な場合、すなわち二つのブラウン運動  $V_t$  と  $W_t$  が独立な場合には、 $p(t, x | Y_0^t)$  の時間発展は次の Kushner の方程式で記述される [45], [46]。

$$\begin{aligned} dp(t, x | Y_0^t) &= \mathcal{L}^* p(t, x | Y_0^t) dt + (h(x) - \hat{h}_t)^T p(t, x | Y_0^t) d\nu_t \\ d\nu_t &= R^{-1}(dY_t - \hat{h}_t dt) \end{aligned} \quad (2.13)$$

ここで  $\hat{h}_t$  は  $Y_0^t$  が与えられたときの条件つき期待値を表わし

$$\hat{h}_t = E[h(X_t) | Y_0^t] = \int_{\mathbf{R}^n} h(x)p(t, x | Y_0^t) dx \quad (2.14)$$

である。以後も条件つき期待値にはこの記法を用いる。Kushner の方程式は確率偏微分方程式であるから、實際上、これ自体を解いて状態の推定値を得ることは望み薄であるが、この方程式を用いて推定値の性質を調べたり、あるいは、この方程式から近似フィルタを導いたりするのに有効性を発揮する。

応用を考える場合には、もっと一般の、システム雑音と観測雑音とに相関があるようなモデルに関して、条件つき確率密度関数の発展方程式を導いておいた方が都合が

よい。たとえば、次章ではイノベーションモデルを扱うが、このモデルはシステム雑音と観測雑音が全く同じものになる。ここでは、(2.1), (2.10) 式で与えられるモデルで、システム雑音と観測雑音との間に

$$dV_t(dW_t)^T = C dt \quad (2.15)$$

という相関がある場合の条件つき確率密度関数の発展方程式を導くことにする。ここで、 $C$  は  $n_v \times n_w$  行列であり、(2.15) 式の正確な意味は、区間  $[a, b]$  を分割して  $a = t_0^{(\nu)} < t_1^{(\nu)} < \dots < t_\nu^{(\nu)} = b$ ,  $\delta_\nu = \max_k(t_k^{(\nu)} - t_{k-1}^{(\nu)})$  としたとき、

$$\lim_{\delta_\nu \rightarrow 0} \sum_{k=1}^{\nu} (V_{t_k} - V_{t_{k-1}})(W_{t_k} - W_{t_{k-1}})^T = (b-a)C \quad (2.16)$$

が2乗平均の意味で成立するということである [6, pp.49-50], [90, pp.59, 163].

補題を2つ準備する。

#### 補題 2.1

$\varphi(x)$ ,  $x \in \mathbf{R}^n$  を2回連続微分可能な任意のスカラー関数とし、過去から現在までの観測値  $Y_0^t$  に基づく  $\varphi(X_t)$  の条件つき期待値を

$$\hat{\varphi}_t = E[\varphi(X_t) | Y_0^t] \quad (2.17)$$

とおく。そのとき、過去から現在までの観測値  $Y_0^t$  と現在から微小時間  $\delta t$  後までの観測値  $\delta Y_t \equiv Y_{t+\delta t} - Y_t$  とに基づく  $\varphi(X_t)$  の条件つき期待値は、

$$E[\varphi(X_t) | Y_0^t, \delta Y_t] \cong \hat{\varphi}_t + (\widehat{\varphi}_{h_t} - \hat{\varphi}_t \widehat{h}_t)^T R^{-1} (\delta Y_t - \widehat{h}_t \delta t) \quad (2.18)$$

となる。ただし  $\cong$  は、その両辺が  $\delta t$  までのオーダーで一致することを意味する近似とする。

(証明) (2.18) 式の左辺は

$$E[\varphi(X_t) | Y_0^t, \delta Y_t] = \int_{\mathbf{R}^n} \varphi(x) p(t, x | Y_0^t, \delta Y_t) dx \quad (2.19)$$

と表わせるが、 $p(t, x | Y_0^t, \delta Y_t)$  は Bayes の法則により

$$p(t, x | Y_0^t, \delta Y_t) = \frac{p(\delta Y_t | t, x, Y_0^t) p(t, x | Y_0^t)}{\int_{\mathbf{R}^n} \text{Num } dx} \quad (2.20)$$

となる。ここで、Num は右辺の分子を表わす。この分子の中の  $p(\delta Y_t | t, x, Y_0^t)$  は現在の状態  $X_t = x$  と現在までの観測値  $Y_0^t$  が与えられたときの

$$\delta Y_t = \int_t^{t+\delta t} h(X_s) ds + D \delta W_t \quad (2.21)$$

の条件つき確率密度関数であるが、 $X_s, s \geq 0$  がマルコフ過程であることと、 $W_s, s \geq 0$  がブラウン運動であることから、 $\delta Y_t$  は  $X_t$  が与えられれば  $Y_0^t$  には依存しない。したがって

$$p(\delta Y_t | t, x, Y_0^t) = p(\delta Y_t | t, x) \quad (2.22)$$

となる。さらに、(2.21) 式は、

$$\delta Y_t \cong h(X_t) \delta t + D \delta W_t \quad (2.23)$$

と近似できるから、 $p(\delta Y_t | t, x)$  は具体的に表わせば

$$\begin{aligned} p(\delta Y_t | t, x) &\cong \frac{1}{(2\pi \delta t)^{m/2} |R|^{1/2}} \\ &\times \exp \left[ -\frac{1}{2} (\delta Y_t - h(x) \delta t)^T (R \delta t)^{-1} (\delta Y_t - h(x) \delta t) \right] \\ &= N \exp \left[ h^T(x) R^{-1} \delta Y_t - \frac{1}{2} h^T(x) R^{-1} h(x) \delta t \right] \end{aligned} \quad (2.24)$$

となる。ここで、 $N$  は  $x$  に関係しない ( $\delta Y_t$  には依存する) 定数である。(2.24) 式を(2.20) 式に代入すると

$$\frac{p(t, x | Y_0^t, \delta Y_t)}{p(t, x | Y_0^t)} \cong \frac{\exp \left[ h^T(x) R^{-1} \delta Y_t - \frac{1}{2} h^T(x) R^{-1} h(x) \delta t \right]}{\int_{\mathbf{R}^n} \exp \left[ h^T(x) R^{-1} \delta Y_t - \frac{1}{2} h^T(x) R^{-1} h(x) \delta t \right] p(t, x | Y_0^t) dx} \quad (2.25)$$

となる。右辺の分子を  $\delta t$  に関して Taylor 展開することにする。 $\delta Y_t$  は (2.23) 式により

$$\delta Y_t \delta Y_t^T \cong D \delta W_t (D \delta W_t)^T \cong R \delta t \quad (2.26)$$

を満たすから  $\delta t^{1/2}$  のオーダーになることに注意して展開すると

$$\begin{aligned} &\exp \left[ h^T(x) R^{-1} \delta Y_t - \frac{1}{2} h^T(x) R^{-1} h(x) \delta t \right] \\ &\cong 1 + h^T(x) R^{-1} \delta Y_t - \frac{1}{2} h^T(x) R^{-1} h(x) \delta t + \frac{1}{2} h^T(x) R^{-1} \delta Y_t \delta Y_t^T R^{-1} h(x) \\ &\cong 1 + h^T(x) R^{-1} \delta Y_t \end{aligned} \quad (2.27)$$

となる. この式から (2.25) 式の分母も

$$\int_{\mathbf{R}^n} \exp \left[ h^T(x) R^{-1} \delta Y_t - \frac{1}{2} h^T(x) R^{-1} h(x) \delta t \right] p(t, x | Y_0^t) dx \cong 1 + \hat{h}_t^T R^{-1} \delta Y_t \quad (2.28)$$

と表わせる. (2.27) 式と (2.28) 式とから (2.25) 式は次のようになる.

$$\begin{aligned} \frac{p(t, x | Y_0^t, \delta Y_t)}{p(t, x | Y_0^t)} &\cong \frac{1 + h^T(x) R^{-1} \delta Y_t}{1 + \hat{h}_t^T R^{-1} \delta Y_t} \\ &\cong (1 + h^T(x) R^{-1} \delta Y_t) (1 - \hat{h}_t^T R^{-1} \delta Y_t + \hat{h}_t^T R^{-1} \hat{h}_t \delta t) \\ &\cong 1 + h^T(x) R^{-1} \delta Y_t - \hat{h}_t^T R^{-1} \delta Y_t - h^T(x) R^{-1} \hat{h}_t \delta t + \hat{h}_t^T R^{-1} \hat{h}_t \delta t \\ &= 1 + (h(x) - \hat{h}_t)^T R^{-1} (\delta Y_t - \hat{h}_t \delta t) \end{aligned} \quad (2.29)$$

したがって

$$p(t, x | Y_0^t, \delta Y_t) \cong p(t, x | Y_0^t) + (h(x) - \hat{h}_t)^T R^{-1} (\delta Y_t - \hat{h}_t \delta t) p(t, x | Y_0^t) \quad (2.30)$$

となるから, これを, (2.19) 式に代入することにより (2.18) 式を得る.  $\square$

#### 補題 2.2

2つのガウス変数  $V, Y$  の平均と共分散を

$$\begin{aligned} EV &= \mu_V, \quad EY = \mu_Y \\ E(V - \mu_V)(V - \mu_V)^T &= C_{VV} \\ E(V - \mu_V)(Y - \mu_Y)^T &= C_{VY} \\ E(Y - \mu_Y)(Y - \mu_Y)^T &= C_{YY} \end{aligned}$$

とおく. そのとき,  $Y$  が与えられたときの  $V$  の条件つき期待値は

$$E(V | Y) = \mu_V + C_{VY} C_{YY}^{-1} (Y - \mu_Y) \quad (2.31)$$

となる. また, 上記の期待値  $E(\cdot)$  を, 別の確率変数  $X$  が与えられたときの条件つき期待値  $E(\cdot | X)$  に置き換えても同じことが成立する.

(証明) 前半は Bayes の公式を用いて  $p(v | y) = p(v, y) / p(y)$  を具体的に計算すれば得られる. 後半も  $p(v | y, x) = p(v, y | x) / p(y | x)$  により同様である.  $\square$

$\varphi(x), x \in \mathbf{R}^n$  を 2 回連続微分可能な任意のスカラ関数とし, 過去から現在までの観測値  $Y_0^t$  に基づく  $\varphi(X_t)$  の条件つき期待値を

$$\hat{\varphi}_t = E[\varphi(X_t) | Y_0^t] \quad (2.32)$$

とおく. 上の 2 つの補題を使って  $\hat{\varphi}_t$  の微小時間  $\delta t$  の後の値

$$\hat{\varphi}_{t+\delta t} = E[\varphi(X_{t+\delta t}) | Y_0^{t+\delta t}] \quad (2.33)$$

$$= E[\varphi(X_{t+\delta t}) | Y_0^t, \delta Y_t] \quad (2.34)$$

を計算することにする. ここでも, 補題 2.1 と同じく  $\delta t$  までのオーダーで一致するという意味での近似の記号  $\cong$  を用いる. まず, (2.5) 式により

$$d\varphi(X_t) = \mathcal{L}\varphi(X_t)dt + \frac{\partial \varphi(X_t)}{\partial x^T} G(X_t) dV_t \quad (2.35)$$

だから,

$$\varphi(X_{t+\delta t}) \cong \varphi(X_t) + \mathcal{L}\varphi(X_t)\delta t + \frac{\partial \varphi(X_t)}{\partial x^T} G(X_t)\delta V_t \quad (2.36)$$

が成り立つ. したがって,

$$\hat{\varphi}_{t+\delta t} \cong E[\varphi(X_t) + \mathcal{L}\varphi(X_t)\delta t | Y_0^{t+\delta t}] + E\left[\frac{\partial \varphi(X_t)}{\partial x^T} G(X_t)\delta V_t | Y_0^{t+\delta t}\right] \quad (2.37)$$

となる. ここで,  $\delta V_t = V_{t+\delta t} - V_t$  は, システム雑音の未来に突き出た部分を表わす.

(2.37) 式の右辺第 1 項は, 補題 2.1 により,

$$\begin{aligned} E[\varphi(X_t) + \mathcal{L}\varphi(X_t)\delta t | Y_0^t, \delta Y_t] \\ \cong \hat{\varphi}_t + \mathcal{L}\hat{\varphi}_t\delta t + (\widehat{\varphi}h_t - \hat{\varphi}_t\hat{h}_t)^T R^{-1} (\delta Y_t - \hat{h}_t\delta t) \end{aligned} \quad (2.38)$$

となる.

(2.37) 式の右辺の第 2 項は

$$\begin{aligned} E\left[\frac{\partial \varphi(X_t)}{\partial x^T} G(X_t)\delta V_t \mid Y_0^t, \delta Y_t\right] \\ = \int_{\mathbf{R}^{n_v}} \int_{\mathbf{R}^n} \frac{\partial \varphi(x)}{\partial x^T} G(x)\delta v p(t, x, \delta v | Y_0^t, \delta Y_t) dx d(\delta v) \end{aligned} \quad (2.39)$$

と表わせるが, この式の中の条件つき確率密度関数は Bayes の公式により

$$p(t, x, \delta v | Y_0^t, \delta Y_t) = p(\delta v | t, x, Y_0^t, \delta Y_t) p(t, x | Y_0^t, \delta Y_t) \quad (2.40)$$

となり、さらに、システム雑音の未来に突き出た部分  $\delta V_t$  は、現在の状態  $X_t = x$  が与えられれば、現在までの観測値  $Y_0^t$  とは独立になるから

$$p(t, x, \delta v | Y_0^t, \delta Y_t) = p(\delta v | t, x, \delta Y_t) p(t, x | Y_0^t, \delta Y_t) \quad (2.41)$$

と書ける。したがって、(2.39) 式は

$$\begin{aligned} & E \left[ \frac{\partial \varphi(X_t)}{\partial x^T} G(X_t) \delta V_t \middle| Y_0^t, \delta Y_t \right] \\ &= \int_{\mathbf{R}^n} \frac{\partial \varphi(x)}{\partial x^T} G(x) \int_{\mathbf{R}^{n_v}} \delta v p(\delta v | t, x, \delta Y_t) d(\delta v) \cdot p(t, x, | Y_0^t, \delta Y_t) dx \\ &= E \left\{ \frac{\partial \varphi(X_t)}{\partial x^T} G(X_t) E[\delta V_t | X_t, \delta Y_t] \middle| Y_0^t, \delta Y_t \right\} \end{aligned} \quad (2.42)$$

となる。この式の中の  $E[\delta V_t | X_t, \delta Y_t]$  は、補題 2.2 により計算することができる。仮定により、システム雑音の中の  $V_t$  と観測雑音の中の  $W_t$  はブラウン運動であり、かつ (2.15) 式のような相関をもつから、

$$E[\delta V_t | X_t] = 0 \quad (2.43)$$

$$E[\delta W_t | X_t] = 0 \quad (2.44)$$

$$E[\delta V_t (\delta W_t)^T | X_t] \cong C \delta t \quad (2.45)$$

が成り立つ。したがって

$$E[\delta Y_t | X_t] = E[h(X_t) \delta t + D \delta W_t | X_t] = h(X_t) \delta t \quad (2.46)$$

$$E[\delta V_t (\delta Y_t - h(X_t) \delta t)^T | X_t] \cong C D^T \delta t \quad (2.47)$$

$$E[(\delta Y_t - h(X_t) \delta t) (\delta Y_t - h(X_t) \delta t)^T | X_t] \cong D D^T \delta t \equiv R \delta t \quad (2.48)$$

であるから、補題 2.2 において  $V = \delta V_t$ ,  $Y = \delta Y_t$ ,  $X = X_t$  とすれば

$$E[\delta V_t | \delta Y_t, X_t] \cong C D^T R^{-1} (\delta Y_t - h(X_t) \delta t) \quad (2.49)$$

となる。これを (2.42) 式へ代入して補題 2.1 を用いると

$$\begin{aligned} & E \left[ \frac{\partial \varphi(X_t)}{\partial x^T} G(X_t) \delta V_t \middle| Y_0^t, \delta Y_t \right] \\ &\cong E \left[ \frac{\partial \varphi(X_t)}{\partial x^T} G(X_t) C D^T R^{-1} (\delta Y_t - h(X_t) \delta t) \middle| Y_0^t, \delta Y_t \right] \\ &\cong \left( \frac{\partial \varphi}{\partial x^T} G \right)_t C D^T R^{-1} (\delta Y_t - \hat{h}_t \delta t) \end{aligned} \quad (2.50)$$

が成り立つ。

(2.38) 式と (2.50) 式とを (2.37) 式へ代入すると

$$\hat{\varphi}_{t+\delta t} \cong \hat{\varphi}_t + \widehat{\mathcal{L}} \hat{\varphi}_t \delta t + \left[ (\widehat{\varphi} \hat{h}_t - \hat{\varphi}_t \hat{h}_t)^T + \left( \frac{\partial \varphi}{\partial x^T} G \right)_t C D^T \right] R^{-1} (\delta Y_t - \hat{h}_t \delta t) \quad (2.51)$$

となる。この式は、 $\delta t$  までのオーダーで成り立つ式であるが、極限移行  $\delta t \rightarrow 0$  を行うことにより、 $\hat{\varphi}_t$  の時間的发展の式

$$d\hat{\varphi}_t = \widehat{\mathcal{L}} \hat{\varphi}_t dt + \left[ (\widehat{\varphi} \hat{h}_t - \hat{\varphi}_t \hat{h}_t)^T + \left( \frac{\partial \varphi}{\partial x^T} G \right)_t C D^T \right] d\nu_t \quad (2.52)$$

$$d\nu_t = R^{-1} (dY_t - \hat{h}_t dt) \quad (2.53)$$

を得る。方程式 (2.52), (2.53) は、適当な条件のもとで厳密な証明が与えられている ([16], また [33] の Theorem 8.4.2, [43] の定理 7.25 参照) ものであるが、ここでは応用的見地から直観的な方法で導いた。

(2.52) 式はまた

$$\begin{aligned} & d \int_{\mathbf{R}^n} \varphi(x) p(t, x | Y_0^t) dx \\ &= \int_{\mathbf{R}^n} \left\{ \mathcal{L} \varphi(x) dt + \left[ \varphi(x) (h(x) - \hat{h}_t)^T + \frac{\partial \varphi(x)}{\partial x^T} G(x) C D^T \right] d\nu_t \right\} p(t, x | Y_0^t) dx \end{aligned} \quad (2.54)$$

と表わすことができる。 $p(t, x | Y_0^t)$  が  $x$  に関して 2 回微分可能で、かつ、 $|x| \rightarrow \infty$  において  $p(t, x | Y_0^t) \rightarrow 0$  となることを仮定すれば、この式の右辺を部分積分することにより

$$\begin{aligned} & d \int_{\mathbf{R}^n} \varphi(x) p(t, x | Y_0^t) dx \\ &= \int_{\mathbf{R}^n} \varphi(x) \left\{ \mathcal{L}^* p(t, x | Y_0^t) dt + (h(x) - \hat{h}_t)^T p(t, x | Y_0^t) d\nu_t \right. \\ &\quad \left. - \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} [G_i(x) C D^T p(t, x | Y_0^t)] d\nu_t \right\} dx \end{aligned} \quad (2.55)$$

と変形できる。ここで  $G_i(x)$  は  $G(x)$  の第  $i$  行を表わす。 $\varphi(x)$  は任意であったから、この式から

$$dp(t, x | Y_0^t)$$

$$= \mathcal{L}^* p(t, x | Y_0^t) dt + (h(x) - \hat{h}_t)^T p(t, x | Y_0^t) d\nu_t - \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} [G_i(x) C D^T p(t, x | Y_0^t)] d\nu_t \quad (2.56)$$

が得られる。この式は、条件つき確率密度関数の時間発展を表わしており、Kushner の方程式の拡張になっている。(2.56) 式は第3章で状態とパラメータとの条件つき確率密度関数の漸近形を求めるときに用いる。

### 2.2.3 非線形フィルタのモーメント方程式

過去から現在までの観測値が与えられたときの、状態の任意の関数の条件つき期待値の発展は (2.52), (2.53) 式で記述される。これと、Itô の公式を用いると、任意の次数の条件つきモーメントの方程式を求めることができる。ここでは、状態の条件つき期待値と条件つき共分散の方程式を導いておく。なお、条件つき期待値の記号  $\hat{\cdot}_t$  の添字  $t$  は式を煩雑にするから省略する。

#### (a) 条件つき期待値の方程式

$\varphi(x) = x_i$  とおくと、(2.2) 式により

$$\mathcal{L}x_i = f_i(x) \quad (2.57)$$

だから、(2.52) 式は

$$d\hat{x}_i = \hat{f}_i dt + \left[ \widehat{(x_i - \hat{x}_i)(h - \hat{h})^T} + \hat{G}_i C D^T \right] d\nu_t \quad (2.58)$$

となる。ベクトル形で表わせば

$$d\hat{x} = \hat{f} dt + \left[ \widehat{(x - \hat{x})(h - \hat{h})^T} + \hat{G} C D^T \right] d\nu_t \quad (2.59)$$

である。

#### (b) 条件つき共分散の方程式

$\varphi(x) = x_i x_j$  と置くと、(2.2) 式により

$$\mathcal{L}x_i x_j = x_i f_j(x) + x_j f_i(x) + Q_{ij}(x) \quad (2.60)$$

だから、(2.52) 式は

$$d(\widehat{x_i x_j}) = (\widehat{x_i f_j} + \widehat{f_i x_j} + \hat{Q}_{ij}) dt + \left[ \widehat{(x_i x_j h - \hat{x}_i \hat{x}_j \hat{h})^T} + (\widehat{x_i G_j} + \widehat{x_j G_i}) C D^T \right] d\nu_t \quad (2.61)$$

となる。一方、Itô の公式を用いると (2.58) 式から

$$\begin{aligned} d(\widehat{x_i x_j}) &= \widehat{x_i} d\widehat{x_j} + \widehat{x_j} d\widehat{x_i} \\ &\quad + \left[ \widehat{(x_i h - \hat{x}_i \hat{h})^T} + \hat{G}_i C D^T \right] R^{-1} \left[ \widehat{x_j h} - \widehat{x_j} \hat{h} + D C^T \hat{G}_j^T \right] dt \\ &= \widehat{x_i} \hat{f}_j dt + \widehat{x_i} (\widehat{x_j h} - \widehat{x_j} \hat{h})^T d\nu_t \\ &\quad + \widehat{x_j} \hat{f}_i dt + \widehat{x_j} (\widehat{x_i h} - \widehat{x_i} \hat{h})^T d\nu_t \\ &\quad + \left[ \widehat{(x_i h - \hat{x}_i \hat{h})^T} + \hat{G}_i C D^T \right] R^{-1} \left[ \widehat{x_j h} - \widehat{x_j} \hat{h} + D C^T \hat{G}_j^T \right] dt \end{aligned} \quad (2.62)$$

となるから、(2.61) 式から (2.62) 式を引くことにより条件つき共分散

$$\begin{aligned} P_{ij} &\stackrel{\text{def}}{=} \widehat{(x_i - \hat{x}_i)(x_j - \hat{x}_j)} \\ &= \widehat{x_i x_j} - \widehat{x_i} \widehat{x_j} \end{aligned} \quad (2.63)$$

の方程式が得られて

$$\begin{aligned} dP_{ij} &= d(\widehat{x_i x_j}) - d(\widehat{x_i} \widehat{x_j}) \\ &= \left\{ \widehat{x_i f_j} - \widehat{x_i} \hat{f}_j + \widehat{f_i x_j} - \widehat{f_i} \widehat{x_j} + \hat{Q}_{ij} \right. \\ &\quad \left. - \left[ \widehat{(x_i h - \hat{x}_i \hat{h})^T} + \hat{G}_i C D^T \right] R^{-1} \left[ \widehat{x_j h} - \widehat{x_j} \hat{h} + D C^T \hat{G}_j^T \right] \right\} dt \\ &\quad + \left\{ \widehat{(x_i x_j h - \hat{x}_i \hat{x}_j \hat{h})^T} - \widehat{x_i} \widehat{x_j} \hat{h} + 2 \widehat{x_i} \widehat{x_j} \hat{h} \right. \\ &\quad \left. + (\widehat{x_i G_j} + \widehat{x_j G_i} - \widehat{x_i} \hat{G}_j - \widehat{x_j} \hat{G}_i) C D^T \right\} d\nu_t \\ &= \left\{ \widehat{(x_i - \hat{x}_i)(f_j - \hat{f}_j)} + \widehat{(f_i - \hat{f}_i)(x_j - \hat{x}_j)} + \hat{Q}_{ij} \right. \\ &\quad \left. - \left[ \widehat{(x_i - \hat{x}_i)(h - \hat{h})^T} + \hat{G}_i C D^T \right] R^{-1} \left[ \widehat{(h - \hat{h})(x_j - \hat{x}_j)} + D C^T \hat{G}_j^T \right] \right\} dt \\ &\quad + \left\{ \widehat{(x_i - \hat{x}_i)(x_j - \hat{x}_j)(h - \hat{h})^T} \right. \\ &\quad \left. + \left[ \widehat{(x_i - \hat{x}_i)(G_j - \hat{G}_j)} + \widehat{(x_j - \hat{x}_j)(G_i - \hat{G}_i)} \right] C D^T \right\} d\nu_t \end{aligned} \quad (2.64)$$

となる。行列形で表わせば

$$\begin{aligned} dP &= \left\{ \widehat{(x - \hat{x})(f - \hat{f})^T} + \widehat{(f - \hat{f})(x - \hat{x})^T} + \hat{Q} \right. \\ &\quad \left. - \left[ \widehat{(x - \hat{x})(h - \hat{h})^T} + \hat{G} C D^T \right] R^{-1} \left[ \widehat{(h - \hat{h})(x - \hat{x})^T} + \hat{G} C D^T \right]^T \right\} dt \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \overbrace{(x - \hat{x})(h - \hat{h})^T d\nu_t(x - \hat{x})^T} + \overbrace{(x - \hat{x})d\nu_t^T DC^T(G - \hat{G})^T} \\
& + \overbrace{(G - \hat{G})CD^T d\nu_t(x - \hat{x})^T}
\end{aligned} \quad (2.65)$$

である。(2.59)式と(2.65)式は、第3章と第4章で適応推定アルゴリズムを導くときに用いる。

### 2.2.4 Kallianpur-Striebel の公式

非線形フィルタのアルゴリズムを考える場合には、Kushner の方程式や条件つきモーメントの方程式のような時間発展の確率微分方程式を出発点とすればよいが、条件つき分布の漸近的な特性を解析する場合には、確率微分方程式ではなく、関数空間上での Bayes 型の公式を用いる方が便利ながある。それが、ここで示す Kallianpur-Striebel の公式である。

いま、時間  $T > 0$  を任意に一つ固定し、 $\Omega_x, \Omega_y$  を  $[0, T]$  からそれぞれ、 $\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^m$  への連続関数の空間とする。 $\Omega_x, \Omega_y$  の元をそれぞれ、 $\mathbf{x} = \{x_t; 0 \leq t \leq T\}$ ,  $\mathbf{y} = \{y_t; 0 \leq t \leq T\}$  と表わす。さらに、 $\mathbf{X} = \{X_t; 0 \leq t \leq T\}$ ,  $\mathbf{Y} = \{Y_t; 0 \leq t \leq T\}$  とおくと、これらはそれぞれ  $\Omega_x, \Omega_y$  に値をとる確率変数とみなせる。観測値によらずに、(2.1)式だけで決まる  $\mathbf{X}$  の分布を  $P_X$  とおく。このとき、 $\mathbf{X}$  の  $\mathbf{Y}$  に関する条件つき分布  $P_{X|Y}$  は、次式で与えられる。

$$dP_{X|Y} = \frac{\Lambda_T dP_X}{\int_{\Omega_x} \Lambda_T dP_X} \quad (2.66)$$

$$\Lambda_T = \exp \left\{ -\frac{1}{2} \int_0^T h^T(x_t) R^{-1} h(x_t) dt + \int_0^T h^T(x_t) R^{-1} dY_t \right\} \quad (2.67)$$

この公式は Bucy [12] によってその原型が与えられ、Kallianpur-Striebel [34] によって厳密な証明がなされた(詳細は文献 [33] の Theorem 11.3.1, [43] の 7.2 節, [50] の Vol.I, Chap.7 を参照)。(2.66), (2.67) 式は、第4章でパラメータの条件つき確率密度関数の漸近形を求めるときに用いる。

### 2.3 離散時間の非線形フィルタ

状態  $X_k, k = 0, 1, 2, \dots$  は  $n$  次元ユークリッド空間  $\mathbf{R}^n$  に値をとるマルコフ過程とする。マルコフ過程  $X_k$  は初期値の確率密度関数  $p_0(x_0)$  と、推移確率密度関数  $p(x_k | x_{k-1})$

とを与えれば確率的には完全に記述できる。なぜなら、 $(X_0, X_1, \dots, X_k)$  の同時確率密度関数は、そのマルコフ性から

$$p(x_0, x_1, \dots, x_k) = p(x_k | x_{k-1}) p(x_{k-1} | x_{k-2}) \cdots p(x_1 | x_0) p_0(x_0) \quad (2.68)$$

と表わせるからである

たとえば、状態の初期値が平均 0, 共分散  $Q_0$  のガウス変数で、 $X_k$  が

$$X_k = f(X_{k-1}) + GV_k \quad (2.69)$$

という確率差分方程式で記述されるものとする。ここで、 $f(\cdot)$  は  $\mathbf{R}^n$  から  $\mathbf{R}^n$  への滑らかな関数とし、 $V_k, k = 1, 2, \dots$  は平均が 0 で共分散が単位行列になるような  $n_v (\geq n)$  次元の白色ガウス雑音とする。また、 $G$  は  $n \times n_v$  行列で

$$Q \equiv GG^T \quad (2.70)$$

が正則になると仮定する。このとき、初期値の確率密度関数は

$$p_0(x_0) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^n |Q_0|}} \exp \left\{ -\frac{1}{2} x_0^T Q_0^{-1} x_0 \right\} \quad (2.71)$$

で、推移確率密度関数は

$$p(x_k | x_{k-1}) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^{n_v} |Q|}} \exp \left\{ -\frac{1}{2} (x_k - f(x_{k-1}))^T Q^{-1} (x_k - f(x_{k-1})) \right\} \quad (2.72)$$

で与えられる。

観測値  $Y_k, k = 1, 2, \dots$  は  $m$  次元ユークリッド空間  $\mathbf{R}^m$  に値をとる確率過程で

$$Y_k = h(X_k) + DW_k \quad (2.73)$$

で与えられるものとする。ここで、 $h$  は  $\mathbf{R}^n$  から  $\mathbf{R}^m$  への滑らかな写像とし、 $W_k, k = 1, 2, \dots$  は平均が 0 で共分散が単位行列になるような  $m_w (\geq m)$  次元の白色ガウス雑音とする。また、 $D$  は  $m \times m_w$  行列で

$$R \equiv DD^T \quad (2.74)$$

が正則になると仮定する。

過去から現在までの観測値の系列を

$$Y_1^k = \{Y_1, Y_2, \dots, Y_k\} \quad (2.75)$$

と表わす。そのとき、現在までの状態の系列

$$\mathbf{X}_k = (X_0, X_1, \dots, X_k)^T \quad (2.76)$$

の  $Y_1^k$  に関する条件つき確率密度関数は Bayes の公式を用いて

$$p(\mathbf{x}_k | Y_1^k) = \frac{p(Y_1^k | \mathbf{x}_k)p(\mathbf{x}_k)}{p(Y_1^k)} \quad (2.77)$$

と表わされる。ここで  $\mathbf{x}_k \equiv (x_0, x_1, \dots, x_k)^T$  は  $n(k+1)$  次元ベクトルである。(2.77) 式の右辺のうち  $p(Y_1^k | \mathbf{x}_k)$  は観測機構に関する仮定 (2.73) 式から

$$\begin{aligned} p(Y_1^k | \mathbf{x}_k) &\equiv p(Y_1, \dots, Y_k | x_0, \dots, x_k) \\ &= p(Y_1 | x_1) \cdots p(Y_k | x_k) \\ &= \prod_{i=1}^k \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^m |R|}} \exp \left\{ -\frac{1}{2} (Y_i - h(x_i))^T R^{-1} (Y_i - h(x_i)) \right\} \\ &= N_1 \exp \left\{ -\frac{1}{2} \sum_{i=1}^k (Y_i - h(x_i))^T R^{-1} (Y_i - h(x_i)) \right\} \end{aligned} \quad (2.78)$$

となる。ここで、 $N_1$  は規格化定数であり、以後  $N_2, N_3, \dots$  も同様に、規格化定数を表わすものとする。(2.77) 式の右辺の分子のもう一つの項  $p(\mathbf{x}_k)$  は、(2.68) 式により

$$\begin{aligned} p(\mathbf{x}_k) &\equiv p(x_0, x_1, \dots, x_k) \\ &= p_0(x_0) \prod_{i=1}^k p(x_i | x_{i-1}) \\ &= p_0(x_0) \exp \left\{ \sum_{i=1}^k \log p(x_i | x_{i-1}) \right\} \end{aligned} \quad (2.79)$$

となる。(2.78) 式と (2.79) 式を (2.77) 式に代入すれば

$$\begin{aligned} p(\mathbf{x}_k | Y_1^k) &= N_2 p_0(x_0) \exp \left\{ \sum_{i=1}^k \left[ -\frac{1}{2} (Y_i - h(x_i))^T R^{-1} (Y_i - h(x_i)) + \log p(x_i | x_{i-1}) \right] \right\} \end{aligned} \quad (2.80)$$

を得る。 $\mathbf{X}_k$  の MAP 推定値はこの式の右辺を最大にするような  $\mathbf{x}_k$  であるが、それはまた

$$\mathcal{E} \equiv \sum_{i=1}^k \left[ \frac{1}{2} (Y_i - h(x_i))^T R^{-1} (Y_i - h(x_i)) - \log p(x_i | x_{i-1}) \right] - \log p_0(x_0) \quad (2.81)$$

を最小にするような  $\mathbf{x}_k$  に等しい。この (2.81) 式は、局所的な評価関数の和として表現されていて、ニューロコンピューティングのような並列分散型の処理で極値を求めるのに都合のよい形になっている。

特に、状態が (2.69) 式のような確率差分方程式で記述される場合には、(2.80) 式は (2.71), (2.72) 式を代入することにより、もう少し具体的に表わすことができ

$$\begin{aligned} p(\mathbf{x}_k | Y_1^k) &= N_3 \exp \left\{ -\frac{1}{2} x_0 Q_0^{-1} x_0 \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^k \left[ (Y_i - h(x_i))^T R^{-1} (Y_i - h(x_i)) + (x_i - f(x_{i-1}))^T Q^{-1} (x_i - f(x_{i-1})) \right] \right\} \end{aligned} \quad (2.82)$$

となり、また (2.81) 式に対応するものは

$$\begin{aligned} \mathcal{E} &\equiv -\frac{1}{2} x_0 Q_0^{-1} x_0 \\ &\quad - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^k \left[ (Y_i - h(x_i))^T R^{-1} (Y_i - h(x_i)) + (x_i - f(x_{i-1}))^T Q^{-1} (x_i - f(x_{i-1})) \right] \end{aligned} \quad (2.83)$$

となる。この (2.83) 式の中の関数  $f(\cdot)$ ,  $g(\cdot)$  は仮定により滑らかだから、勾配法により  $\mathcal{E}$  の極値を求めることができる。この勾配法を並列分散処理で実現するのがニューロコンピューティングである。ニューロコンピューティングの非線形フィルタリングへの応用については、第6章と第7章で述べる。そこでは、状態遷移にジャンプを伴うような過程の推定を扱うから、状態は (2.69) 式のような確率差分方程式では記述できない。したがって、(2.77) 式、あるいは (2.80) 式の Bayes 型公式を出発点として選び、(2.81) 式に類似の評価関数を導く。

(2.80) 式は  $\mathbf{X}_k = (X_0, X_1, \dots, X_k)$  という過去から現在までの状態の系列の条件つき確率密度関数であるから、上述の  $\mathbf{X}_k$  の推定値を求めるということは、正確にいえばスムージングの問題を取り扱っていることになる。これに対して、現在の状態量だけの条件つき確率密度関数の逐次型の公式を導くこともできる。まず、(2.77) 式を次のように変形する。

$$p(\mathbf{x}_k | Y_1^k) = \frac{p(Y_1, \dots, Y_k | x_0, \dots, x_k) p(x_0, \dots, x_k)}{p(Y_1^k)}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{p(Y_k | x_k) p(Y_1^{k-1} | x_0, \dots, x_{k-1}) p(x_k | x_{k-1}) p(x_0, \dots, x_{k-1})}{P(Y_1^{k-1}, Y_k)} \\
&= \frac{p(Y_k | x_k) p(x_k | x_{k-1}) p(x_0, \dots, x_{k-1} | Y_1^{k-1})}{p(Y_k | Y_1^{k-1})} \quad (2.84)
\end{aligned}$$

次にこの式を  $x_0, \dots, x_{k-1}$  で積分すれば

$$\begin{aligned}
p(x_k | Y_1^k) &= \frac{p(Y_k | x_k) \int_{\mathbf{R}^n} p(x_k | x_{k-1}) p(x_{k-1} | Y_1^{k-1}) dx_{k-1}}{p(Y_k | Y_1^{k-1})} \\
&= \frac{p(Y_k | x_k) \int_{\mathbf{R}^n} p(x_k | x_{k-1}) p(x_{k-1} | Y_1^{k-1}) dx_{k-1}}{\int_{\mathbf{R}^n} \text{Num } dx_k} \quad (2.85)
\end{aligned}$$

となる. ここで Num は右辺の分子を表わす. (2.85) 式は, 新たな観測値の加わる都度の, 条件つき確率密度関数の更新の式であり, 差分積分方程式になっている. これは連続時間の場合の Kushner の方程式に対応するものである.

## 2.4 確率システムにおける特異摂動法

確率システムが2つの時間スケールをもち, 状態変数が速い変数と遅い変数とに分類できるとき, 速い変数を無限に速くしていった極限における遅い変数の漸近的ふるまいを調べることがしばしば有用になる. これは特異摂動の問題になり, 平均化法や Papanicolaou-Stroock-Varadhan の定理などが適用できる [47], [15], [73]. このあとの第3章~第5章では, これらの特異摂動法を用いて非線形フィルタの漸近的性質の解析や近似アルゴリズムの構成を行う. そこで本節では, それらの特異摂動法をまとめて示すことにする.

### 2.4.1 平均化法

$\epsilon$  を小さいパラメータ,  $X_t^\epsilon \in \mathbf{R}^n$  を遅い変数,  $Y_t^\epsilon \in \mathbf{R}^m$  を速い変数として, それらの方程式系が

$$dX_t^\epsilon = f_X(X_t^\epsilon, Y_t^\epsilon) dt + G_X(X_t^\epsilon, Y_t^\epsilon) dW_t, \quad X_0^\epsilon = x_0, \quad (2.86)$$

$$dY_t^\epsilon = \frac{1}{\epsilon} f_Y(X_t^\epsilon, Y_t^\epsilon) dt + \frac{1}{\sqrt{\epsilon}} G_Y(X_t^\epsilon, Y_t^\epsilon) dW_t, \quad Y_0^\epsilon = y_0, \quad (2.87)$$

という形に与えられたとする. ここで,  $W_t \in \mathbf{R}^{n+m}$  は標準ブラウン運動であり, 係数  $f_X(x, y), G_X(x, y), f_Y(x, y), G_Y(x, y)$  は滑らかであるとする. 基本的な仮定は,  $x$  を

固定するごとに

$$d\bar{Y}_t = f_Y(x, \bar{Y}_t) dt + G_Y(x, \bar{Y}_t) dW_t, \quad \bar{Y}_0 = y_0 \quad (2.88)$$

の解  $\bar{Y}_t$  がエルゴード過程になることである.  $\bar{Y}_t$  の定常確率密度関数を  $\bar{p}(y; x)$  とおく. このとき,  $\epsilon \rightarrow 0$  において  $X_t^\epsilon$  の分布は次式の解  $\bar{X}_t$  の分布に収束する [73, p.142].

$$d\bar{X}_t = \bar{f}_X(\bar{X}_t) dt + \bar{G}_X(\bar{X}_t) dW_t, \quad \bar{X}_0 = x_0 \quad (2.89)$$

ここで, 各係数は次式で定義される.

$$\bar{f}_X(x) = \int_{\mathbf{R}^m} \bar{p}(y; x) f_X(x, y) dy \quad (2.90)$$

$$\bar{G}_X(x) = \bar{Q}^{1/2}(x) \quad (2.91)$$

$$\bar{Q}(x) = \int_{\mathbf{R}^m} \bar{p}(y; x) G_X(x, y) G_X^T(x, y) dy \quad (2.92)$$

通常, 方程式系 (2.86), (2.87) 式において主として興味のあるのは, 遅い変数の十分長い時間にわたってのふるまいである. 上記の結果は, 遅い変数だけを単独のマルコフ過程で近似するのに利用できる. この近似法は平均化法と呼ばれる [47].

なお, (2.86) 式の中の拡散項の係数  $G_X(x, y)$  が  $y$  に依存しない場合には, もう少し強い結果が得られる. 例えば, 遅い変数の方程式 (2.86) が拡散項を含まない場合がそうである.  $G_X(x, y)$  のかわりに  $G_X(x)$  と書く. そのとき,  $\epsilon \rightarrow 0$  において  $X_t^\epsilon$  は次式の解  $\bar{X}_t$  に確率1で収束する [15, p.264].

$$d\bar{X}_t = \bar{f}_X(\bar{X}_t) dt + G_X(\bar{X}_t) dW_t, \quad \bar{X}_0 = x_0 \quad (2.93)$$

ここで  $\bar{f}_X(x)$  は (2.90) 式で定義された関数である.

さらに, 方程式系 (2.86), (2.87) よりも一般的に, 次のような方程式系を考える.

$$\begin{aligned}
dX_t^\epsilon &= [f_X(X_t^\epsilon, Y_t^\epsilon) + \sqrt{\epsilon} f_X^{(1)}(X_t^\epsilon, Y_t^\epsilon)] dt \\
&\quad + [G_X(X_t^\epsilon, Y_t^\epsilon) + \sqrt{\epsilon} G_X^{(1)}(X_t^\epsilon, Y_t^\epsilon)] dW_t, \quad X_0^\epsilon = x_0, \quad (2.94)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
dY_t^\epsilon &= \frac{1}{\epsilon} [f_Y(X_t^\epsilon, Y_t^\epsilon) + \sqrt{\epsilon} f_Y^{(1)}(X_t^\epsilon, Y_t^\epsilon)] dt \\
&\quad + \frac{1}{\sqrt{\epsilon}} [G_Y(X_t^\epsilon, Y_t^\epsilon) + \sqrt{\epsilon} G_Y^{(1)}(X_t^\epsilon, Y_t^\epsilon)] dW_t, \quad Y_0^\epsilon = y_0, \quad (2.95)
\end{aligned}$$

右辺の関数はすべて滑らかであるとする。この場合にも、 $\epsilon \rightarrow 0$  において  $X_t^\epsilon$  の分布は (2.89) 式の解  $\tilde{X}_t$  の分布に収束する。すなわち、(2.94), (2.95) 式において付け加わった項  $f_X^{(1)}, G_X^{(1)}, f_Y^{(1)}, G_Y^{(1)}$  は極限の分布に影響を与えない。したがって、これらの項は漸近的に無視できる項であり、方程式系 (2.86), (2.87) と、方程式系 (2.94), (2.95) とは漸近的に等価になる。この性質は第 3 章と第 4 章で適応推定アルゴリズムを導くときに用いる。

#### 2.4.2 Papanicolaou-Stroock-Varadhan の極限定理

$\epsilon > 0$  を小さいパラメータ、 $X_t^\epsilon \in \mathbf{R}^n$  を遅い変数、 $Y_t^\epsilon \in \mathbf{R}^m$  を速い変数として、それらの方程式系が

$$\begin{aligned} dX_t^\epsilon &= \left[ \frac{1}{\sqrt{\epsilon}} h(X_t^\epsilon, Y_t^\epsilon) + f_X(X_t^\epsilon, Y_t^\epsilon) \right] dt \\ &\quad + G_X(X_t^\epsilon, Y_t^\epsilon) dW_t, \quad X_0^\epsilon = x_0, \end{aligned} \quad (2.96)$$

$$\begin{aligned} dY_t^\epsilon &= \frac{1}{\epsilon} \left[ f_Y(X_t^\epsilon, Y_t^\epsilon) + \sqrt{\epsilon} f_Y^{(1)}(X_t^\epsilon, Y_t^\epsilon) \right] dt \\ &\quad + \frac{1}{\sqrt{\epsilon}} \left[ G_Y(X_t^\epsilon, Y_t^\epsilon) + \sqrt{\epsilon} G_Y^{(1)}(X_t^\epsilon, Y_t^\epsilon) \right] dW_t, \quad Y_0^\epsilon = y_0, \end{aligned} \quad (2.97)$$

という形に与えられたとする。ここで、 $W_t \in \mathbf{R}^{n+m}$  は標準ブラウン運動である。右辺の関数はすべて滑らかであるとする。前と同様に (2.88) 式の解  $\tilde{Y}_t$  がエルゴード過程になることを仮定する。さらに、中心化条件と呼ばれる

$$\int_{\mathbf{R}^m} h(x, y) \bar{p}(y; x) dy \equiv 0 \quad (2.98)$$

を仮定する。そのとき、 $\epsilon \rightarrow 0$  において  $X_t^\epsilon$  の分布は次式の解  $\tilde{X}_t$  の分布に収束する [68].

$$d\tilde{X}_t = \tilde{f}_X(\tilde{X}_t) dt + \tilde{G}_X(\tilde{X}_t) dW_t, \quad \tilde{X}_0 = x_0 \quad (2.99)$$

この右辺の係数を書き表すためには少し準備が必要である。まず、(2.88) 式の  $\tilde{Y}_t$  の推移確率密度関数を  $p(t, y, y'; x)$  と置く：

$$p(t, y, y'; x) dy' = \Pr\{\tilde{Y}_t(x) \in [y', y' + dy'] | \tilde{Y}_0(x) = y\} \quad (2.100)$$

さらに

$$\psi(y, y'; x) = \int_0^\infty [p(t, y, y'; x) - \bar{p}(y'; x)] dt \quad (2.101)$$

$$\alpha(x, y) = \int_{\mathbf{R}^m} \psi(y, y'; x) h(x, y') dy' \quad (2.102)$$

と置く。(2.99) 式の拡散過程の係数は、この  $\alpha(x, y)$  を用いて次のように定義される。

$$\begin{aligned} \tilde{f}_{X,i}(x) &= \int_{\mathbf{R}^m} \bar{p}(y; x) \left[ f_{X,i}(x, y) + \sum_j h_j(x, y) \frac{\partial \alpha_i(x, y)}{\partial x_j} \right. \\ &\quad + \sum_k f_{Y,k}^{(1)}(x, y) \frac{\partial \alpha_i(x, y)}{\partial y_k} + \sum_{j,k} (G_X G_Y^T)_{jk}(x, y) \frac{\partial^2 \alpha_i(x, y)}{\partial x_j \partial y_k} \\ &\quad \left. + \sum_{k,l} (G_Y G_Y^{(1)T})_{kl}(x, y) \frac{\partial^2 \alpha_i(x, y)}{\partial y_k \partial y_l} \right] dy \end{aligned} \quad (2.103)$$

$$\tilde{G}_X(x) = \tilde{Q}^{1/2}(x) \quad (2.104)$$

$$\begin{aligned} \tilde{Q}_{ij}(x) &= \int_{\mathbf{R}^m} \bar{p}(y; x) \left[ (G_X G_X^T)_{ij}(x, y) + 2 \sum_k (G_X G_Y^T)_{jk}(x, y) \frac{\partial \alpha_i(x, y)}{\partial y_k} \right. \\ &\quad \left. + 2 h_j(x, y) \alpha_i(x, y) \right] dy \end{aligned} \quad (2.105)$$

(2.103) 式と (2.105) 式は、第 5 章で低次元化適応推定器の漸近的性質を調べるときに用いる。

#### 2.4.3 線形特異摂動システム

前節の方程式系 (2.96), (2.97) の特別な場合として次のような線形の方程式系を考える。

$$dX_t^\epsilon = \left[ \frac{1}{\sqrt{\epsilon}} F_{12} Y_t^\epsilon + F_1 X_t^\epsilon \right] dt + G_1 dW_t \quad (2.106)$$

$$dY_t^\epsilon = \frac{1}{\epsilon} \left[ F_2 Y_t^\epsilon + \sqrt{\epsilon} F_{21} X_t^\epsilon \right] dt + \frac{1}{\sqrt{\epsilon}} G_2 dW_t \quad (2.107)$$

ここで、行列  $F_1$  と  $F_2$  は安定な行列になることを仮定する。(2.106), (2.107) 式は、変数  $Z_t^\epsilon \equiv Y_t^\epsilon / \sqrt{\epsilon}$  を用いて書き直すと

$$dX_t^\epsilon = (F_1 X_t^\epsilon + F_{12} Z_t^\epsilon) dt + G_1 dW_t \quad (2.108)$$

$$\epsilon dZ_t^\epsilon = (F_{21} X_t^\epsilon + F_2 Z_t^\epsilon) dt + G_2 dW_t \quad (2.109)$$

となる。(2.108), (2.109) 式は線形特異摂動システムと呼ばれ、推定や制御の低次元化のためのモデルとしてよく用いられる [21], [22], [78], [40].

(2.88) 式に対応するものは

$$d\bar{Y}_t = F_2 \bar{Y}_t dt + G_2 dW_t \quad (2.110)$$

であるが、この解はエルゴディックであり、定常分布は平均0のガウス分布になる。したがって中心化条件も満たされるから、Papanicolaou-Stroock-Varadhan の定理が適用できて、 $\epsilon \rightarrow 0$  のとき、 $X_t^\epsilon$  の分布は次式の解  $\bar{X}_t$  の分布に収束する。

$$d\bar{X}_t = F \bar{X}_t dt + G dW_t \quad (2.111)$$

ここで係数は

$$F = F_1 - F_{12} F_2^{-1} F_{21} \quad (2.112)$$

$$G = G_1 - F_{12} F_2^{-1} G_2 \quad (2.113)$$

で与えられる。なお、線形の特異摂動システムの場合には、このような分布の収束だけでなく、サンプルごとの収束、すなわち、概収束をすることがわかっている [21]。

線形特異摂動システムの遅い変数が方程式 (2.111) の解で近似できることは、第5章で低次元化モデルを導くときに利用する。

## 2.5 まとめ

本章では、あとの章で必要になる非線形フィルタリング理論の基礎と確率システムにおける特異摂動法についてまとめた。

非線形フィルタリングの原理は、対象とする状態のダイナミクスを事前情報としての Bayes の法則の適用であり、それから得られるものは観測に基づく状態の事後分布である。通常、状態のダイナミクスはマルコフ過程で表現され、観測値は状態変数の非線形写像に観測雑音が付加されたものとして表現される。また、状態の事後分布は、密度関数を用いて、観測値に基づく状態の条件つき確率密度関数として表現されることが多い。非線形フィルタリング理論で考察の対象とするのは、この条件つき確率密度関数の時間発展であるが、連続時間と離散時間とはその取り扱いが若干異なる。

連続時間の場合には、条件つき確率密度関数の時間発展は Kushner の方程式で表わされる。これは確率偏微分方程式である。Kushner の方程式は、システム雑音と観測雑音が独立な場合に成り立つ方程式であるが、あとの第3章では、これら2種類

の雑音が独立ではないイノベーションモデルを取り扱う。そのため Kushner の方程式を拡張して、2種類の雑音の間に相関があるような場合の条件つき確率密度関数の時間発展の方程式 (2.56) を導いた。この式を第3章で状態とパラメータの条件つき確率密度関数の漸近形を導くときに用いる。

拡張された Kushner の方程式 (2.56) から、条件つき期待値および条件つき共分散の時間発展を表わす方程式 (2.59), (2.65) が得られるが、これらは第3章と第4章で適応推定アルゴリズムを導くときに用いる。

また、条件つき分布の漸近的な特性を解析するときには、Kushner 型の時間発展の方程式を出発点とするよりも、径路を要素とする関数空間上での Bayes 型の公式を用いる方が便利なことがある。その公式が Kallianpur-Striebel の公式 (2.66), (2.67) である。第4章でパラメータの条件つき確率密度関数の漸近形を導くときには、この公式を出発点として用いる。

離散時間の場合には、Kushner の方程式に対応するのは (2.85) 式の差分積分方程式である。この方程式が条件つき確率密度関数の時間発展を記述する。しかしながら、あとの第6章、第7章で離散時間の非線形フィルタリングの問題へニューロコンピューティングを応用するときには、(2.85) 式のような時間発展型の方程式を用いるよりも、条件つき確率密度関数を陽に書き表わして、それを出発点にする方が都合がよい。(2.77) 式あるいは (2.80) 式はそのような条件つき確率密度関数の表現であり、第6章ではこれらを用いてニューロコンピューティングのためのエネルギー関数を求める。本章でも、状態変数が (2.69) 式のような確率差分方程式で記述できる場合のエネルギー関数として (2.83) 式を与えたが、第6章、第7章で取り扱うジャンプを伴う過程の場合には、条件つき確率密度関数が特異性を有することになるため、エネルギー関数の決め方に若干の工夫が必要になる。そこで第6章では (2.77) 式の表現をもとにして考察を加える。

非線形フィルタの漸近的性質を調べたり、それに基づいて近似アルゴリズムを構成したりするときには、確率システムの特異摂動法が有用になる。これは2つの時間スケールをもつシステムにおいて、時間スケールの比  $\epsilon$  を0に近づけたときの遅い変数のダイナミクスを記述するものである。本章で述べた平均化法や Papanicolaou-Stroock-Varadhan の定理は、非線形確率システムに対する特異摂動法の最も一般的な結果である。このうち、平均化法から派生する漸近的に無視できる項の考え方は、第3章及び第4章で適応推定アルゴリズムを導くときに用いる。また、Papanicolaou-Stroock-

Varadhan の定理は第 5 章で低次元化モデルに基づく適応推定アルゴリズムの漸近的性質を解析するときに用いる。

## 第 3 章

### パラメータが固定の場合の適応推定

#### 3.1 まえがき

一般に、線形確率システムの状態とパラメータとの同時推定は適応推定 [52], [5], あるいは適応フィルタリング [54], [20] とよばれている。この適応推定の問題に対しては、従来から逐次型最小 2 乗法や拡張 Kalman フィルタを始めとしてさまざまなアルゴリズムが提案され、収束性や大域的安定性の解析が行われてきた [5], [20], [52]。これらは主として離散時間のものであるが、その多くはそのまま連続時間に焼き直すことができる。しかしながら、この適応推定の問題に対して、非線形フィルタリングの基礎方程式から出発して、最適性の観点から推定性能の原理的な限界は何か、そしてその限界に到達するためにはいかなる近似アルゴリズムを用いれば良いか、という疑問にはまだ十分な解答が得られていない。特に、未知パラメータが変動するような場合にそうである。

適応推定は典型的な非線形フィルタリングの問題であるから、連続時間の場合には 2.2.2 節で示したように Kushner の方程式があり、アルゴリズムとして実現不可能であるが、厳密な意味で最適な推定値の方程式を導くことができる。本章の目的は、適応推定問題に対する Kushner の方程式の漸近的な性質を解析することにより、上記の疑問に対する明確な回答を与えることである。なお、本章ではパラメータが固定の場合の適応推定問題を取り扱い、パラメータが変動する場合への拡張は次章で行う。

本章ではまず 3.2 節で、パラメータが固定の場合の適応推定問題をイノベーションモデルを用いて記述する。次に 3.3 節で、この適応推定問題を非線形フィルタリングの問題として定式化し、基礎方程式である（拡張された）Kushner の方程式を導く。3.4 節では、パラメータが固定の適応推定問題に対する Kushner の方程式の解が陽に表現

できることを利用して、その解の時間無限大における漸近的な性質を明らかにする。また、あわせて非線形フィルタの条件つきモーメントのオーダ評価を行う。3.5節では、このオーダ評価の結果を用いて、非線形フィルタのモーメント方程式系のスケーリングを行い、この方程式系が特異摂動型になること、さらにこの特異摂動型の方程式系から漸近的に無視できる項を落とすことにより適応推定のアルゴリズムが導かれることを示す。

### 3.2 適応推定のモデル

$Z_t$  を  $n$  次元の状態変数、 $Y_t$  を  $m$  次元の観測値として、推定モデルが次式で与えられるものとする。

$$dZ_t = F(\theta)Z_t dt + G(\theta)dV_t \quad (3.1)$$

$$dY_t = H(\theta)Z_t dt + dW_t \quad (3.2)$$

ここで、 $\theta$  は未知パラメータの不確かさを表わす  $d$  次元の確率変数で、パラメータは固定されているものと仮定する。 $V_t$  と  $W_t$  は、それぞれ  $d_v$  次元と  $m$  次元の互いに独立な標準ブラウン運動とする。 $\theta$  のアприオリな確率密度関数を  $p_0(\theta)$  と置く。 $\theta$  の変域は、簡単のためにコンパクト集合  $D \subset \mathbf{R}^d$  とし、任意の  $\theta \in D$  に対して次の条件が満足されるとする。

条件 1  $F(\theta)$  は指数安定。

条件 2  $F(\theta), G(\theta), H(\theta)$  は  $\theta$  について 3 回連続微分可能。

条件 3  $p_0(\theta)$  は  $\theta$  について連続微分可能で、かつ  $p_0(\theta) > 0$ 。

適応推定の問題は、観測データ

$$Y_0^t = \{Y_s; 0 \leq s \leq t\} \quad (3.3)$$

が与えられたときに、 $Z_t$  と  $\theta$  とを同時に推定するアルゴリズムを求めることである。よく知られているように、分散を最小にするという意味で最適な推定値は条件つき期待値に等しい。すなわち、 $Z_t$  と  $\theta$  の最適推定値は

$$\hat{z}_t = E(Z_t | Y_0^t) \quad (3.4)$$

$$\hat{\theta}_t = E(\theta | Y_0^t) \quad (3.5)$$

で与えられる。

最適推定値  $\hat{z}_t, \hat{\theta}_t$  を求めるためには、もとのモデル (3.1), (3.2) 式のかわりにそのイノベーション表現

$$dX_t = F(\theta)X_t dt + K(\theta)d\beta_t \quad (3.6)$$

$$dY_t = H(\theta)X_t dt + d\beta_t \quad (3.7)$$

を用いることができる。ここで、 $K(\cdot)$  は、(3.1), (3.2) 式の  $F(\cdot), G(\cdot), H(\cdot)$  から決まる定常 Kalman 利得であり、 $\beta_t$  はイノベーション過程、すなわち  $m$  次元の標準ブラウン運動である。 $Z_t$  と  $X_t$  との関係は、仮想的な観測データ  $Y_{-\infty}^t = \{Y_s; -\infty < s \leq t\}$  を用いて

$$X_t = E(Z_t | \theta, Y_{-\infty}^t) \quad (3.8)$$

と表わせる。条件つき期待値の性質により

$$\begin{aligned} \hat{z}_t &\stackrel{\text{def}}{=} E(X_t | Y_0^t) = E(E(Z_t | \theta, Y_{-\infty}^t) | Y_0^t) \\ &= E(Z_t | Y_0^t) = \hat{z}_t \end{aligned} \quad (3.9)$$

となるから、もとのモデル (3.1), (3.2) 式の最適推定値と、イノベーションモデル (3.6), (3.7) 式の最適推定値は一致する。この意味で双方のモデルは等価であるが、アルゴリズムを構成する上では後者のほうが単純 [51] であるから、ここではイノベーションモデル (3.6), (3.7) 式を推定モデルとする。

あとの解析の便利のために、真のシステム (のイノベーション表現) を

$$dX_t = F_0 X_t dt + K_0 d\beta_t \quad (3.10)$$

$$dY_t = H_0 X_t dt + d\beta_t \quad (3.11)$$

と表わしておく。ここでは真のシステムは推定モデルの中に含まれていると仮定し、真のパラメータ  $\theta^0$  が存在して  $F_0 = F(\theta^0), K_0 = K(\theta^0), H_0 = H(\theta^0)$  となるものとする。この仮定はアルゴリズムの導出に本質的なものではないが、解析を容易にする。

### 3.3 非線形フィルタの方程式

適応推定の問題を非線形フィルタリングの問題として定式化する。(3.6) 式で記述される  $(X_t, \theta)$  は  $(n+d)$  次元のマルコフ過程と考えることができ、その生成作用素は

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \sum_{i,j} (K(\theta)K^T(\theta))_{ij} \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_i (F(\theta)x)_i \frac{\partial}{\partial x_i} \quad (3.12)$$

で与えられる。生成作用素に  $\theta$  についての微分の項が現われないのは、未知パラメータは変動しないと仮定しているためである。観測データ  $Y_0^t$  に関する  $(X_t, \theta)$  の条件つき確率密度関数を  $p_t(x, \theta)$  とおくと、これは拡張された Kushner の方程式

$$dp_t(x, \theta) = \mathcal{L}^* p_t(x, \theta) dt + \left[ (H(\theta)x - \widehat{H}x_t)^T p_t(x, \theta) - \left( \frac{\partial p_t(x, \theta)}{\partial x} \right)^T K(\theta) \right] d\nu_t \quad (3.13)$$

$$d\nu_t = dY_t - \widehat{H}x_t dt \quad (3.14)$$

に従う ((2.55) 式参照)。ここで、 $\mathcal{L}^*$  は  $\mathcal{L}$  の共役作用素であり、 $\widehat{x}_t$  は  $Y_0^t$  に関する条件つき期待値を表わす。

$\varphi(x, \theta)$  を  $\mathbf{R}^n \times D$  から  $\mathbf{R}$  への 2 回連続微分可能な関数とすると、 $\varphi(X_t, \theta)$  の  $Y_0^t$  に関する条件つき期待値は、

$$\widehat{\varphi}_t = \int_D \int_{\mathbf{R}^n} \varphi(x, \theta) p_t(x, \theta) dx d\theta \quad (3.15)$$

で求められる。(3.13) 式と (3.15) 式から、 $\widehat{\varphi}_t$  の時間的发展を表わす方程式が得られて次のようになる。

$$d\widehat{\varphi}_t = \widehat{\mathcal{L}}\widehat{\varphi}_t dt + \left[ (\widehat{\varphi} \widehat{H}x_t - \widehat{\varphi}_t \widehat{H}x_t)^T + \left( \frac{\partial \widehat{\varphi}}{\partial x} \right)^T K_t \right] d\nu_t. \quad (3.16)$$

この方程式から非線形フィルタのモーメント方程式が導けるが、よく知られているようにそれらは有限次元で閉じていないから、アルゴリズムとしては実現不可能である。そこで、次節以降で条件つき確率密度関数や条件つきモーメントの  $t \rightarrow \infty$  における漸近特性の解析を行い、その結果を用いて非線形フィルタの方程式の近似としてのアルゴリズムを構成することにする。

### 3.4 非線形フィルタの漸近的特性の解析

#### 3.4.1 条件つき確率密度関数

適応推定の問題に対する Kushner の方程式の解は陽に表わすことができる。それは状態とパラメータとの条件つき確率密度関数が

$$p_t(x, \theta) = p_t(x | \theta) p_t(\theta) \quad (3.17)$$

のように分解できることによる。ここで  $p_t(x | \theta)$  は  $\theta (= \theta)$  と  $Y_0^t$  に関する  $X_t$  の条件つき確率密度関数を表わし、 $p_t(\theta)$  は  $Y_0^t$  に関する  $\theta$  の条件つき確率密度関数を表わす。条件つき確率密度関数がこのように分解できるのは、パラメータが未知ながらも変動はしないと仮定しているためである。

$p_t(x | \theta)$  は、パラメータを  $\theta$  に固定したことにより線形推定問題の条件つき確率密度関数になるから、正規分布

$$p_t(x | \theta) = N(\widehat{x}_t(\theta), V_t(\theta)) \quad (3.18)$$

で表わされる。この平均値  $\widehat{x}_t(\theta)$  と分散  $V_t(\theta)$  は Kalman フィルタ

$$d\widehat{x}_t(\theta) = F(\theta)\widehat{x}_t(\theta)dt + (K(\theta) + V_t(\theta)H^T(\theta))d\nu_t(\theta) \quad (3.19)$$

$$d\nu_t(\theta) = dY_t - H(\theta)\widehat{x}_t(\theta)dt \quad (3.20)$$

$$\dot{V}_t(\theta) = C(\theta)V_t(\theta) + V_t(\theta)C^T(\theta) - V_t(\theta)H^T(\theta)H(\theta)V_t(\theta) \quad (3.21)$$

の解として求まる。ここで

$$C(\theta) = F(\theta) - K(\theta)H(\theta) \quad (3.22)$$

と置いた。なお、リカッチ方程式 (3.21) には状態雑音の共分散に相当する定数項が現われていないが、これはイノベーションモデル (3.6), (3.7) 式を出発点としたためである。

(3.17) 式の右辺のもう一つの項  $p_t(\theta)$  を求めるためには、(3.13) 式を  $x$  で積分した

$$dp_t(\theta) = (H(\theta)\widehat{x}_t(\theta) - \widehat{H}x_t)^T p_t(\theta) d\nu_t \quad (3.23)$$

を解けばよい。これは偏微分方程式ではなく常微分方程式でありしかも線形だからただちに解けて

$$p_t(\theta) = p_0(\theta) \exp \left\{ -\frac{1}{2} \int_0^t |H(\theta)\widehat{x}_s(\theta) - \widehat{H}x_s|^2 ds + \int_0^t (H(\theta)\widehat{x}_s(\theta) - \widehat{H}x_s)^T d\nu_s \right\} \quad (3.24)$$

を得る。ここで  $|\cdot|$  はユークリッドノルムを表わす。(3.18) 式と (3.24) 式を (3.17) 式に代入したものが条件つき確率密度関数の厳密な表現を与える。

#### 3.4.2 条件つき確率密度関数の漸近形

前節で求めた条件つき確率密度関数の陽表現を用いて、 $t \rightarrow \infty$  のときの漸近形を求める。

まず (3.18) 式の  $p_t(x|\theta)$  であるが, 条件 1 により (3.22) 式の  $C(\theta)$  は指数安定になる [37] から, リカッチ方程式 (3.21) の解  $V_t(\theta)$  は指数関数的に 0 に近づき,  $\hat{x}_t(\theta)$  は指数関数的に減少する部分を除けば

$$d\hat{x}_t(\theta) = C(\theta)\hat{x}_t(\theta)dt + K(\theta)dY_t \quad (3.25)$$

に従う定常過程とみなせる. あとでみるように, 問題になるのは  $t^{-1}$  の多項式オーダーの挙動であるから, 指数オーダーで減少する部分は無視することができる. したがって,  $t \rightarrow \infty$  において

$$p_t(x|\theta) \sim \delta(x - \hat{x}_t(\theta)) \quad (3.26)$$

となる. この式の意味は  $\varphi(x)$  を連続関数とすると  $\int_{\mathbf{R}^n} \varphi(x)p_t(x|\theta)dx$  と  $\varphi(\hat{x}_t(\theta))$  との差が  $t \rightarrow \infty$  において指数関数的に減少するということである. なお, (3.25) 式に  $\theta = \theta_0$  を代入したものは, (3.22), (3.11) 式の関係式を用いると真のシステムの方程式 (3.10) と一致することがわかる. すなわち, 指数関数的に減少する部分を除けば

$$\hat{x}_t(\theta^0) = X_t \quad (3.27)$$

となる.

次に  $p_t(\theta)$  の漸近形を求める. (3.14) 式に (3.11) 式を代入して

$$dv_t = -(\widehat{H}x_t - H_0X_t)dt + d\beta_t \quad (3.28)$$

とし, さらに (3.24) 式に代入して変形すると  $p_t(\theta)$  は次のように表わされる.

$$p_t(\theta) = \Gamma_t p_0(\theta) \exp[-t\Phi_t(\theta)] \quad (3.29)$$

ここで

$$\Phi_t(\theta) = \frac{1}{2t} \int_0^t |\eta_s(\theta)|^2 ds - \frac{1}{t} \int_0^t \eta_s^T(\theta) d\beta_s \quad (3.30)$$

$$\eta_t(\theta) = H(\theta)\hat{x}_t(\theta) - H_0X_t \quad (3.31)$$

$$\Gamma_t = \frac{1}{\int_D p_0(\theta) \exp[-t\Phi_t(\theta)] d\theta} \quad (3.32)$$

とおいた. (3.29) 式の形からわかるように,  $-t\Phi_t(\theta)$  はパラメータの対数尤度である. したがって,  $\Phi_t(\theta)$  の最小点がパラメータの最尤推定値になる. この最尤推定値を  $m_t$  と表わす.

$\Phi_t(\theta)$  に対応して  $\Phi(\theta)$  を

$$\Phi(\theta) = \frac{1}{2} E|\eta_t(\theta)|^2 \quad (3.33)$$

で定義する. (3.31) 式の右辺の  $\hat{x}_t(\theta)$  と  $X_t$  が定常過程であることにより  $\eta_t(\theta)$  も定常過程になるから  $\Phi(\theta)$  は時間に依存しない関数である. また, 上の定義より明らかに  $\Phi(\theta)$  は非負関数であるが, (3.27), (3.31), (3.30) 式により, 真のパラメータ  $\theta_0$  のところで  $\Phi(\theta^0) = 0$  となる. 補題を一つ準備する.

**補題 3.1** 条件 1, 2 を仮定する. そのとき次のことが確率 1 でなりたつ.

- i)  $\Phi_t(\theta)$  は 3 階までの導関数を含めて一様に有界.
- ii)  $t \rightarrow \infty$  において,  $\Phi_t(\theta)$  は  $\Phi(\theta)$  に 2 階までの導関数を含めて  $D$  上で一様収束する.

(証明) 付録 3A に示す.

この補題を用いると,  $\theta$  の条件つき分布に関して次の定理が得られる.

**定理 3.1** 条件 1~3 を仮定する. そのとき  $t \rightarrow \infty$  において,  $(1/t) \log p_t(\theta)$  は  $-\Phi(\theta)$  に確率 1 で一様収束する.

(証明) 付録 3B に示す.

**注意** 定理 3.1 が成立するためには, 補題 3.1 の証明からわかるように, 条件 2 は必ずしも必要ではなく,  $F(\theta), G(\theta), H(\theta)$  には連続性を仮定するだけで十分である.

定理 3.1 は  $p_t(\theta)$  が

$$p_t(\theta) \sim \exp(-t\Phi(\theta)) \quad (3.34)$$

という漸近形をもつことを意味する.

### 3.4.3 条件つきモーメントの漸近評価

パラメータの条件つき確率密度関数の漸近形 (3.34) 式は,  $t \rightarrow \infty$  において  $\Phi(\theta)$  の最小点にすだいに集中していくような分布を表わしている. このことだけから, もし  $\Phi(\theta)$  の最小点が  $\theta^0$  だけであるとすれば  $\theta$  の条件つき期待値

$$\hat{\theta}_t = \int_D \theta p_t(\theta) d\theta \quad (3.35)$$

は、パラメータの真の値に概収束することが導かれる。すなわち、次の定理が得られる。

**定理 3.2** 条件 1~3 を仮定し、 $\Phi(\theta)$  は  $\theta^0$  でのみ最小値 (=0) をとるものとする。そのとき、パラメータの条件つき期待値  $\hat{\theta}_t$  は  $t \rightarrow \infty$  において  $\theta^0$  に概収束する。

(証明) 付録 3C に示す。

パラメータの最尤推定値  $m_t$  についても同様のことが成り立つ。

**定理 3.3** 条件 1~3 を仮定し、 $\Phi(\theta)$  は  $\theta^0$  でのみ最小値 (=0) をとるものとする。そのとき、パラメータの最尤推定値  $m_t$  は  $t \rightarrow \infty$  において  $\theta^0$  に概収束する。

(証明) 付録 3D に示す。

定理 3.2 と定理 3.3 はそれぞれ、パラメータの条件つき期待値と最尤推定値が共に一致推定量 [56] になることを示す。これらの性質は、補題 3.1 中の  $\Phi_t(\theta)$  自体の収束だけを利用して導かれたものである。これに対して、条件つき期待値と最尤推定値の近さや 2 次以上の条件つきモーメントを評価するためには、 $\Phi_t(\theta)$  の導関数を含めての収束を利用することが必要になる。そこで

**条件 4**  $\Phi''(\theta^0)$  は正定値。

を仮定し、補題を二つ準備する。なお、prime 記号 (') は  $\theta$  による偏微分を表わし、 $\Phi''(\theta)$  は  $\Phi(\theta)$  の Hessian 行列を表わすものとする。

**補題 3.2** 条件 1~4 を仮定する。そのとき、確率 1 で次のことがなりたつ。

i)  $M_1 > 0$  が存在して、すべての  $t \geq 0$  とすべての  $\theta \in D$  に対して

$$|\Phi_t(\theta) - \Phi_t(m_t) - \frac{1}{2}(\theta - m_t)^T \Phi_t''(m_t)(\theta - m_t)| \leq M_1 |\theta - m_t|^3 \quad (3.36)$$

ii)  $\delta > 0, t_1 > 0, M_2 > 0$  が存在して、 $|\theta - m_t| \leq \delta$  となるすべての  $\theta$  とすべての  $t \geq t_1$  に対して

$$\Phi_t(\theta) - \Phi_t(m_t) \geq M_2 |\theta - m_t|^2 \quad (3.37)$$

(証明) 付録 3E に示す。

**補題 3.3** 条件 1~4 を仮定する。 $\Gamma_t$  は (3.32) 式で定義されるものとし、

$$\begin{aligned} \Gamma_t^0 &= 1 / \int_{\mathbf{R}^d} \exp \left\{ -\frac{t}{2} (\theta - \theta^0)^T \Phi''(\theta^0) (\theta - \theta^0) \right\} d\theta \\ &= \sqrt{\frac{t^d \det(\Phi''(\theta^0))}{(2\pi)^d}} \end{aligned} \quad (3.38)$$

とおく。そのとき、 $t \rightarrow \infty$  において確率 1 で

$$\frac{\Gamma_t^0}{p_0(\theta^0) \exp[-t\Phi_t(m_t)] \Gamma_t} \rightarrow 1 \quad (3.39)$$

となる。

(証明) 付録 3F に示す。

これらの補題を用いると次の定理が得られる。

**定理 3.4** 条件 1~4 を仮定し、 $\Phi(\theta)$  は  $\theta^0$  でのみ最小値 (=0) をとるものとする。そのとき、 $t \rightarrow \infty$  において確率 1 で

$$\hat{\theta}_t - m_t = \int_D (\theta - m_t) p_t(\theta) d\theta = O(t^{-1}) \quad (3.40)$$

がなりたつ。

(証明) 付録 3G に示す。

**定理 3.5** 条件 1~4 を仮定する。そのとき  $\sqrt{t}(\theta - m_t)$  の条件つき確率密度関数は、 $t \rightarrow \infty$  のとき確率 1 で、平均 0、分散  $(\Phi''(\theta^0))^{-1}$  のガウス分布に収束する。

(証明) 付録 3H に示す。

**定理 3.6** 条件 1~4 を仮定する。そのとき  $t \rightarrow \infty$  において確率 1 で次のことがなりたつ。

i)  $\lim_{t \rightarrow \infty} t \int_D (\theta - \hat{\theta}_t)(\theta - \hat{\theta}_t)^T p_t(\theta) d\theta = (\Phi''(\theta^0))^{-1}$

ii)  $f(\theta)$  を 4 回連続微分可能な関数とし、 $f(0) = 0, f'(0) = 0, f''(0) = 0$  とする。

そのとき

$$\int_D f(\theta - \hat{\theta}_t) p_t(\theta) d\theta = O(t^{-2})$$

(証明) i) は左辺の積分を

$$\int_D (\theta - m_t)(\theta - m_t)^T p_t(\theta) d\theta - (m_t - \hat{\theta}_t)(m_t - \hat{\theta}_t)^T$$

と分解して第1項には定理3.5を, 第2項には定理3.4を適用すればよい. ii) も同様に  $f(\theta - \hat{\theta}_t)$  を  $\theta = m_t$  のまわりで Taylor 展開して定理3.5と定理3.4を適用すればよい.  $\square$

この定理から,  $\theta$  の2次の条件つきモーメントが  $t^{-1}$  のオーダーになることと, 3次以上の条件つきモーメントが  $t^{-2}$  のオーダーになることがわかる.

さらに,  $X_t$  について  $k$  次,  $\theta$  について  $l$  次の結合型の条件つきモーメントの大きさのオーダーは  $\theta$  だけの  $(k+l)$  次の条件つきモーメントの大きさのオーダーと一致する. これは,  $f(x, \theta)$  を  $x$  と  $\theta$  の連続関数とすると (3.17) 式と (3.26) 式から

$$\begin{aligned} & \int_D \int_{\mathbf{R}^n} f(x - \hat{x}_t, \theta - \hat{\theta}_t) p_t(x, \theta) dx d\theta \\ & \sim \int_D f(\hat{x}_t(\theta) - \hat{x}_t, \theta - \hat{\theta}_t) p_t(\theta) d\theta \\ & \sim \int_D f((\hat{x}'_t(\hat{\theta}_t))^T (\theta - \hat{\theta}_t), \theta - \hat{\theta}_t) p_t(\theta) d\theta \end{aligned} \quad (3.41)$$

となることから導かれる.

### 3.5 非線形フィルタの近似によるアルゴリズムの構成

#### 3.5.1 特異摂動型の方程式系

一般に,  $\epsilon$  を小さいパラメータ,  $X_t$  を遅い変数,  $Y_t$  を速い変数として, 特異摂動型の方程式系が

$$dX_t = \epsilon(f_X(X_t, Y_t) + O(\sqrt{\epsilon}))dt + \sqrt{\epsilon}(G_X(X_t, Y_t) + O(\sqrt{\epsilon}))dW_t \quad (3.42)$$

$$dY_t = (f_Y(X_t, Y_t) + O(\sqrt{\epsilon}))dt + (G_Y(X_t, Y_t) + O(\sqrt{\epsilon}))dW_t \quad (3.43)$$

という形に与えられたとする. ここで,  $W_t$  は標準ブラウン運動である. 基本的な仮定は, 遅い変数を固定 ( $= x$ ) することに

$$d\bar{Y}_t = f_Y(x, \bar{Y}_t)dt + G_Y(x, \bar{Y}_t)dW_t \quad (3.44)$$

の解  $\bar{Y}_t$  がエルゴード過程になることである.

方程式系 (3.42), (3.43) 式において主として興味のあるのは, 遅い変数の十分長い時間にわたってのふるまいである. そのため通常は時間スケールの変更  $t \rightarrow \tau = \epsilon t$  を行って,  $\tau$  を固定したままで  $\epsilon \rightarrow 0$  としたときの極限や漸近形を求めることが問題とされる. これは特異摂動の問題である. (3.42), (3.43) 式において時間スケールの変更  $t \rightarrow \tau = \epsilon t$  を行うと,

$$d\tilde{X}_\tau = (f_X(\tilde{X}_\tau, \tilde{Y}_\tau) + O(\sqrt{\epsilon}))d\tau + (G_X(\tilde{X}_\tau, \tilde{Y}_\tau) + O(\sqrt{\epsilon}))d\tilde{W}_\tau \quad (3.45)$$

$$d\tilde{Y}_\tau = \frac{1}{\epsilon}(f_Y(\tilde{X}_\tau, \tilde{Y}_\tau) + O(\sqrt{\epsilon}))d\tau + \frac{1}{\sqrt{\epsilon}}(G_Y(\tilde{X}_\tau, \tilde{Y}_\tau) + O(\sqrt{\epsilon}))d\tilde{W}_\tau \quad (3.46)$$

となる. ここで,  $\tilde{X}_\tau = X_{\tau/\epsilon}$ ,  $\tilde{Y}_\tau = Y_{\tau/\epsilon}$  であり,  $\tilde{W}_\tau = \sqrt{\epsilon}W_{\tau/\epsilon}$  は  $\tau$  の時間スケールでの標準ブラウン運動である. 2.4.1 節で述べたように, (3.45), (3.46) の方程式系に対しては平均化法が使えて,  $\epsilon \rightarrow 0$  のとき  $\tilde{X}_\tau$  は単独のマルコフ過程に概収束する. しかも, (3.42), (3.43) 式あるいは (3.45), (3.46) 式の中で  $O(\sqrt{\epsilon})$  と書いた項は  $\epsilon \rightarrow 0$  の極限に影響を与えない. すなわち, これらの項を無視しても系の漸近的なふるまいは変わらない. このことが非線形フィルタのモーメント方程式の高次打切に利用できる.

#### 3.5.2 アルゴリズムの構成

適応推定の問題に戻って,  $X_t$  と  $\theta$  の条件つき期待値の方程式を (3.16) 式から求めると次のようになる (2.2.3 節参照).

$$d\hat{x}_t = \widehat{F}x_t dt + \left[ \widehat{K}_t + \overbrace{(x - \hat{x}_t)(Hx - \widehat{H}x_t)^T} \right] d\nu_t \quad (3.47)$$

$$d\hat{\theta}_t = \overbrace{(\theta - \hat{\theta}_t)(Hx - \widehat{H}x_t)^T} d\nu_t \quad (3.48)$$

これらの右辺を条件つきモーメントで展開し, 3.4.3 節の評価を用いると,  $t \rightarrow \infty$  において

$$d\hat{x}_t = [F(\hat{\theta}_t)\hat{x}_t + O(t^{-1})] dt + [K(\hat{\theta}_t) + O(t^{-1})] d\nu_t \quad (3.49)$$

$$d\hat{\theta}_t = t^{-1}\tilde{V}_{\theta\theta} [H(\hat{\theta}_t)S_t + I_t + O(t^{-1})]^T d\nu_t \quad (3.50)$$

$$d\nu_t = dY_t - [H(\hat{\theta}_t)\hat{x}_t + O(t^{-1})] dt \quad (3.51)$$

と書ける. ここで

$$S_t = \left. \frac{\partial \hat{x}_t(\theta)}{\partial \theta^T} \right|_{\theta=\hat{\theta}_t} \quad (3.52)$$

$$I_t = \frac{\partial}{\partial \theta^T} H(\theta) \hat{x}_t \Big|_{\theta=\hat{\theta}_t} \quad (3.53)$$

$$V_{\theta\theta} = \widehat{(\theta - \hat{\theta}_t)(\theta - \hat{\theta}_t)^T} \quad (3.54)$$

$$\tilde{V}_{\theta\theta} = tV_{\theta\theta} \quad (3.55)$$

とおいた。

(3.49)~(3.51) 式の中で未定の変数は  $S_t$  と  $\tilde{V}_{\theta\theta}$  であり,  $S_t$  の方程式は,  $\hat{x}_t(\theta)$  の方程式 (3.25) を  $\theta$  で微分して  $\theta = \hat{\theta}_t$  を代入することにより

$$dS_t = (C(\hat{\theta}_t)S_t + M_t)dt + dN_t \quad (3.56)$$

となる。ここで

$$M_t = \frac{\partial}{\partial \theta^T} (F(\theta) - K(\hat{\theta}_t)H(\theta)) \hat{x}_t \Big|_{\theta=\hat{\theta}_t} \quad (3.57)$$

$$dN_t = \frac{\partial}{\partial \theta^T} K(\theta) d\nu_t \Big|_{\theta=\hat{\theta}_t} \quad (3.58)$$

とおいた。また,  $\tilde{V}_{\theta\theta}$  の方程式は (3.16) 式から得られる (2.2.3 節参照) から,  $\hat{x}_t, \hat{\theta}_t$  の場合と同様に右边を展開して, 3.4.3 節の評価を用いると次のようになる。

$$d\tilde{V}_{\theta\theta} = -t^{-1} [\tilde{V}_{\theta\theta}(H(\hat{\theta}_t)S_t + I_t)^T (H(\hat{\theta}_t)S_t + I_t)\tilde{V}_{\theta\theta} + O(t^{-1})] dt + O(t^{-1})d\nu_t \quad (3.59)$$

さらに, (3.28) 式の右边も条件つきモーメントで展開して

$$d\nu_t = -(H(\hat{\theta}_t)\hat{x}_t - H_0X_t + O(t^{-1}))dt + d\beta_t \quad (3.60)$$

とする。パラメータ推定値はスケールリングを行って

$$\tilde{\theta}_t = \sqrt{t}(\hat{\theta}_t - \theta^0) \quad (3.61)$$

とする。そのとき, (3.60) 式を (3.49), (3.50), (3.56), (3.59), (3.61) 式に代入すると次のような方程式系を得る。

$$\begin{cases} d\tilde{\theta}_t = -t^{-1}\tilde{V}_{\theta\theta} [(H(\hat{\theta}_t)S_t + I_t)^T \xi_t + O(t^{-1/2})] dt \\ \quad + t^{-1/2}\tilde{V}_{\theta\theta} [H(\hat{\theta}_t)S_t + I_t + O(t^{-1/2})] d\beta_t \\ d\tilde{V}_{\theta\theta} = -t^{-1} [\tilde{V}_{\theta\theta}(H(\hat{\theta}_t)S_t + I_t)^T (H(\hat{\theta}_t)S_t + I_t)\tilde{V}_{\theta\theta} + O(t^{-1/2})] dt \\ \quad + O(t^{-1})d\beta_t \end{cases} \quad (3.62)$$

$$\begin{cases} dX_t = F_0X_tdt + K_0d\beta_t \\ d\hat{x}_t = [C(\hat{\theta}_t)\hat{x}_t + K(\hat{\theta}_t)H_0X_t + O(t^{-1})] dt + [K(\hat{\theta}_t) + O(t^{-1})] d\beta_t \\ dS_t = [C(\hat{\theta}_t)S_t + M_t - \frac{\partial}{\partial \theta^T} K(\theta)(H(\hat{\theta}_t)\hat{x}_t - H_0X_t) \Big|_{\theta=\hat{\theta}_t} + O(t^{-1})] dt \\ \quad + \frac{\partial}{\partial \theta^T} K(\theta)d\beta_t \Big|_{\theta=\hat{\theta}_t} \end{cases} \quad (3.63)$$

ここで,  $\xi_t \equiv \sqrt{t}(H(\hat{\theta}_t)\hat{x}_t - H_0X_t)$  は  $O(1)$  の変数である。  $\epsilon$  のかわりに  $t^{-1}$  を小さいパラメータとみなせば, (3.62), (3.63) 式はまさに, (3.42), (3.43) 式のような特異摂動型の方程式系であり<sup>1</sup>,  $\tilde{\theta}_t, \tilde{V}_{\theta\theta}$  が遅い変数に,  $X_t, \hat{x}_t, S_t$  が速い変数になる。

(3.42), (3.43) 式の  $O(\sqrt{\epsilon})$  の部分に相当するものは, (3.62), (3.63) 式においては  $O(t^{-1/2})$  または  $O(t^{-1})$  と記した部分になる。これらを落として,  $\tilde{V}_{\theta\theta}$  をもとのスケールの  $V_{\theta\theta}$  にもどすと次のようなアルゴリズムが得られる。

$$d\nu_t = dY_t - H(\hat{\theta}_t)\hat{x}_tdt \quad (3.64)$$

$$d\hat{x}_t = F(\hat{\theta}_t)\hat{x}_tdt + K(\hat{\theta}_t)d\nu_t \quad (3.65)$$

$$d\hat{\theta}_t = L_t d\nu_t \quad (3.66)$$

$$dS_t = (C(\hat{\theta}_t)S_t + M_t)dt + dN_t \quad (3.67)$$

$$\dot{V}_{\theta\theta} = -L_t L_t^T \quad (3.68)$$

ここで

$$L_t = V_{\theta\theta}(H(\hat{\theta}_t)S_t + I_t)^T \quad (3.69)$$

とおいた。

### 3.5.3 Ljung のアルゴリズムについて

Ljung [51] は, 離散時間の適応推定の問題へ拡張 Kalman フィルタを用いた場合の収束性を解析してその欠陥を指摘し, それを補うためのアルゴリズムを勾配法との比較から発見論的に導いている。同じことを連続時間について行えば, (3.64)~(3.68) 式と同一のアルゴリズムが得られる。Ljung のアプローチは不完全なものから出発して必要なものを修復していくというやり方であり, ここでのアプローチは完全なものか

<sup>1</sup>正確には, 3.5.1 節の場合と同様に, 時間スケールの変更  $t \rightarrow \tau = ct$  を行って  $\tau$  を 1 のオーダーの変数とみなせば同じ型の方程式系になるということである。

ら出発して不要なものを落としていくというやり方である。したがって、まったく逆のところから出発して同じアルゴリズムに到達したことになる。

### 3.6 まとめ

連続時間で未知パラメータが固定の場合の適応推定の問題を非線形フィルタリングの問題として考察し、Kushner 方程式の時間無限大における漸近的な性質を明らかにした。さらに、その結果を用いて、無限次元のモーメント方程式系を特異摂動型の方程式系に変形し、それらから漸近的に無視できる項を落とすことにより、有限次元で閉じた方程式系が得られることを示した。この有限次元の方程式系は適応推定アルゴリズムとして用いることができる。このアルゴリズムによる推定値はその導き方により最適推定値と同じ漸近的性質をもつ。

特異摂動系の漸近的性質は、従来から適応アルゴリズムの収束性を調べるためには用いられてきたが、ここではアルゴリズムの構成のためにも有効に利用できることを示した。なお、本章では未知パラメータが固定の場合のみを扱ったが、変動する場合へ手法を拡張することも可能であり、次章ではその問題を取り上げる。

## 付録 補題と定理の証明

### 3A 補題 3.1 の証明

$\alpha \in R^d$  に対して微分作用素  $D(\alpha)$  を

$$D(\alpha) = 1 + \sum_{i=1}^d \alpha_i \frac{\partial}{\partial \theta_i} \quad (3A.1)$$

で定義する。補題 3.1 を証明するためには、各  $\alpha$  について次のことが確率 1 でなりたつことを示せば十分である。

a) 各  $\theta \in D$  に対して、 $D^3(\alpha)(\Phi_t(\theta) - \Phi(\theta)) \xrightarrow{t \rightarrow \infty} 0$ .

b)  $D^3(\alpha)\Phi_t(\theta)$  は  $t$  に関して一様に有界。

このうち b) からただちに補題の i) が得られ、さらに  $\Phi_t(\theta)$  の 2 階までの導関数が同程度連続であることがわかる。こうして  $\{D^2(\alpha)\Phi_t(\theta)\}_t$  は  $D$  上の連続関数の空間で、一様有界、同程度連続になるから、Ascoli-Arzelà の定理により相対コンパクトであり、a) と組み合わせることにより ii) が得られる。なお、この補題が成り立つためには a) 中の  $D^3(\alpha)$  は  $D^2(\alpha)$  とするのでも十分であるが、証明を b) の部分と共通して行えるようにそうしてある。

まず a) から示す。  $X_t$ ,  $\hat{x}_t(\theta)$  および  $\tilde{x}_t(\theta)$  の 3 階までの偏導関数を縦に並べた  $(2 + d + d^2 + d^3)n$  次元のベクトルを  $\tilde{X}_t(\theta)$  とおく。これは時間とともに指数関数的に減少する部分を除けば、線形確率微分方程式

$$d\tilde{X}_t(\theta) = A(\theta)\tilde{X}_t(\theta)dt + B(\theta)d\beta_t \quad (3A.2)$$

に従う Gauss 定常過程になる。ここで、 $A(\theta)$ ,  $B(\theta)$  は  $F_0$ ,  $K_0$ ,  $H_0$ ,  $F(\theta)$ ,  $K(\theta)$ ,  $H(\theta)$  およびそれらの  $\theta$  による 3 階までの導関数を要素として含む行列で、条件 1, 2 により、 $\lambda > 0$ ,  $M > 0$  が存在して

$$|e^{A(\theta)t}| \leq Me^{-\lambda t}, \quad |A(\theta)| \leq M, \quad |B(\theta)| \leq M \quad (3A.3)$$

で抑えられる。

$D^3(\alpha)\Phi_t(\theta)$  と  $D^3(\alpha)\Phi(\theta)$  は、(3.30), (3.31), (3.33), (3A.1) 式を代入して変形することにより

$$D^3(\alpha)\Phi_t(\theta) = \frac{1}{2t} \int_0^t \tilde{X}_s^T(\theta) Q(\alpha, \theta) \tilde{X}_s(\theta) ds - \frac{1}{t} \int_0^t \tilde{X}_s^T(\theta) R(\alpha, \theta) d\beta_s \quad (3A.4)$$

$$D^3(\alpha)\Phi(\theta) = \frac{1}{2} E [\tilde{X}_s^T(\theta) Q(\alpha, \theta) \tilde{X}_s(\theta)] \quad (3A.5)$$

と表わせる. ここで,  $Q(\alpha, \theta)$ ,  $R(\alpha, \theta)$  は  $\theta$  について連続な適当な次元の行列である.

$\tilde{X}_t(\theta)$  は (3A.2), (3A.3) から明らかに連続なスペクトルをもつ Gauss 定常過程になるから, エルゴード定理により確率 1 で

$$\frac{1}{t} \int_0^t \tilde{X}_{s,i}(\theta) \tilde{X}_{s,j}(\theta) ds \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{} E [\tilde{X}_{s,i}(\theta) \tilde{X}_{s,j}(\theta)] \quad (3A.6)$$

が成立する.

$$M_k = \sup_{k^2 \leq t \leq (k+1)^2} \left| \frac{1}{t} \int_0^t \tilde{X}_{s,i}(\theta) d\beta_{s,j} \right| \quad (3A.7)$$

とおく.  $\int_0^t \tilde{X}_{s,i}(\theta) d\beta_{s,j}$  はマルチンゲールだから, Doob の不等式を用いると

$$\begin{aligned} P(M_k \geq \epsilon) &\leq P \left( \sup_{k^2 \leq t \leq (k+1)^2} \left| \int_0^t \tilde{X}_{s,i}(\theta) d\beta_{s,j} \right| \geq k^2 \epsilon \right) \\ &\leq \frac{(k+1)^2}{k^4 \epsilon^2} E \left| \tilde{X}_{s,i}(\theta) \right|^2 \end{aligned} \quad (3A.8)$$

したがって

$$\sum_{k=1}^{\infty} P(M_k \geq \epsilon) < \infty \quad (3A.9)$$

となり, Borel-Cantelli の補題により

$$M_k \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} 0, \quad \text{a.s.} \quad (3A.10)$$

すなわち, 確率 1 で

$$\frac{1}{t} \int_0^t \tilde{X}_{s,i}(\theta) d\beta_{s,j} \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{} 0 \quad (3A.11)$$

が成立する. (3A.6) と (3A.11) から

$$\begin{aligned} &D^3(\alpha)(\Phi_t(\theta) - \Phi(\theta)) \\ &= \frac{1}{2} \sum_{i,j} Q_{ij}(\alpha, \theta) \left[ \frac{1}{t} \int_0^t \tilde{X}_{s,i}(\theta) \tilde{X}_{s,j}(\theta) ds - E(\tilde{X}_{s,i}(\theta) \tilde{X}_{s,j}(\theta)) \right] \\ &\quad - \frac{1}{t} \sum_{i,j} R_{ij}(\alpha, \theta) \int_0^t \tilde{X}_{s,i}(\theta) d\beta_{s,j} \\ &\xrightarrow[t \rightarrow \infty]{} 0, \quad \text{a.s.} \end{aligned} \quad (3A.12)$$

となり, a) が示された.

次に b) を証明する.  $\mu > 0$  を任意に一つ選び,  $\theta$  に依存しない  $m$  次元の Gauss 定常過程を

$$dZ_t = -\mu Z_t dt + d\beta_t \quad (3A.13)$$

で定義する. このとき,  $\tilde{X}_t(\theta)$  とその  $\beta_t$  による確率積分は, 部分積分を繰り返して行うことにより次のように表わせる.

$$\tilde{X}_t(\theta) = B(\theta)Z_t + (\mu I + A(\theta)) \int_{-\infty}^t e^{A(\theta)(t-s)} B(\theta)Z_s ds \quad (3A.14)$$

$$\begin{aligned} \int_0^t \tilde{X}_s(\theta) d\beta_s^T &= \left[ (\tilde{X}_s(\theta) - B(\theta)Z_s) Z_s^T \right]_0^t \\ &\quad + \int_0^t \left[ (\mu I - A(\theta)) \tilde{X}_s(\theta) Z_s^T - 2\mu B(\theta)Z_s Z_s^T \right] ds \\ &\quad + B(\theta) \int_0^t Z_s d\beta_s^T \end{aligned} \quad (3A.15)$$

これらをユークリッドノルムで評価すると,

$$\begin{aligned} |\tilde{X}_t(\theta)| &\leq M_1 \left\{ |Z_t| + \int_{-\infty}^t e^{-\lambda(t-s)} |Z_s| ds \right\} \\ &\equiv V_t \end{aligned} \quad (3A.16)$$

$$\left| \int_0^t \tilde{X}_s(\theta) d\beta_s^T \right| \leq M_2 \left\{ 1 + V_t^2 + |Z_t|^2 + \int_0^t (V_s^2 + |Z_s|^2) ds + \left| \int_0^t Z_s d\beta_s^T \right| \right\} \quad (3A.17)$$

ここで,  $M_1, M_2, \dots$  は適当な正の定数である. (3A.16) と (3A.17) を用いて (3A.4) を評価する.

$$\begin{aligned} |D^3(\alpha)\Phi_t(\theta)| &\leq M_3 \frac{1}{t} \left\{ \int_0^t |\tilde{X}_s(\theta)|^2 ds + \left| \int_0^t \tilde{X}_s(\theta) d\beta_s^T \right| \right\} \\ &\leq M_4 \frac{1}{t} \left\{ 1 + V_t^2 + |Z_t|^2 + \int_0^t (V_s^2 + |Z_s|^2) ds + \left| \int_0^t Z_s d\beta_s^T \right| \right\} \end{aligned} \quad (3A.18)$$

この右辺は  $\theta$  に依存しない.  $V_t$  と  $Z_t$  がエルゴード過程になることと, 確率積分の項が (3A.11) の場合と同様に確率 1 で 0 に収束することから, (3A.18) の右辺は確率 1 で  $t$  に関して一様に有界であることがわかる. これで b) が示された.  $\square$

### 3B 定理 3.1 の証明

補題 3.1 が成り立つような事象で考える. したがって, 以下のことは確率 1 でなりたつ. (3.29) により

$$\begin{aligned} &\frac{1}{t} \log p_t(\theta) + \Phi(\theta) \\ &= \frac{1}{t} \log \Gamma_t - \frac{1}{t} \log p_0(\theta) - (\Phi_t(\theta) - \Phi(\theta)) \end{aligned} \quad (3B.1)$$

となるが、右辺第2項の一樣収束は明らかであり、第3項は補題3.1により0に一樣収束する。したがって

$$-\frac{1}{t} \log \Gamma_t \equiv \frac{1}{t} \log \int_D p_0(\theta) e^{-t\Phi_t(\theta)} d\theta \xrightarrow{t \rightarrow \infty} 0 \quad (3B.2)$$

を示せばよい。  $\Phi_t(\theta)$  が  $\Phi(\theta)$  に一樣収束することから、任意の  $\delta > 0$  に対して  $t_0 > 0$  を適当に選べば  $t \geq t_0$  のときに

$$e^{-(\Phi(\theta)+\delta)} \leq e^{-\Phi_t(\theta)} \leq e^{-(\Phi(\theta)-\delta)} \quad (3B.3)$$

とすることができる。  $L^t(D)$  ノルムを

$$\|f\|_t = \left[ \int_D |f(\theta)|^t p_0(\theta) d\theta \right]^{1/t} \quad (3B.4)$$

で定義すると、条件3により  $p_0(\theta) > 0$  だから

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|f\|_t = \|f\|_\infty = \operatorname{ess\,sup}_{\theta \in D} |f(\theta)| \quad (3B.5)$$

となる。(3B.3)の各辺の  $L^t(D)$  ノルムをとり  $t \rightarrow \infty$  とすると、(3B.5)により

$$\operatorname{ess\,sup}_{\theta \in D} e^{-\Phi(\theta)-\delta} \leq \lim_{t \rightarrow \infty} \left[ \int_D p_0(\theta) e^{-t\Phi_t(\theta)} d\theta \right]^{1/t} \leq \operatorname{ess\,sup}_{\theta \in D} e^{-\Phi(\theta)+\delta} \quad (3B.6)$$

となる。  $\delta$  は任意であったから

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \left[ \int_D p_0(\theta) e^{-t\Phi_t(\theta)} d\theta \right]^{1/t} = \operatorname{ess\,sup}_{\theta \in D} e^{-\Phi(\theta)} = 1 \quad (3B.7)$$

を得る。この対数をとると(3B.2)になる。□

### 3C 定理3.2の証明

$\delta > 0$  を任意に一つ固定し、

$$\gamma = \min_{|\theta - \theta^0| \geq \delta} \Phi(\theta) \quad (3C.1)$$

とおくと、 $\Phi(\theta)$  が  $\theta^0$  でのみ最小値 (=0) をとるという条件から  $\gamma > 0$  となる。また補題3.1により  $\Phi_t(\theta)$  は  $\Phi(\theta)$  に一樣収束するから  $t$  を十分大きくとれば

$$\frac{1}{t} \log p_t(\theta) \leq -\Phi(\theta) + \frac{\gamma}{2} \quad (3C.2)$$

とすることができ、 $|\theta - \theta^0| > \delta$  では

$$\frac{1}{t} \log p_t(\theta) \leq -\gamma + \frac{\gamma}{2} = -\frac{\gamma}{2} \quad (3C.3)$$

すなわち

$$p_t(\theta) \leq e^{-\gamma t/2} \quad (3C.4)$$

となる。閉球  $B_\delta$  を

$$B_\delta = \{\theta; |\theta - \theta^0| \leq \delta\} \quad (3C.5)$$

で定義して、 $\hat{\theta}_t - \theta^0$  を次のように変形する。

$$\begin{aligned} \hat{\theta}_t - \theta^0 &= \int_D (\theta - \theta^0) p_t(\theta) d\theta \\ &= \int_{B_\delta} (\theta - \theta^0) p_t(\theta) d\theta + \int_{D \setminus B_\delta} (\theta - \theta^0) p_t(\theta) d\theta \end{aligned} \quad (3C.6)$$

この右辺の第1項は

$$\begin{aligned} &\left| \int_{B_\delta} (\theta - \theta^0) p_t(\theta) d\theta \right| \\ &\leq \delta \int_{B_\delta} p_t(\theta) d\theta \leq \delta \int_D p_t(\theta) d\theta = \delta \end{aligned} \quad (3C.7)$$

で抑えられる。また第2項は(3C.4)式により

$$\begin{aligned} &\left| \int_{D \setminus B_\delta} (\theta - \theta^0) p_t(\theta) d\theta \right| \\ &\leq \max_{\theta \in D \setminus B_\delta} |\theta - \theta^0| \int_{D \setminus B_\delta} p_t(\theta) d\theta \\ &\leq \max_{\theta \in D \setminus B_\delta} |\theta - \theta^0| e^{-\gamma t/2} \int_{D \setminus B_\delta} d\theta \\ &\leq e^{-\gamma t/2} \max_{\theta \in D} |\theta - \theta^0| \int_D d\theta \end{aligned} \quad (3C.8)$$

となるが、 $D$  はコンパクトだから右辺の  $\exp(-\gamma t/2)$  以外の部分は有限の値をとり、 $t$  を十分大きくとれば右辺全体は  $\delta$  で抑えることができる。したがって  $t$  を十分大きくとれば

$$\left| \int_D (\theta - \theta^0) p_t(\theta) d\theta \right| \leq 2\delta \quad (3C.9)$$

で抑えられ、 $\delta$  は任意であったから、

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \int_D (\theta - \theta^0) p_t(\theta) d\theta = 0 \quad (3C.10)$$

すなわち

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \hat{\theta}_t = \theta^0 \quad (3C.11)$$

となる。上の証明の中で用いた補題3.1は確率1でなりたつから、この収束は概収束である。□

### 3D 定理 3.3 の証明

$m_t$  が  $\theta^0$  に収束しないと仮定する. そのとき,  $\delta > 0$  と  $n \rightarrow \infty$  で  $t_n \rightarrow \infty$  となるような時間列  $t_n, n = 1, 2, \dots$  が存在して  $|m_{t_n} - \theta^0| \geq \delta$  となる.  $m_{t_n}$  の含まれる領域  $D$  はコンパクトであったから,  $\{t_n\}$  から適当な部分列  $\{t'_p\}_{p=1,2,\dots}$  を選ぶことにより  $m_{t'_p}, p = 1, 2, \dots$  が収束列となるようにすることができる. その収束極限を  $m'$  とおくと  $|m' - \theta^0| \geq \delta$  である. さらに補題 3.1 により,  $\Phi_t(\theta)$  は  $\Phi(\theta)$  に一様収束するから

$$\lim_{p \rightarrow \infty} \Phi_{t'_p}(m_{t'_p}) = \Phi(m')$$

となる. 一方,  $m_{t'_p}$  は  $\Phi_{t'_p}(\theta)$  の最小点だから  $\Phi_{t'_p}(m_{t'_p}) \leq \Phi_{t'_p}(\theta^0)$  であり,  $p \rightarrow \infty$  の極限においても

$$\Phi(m') \leq \Phi(\theta^0)$$

とならなければならない. これは  $\theta^0$  が  $\Phi(\theta)$  の唯一の最小点であるという条件と矛盾する. したがって  $m_t$  は  $\theta^0$  に収束する. 補題 3.1 は確率 1 でなりたつから, この収束は概収束である.  $\square$

### 3E 補題 3.2 の証明

$\Phi_t(\theta)$  をその最小点  $m_t$  のまわりで Taylor 展開して

$$\begin{aligned} \Phi_t(\theta) &= \Phi_t(m_t) + \frac{1}{2}(\theta - m_t)^T \Phi_t''(m_t)(\theta - m_t) \\ &\quad + \frac{1}{6} \sum_{i,j,k} \frac{\partial^3}{\partial \theta_i \partial \theta_j \partial \theta_k} \Phi_t(m_t + \eta(\theta - m_t)) (\theta_i - m_{t,i}) (\theta_j - m_{t,j}) (\theta_k - m_{t,k}) \end{aligned} \quad (3E.1)$$

とする. ここで,  $\eta$  は  $\theta$  に依存して決まる  $[0, 1]$  に値をとる実数である. 補題 3.1 により  $\Phi_t(\theta)$  の 3 階の導関数は  $t$  と  $\theta$  に関して一様に有界だから, 上の式のうち 3 次の項は, ある正数  $M_1$  が存在して

$$\left| \sum_{i,j,k} \frac{\partial^3}{\partial \theta_i \partial \theta_j \partial \theta_k} \Phi_t(m_t + \eta(\theta - m_t)) (\theta_i - m_{t,i}) (\theta_j - m_{t,j}) (\theta_k - m_{t,k}) \right| \leq M_1 |\theta - m_t|^3 \quad (3E.2)$$

で抑えられる. これから, ただちに補題の前半部が得られる. また, 補題 3.1 により,  $\Phi_t''(\theta)$  は  $\Phi''(\theta)$  に確率 1 で一様収束し, 定理 3.3 により,  $m_t$  は  $\theta_0$  に概収束するか

ら,  $\Phi_t''(m_t)$  は  $\Phi''(\theta^0)$  に概収束する. さらに条件 4 により  $\Phi(\theta^0)$  は正定値であるから,  $t_1 > 0$  と  $M > 0$  が存在してすべての  $t \geq t_1$  に対して

$$\frac{1}{2}(\theta - m_t)^T \Phi_t''(m_t)(\theta - m_t) \geq M |\theta - m_t|^2 \quad (3E.3)$$

となる. したがって

$$\Phi_t(\theta) - \Phi_t(m_t) \geq M |\theta - m_t|^2 - M_1 |\theta - m_t|^3 \quad (3E.4)$$

となるから,  $|\theta - m_t|$  を十分小さくとることにより, 補題の後半部が得られる.  $\square$

### 3F 補題 3.3 の証明

この補題を証明するためには,  $t \rightarrow \infty$  のとき

$$\begin{aligned} I(t) &\equiv \frac{\Gamma_t^0}{p_0(\theta^0) \exp[-t\Phi_t(m_t)] \Gamma_t} - 1 \\ &= \frac{\Gamma_t^0}{p_0(\theta^0)} \int_D p_0(\theta) \exp[-t(\Phi_t(\theta) - \Phi_t(m_t))] d\theta - 1 \end{aligned} \quad (3F.1)$$

が 0 に概収束することを示せばよい.  $t \rightarrow \infty$  と共に一点  $\{\theta^0\}$  に収縮していく閉球  $B_t$  を

$$B_t = \{\theta; |\theta - m_t| \leq t^{-1/3}\} \quad (3F.2)$$

で定義し,  $I(t)$  を次のように分解する.

$$I(t) \equiv I_1(t) + I_2(t) + I_3(t) + I_4(t) \quad (3F.3)$$

$$I_1(t) = \Gamma_t^0 \int_{B_t} \exp\left[-\frac{t}{2}(\theta - m_t)^T \Phi_t''(m_t)(\theta - m_t)\right] d\theta - 1 \quad (3F.4)$$

$$I_2(t) = \Gamma_t^0 \int_{B_t} \left\{ e^{-t(\Phi_t(\theta) - \Phi_t(m_t))} - \exp\left[-\frac{t}{2}(\theta - m_t)^T \Phi_t''(m_t)(\theta - m_t)\right] \right\} d\theta \quad (3F.5)$$

$$I_3(t) = \frac{\Gamma_t^0}{p_0(\theta^0)} \int_{B_t} (p_0(\theta) - p_0(\theta^0)) e^{-t(\Phi_t(\theta) - \Phi_t(m_t))} d\theta \quad (3F.6)$$

$$I_4(t) = \frac{\Gamma_t^0}{p_0(\theta^0)} \int_{D \setminus B_t} p_0(\theta) e^{-t(\Phi_t(\theta) - \Phi_t(m_t))} d\theta \quad (3F.7)$$

この各項が 0 に収束することを示す. まず  $I_1(t)$  は

$$I_1(t) = \Gamma_t^0 \int_{\mathbf{R}^d} \exp\left[-\frac{t}{2}(\theta - m_t)^T \Phi_t''(m_t)(\theta - m_t)\right] d\theta - 1$$

$$\begin{aligned}
& -\Gamma_t^0 \int_{\mathbf{R}^d \setminus B_t} \exp \left[ -\frac{t}{2} (\theta - m_t)^T \Phi_t''(m_t) (\theta - m_t) \right] d\theta \\
&= \sqrt{\frac{\det(\Phi''(\theta^0))}{\det(\Phi_t''(m_t))}} - 1 \\
& -\Gamma_t^0 \int_{\mathbf{R}^d \setminus B_t} \exp \left[ -\frac{t}{2} (\theta - m_t)^T \Phi_t''(m_t) (\theta - m_t) \right] d\theta \quad (3F.8)
\end{aligned}$$

と変形できる.  $t \rightarrow \infty$  のとき, 補題 3.1 により  $\Phi_t''(\theta)$  は  $\Phi''(\theta)$  に一様収束し, 定理 3.3 により  $m_t$  は  $\theta^0$  に収束するから  $\Phi_t''(m_t)$  は  $\Phi''(\theta^0)$  に収束する. さらに条件 4 により  $\Phi''(\theta^0)$  は正定値であるから  $\sqrt{\det(\Phi''(\theta^0))/\det(\Phi_t''(m_t))}$  は 1 に収束することがわかる. 同じく  $\Phi''(\theta^0)$  が正定値であることから,  $t$  を十分大きくとればすべての  $\theta \in D$  に対して

$$\frac{1}{2} (\theta - m_t)^T \Phi_t''(m_t) (\theta - m_t) \geq M_1 |\theta - m_t|^2 \quad (3F.9)$$

とすることができる. ここで  $M_1$  は適当な正の定数であり, 以降  $M_2, M_3, \dots$  も同様に適当な正の定数とする. 上の不等式を用いれば, (3F.8) 式の積分は

$$\begin{aligned}
& \Gamma_t^0 \int_{\mathbf{R}^d \setminus B_t} \exp \left[ -\frac{t}{2} (\theta - m_t)^T \Phi_t''(m_t) (\theta - m_t) \right] d\theta \\
& \leq \Gamma_t^0 t^{-d/2} \int_{|\xi| \geq t^{1/6}} e^{-M_1 |\xi|^2} d\xi \\
& = \Gamma_t^0 t^{-d/2} S_d \int_{t^{1/6}}^{\infty} r^{d-1} e^{-M_1 r^2} dr \\
& = M_2 \int_{t^{1/6}}^{\infty} r^{d-1} e^{-M_1 r^2} dr \quad (3F.10)
\end{aligned}$$

と評価できる. ここで  $S_d$  は  $d$  次元単位球の表面積を表わす. (3F.10) 式の最後の辺は  $t \rightarrow \infty$  において 0 に収束するから, (3F.8) 式の積分も 0 に収束する. したがって,  $I_1(t)$  は 0 に収束する.

次に  $I_2(t)$  を

$$\begin{aligned}
I_2(t) &= \Gamma_t^0 \int_{B_t} \exp \left[ -\frac{t}{2} (\theta - m_t)^T \Phi_t''(m_t) (\theta - m_t) \right] \\
& \quad \times \left\{ \exp \left[ -t \left( \Phi_t(\theta) - \Phi_t(m_t) - \frac{1}{2} (\theta - m_t)^T \Phi_t''(m_t) (\theta - m_t) \right) \right] - 1 \right\} d\theta \quad (3F.11)
\end{aligned}$$

と変形する. 補題 3.2 の i) の評価を用い, さらに閉球  $B_t$  では  $t|\theta - m_t|^3 \leq 1$  となるこ

とに注意すると

$$\begin{aligned}
& \left| \exp \left[ -t \left( \Phi_t(\theta) - \Phi_t(m_t) - \frac{1}{2} (\theta - m_t)^T \Phi_t''(m_t) (\theta - m_t) \right) \right] - 1 \right| \\
& \leq M_3 t |\theta - m_t|^3 \quad (3F.12)
\end{aligned}$$

とすることができるから,  $I_2(t)$  は

$$|I_2(t)| \leq M_3 t^{-1/2} \Gamma_t^0 \int_{B_t} t^{3/2} |\theta - m_t|^3 \exp \left[ -\frac{t}{2} (\theta - m_t)^T \Phi_t''(m_t) (\theta - m_t) \right] d\theta \quad (3F.13)$$

と評価できる. 右辺のうち  $\Gamma_t^0$  以降の積分は  $t \rightarrow \infty$  と共に正規分布の 3 次のモーメントに近づく量を表わしており,  $I_1(t)$  の場合と同じ論法により有界であることがわかる. したがって,  $t^{-1/2}$  という因子のために  $t \rightarrow \infty$  のとき  $I_2(t) \rightarrow 0$  となる.

$I_3(t)$  は

$$|I_3(t)| \leq \sup_{\theta \in B_t} |p_0(\theta) - p_0(\theta^0)| \frac{\Gamma_t^0}{p_0(\theta^0)} \int_{B_t} e^{-t(\Phi_t(\theta) - \Phi_t(m_t))} d\theta \quad (3F.14)$$

と評価できるが, このうち  $\sup_{\theta \in B_t} |p_0(\theta) - p_0(\theta^0)|$  は, 条件 3 の  $p_0(\theta)$  の連続性から  $t \rightarrow \infty$  で 0 に収束する. 残りの積分の評価には, 補題 3.2 の ii) を用いる. すなわちある  $\delta > 0$  が存在して,  $|\theta - m_t| \leq \delta$  となる  $\theta$  に対して

$$\Phi_t(\theta) - \Phi_t(m_t) \geq M_4 |\theta - m_t|^2 \quad (3F.15)$$

とすることができる.  $t$  を十分大きくとれば閉球  $B_t$  でこの評価が成立するから, 積分は

$$\Gamma_t^0 \int_{B_t} e^{-t(\Phi_t(\theta) - \Phi_t(m_t))} d\theta \leq \Gamma_t^0 \int_{B_t} e^{-tM_4 |\theta - m_t|^2} d\theta \quad (3F.16)$$

で抑えられる. この右辺は  $I_1(t)$  の積分の場合と同様に,  $t \rightarrow \infty$  においてある有限の値に収束する. したがって,  $t \rightarrow \infty$  のとき,  $I_3(t) \rightarrow 0$  となる.

$I_4(t)$  の評価には再び補題 3.2 の ii) を用いる. 閉球  $B_t$  の外側の  $t^{-1/3} < |\theta - m_t| \leq \delta$  においては (3F.15) 式により

$$t(\Phi_t(\theta) - \Phi_t(m_t)) \geq M_4 t^{1/3} \quad (3F.17)$$

となる. また,  $|\theta - m_t| \geq \delta$  においては

$$t(\Phi_t(\theta) - \Phi_t(m_t)) \geq M_5 t \quad (3F.18)$$

と評価できる。したがって、被積分関数は  $t$  を十分大きくとれば一様に  $M_6 \exp(-M_4 t^{1/3})$  で抑えられることになり、 $D$  はコンパクトであったから  $t \rightarrow \infty$  において  $I_4(t) \rightarrow 0$  となる。以上のことから  $I(t) \rightarrow 0$  となるが、証明の中で用いた補題 3.1 と補題 3.2 は確率 1 でなりたつから、この収束は概収束である。□

### 3G 定理 3.4 の証明

この定理を証明するためには、 $t \rightarrow \infty$  のとき確率 1 で

$$\begin{aligned} I(t) &\equiv t \int_D (\theta - m_t) p_t(\theta) d\theta \\ &= t \int_D (\theta - m_t) \Gamma_t p_0(\theta) e^{-t\Phi_t(\theta)} d\theta \end{aligned} \quad (3G.1)$$

が有界であることを示せばよい。補題 3.3 と同様に  $t \rightarrow \infty$  と共に一点  $\{\theta^0\}$  に収縮していく閉球  $B_t$  を

$$B_t = \{\theta; |\theta - m_t| \leq t^{-1/3}\} \quad (3G.2)$$

で定義し、 $I(t)$  を次のように分解する。

$$I(t) = I_1(t) + I_2(t) + I_3(t) + I_4(t) \quad (3G.3)$$

$$I_1(t) = t \Gamma_t p_t(m_t) e^{-t\Phi_t(m_t)} \int_{B_t} (\theta - m_t) \exp\left[-\frac{t}{2}(\theta - m_t)^T \Phi_t''(m_t)(\theta - m_t)\right] d\theta \quad (3G.4)$$

$$I_2(t) = t \Gamma_t e^{-t\Phi_t(m_t)} \int_{B_t} (\theta - m_t) (p_0(\theta) - p_0(m_t)) \exp\left[-\frac{t}{2}(\theta - m_t)^T \Phi_t''(m_t)(\theta - m_t)\right] d\theta \quad (3G.5)$$

$$\begin{aligned} I_3(t) &= t \Gamma_t e^{-t\Phi_t(m_t)} \int_{B_t} (\theta - m_t) p_0(\theta) \\ &\quad \times \left\{ e^{-t(\Phi_t(\theta) - \Phi_t(m_t))} - \exp\left[-\frac{t}{2}(\theta - m_t)^T \Phi_t''(m_t)(\theta - m_t)\right] \right\} d\theta \end{aligned} \quad (3G.6)$$

$$I_4(t) = t \int_{D \setminus B_t} (\theta - m_t) p_t(\theta) d\theta \quad (3G.7)$$

まず  $I_1(t)$  の積分は被積分関数が  $\theta - m_t$  の奇関数であることから 0 になる。

$I_2(t)$  と  $I_3(t)$  を評価するために

$$\Gamma_t^0 = \sqrt{\frac{t^d \det(\Phi''(\theta^0))}{(2\pi)^d}} \quad (3G.8)$$

とおく。そうすると補題 3.3 により

$$\Gamma_t e^{-t\Phi_t(m_t)} / \Gamma_t^0 \leq M_1 \quad (3G.9)$$

とすることができる。ここで、 $M_1 > 0$  は適当な定数で、以後  $M_2, M_3, \dots$  も適当な正の定数とする。

条件 4 により

$$|p_0(\theta) - p_0(m_t)| \leq M_2 |\theta - m_t| \quad (3G.10)$$

となるから  $I_2(t)$  は

$$|I_2(t)| \leq M_3 \Gamma_t^0 \int_{B_t} t |\theta - m_t|^2 \exp\left[-\frac{t}{2}(\theta - m_t)^T \Phi_t''(m_t)(\theta - m_t)\right] d\theta \quad (3G.11)$$

と評価できる。右辺は、補題 3.3 の証明の中の  $I_1(t)$  の場合と同じ論法により、 $t \rightarrow \infty$  と共に正規分布の 2 次のモーメントに近づくことがわかるから、有界である。

次に  $I_3(t)$  を評価するために

$$\begin{aligned} I_3(t) &= t \Gamma_t e^{-t\Phi_t(m_t)} \int_{B_t} (\theta - m_t) p_0(\theta) \exp\left[-\frac{t}{2}(\theta - m_t)^T \Phi_t''(m_t)(\theta - m_t)\right] \\ &\quad \times \left\{ \exp\left[-t\left(\Phi_t(\theta) - \Phi_t(m_t) - \frac{1}{2}(\theta - m_t)^T \Phi_t''(m_t)(\theta - m_t)\right)\right] - 1 \right\} d\theta \end{aligned} \quad (3G.12)$$

と変形する。補題 3.2 の i) の評価を用い、さらに閉球  $B_t$  では  $t|\theta - m_t|^3 \leq 1$  となることに注意すると

$$\begin{aligned} &\left| \exp\left[-t\left(\Phi_t(\theta) - \Phi_t(m_t) - \frac{1}{2}(\theta - m_t)^T \Phi_t''(m_t)(\theta - m_t)\right)\right] - 1 \right| \\ &\leq M_4 t |\theta - m_t|^3 \end{aligned} \quad (3G.13)$$

とすることができるから、 $I_3(t)$  は  $I_2(t)$  と同様にして

$$|I_3(t)| \leq M_5 \Gamma_t^0 \int_{B_t} t^2 |\theta - m_t|^4 \exp\left[-\frac{t}{2}(\theta - m_t)^T \Phi_t''(m_t)(\theta - m_t)\right] d\theta \quad (3G.14)$$

と評価できる。右辺は  $t \rightarrow \infty$  と共に正規分布の 4 次のモーメントに近づくから有界である。

$I_4(t)$  は補題 3.3 の証明の  $I_4(t)$  の場合とまったく同様にして  $t \rightarrow \infty$  において 0 に収束することが示される。以上のことから定理 3.4 が証明された。□

### 3H 定理 3.5 の証明

モーメント母関数の収束を用いてこの定理を証明する. 任意の  $u \in \mathbf{R}^d$  に対して,  $t \rightarrow \infty$  のとき確率 1 で

$$\int_D \exp[\sqrt{t}u^T(\theta - m_t)] p_t(\theta) d\theta \rightarrow \exp\left[\frac{1}{2}u^T(\Phi''(\theta^0))^{-1}u\right] \quad (3H.1)$$

となることが証明できれば, この定理が証明されたことになる. 補題 3.3 と同様に  $t \rightarrow \infty$  と共に一点  $\{\theta^0\}$  に収縮していく閉球  $B_t$  を

$$B_t = \{\theta; |\theta - m_t - t^{-1/2}(\Phi_t''(m_t))^{-1}u| \leq t^{-2/5}\} \quad (3H.2)$$

で定義し, (3H.1) 式の両辺の差を次のように分解する.

$$\begin{aligned} I(t) &\equiv \int_D \exp[\sqrt{t}u^T(\theta - m_t)] p_t(\theta) d\theta - \exp\left[\frac{1}{2}u^T(\Phi''(\theta^0))^{-1}u\right] \\ &= \int_D \exp[\sqrt{t}u^T(\theta - m_t)] \Gamma_t p_0(\theta) e^{-t\Phi_t(\theta)} d\theta - \exp\left[\frac{1}{2}u^T(\Phi''(\theta^0))^{-1}u\right] \\ &= I_1(t) + I_2(t) + I_3(t) + I_4(t) \end{aligned} \quad (3H.3)$$

$$\begin{aligned} I_1(t) &= \Gamma_t^0 \int_{B_t} \exp\left[\sqrt{t}u^T(\theta - m_t) - \frac{t}{2}(\theta - m_t)^T \Phi_t''(m_t)(\theta - m_t)\right] d\theta \\ &\quad - \exp\left[\frac{1}{2}u^T(\Phi''(\theta^0))^{-1}u\right] \end{aligned} \quad (3H.4)$$

$$\begin{aligned} I_2(t) &= \Gamma_t^0 \int_{B_t} \exp[\sqrt{t}u^T(\theta - m_t)] \\ &\quad \times \left\{ e^{-t(\Phi_t(\theta) - \Phi_t(m_t))} - \exp\left[-\frac{t}{2}(\theta - m_t)^T \Phi_t''(m_t)(\theta - m_t)\right] \right\} d\theta \end{aligned} \quad (3H.5)$$

$$I_3(t) = \Gamma_t^0 \int_{B_t} \exp[\sqrt{t}u^T(\theta - m_t)] \{p_0(\theta) e^{-t\Phi_t(m_t)} \Gamma_t / \Gamma_t^0 - 1\} e^{-t\Phi_t(\theta)} d\theta \quad (3H.6)$$

$$I_4(t) = \int_{D \setminus B_t} \exp[\sqrt{t}u^T(\theta - m_t)] p_t(\theta) d\theta \quad (3H.7)$$

ここで,

$$\Gamma_t^0 \equiv 1 / \int_{\mathbf{R}^d} \exp\left\{-\frac{t}{2}\theta^T \Phi''(\theta^0)\theta\right\} d\theta = \sqrt{\frac{t^d \det(\Phi''(\theta^0))}{(2\pi)^d}} \quad (3H.8)$$

とおいた.

まず  $I_1(t)$  の積分は変数変換  $\xi = \sqrt{t}(\theta - m_t) - (\Phi_t''(m_t))^{-1}u$  を行って変形すると

$$\begin{aligned} I_1(t) &= \int_{\mathbf{R}^d} \sqrt{\frac{\det(\Phi''(\theta^0))}{(2\pi)^d}} \exp\left[-\frac{1}{2}\xi^T \Phi_t''(m_t)\xi + \frac{1}{2}u^T(\Phi_t''(m_t))^{-1}u\right] d\xi \\ &\quad - \exp\left[\frac{1}{2}u^T(\Phi''(\theta^0))^{-1}u\right] \\ &= \int_{|\xi| \geq t^{1/10}} \sqrt{\frac{\det(\Phi''(\theta^0))}{(2\pi)^d}} \exp\left[-\frac{1}{2}\xi^T \Phi_t''(m_t)\xi + \frac{1}{2}u^T(\Phi''(\theta^0))^{-1}u\right] d\xi \\ &\quad - \sqrt{\frac{\det(\Phi''(\theta^0))}{(2\pi)^d}} \exp\left[\frac{1}{2}u^T(\Phi_t''(m_t))^{-1}u\right] - \exp\left[\frac{1}{2}u^T(\Phi''(\theta^0))^{-1}u\right] \\ &\quad - \sqrt{\frac{\det(\Phi''(\theta^0))}{(2\pi)^d}} \exp\left[\frac{1}{2}u^T(\Phi_t''(m_t))^{-1}u\right] \int_{|\xi| \geq t^{1/10}} \exp\left[-\frac{1}{2}\xi^T \Phi_t''(m_t)\xi\right] d\xi \end{aligned} \quad (3H.9)$$

となる. これは, 補題 3.3 の証明の中の  $I_1(t)$  と同様の形をしており, そこでの証明と同様にして  $t \rightarrow \infty$  のとき  $I_1(t) \rightarrow 0$  となることが示される.

次に  $I_2(t)$  を評価するために

$$\begin{aligned} I_2(t) &= \Gamma_t^0 \int_{B_t} \exp\left[\sqrt{t}u^T(\theta - m_t) - \frac{t}{2}(\theta - m_t)^T \Phi_t''(m_t)(\theta - m_t)\right] \\ &\quad \times \left\{ \exp\left[-t\left(\Phi_t(\theta) - \Phi_t(m_t) - \frac{1}{2}(\theta - m_t)^T \Phi_t''(m_t)(\theta - m_t)\right)\right] - 1 \right\} d\theta \end{aligned} \quad (3H.10)$$

と変形する. 補題 3.2 の ii) により  $t$  を十分大きくとれば閉球  $B_t$  で

$$|t\Phi_t(\theta) - t\Phi_t(m_t) - \frac{t}{2}(\theta - m_t)^T \Phi_t''(m_t)(\theta - m_t)| \leq Mt^{-1/5} \quad (3H.11)$$

とすることができる. したがって  $I_2(t)$  は

$$\begin{aligned} |I_2(t)| &\leq [\exp(M_1 t^{-1/5}) - 1] \\ &\quad \times \Gamma_t^0 \int_{B_t} \exp\left[\sqrt{t}u^T(\theta - m_t) - \frac{t}{2}(\theta - m_t)^T \Phi_t''(m_t)(\theta - m_t)\right] d\theta \end{aligned} \quad (3H.12)$$

と評価できる.  $t \rightarrow \infty$  のとき,  $\exp(M_1 t^{-1/5}) - 1 \rightarrow 0$  であり, 残りの積分は  $I_1(t)$  の積分と同じであるから,  $\exp\left[\frac{1}{2}u^T(\Phi_t''(m_t))^{-1}u\right]$  に収束する. したがって,  $I_2(t) \rightarrow 0$  となる.

$I_3(t)$  は補題 3.3 により,  $t \rightarrow \infty$  において 0 に収束する.

$I_4(t)$  は補題 3.3 の証明の  $I_4(t)$  の場合とまったく同様にして  $t \rightarrow \infty$  において 0 に収束することが示される. 以上のことから定理 3.5 が証明された.  $\square$

## 第 4 章

# パラメータが緩やかに変動する場合の適応推定

### 4.1 まえがき

前章では, 未知パラメータが固定の場合の連続時間系の適応推定を非線形フィルタリングの問題として取り扱い, 特異摂動法を用いて漸近最適な推定値の得られるアルゴリズムを構成した. 本章では, このアルゴリズムの構成法を, 未知パラメータが緩やかに変動する場合へ拡張する.

従来からも, 変動する未知パラメータを推定するための手法として, 拡張 Kalman フィルタを用いるもの [19] や忘却因子 (forgetting factor) を用いるもの [52] があつた. しかしながらこのうち前者は, はじめから 3 次以上の条件つきモーメントを無視するような非線形フィルタの近似法であるため, 本章で示すように, 適応推定の場合には推定値にバイアスを生じるという欠陥をはらんでいる. また後者には, 忘却因子の大きさが ad hoc にしか決められないという問題があつた. 本章で示すアルゴリズムの構成法でその問題は, 最適性の観点からは解決することになる.

本章ではまず 4.2 節で, パラメータが緩やかに変動する場合の適応推定のモデルを示し, それに対応する非線形フィルタの方程式を 2 種類の表現で導く. すなわち, 逐次型の表現である Kushner の方程式と, 非逐次型の表現である Kallianpur-Striebel の公式とである. 次に 4.3 節で, Kallianpur-Striebel の公式を出発点としてパラメータの条件つき分布の漸近的性質を明らかにする. パラメータが変動する場合には, 前章の固定パラメータの場合と異なり, 条件つき確率密度関数は陽には表現できない. しかしながら, パラメータの変動が緩やかという仮定のもとで, 上記公式と大偏差理論 [15], [84], [74], [25] を用いることにより条件つき分布の漸近的性質の解析が可能にな

る。このようにして、前章と同様にパラメータの条件つき分布の漸近形を導き、条件つきモーメントのオーダ評価を行う。4.4節では、条件つきモーメントのオーダ評価の結果を用いて適応推定アルゴリズムを導く。この導き方は前章の固定パラメータの場合と同様である。4.5節では、得られた適応推定アルゴリズムのシミュレーションによる検討を行い、パラメータ推定値の漸近最適性を明らかにする。

## 4.2 適応推定のモデルと非線形フィルタ

$\Theta_t \in \mathbf{R}^d$  を未知パラメータ、 $X_t \in \mathbf{R}^n$  を状態変数、 $Y_t \in \mathbf{R}^m$  を観測値とする。未知パラメータの変動が緩やかであると仮定して、次式で表わされるような適応推定のモデルを考える。

$$d\Theta_t = \epsilon b(\Theta_t)dt + \epsilon \sigma(\Theta_t)du_t \quad (4.1)$$

$$dX_t = F(\Theta_t)X_t dt + G(\Theta_t)dv_t \quad (4.2)$$

$$dY_t = H(\Theta_t)X_t dt + dw_t \quad (4.3)$$

ここで  $\epsilon$  は変動の緩やかさを表わす小さいパラメータであり、 $u_t, v_t, w_t$  は互いに独立な、適当な次元の標準ブラウン運動である。簡単のために  $\Theta_t$  はあるコンパクト集合  $D \subset \mathbf{R}^d$  の中で変動するものとし、任意の  $\theta \in D$  に対して  $F(\theta)$  は指数安定で、 $b(\theta), a(\theta) = \sigma(\theta)\sigma^T(\theta), F(\theta), Q(\theta) = G(\theta)G^T(\theta), H(\theta)$  は  $\theta$  について十分滑らかであるとする。滑らかさに関する仮定が必要なのは、あとでアルゴリズムを導く際に条件つきモーメントの方程式系の右辺を展開するためであり、 $F(\theta)$  が指数安定という条件が必要なのは、その方程式系を特異摂動系として扱うためである。

このモデルの  $(X_t, \Theta_t)$  を拡大された状態変数と考えれば、非線形フィルタリングの理論 [31] により、任意の十分に滑らかな関数  $\varphi(x, \theta)$  に対して、 $\varphi(X_t, \Theta_t)$  の  $Y_0^t = \{Y_s; 0 \leq s \leq t\}$  に関する条件つき期待値  $\hat{\varphi}_t$  の発展を表わす方程式が

$$d\hat{\varphi}_t = \widehat{\mathcal{L}}\hat{\varphi}_t dt + \widehat{\varphi}Hx_t - \hat{\varphi}_t \widehat{H}x_t)^T dv_t \quad (4.4)$$

$$dv_t = dY_t - \widehat{H}x_t dt \quad (4.5)$$

のように導かれる (2.2.2 節参照)。ここで、 $\hat{\varphi}_t$  は  $Y_0^t$  に関する条件つき期待値を表わし、

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \sum_{i,j} Q_{ij}(\theta) \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_i (F(\theta)x)_i \frac{\partial}{\partial x_i}$$

$$+ \frac{\epsilon^2}{2} \sum_{k,l} a_{kl}(\theta) \frac{\partial^2}{\partial \theta_k \partial \theta_l} + \epsilon \sum_k b_k(\theta) \frac{\partial}{\partial \theta_k} \quad (4.6)$$

は  $(X_t, \Theta_t)$  の生成作用素である。

アルゴリズムの構成を考える場合には、(4.4) 式のような時間発展の方程式を出発点とすればよいが、非線形フィルタそれ自体の挙動を解析する場合には、条件つき分布の非逐次型の表現を用いる方が都合がよい。そのためには関数空間上での分布を考える必要がある。

いま、 $T > 0$  を任意に一つ固定し、 $\Omega_\theta, \Omega_x, \Omega_y$  を  $[0, T]$  からそれぞれ、 $D, \mathbf{R}^n, \mathbf{R}^m$  への連続関数の空間とする。 $\Omega_\theta, \Omega_x$  の元をそれぞれ、 $\theta = \{\theta_t; 0 \leq t \leq T\}, \mathbf{x} = \{x_t; 0 \leq t \leq T\}$  と表わす。さらに、 $\Theta = \{\Theta_t; 0 \leq t \leq T\}, \mathbf{X} = \{X_t; 0 \leq t \leq T\}, \mathbf{Y} = \{Y_t; 0 \leq t \leq T\}$  とおくと、これらはそれぞれ  $\Omega_\theta, \Omega_x, \Omega_y$  に値をとる確率変数とみなせる。観測値によらずに、(4.1), (4.2) 式だけで決まる  $(\Theta, \mathbf{X})$  の分布を  $P_{\Theta, \mathbf{X}}$  とおく。このとき、 $(\Theta, \mathbf{X})$  の  $\mathbf{Y}$  に関する条件つき分布  $P_{\Theta, \mathbf{X}|\mathbf{Y}}$  は、Kallianpur-Striebel の公式 (2.2.4 節参照) により

$$dP_{\Theta, \mathbf{X}|\mathbf{Y}} = \frac{\Lambda_T dP_{\Theta, \mathbf{X}}}{\int_{\Omega_\theta} \int_{\Omega_x} \Lambda_T dP_{\Theta, \mathbf{X}}} \quad (4.7)$$

$$\Lambda_T = \exp \left\{ -\frac{1}{2} \int_0^T |H(\theta_t)x_t|^2 dt + \int_0^T (H(\theta_t)x_t)^T dY_t \right\} \quad (4.8)$$

と表わせる。ここで  $|\cdot|$  はユークリッドノルムを表わす。(4.7) 式を  $\mathbf{x}$  で積分すると、 $\Theta$  だけの条件つき分布

$$dP_{\Theta|\mathbf{Y}} = \frac{\tilde{\Lambda}_T dP_\Theta}{\int_{\Omega_\theta} \tilde{\Lambda}_T dP_\Theta} \quad (4.9)$$

$$\begin{aligned} \tilde{\Lambda}_T &\stackrel{\text{def}}{=} \int_{\Omega_x} \Lambda_T dP_{\mathbf{X}|\Theta} \\ &= \exp \left\{ -\frac{1}{2} \int_0^T |H(\theta_t)\hat{x}_t(\theta)|^2 dt + \int_0^T (H(\theta_t)\hat{x}_t(\theta))^T dY_t \right\} \end{aligned} \quad (4.10)$$

が得られる。ここで、 $P_\Theta$  は (4.1) 式だけから決まる  $\Theta$  の分布を表わし、 $\hat{x}_t(\theta)$  は  $\Theta(= \theta)$  と  $Y_0^t$  に関する  $X_t$  の条件つき期待値を表わす。(4.10) 式の導き方は付録に示す。

### 4.3 非線形フィルタの漸近的特性の解析

#### 4.3.1 パラメータの条件つき確率密度関数の漸近形

観測値  $Y = \{Y_t; 0 \leq t \leq T\}$  に関する  $\Theta_T$  の条件つき確率密度関数を  $p_T(\theta)$  とおく。  $\epsilon$  が十分小さく  $T$  が十分大きいときの  $p_T(\theta)$  の挙動を調べるために、  $p_T^\epsilon(\theta) \equiv p_{T/\epsilon}(\theta)$  の  $\epsilon \rightarrow 0$  における漸近形を求めることにする。

モデル (4.1)–(4.2) 式の変数について時間スケールの変更  $t \rightarrow \tau = \epsilon t$  を行って、  $\Theta_\tau^\epsilon = \Theta_{\tau/\epsilon}$ ,  $X_\tau^\epsilon = X_{\tau/\epsilon}$ ,  $Y_\tau^\epsilon = Y_{\tau/\epsilon}$  とし、それらの  $0 \leq \tau \leq T$  での径路をそれぞれ、  $\Theta^\epsilon$ ,  $X^\epsilon$ ,  $Y^\epsilon$  とおく。  $Y^\epsilon$  に関する  $\Theta^\epsilon$  の条件つき分布は (4.3) 式を (4.9), (4.10) 式に代入して変形することにより

$$dP_{\Theta|Y}^\epsilon = \frac{\exp\left\{-\frac{1}{\epsilon}\Phi^\epsilon(\theta)\right\} dP_\Theta^\epsilon}{\int_{\Omega_\theta} \exp\left\{-\frac{1}{\epsilon}\Phi^\epsilon(\theta)\right\} dP_\Theta^\epsilon} \quad (4.11)$$

$$\Phi^\epsilon(\theta) = \frac{1}{2} \int_0^T |\eta_\tau^\epsilon(\theta)|^2 d\tau - \sqrt{\epsilon} \int_0^T (\eta_\tau^\epsilon(\theta))^T dW_\tau \quad (4.12)$$

$$\eta_\tau^\epsilon(\theta) = H(\theta_\tau)\hat{x}_\tau^\epsilon(\theta) - H(\Theta_\tau^\epsilon)X_\tau^\epsilon \quad (4.13)$$

となる。ここで  $\hat{x}_\tau^\epsilon(\theta) = \hat{x}_{\tau/\epsilon}(\theta)$ ,  $W_\tau = \sqrt{\epsilon}w_{\tau/\epsilon}$  とおいた。また、  $P_\Theta^\epsilon$  は  $\Theta^\epsilon$  の分布である。

条件つき分布 (4.11) 式の  $\epsilon \rightarrow 0$  における漸近形を、大偏差理論 [15], [84], [25] を用いて調べる。まず、  $P_\Theta^\epsilon$  は Ventcel-Freidlin の定理 ([84] の Theorem 6.3) により、  $\epsilon \rightarrow 0$  のとき漸近的に

$$dP_\Theta^\epsilon \sim \exp\left\{-\frac{1}{\epsilon}S(\theta)\right\} d\theta \quad (4.14)$$

$$S(\theta) = \frac{1}{2} \int_0^T (\dot{\theta}_\tau - b(\theta_\tau))^T a^{-1}(\theta_\tau)(\dot{\theta}_\tau - b(\theta_\tau)) d\tau \quad (4.15)$$

と表わせる<sup>1</sup>。ここで  $(\cdot)$  は時間微分を表わし、  $\theta \in \tilde{\Omega}_\theta$  が微分可能でないときには  $S(\theta) = \infty$  と定義する。

つぎに、(4.12) 式の  $\Phi^\epsilon(\theta)$  は、  $\tau = T$  におけるパラメータの真の値を  $\Theta_T^\epsilon = \theta_T^0$  に

<sup>1</sup>(4.14) 式は関数空間  $\Omega_\theta$  上の分布の漸近公式であり、厳密な意味については文献 [15] の chapter 3 を参照。

固定して  $\epsilon \rightarrow 0$  とすると、つぎのような極限をもつ。

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \Phi^\epsilon(\theta) = \int_0^T \phi(\theta_\tau, \theta_\tau^0) d\tau \quad (4.16)$$

$$\phi(\theta, \theta^0) = \frac{1}{2} E \left\{ \left| H(\theta)\hat{x}_t(\theta) - H(\theta^0)\hat{x}_t(\theta^0) \right|^2 \middle| \Theta_t \equiv \theta^0 \right\}, \quad \theta, \theta^0 \in D \quad (4.17)$$

ここで、  $\hat{x}_t(\theta)$ ,  $\hat{x}_t(\theta^0)$  はパラメータの値をそれぞれ  $\Theta_t \equiv \theta$ ,  $\theta^0$  とみなしたときの  $X_t$  の条件つき期待値である。また、  $\theta_\tau^0$ ,  $0 \leq \tau \leq T$  は終端値  $\theta_T^0$  を与えたときの  $\Theta_\tau^\epsilon$  の most probable path, すなわち

$$\frac{d}{d\tau} \theta_\tau^0 = b(\theta_\tau^0) \quad (4.18)$$

の解である。なお、(4.17) 式の  $\phi(\theta, \theta^0)$  は固定パラメータのモデル同士の距離を測る Kullback の情報量にほかならない。

(4.14) 式と (4.16) 式により、(4.11) 式の条件つき分布は  $\epsilon \rightarrow 0$  においてつぎのような漸近形をもつ。

$$dP_{\Theta|Y}^\epsilon \sim \exp\left\{-\frac{1}{\epsilon}\tilde{S}(\theta)\right\} d\theta \quad (4.19)$$

$$\tilde{S}(\theta) = S(\theta) + \int_0^T \phi(\theta_\tau, \theta_\tau^0) d\tau \quad (4.20)$$

これはパラメータの径路についての条件つき分布の漸近形であるが、これからその周辺分布に相当する条件つき確率密度関数  $p_T^\epsilon(\theta)$  の漸近形が求まって、つぎのようになる [15].

$$p_T^\epsilon(\theta) \sim \exp\left\{-\frac{1}{\epsilon}\psi(T, \theta)\right\} \quad (4.21)$$

$$\psi(T, \theta) = \inf_{\theta \in \Omega_\theta, \theta_T = \theta} \tilde{S}(\theta) \quad (4.22)$$

(4.22) 式の  $\psi$  は変分問題の極値であるから、Hamilton-Jacobi の方程式

$$\frac{\partial}{\partial \tau} \psi = \phi(\theta, \theta_\tau^0) - \frac{1}{2} (\psi')^T a(\theta) \psi' - b^T(\theta) \psi' \quad (4.23)$$

$$\psi(0, \theta) = 0$$

の解の  $\tau = T$  における値に等しい [49]。ここでプライム記号  $(\cdot)$  は  $\theta$  による微分を表わす。

### 4.3.2 条件つきモーメントの漸近的評価

$u \in \mathbf{R}^d$  として,  $\Theta_T^\epsilon$  の条件つきモーメントの母関数を

$$G^\epsilon(u) = \int_D \exp(u^T \theta) p_T^\epsilon(\theta) d\theta \quad (4.24)$$

とおく. これを  $u$  で展開したときの係数が  $\Theta_T^\epsilon$  の条件つきモーメントになる. (4.24) 式に (4.21) 式の漸近形を代入し,  $u$  のかわりに  $u/\epsilon$  とおけば

$$G^\epsilon\left(\frac{u}{\epsilon}\right) \sim \int_D \exp\left\{\frac{1}{\epsilon}(u^T \theta - \psi(T, \theta))\right\} d\theta \quad (4.25)$$

という形になる. この積分は Laplace の方法 [66] を用いて漸近評価することができて

$$G^\epsilon\left(\frac{u}{\epsilon}\right) \sim \exp\left\{\frac{1}{\epsilon}q(u)\right\} \quad (4.26)$$

$$q(u) = \sup_{\theta \in D} (u^T \theta - \psi(T, \theta)) \quad (4.27)$$

となる. (4.26) 式から

$$G^\epsilon(u) \sim \exp\left\{\frac{1}{\epsilon}q(\epsilon u)\right\} \quad (4.28)$$

を得る. この右辺を  $u$  で展開することにより,  $\Theta_T^\epsilon$  の  $k$  次の条件つきモーメントの大きさは,  $k$  が偶数のとき  $O(\epsilon^{k/2})$ , 奇数のとき  $O(\epsilon^{(k+1)/2})$  となることが導かれる.

つぎに結合型の条件つきモーメントを評価する.  $X_T^\epsilon$  と  $\Theta_T^\epsilon$  がともにスカラーの場合を計算することにして

$$M_{i,k}^\epsilon = \int_D \int_R (x - \hat{x}_T^\epsilon)^i (\theta - \hat{\theta}_T^\epsilon)^k p_T^\epsilon(x, \theta) dx d\theta \quad (4.29)$$

とおく. ここで,  $\hat{x}_T^\epsilon, \hat{\theta}_T^\epsilon$  はそれぞれ,  $X_T^\epsilon, \Theta_T^\epsilon$  の条件つき期待値であり,  $p_T^\epsilon(x, \theta)$  は  $(X_T^\epsilon, \Theta_T^\epsilon)$  の条件つき確率密度関数である.  $p_T^\epsilon(x, \theta)$  は,  $X_t$  と  $\Theta_t$  の変動の時間スケールが異なることから,  $p_T^\epsilon(x, \theta) \sim p_T^\epsilon(x|\theta)p_T^\epsilon(\theta)$  と分解できる. ここで  $p_T^\epsilon(x|\theta)$  は,  $\Theta_T^\epsilon \equiv \theta$  を固定したときの  $X_T^\epsilon$  の条件つき確率密度関数であり, 正規分布になる. その平均値を  $\hat{x}_T^\epsilon(\theta)$ ,  $l$  次のモーメントを  $Q_l(\theta)$  ( $l$  が奇数なら 0) とおくと (4.29) 式は

$$M_{i,k}^\epsilon \sim \int_D I_i^\epsilon(\theta) (\theta - \hat{\theta}_T^\epsilon)^k p_T^\epsilon(\theta) d\theta \quad (4.30)$$

$$\begin{aligned} I_i^\epsilon(\theta) &\stackrel{\text{def}}{=} \int_R (x - \hat{x}_T^\epsilon)^i p_T^\epsilon(x|\theta) dx \\ &= \sum_{r=0}^i {}_i C_r Q_{i-r}(\theta) (\hat{x}_T^\epsilon(\theta) - \hat{x}_T^\epsilon)^r \end{aligned} \quad (4.31)$$

表 4.1 条件つきモーメント  $M_{i,k}^\epsilon$  ((4.30) 式) のオーダー評価

$k$	0	1	2	3	4	...	偶数	奇数	...
偶数	—	—	$\epsilon$	$\epsilon^2$	$\epsilon^2$	...	$\epsilon^{k/2}$	$\epsilon^{(k+1)/2}$	...
奇数	—	$\epsilon$	$\epsilon^2$	$\epsilon^2$	$\epsilon^3$	...	$\epsilon^{k/2+1}$	$\epsilon^{(k+1)/2}$	...

となる.  $I_i^\epsilon(\theta)$  を  $\hat{\theta}_T^\epsilon$  のまわりで Taylor 展開して

$$I_i^\epsilon(\theta) \sim \begin{cases} Q_i(\hat{\theta}_T^\epsilon) + Q_i'(\hat{\theta}_T^\epsilon)(\theta - \hat{\theta}_T^\epsilon) + \dots, & l: \text{偶数} \\ \epsilon S_T^\epsilon [Q_{i-1}(\hat{\theta}_T^\epsilon)(\theta - \hat{\theta}_T^\epsilon) \\ + Q_{i-1}'(\hat{\theta}_T^\epsilon)(\theta - \hat{\theta}_T^\epsilon)^2] + \dots, & l: \text{奇数} \end{cases} \quad (4.32)$$

とする. ここで  $S_T^\epsilon = (d/d\theta)\hat{x}_T^\epsilon(\theta)|_{\theta=\hat{\theta}_T^\epsilon}$  とおき  $\hat{x}_T^\epsilon \sim \hat{x}_T^\epsilon(\hat{\theta}_T^\epsilon)$  となることを用いた. (4.32) 式を (4.30) 式に代入して, さきの  $\Theta_T^\epsilon$  の条件つきモーメントのオーダー評価の結果を用いると, 表 4.1 に示すような評価が得られる.  $X_T^\epsilon$  と  $\Theta_T^\epsilon$  がベクトルの場合も, 途中の計算は複雑になるが, 同じ結果になる.

### 4.3.3 パラメータの最適推定値の誤差の漸近評価

推定すべき確率変数の条件つき確率密度関数が (4.21) 式のような漸近形をもつ場合には, 条件つき共分散と最適推定値 (条件つき期待値) の共分散とが漸近的に一致する [59]. ここではこの関係を用いてパラメータの最適推定値の誤差の共分散を評価する.

パラメータの条件つき共分散は, (4.21) 式の漸近形と Laplace の方法 [66] を用いて評価すると

$$\begin{aligned} V_T^\epsilon &\stackrel{\text{def}}{=} \int_D (\theta - \hat{\theta}_T^\epsilon)(\theta - \hat{\theta}_T^\epsilon)^T p_T^\epsilon(\theta) d\theta \\ &\sim \int_D (\theta - \theta_T^0)(\theta - \theta_T^0)^T \exp\left\{-\frac{1}{\epsilon}\psi(T, \theta)\right\} d\theta \\ &\sim \epsilon(\psi_T'' )^{-1} \end{aligned} \quad (4.33)$$

となる. ここで,  $\psi_T'' = (\partial^2/\partial\theta\partial\theta^T)\psi(T, \theta)|_{\theta=\theta_T^0}$  とおいた.  $\psi_T''$  の従う方程式は (4.18) 式と (4.23) 式から

$$\frac{d}{d\tau}\psi_T'' = J(\theta_T^0) - \psi_T'' a(\theta_T^0)\psi_T'' - (b'(\theta_T^0))^T \psi_T'' - \psi_T'' b(\theta_T^0) \quad (4.34)$$

となる. ここで  $J(\theta^0)$  は

$$J(\theta^0) = \frac{\partial^2}{\partial \theta \partial \theta^T} \phi(\theta, \theta^0) \Big|_{\theta=\theta^0} \quad (4.35)$$

で定義される Fisher の情報行列である.

パラメータの最適推定値の共分散を

$$P_T^c \stackrel{\text{def}}{=} E[(\hat{\theta}_T^c - \theta_T^0)(\hat{\theta}_T^c - \theta_T^0)^T | \theta_T^c = \theta_T^0] \quad (4.36)$$

とおく. これは  $V_T^c$  と漸近的に等しくなるから

$$P_T^c \sim \epsilon \tilde{P}_T \quad (4.37)$$

という漸近形をもち, その先導項は

$$\tilde{P}_T = (\psi_T'')^{-1} \quad (4.38)$$

となることわかる. (4.34) 式から  $\tilde{P}_T$  の方程式を求めると

$$\frac{d}{d\tau} \tilde{P}_\tau = -\tilde{P}_\tau J(\theta_\tau^0) \tilde{P}_\tau + a(\theta_\tau^0) + b'(\theta_\tau^0) \tilde{P}_\tau + \tilde{P}_\tau (b'(\theta_\tau^0))^T \quad (4.39)$$

となる. これは Riccati 方程式である.

例として, つぎのような 1 次系のモデルを考える.

$$dX_t = -A_t X_t dt + \sqrt{Q} dv_t \quad (4.40)$$

$$dY_t = X_t dt + \sqrt{r} dw_t \quad (4.41)$$

未知パラメータは  $\theta_t = (A_t, Q)^T$  とし, このうち  $A_t$  は

$$dA_t = -\epsilon^2 \gamma (A_t - \langle A \rangle) dt + \epsilon \sigma du_t \quad (4.42)$$

に従って, 平均値  $\langle A \rangle$  のまわりを緩やかに変動するものとする. (4.42) 式の drift 項には  $\epsilon$  のオーダーのものがないことから (4.18) 式は  $(d/d\tau)\theta_\tau^0 = 0$  となり, この解は定数  $\theta_\tau^0 \equiv \theta^0 = (a_0, q_0)$ ,  $0 \leq \tau \leq T$  に等しい.

モデル (4.40), (4.41) 式に対して Kullback の情報量 (4.17) 式を計算すると次式を得る.

$$\begin{aligned} & \phi(\theta, \theta^0) \\ &= \frac{1}{4(a+k)} \left\{ \frac{k_0(a-a_0)}{a_0(a+k+a_0)} [k_0(a-a_0) - 2a_0(k-k_0)] + (k-k_0)^2 \right\} \quad (4.43) \end{aligned}$$

ここで,  $\theta = (a, q)^T$  であり,  $k = -a + \sqrt{a^2 + q/r}$  および  $k_0 = -a_0 + \sqrt{a_0^2 + q_0/r}$  はそれぞれ,  $\theta$  および  $\theta^0$  に対応する定常 Kalman 利得である. (4.43) 式を 2 回微分することにより Fisher の情報行列が求まって

$$J(\theta^0) = \begin{pmatrix} J_{aa}(\theta^0) & J_{aq}(\theta^0) \\ J_{aq}(\theta^0) & J_{qq}(\theta^0) \end{pmatrix} \quad (4.44)$$

$$J_{aa}(\theta^0) = \frac{k_0^2(5a_0^2 + 5a_0k_0 + k_0^2)}{2a_0(2a_0 + k_0)(a_0 + k_0)^3} \quad (4.45)$$

$$J_{aq}(\theta^0) = -\frac{3k_0(3a_0 + 2k_0)}{8r(2a_0 + k_0)(a_0 + k_0)^3} \quad (4.46)$$

$$J_{qq}(\theta^0) = \frac{1}{8r^2(a_0 + k_0)^3} \quad (4.47)$$

となる. Riccati 方程式 (4.39) は定常状態では

$$-\tilde{P}J(\theta^0)\tilde{P} + \begin{pmatrix} \sigma^2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 0 \quad (4.48)$$

と書ける. これを解くと

$$\tilde{P} = \begin{pmatrix} \tilde{P}_{aa} & \tilde{P}_{aq} \\ \tilde{P}_{aq} & \tilde{P}_{qq} \end{pmatrix} \quad (4.49)$$

$$\tilde{P}_{aa} = \sigma / \sqrt{J_{aa}(\theta^0)} \quad (4.50)$$

$$\tilde{P}_{aq} = \tilde{P}_{qq} = 0 \quad (4.51)$$

が得られ, 定常状態でのパラメータ推定値の分散は

$$E(\hat{a}_t - A_t)^2 \sim \epsilon \sigma / \sqrt{J_{aa}(\theta^0)} \quad (4.52)$$

$$E(\hat{q}_t - Q)^2 \sim 0 \quad (4.53)$$

となる.

#### 4.4 非線形フィルタの近似によるアルゴリズムの構成

非線形フィルタの方程式 (4.4) を用いると条件つきモーメントの方程式系が得られるが, それらは有限次元では閉じないから, アルゴリズムを構成するためにはなんらかの高次打ち切りが必要になる [76]. ここで示す方法は, あらかじめどの次数で打切るかということは決めないで, 漸近的に無視できる項を落とすという手続きで, 自然な

高次打切りを行うものである。これは前章の固定パラメータの場合に用いた方法であるが、パラメータが変動する場合にも、その変動が緩やかであるという仮定のもとで適用することができる。なお、打切りの次数については、4.5.2節で簡単な例を用いて考察する。

前章の固定パラメータの場合と同様に、 $\hat{x}_t, \hat{\theta}_t$  をそれぞれ  $X_t, \Theta_t$  の条件つき期待値、 $V_{\theta\theta}$  を  $\Theta_t$  の条件つき共分散、 $\hat{x}_t(\theta)$  を  $\theta \equiv \Theta_t$  としたときの  $X_t$  の条件つき期待値とし、

$$\tilde{V}_{\theta\theta} = \epsilon^{-1} V_{\theta\theta} \quad (4.54)$$

$$S_t = \left. \frac{\partial}{\partial \theta^T} \hat{x}_t(\theta) \right|_{\theta=\hat{\theta}_t} \quad (4.55)$$

とおくと  $\hat{x}_t, \hat{\theta}_t, S_t, \tilde{V}_{\theta\theta}$  の方程式が次のように導かれる。

$$d\hat{x}_t = [F(\hat{\theta}_t)\hat{x}_t + O(\epsilon)]dt + [K(\hat{\theta}_t) + O(\epsilon)]d\nu_t \quad (4.56)$$

$$d\hat{\theta}_t = \epsilon[b(\hat{\theta}_t) + O(\epsilon)]dt + \epsilon[\tilde{L}_t + O(\epsilon)]d\nu_t \quad (4.57)$$

$$dS_t = (C(\hat{\theta}_t)S_t + D_t)dt + dN_t \quad (4.58)$$

$$d\tilde{V}_{\theta\theta} = \epsilon[b'(\hat{\theta}_t)\tilde{V}_{\theta\theta} + \tilde{V}_{\theta\theta}(b'(\hat{\theta}_t))^T + a(\hat{\theta}) - \tilde{L}_t\tilde{L}_t^T + O(\epsilon)]dt + O(\epsilon)d\nu_t \quad (4.59)$$

$$d\nu_t = dY_t - [H(\hat{\theta}_t)\hat{x}_t + O(\epsilon)]dt \quad (4.60)$$

ここで、 $K(\theta)$  は (4.2), (4.3) 式において  $\Theta_t = \theta$  としたときの定常 Kalman 利得であり、

$$C(\theta) = F(\theta) - K(\theta)H(\theta) \quad (4.61)$$

$$D_t = \left. \frac{\partial}{\partial \theta^T} (F(\theta) - K(\hat{\theta}_t)H(\theta))\hat{x}_t \right|_{\theta=\hat{\theta}_t} \quad (4.62)$$

$$dN_t = \left. \frac{\partial}{\partial \theta^T} K(\theta)d\nu_t \right|_{\theta=\hat{\theta}_t} \quad (4.63)$$

$$\tilde{L}_t = \tilde{V}_{\theta\theta}(H(\hat{\theta}_t)S_t + I_t)^T \quad (4.64)$$

$$I_t = \left. \frac{\partial}{\partial \theta^T} H(\theta)\hat{x}_t \right|_{\theta=\hat{\theta}_t} \quad (4.65)$$

とにおいてある。(4.56)~(4.60) 式のうち、 $\hat{x}_t, \hat{\theta}_t, \tilde{V}_{\theta\theta}$  の各方程式は、(4.4) 式から求まる方程式の右辺を条件つきモーメントで展開し、4.3.2節の評価を加えたものである。残

りの  $S_t$  の方程式は、 $\hat{x}_t(\theta)$  の方程式

$$d\hat{x}_t(\theta) = F(\theta)\hat{x}_t(\theta)dt + K(\theta)(dY_t - H(\theta)\hat{x}_t(\theta)dt) \quad (4.66)$$

を  $\theta$  で微分して、 $\theta = \hat{\theta}_t$  を代入したものである。

方程式系 (4.56)~(4.60) は、 $O(\epsilon)$  と書いた項を除けば閉じた形になっている。これら  $O(\epsilon)$  の項が  $\epsilon \rightarrow 0$  のとき無視できる項であることをみるために、4.3.3節で得られた評価 (4.37) を用いて  $\hat{\theta}_t$  のスケールリング

$$\tilde{\theta}_t = \frac{1}{\sqrt{\epsilon}}(\hat{\theta}_t - \Theta_t) \quad (4.67)$$

を行い、(4.56)~(4.60) 式を (4.1)~(4.3) 式と連立させてつぎのように書き直す。

$$\begin{cases} d\Theta_t = \epsilon b(\Theta_t)dt + \epsilon \sigma(\Theta_t)du_t \\ d\tilde{\theta}_t = \epsilon [b'(\Theta_t)\tilde{\theta}_t + \tilde{L}_t\xi_t + O(\sqrt{\epsilon})]dt \\ \quad + \sqrt{\epsilon} \{[\tilde{L}_t + O(\epsilon)]dw_t - \sigma(\Theta_t)du_t\} \\ d\tilde{V}_{\theta\theta} = \epsilon [b'(\tilde{\theta}_t)\tilde{V}_{\theta\theta} + \tilde{V}_{\theta\theta}(b'(\tilde{\theta}_t))^T + a(\tilde{\theta}) - \tilde{L}_t\tilde{L}_t^T \\ \quad + O(\sqrt{\epsilon})]dt + \sqrt{\epsilon} O(\sqrt{\epsilon})dw_t \end{cases} \quad (4.68)$$

$$\begin{cases} dX_t = F(\Theta_t)X_tdt + G(\Theta_t)d\nu_t \\ d\hat{x}_t = [F(\hat{\theta}_t)\hat{x}_t + O(\sqrt{\epsilon})]dt + [K(\hat{\theta}_t) + O(\epsilon)]dw_t \\ dS_t = [C(\hat{\theta}_t)S_t + D_t + O(\sqrt{\epsilon})]dt + \left. \frac{\partial}{\partial \theta^T} K(\theta)dw_t \right|_{\theta=\hat{\theta}_t} \end{cases} \quad (4.69)$$

ここで、 $\xi_t \equiv \epsilon^{-1/2}(H(\Theta_t)X_t - H(\hat{\theta}_t)\hat{x}_t)$  は  $O(1)$  の変数である。(4.68) 式と (4.69) 式は二つのモードからなる特異摂動系であり、 $\Theta_t, \tilde{\theta}_t, \tilde{V}_{\theta\theta}$  が遅い変数に、 $X_t, \hat{x}_t, S_t$  が速い変数になる。固定パラメータの場合との違いは、 $\Theta_t$  が遅い変数として加わったことである。

(4.68) 式、(4.69) 式のような特異摂動系において、時間スケールの変更  $t \rightarrow \tau = \tau t$  を行い、 $\epsilon \rightarrow 0$  とすると、遅い変数の分布はある極限に収束する [17] が、そのとき、式のなかで  $O(\epsilon)$  あるいは  $O(\sqrt{\epsilon})$  と書いた項は極限の分布に影響を与えない。すなわち、漸近的に無視できる項になる (2.4.1節参照)。これらの項は (4.56)~(4.60) 式において  $O(\epsilon)$  と書いた項に相当する。このようにしてつぎのアルゴリズムが得られる。なお、あとの便利のために観測雑音は  $dw_t$  のかわりに一般化して  $R^{1/2}dw_t$  としてある。

$$d\nu_t = dY_t - H(\hat{\theta}_t)\hat{x}_tdt \quad (4.70)$$

$$d\hat{x}_t = F(\hat{\theta}_t)\hat{x}_t dt + K(\hat{\theta}_t)d\nu_t \quad (4.71)$$

$$d\hat{\theta}_t = cb(\hat{\theta}_t)dt + L_t d\nu_t \quad (4.72)$$

$$dS_t = (C(\hat{\theta}_t)S_t + D_t)dt + dN_t \quad (4.73)$$

$$\frac{d}{dt}V_{\theta\theta} = \epsilon[b'(\hat{\theta}_t)V_{\theta\theta} + V_{\theta\theta}(b'(\hat{\theta}_t))^T] + \epsilon^2 a(\hat{\theta}) - L_t R L_t^T \quad (4.74)$$

ここで、 $L_t = V_{\theta\theta}(H(\hat{\theta}_t)S_t + I_t)^T R^{-1}$  とおいた。(4.70)~(4.74)式において  $\epsilon = 0$  としたものは、前章のパラメータが固定の場合のアルゴリズムと一致する。すなわち、(4.70)~(4.74)式において  $\epsilon$  あるいは  $\epsilon^2$  のかかる項が、パラメータが変動することにより必要になった項である。特に(4.74)式において、これらの項は  $V_{\theta\theta}$  が 0 に減少するのを防ぐ役割を果たす。(4.72)式から明かなように、 $V_{\theta\theta}$  が 0 になれば観測値からパラメータ推定値を更新することができなくなるから、変動するパラメータを追尾するためには、 $V_{\theta\theta}$  が 0 に減少しないことが必要条件になる。従来からある忘却因子 (forgetting factor) を用いる方法 [52] はその条件を満たすものではあるが、最適な追尾を行うものではなかった。ここに示した方法では、パラメータに適切なダイナミクスを仮定すれば、それに応じて漸近的に最適なアルゴリズムが得られることになる。

## 4.5 シミュレーションによる検討

### 4.5.1 パラメータ推定値の漸近最適性

モデルを 4.3 節の例の (4.40)~(4.42) 式にとる。このモデルに対して (4.70)~(4.74) 式アルゴリズムは次のようになる。

$$d\nu_t = dY_t - \hat{x}_t dt \quad (4.75)$$

$$d\hat{x}_t = -\hat{a}_t \hat{x}_t dt + \hat{k}_t d\nu_t \quad (4.76)$$

$$(\hat{k}_t \equiv -\hat{a}_t + \sqrt{\hat{a}_t^2 + \hat{q}_t/r})$$

$$d \begin{pmatrix} \hat{a}_t \\ \hat{q}_t \end{pmatrix} = \frac{1}{r} V_{\theta\theta} \begin{pmatrix} S_{a,t} \\ S_{q,t} \end{pmatrix} d\nu_t \quad (4.77)$$

$$dS_{a,t} = -(\hat{c}_t S_{a,t} + \hat{x}_t)dt - \frac{\hat{k}_t}{\hat{c}_t} d\nu_t \quad (4.78)$$

$$dS_{q,t} = -\hat{c}_t S_{q,t} dt + \frac{1}{2r\hat{c}_t} d\nu_t \quad (4.79)$$

$$(\hat{c}_t \equiv \hat{a}_t + \hat{k}_t)$$

$$\frac{d}{dt}V_{\theta\theta} = \epsilon^2 \begin{pmatrix} \sigma^2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} - \frac{1}{r} V_{\theta\theta} \cdot \begin{pmatrix} S_{a,t} \\ S_{q,t} \end{pmatrix} (S_{a,t} \ S_{q,t}) \cdot V_{\theta\theta} \quad (4.80)$$

この変数のうち  $V_{\theta\theta}$  だけが  $(2 \times 2)$  行列で、あとはすべてスカラーである。パラメータの値を

$$\epsilon = 0.01, \quad \langle A \rangle = 1, \quad Q = 1$$

$$r = 0.01, \quad \gamma = 1, \quad \sigma = 1$$

とし、初期値を

$$X_0 = 1, \quad A_0 = 1, \quad \hat{x}_0 = 1, \quad \hat{a}_0 = 0, \quad \hat{q}_0 = 0.5$$

$$S_{a,0} = 0, \quad S_{q,0} = 0, \quad V_{\theta\theta}|_{t=0} = \text{単位行列}$$

としたときのパラメータの推定結果を図 4.1, 4.2 に示す。太線がパラメータの真の値を、細線がその推定値を表わす。図から明かなように、 $Q$  は固定のためにその推定値の精度は時間の経過とともに向上していくのに対し、変動パラメータ  $A_t$  の場合には、過渡状態を除いて定常的な誤差の分散をもって追尾しているのがわかる。これらに対応してパラメータの条件つき分散の値も、図 4.3 に示すように、一方は減少し続け、もう一方はある定常値のあたりにおちつく。4.3.3 節の解析結果により、このモデルにおける  $A_t$  の条件つき分散と最適推定値の分散は、ともに (4.52) 式の漸近形をもつが、これに先の数値を代入してみると

$$E(\hat{a}_t - A_t)^2 \sim 1.44\epsilon \quad (4.81)$$

となる。小さいパラメータの値を  $\epsilon = 0.002 \sim 0.01$  にとり、シミュレーションによって得られた 2 乗誤差  $(\hat{a}_t - A_t)^2$  と条件つき分散  $V_{aa}$  との時間平均をプロットしたのが図 4.4 である。ここで時間平均は、過渡状態を除くため、全計算時間のうちはじめの 1/5 を除いて求めたものである。この図から明かなように、理論的に予測される値 ((4.81) 式の右辺) と、シミュレーションによって得られた値とは比較的良く一致している。

### 4.5.2 3 次の条件つきモーメントの重要性

1 次系のモデル (4.40)~(4.42) 式に対して、非線形フィルタの条件つきモーメントの式を 2 次まで書き下すとつぎのようになる。

$$d\nu_t = dY_t - \hat{x}_t dt \quad (4.82)$$

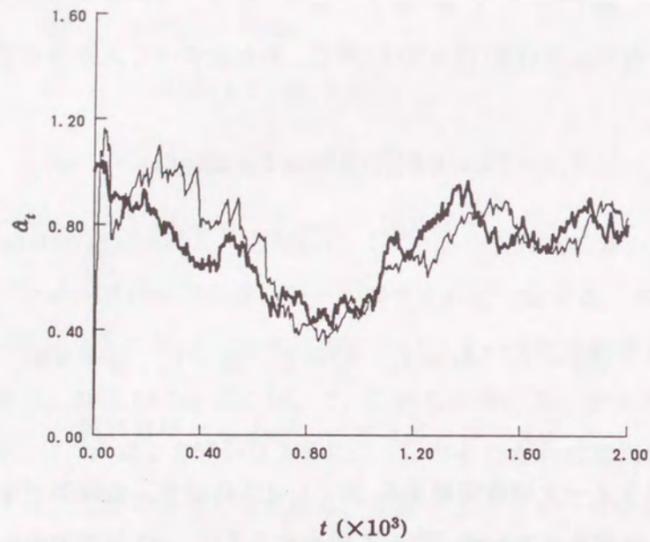


図 4.1 時変パラメータ  $A_t$  の推定値

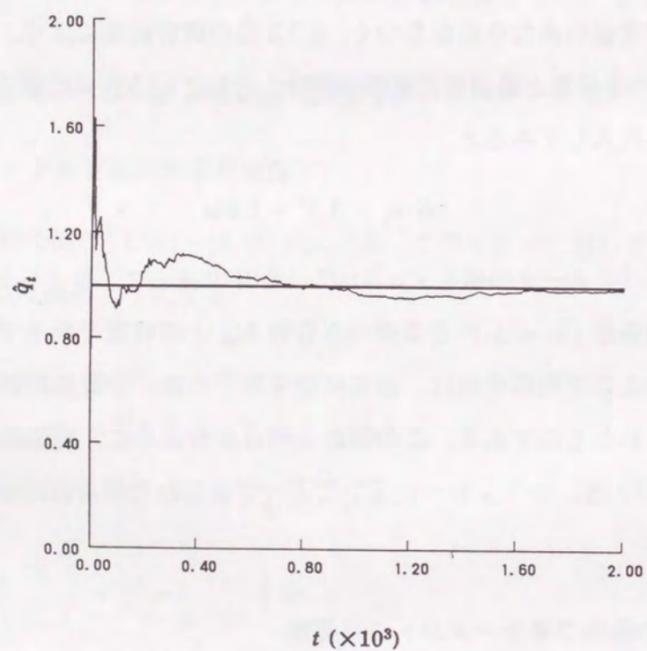


図 4.2 固定パラメータ  $Q$  の推定値

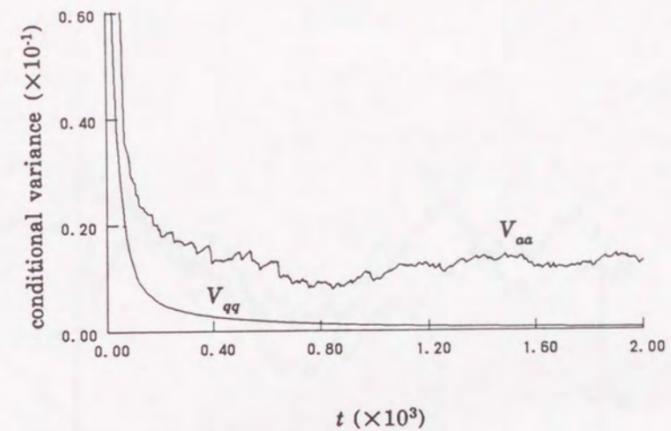


図 4.3 パラメータの条件つき分散

$$d\hat{x}_t = -(\hat{a}_t \hat{x}_t + \boxed{V_{xa}})dt + \frac{1}{r} V_{xx} dv_t \quad (4.83)$$

$$d\hat{\theta}_t = \frac{1}{r} V_{\theta x} dv_t \quad (4.84)$$

$$dV_{xx} = [-2(\hat{a}_t V_{xx} + \hat{x}_t V_{xa} + \boxed{T_{xxa}}) \quad (4.85)$$

$$- \frac{1}{r} V_{xx}^2 + \hat{q}_t]dt + \boxed{\frac{1}{r} T_{xxx}} dv_t \quad (4.86)$$

$$dV_{\theta x} = -[(\hat{a}_t + \frac{1}{r} V_{xx})V_{\theta x} + \hat{x}_t V_{\theta a} + \boxed{T_{\theta xa}}]dt \quad (4.87)$$

$$+ \boxed{\frac{1}{r} T_{\theta xx}} dv_t \quad (4.88)$$

$$dV_{\theta\theta} = \left[ -\frac{1}{r} V_{\theta x} V_{\theta\theta} + \epsilon^2 \begin{pmatrix} \sigma^2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right] dt + \boxed{\frac{1}{r} T_{x\theta\theta}} dv_t \quad (4.89)$$

ここで、 $V_{xx}, V_{xa}, \dots$  と  $T_{xxx}, T_{xxa}, \dots$  は、それぞれ、2次と3次の条件つきモーメントを表わす。一方、(4.70)~(4.74)式における  $S_t$  は  $V_{x\theta} V_{\theta\theta}^{-1}$  と漸近的に等しく、(4.75)~(4.80)式はつぎのアルゴリズムと等価である。

$$dv_t = dY_t - \hat{x}_t dt \quad (4.90)$$

$$d\hat{x}_t = -\hat{a}_t \hat{x}_t dt + \hat{k}_t dv_t \quad (4.91)$$

$$d\hat{\theta}_t = \frac{1}{r} V_{\theta x} dv_t \quad (4.92)$$

$$dV_{\theta x} = -[(\hat{a}_t + \hat{k}_t)V_{\theta x} + \hat{x}_t V_{\theta x}]dt + V_{\theta\theta} \begin{pmatrix} -\hat{k}_t \\ \hat{a}_t + \hat{k}_t \\ 1 \\ 2r(\hat{a}_t + \hat{k}_t) \end{pmatrix} dv_t \quad (4.93)$$

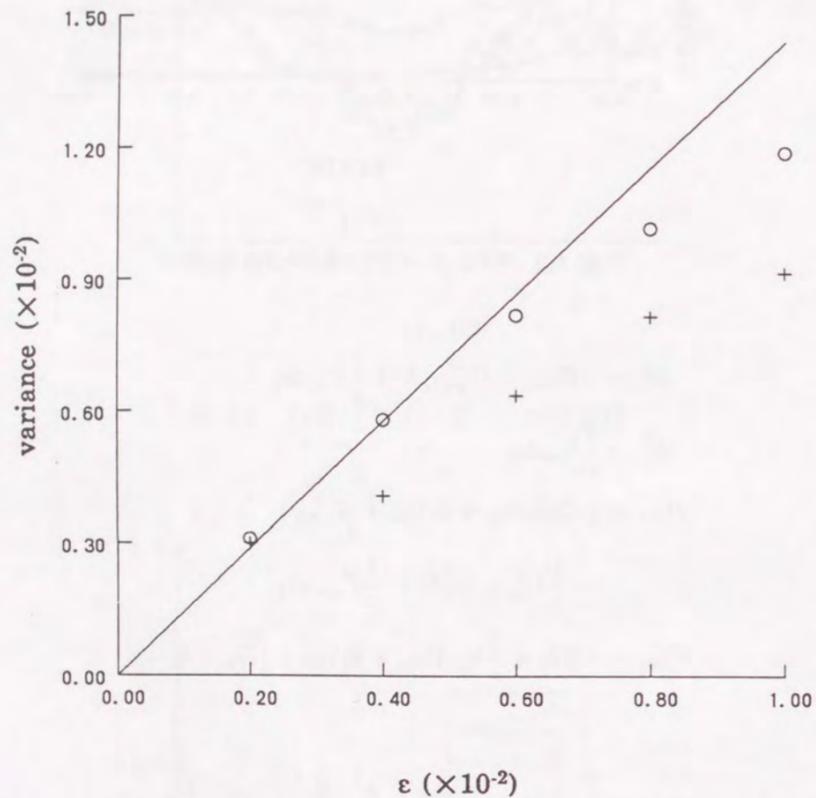


図 4.4 シミュレーション結果と理論値との比較

- :  $\langle (\hat{a}_t - A_t)^2 \rangle$
- + :  $\langle V_{aa} \rangle$
- : 理論値

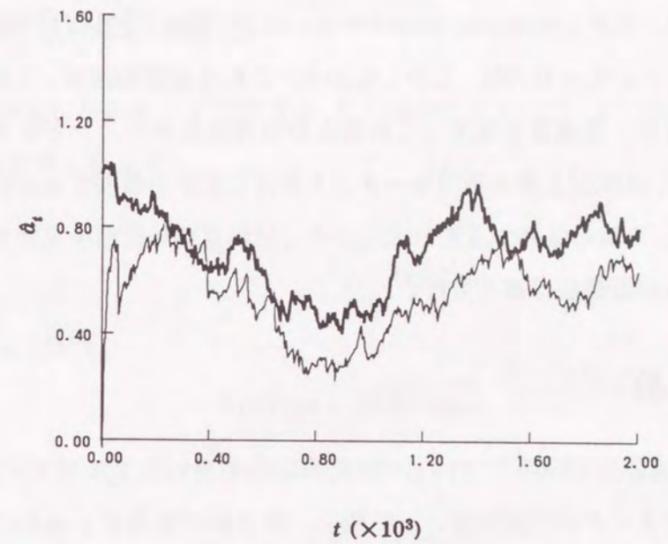


図 4.5 3 次のモーメントをすべて無視したアルゴリズムによる  $A_t$  の推定結果

$$\frac{d}{dt} V_{\theta\theta} = -\frac{1}{r} V_{\theta x} V_{x\theta} + \epsilon^2 \begin{pmatrix} \sigma^2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (4.94)$$

(4.82)~(4.89) 式と (4.90)~(4.94) 式とを見比べてみるとわかるように、もし (4.82)~(4.89) 式において 3 次のモーメントをすべて無視してしまうのであれば、(4.93) 式の実線で囲んだ部分 ((4.88) 式の実線で囲んだ部分に対応) が落ちてしまうことになる。この部分を落としてシミュレーションを行った結果を図 4.5 に示す。図から明かなように  $\hat{a}_t$  にはバイアスが生じる。図には示していないが、 $\hat{q}_t$  はまったく更新されないので初期推定値のままである。すなわち、 $Q$  を推定するためには  $T_{\theta xx}$  の存在が不可欠であって、3 次の条件つきモーメントをすべて無視するような近似を用いれば、この機能が損なわれてしまうことになる。

逆に、(4.90)~(4.94) 式をもとにして (4.82)~(4.89) 式のなかで無視できる項を選んだのが、式のなかで破線で囲んだ部分である。これには  $T_{\theta xx}$  以外のすべての 3 次の条件つきモーメントが含まれている。そのことと、 $T_{\theta xx}$  が 2 次以下の条件つきモーメントで表現できるということが、非線形フィルタの方程式系を閉じさせることのできた理由である。

従来からも非線形フィルタの近似法として、拡張 Kalman フィルタ [31] をはじめ、2 次確率モーメント・フィルタ (truncated second-order filter) [30]、正規形 2 次確率

モーメント・フィルタ (Gaussian second-order filter) [14], マルコフ等価線形化法 [75] など数多くのものがあった [76]. しかしながら, これらの近似法は, 2次まででモーメントを打ち切るか, 正規性を仮定して高次までの偶数次モーメントを考慮するかの違いはあるものの, 3次以上の奇数次モーメントをはじめから無視するという共通点をもつ. したがって, 3次の条件つきモーメントの一部が重要な役割を果たす適応推定の問題には, これらの近似法は適当でない.

#### 4.6 まとめ

連続時間の適応推定問題において, 特異摂動法を用いるアルゴリズムの構成法は, 前章の未知パラメータが固定の場合と同様に, 緩やかに変動する場合にも有効であることを示した. 本章ではまず, 未知パラメータが変動する場合の適応推定を, 非線形フィルタリングの問題として定式化し, パラメータの変動が緩やかであるという条件のもとで, 条件つき分布及びそのモーメントの漸近的な性質を評価した. この評価には Kallianpur-Striebel の公式と大偏差理論とを用いたが, これは前章の未知パラメータが固定の場合と異なり, Kushner の方程式の解が陽に表現できないためである. 次に, その評価の結果を用いて非線形フィルタのモーメント方程式系を特異摂動型の方程式系に変形し, それらから漸近的に無視できる項を落とすという操作で有限次元の方程式系が得られることを示した. この操作は前章の場合と同じであり, その意味で本章の方法は前章の拡張になる. 得られた有限次元の方程式系は適応推定アルゴリズムとして用いることができるが, その導き方により, このアルゴリズムによる推定値は非線形フィルタによる最適推定値と同じ漸近的性質をもつ. この漸近最適性は, 例題を用いてシミュレーションで確認した. また, このアルゴリズムは, 3次の条件つきモーメントが重要な役割を果たすため, 従来のさまざまな非線形フィルタの近似法では得られないものであることを明らかにした.

#### 付録 (4.10) 式の導出

$\Theta$  を  $\theta$  に固定したとき,  $Y$  に関する  $X$  の条件つき分布は, Kallianpur-Striebel の公式 (2.2.4 節参照) により

$$dP_{X|\theta,Y} = \frac{A_T dP_{X|\theta}}{\int_{\Omega_x} A_T dP_{X|\theta}} \quad (4A.1)$$

と表わせる. すなわち

$$A_T dP_{X|\theta} = \tilde{A}_T dP_{X|\theta,Y} \quad (4A.2)$$

である. 一方, (4.8) 式の  $A_T$  を Ito-calculus を用いて  $T$  で微分して

$$dA_T = (H(\theta_t)x_t)^T dA_T dY_T \quad (4A.3)$$

とし, この両辺の  $P_{x|\theta}$  での期待値をとると

$$d\tilde{A}_T = \int_{\Omega_x} (H(\theta_T)x_T)^T A_T dP_{X|\theta} dY_T \quad (4A.4)$$

となる. この右辺に (4A.2) 式を代入すれば

$$d\tilde{A}_T = (H(\theta_T)\hat{x}_T(\theta))^T \tilde{A}_T dY_T \quad (4A.5)$$

を得る. これを  $\tilde{A}_T$  について解けば (4.10) 式が求まる.

## 第5章

### 低次元化モデルに基づいた適応推定

#### 5.1 まえがき

特異摂動法は確率システムの低次元化モデルを導くための有力な手法である。いま、時間スケールの異なる2種類の変数（速い変数と遅い変数と呼ぶ）からなる確率システムが与えられて、そのうち興味のあるのは遅い変数のふるまいだけであるとする。確率システムにおいては、各変数の速さはその帯域幅で表わされるから、時間スケールの違いは帯域幅の違いといってもよく、遅い変数とは狭い帯域をもつ変数である。摂動パラメータとして、二つの時間スケールの比  $\mu$  を選ぶ。そのとき  $\mu \rightarrow 0$ 、すなわち、速い変数を無限に速くしていった極限において、遅い変数はある Markov 過程に収束する [68]。収束の仕方は、一般の非線形確率システムの場合には分布としての収束 [68]、線形の場合にはサンプルごとの収束 [21] である (2.4.2 節, 2.4.3 節参照)。いずれにしても  $\mu$  が十分小さければ、もとのフルオーダーのシステムの遅い変数のふるまいは、 $\mu \rightarrow 0$  の極限の Markov 過程で近似できる。したがって、その Markov 過程を低次元化モデルとして用いることができる。

では、推定問題の場合に、特異摂動型の状態方程式が与えられたとき、低次元化モデルに基づいて設計した低次元化推定器はフルオーダーの推定器のよい近似になっているであろうか。これがここで設定した問題である。このことが問題になるのは、図 5.1 に示すように、低次元化推定器が実際に適用されるのは低次元化モデルからの観測値に対してではなく、フルオーダーモデルからの観測値に対してだからである。この問題は、線形推定の場合には肯定的に解決されている [21]。すなわち、低次元化 Kalman フィルタによる推定値とフルオーダー Kalman フィルタによる推定値とは  $\mu \rightarrow 0$  の極限において一致する。しかしながら、このことは一般の特異摂動型の推定問題について、

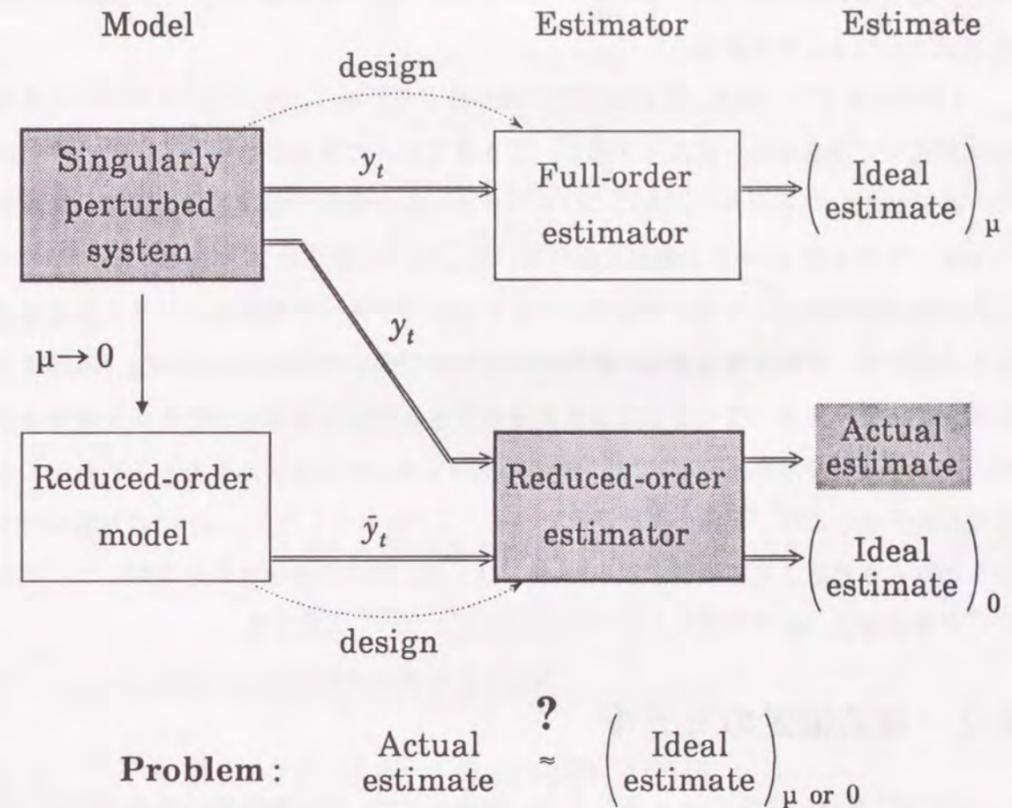


図 5.1 特異摂動系の適応推定問題

いつでも成立するというわけではない。この章では、特異摂動型の適応推定問題を取り上げ、一つの反例を示す。すなわち、低次元化モデルに基づいて適応推定器を設計したとき、それから得られるパラメータ推定値には  $\mu \rightarrow 0$  の極限においても一定のバイアスが残る場合があることを示す。そのあとで、パラメータ推定値にバイアスの残らないための条件を明らかにする。

従来からも確定系の適応システムに対しては、低次元化モデルを用いた場合のパラメータ推定値の挙動についての研究が行われている [28], [81], [82]。しかし、その手法や結果をただちに確率系へ拡張するわけにはいかない。というのは、確率系の場合には、速い変数よりもさらに速い白色雑音が含まれているからである [21]。また、あとで明らかにするように、低次元化適応推定器でパラメータ推定値にバイアスが生じる原因は、確率積分の問題に帰着され、これは確率系固有のものだからである。ここでは、第3章、第4章で行ったような、連続時間での非線形フィルタリングによるアプローチ

を用いる。この利点は個々のアルゴリズムによらない最適なパラメータ推定値の性質が調べられることである。

本章ではまず 5.2 節で、特異摂動型の適応推定モデル（フルオーダーモデル）とその低次元化モデルを示す。次に 5.3 節で、第 3 章で述べた解析法を用いて、フルオーダーモデルと低次元化モデルの双方についてパラメータの条件つき確率密度関数の漸近形を導き、それらが  $\mu \rightarrow 0$  の極限において一致しないことを示す。5.4 節では、この不一致が低次元化モデルで適応推定を行ったときにパラメータ推定値にバイアスを与えることを示し、さらにその原因が確率積分の問題に帰着されることを示す。5.5 節では低次元化モデルを用いることにより生じるパラメータ推定値のバイアスを除去するための方法を 2 通り示す。5.6 節では、簡単な例題を用いてシミュレーションを行い、低次元化モデルによりパラメータ推定値にバイアスが生じることと、5.5 節の方法でバイアスが除去されることを検証する。5.7 節では、適応推定のモデルに立ち戻って、パラメータ推定値にバイアスが生じないための条件について考察する。

## 5.2 適応推定のモデル

$x_t \in \mathbf{R}^n$  を遅い変数、 $z_t \in \mathbf{R}^{nr}$  を速い変数として、特異摂動型の状態方程式と観測値  $y_t \in \mathbf{R}^m$  がつぎのように与えられるものとする。

$$dx_t = (F_1 x_t + F_{12} z_t) dt + G_1 dv_t \quad (5.1)$$

$$\mu dz_t = (F_{21} x_t + F_2 z_t) dt + G_2 dv_t \quad (5.2)$$

$$dy_t = (H_1 x_t + H_2 z_t) dt + R^{1/2} dw_t \quad (5.3)$$

ここで  $\mu > 0$  は小さいパラメータ、 $v_t \in \mathbf{R}^{nv}$  と  $w_t \in \mathbf{R}^{nw}$  は互いに独立な標準ブラウン運動とする。さらに、係数行列  $F_1, F_{12}, G_1, F_{21}, H_1$  には未知パラメータが含まれるものとして、それらをまとめて  $\theta$  と表わす。 $\theta$  は  $\mathbf{R}^d$  に値をとる確率変数で、 $v_t, w_t, 0 \leq t < \infty$  とは独立であると仮定する。また、 $F_1$  と  $F_2$  は  $\theta$  を固定することともに安定な行列になることを仮定する。

(5.1)~(5.3) 式において、 $\theta$  を固定して  $\mu \rightarrow 0$  とすると、 $x_t$  と  $y_t$  はそれぞれ次式の解  $\bar{x}_t$  と  $\bar{y}_t$  に概収束する [21]。

$$d\bar{x}_t = F\bar{x}_t dt + G dv_t \quad (5.4)$$

$$d\bar{y}_t = H\bar{x}_t dt + D dv_t + R^{1/2} dw_t \quad (5.5)$$

ここで

$$F = F_1 - F_{12} F_2^{-1} F_{21} \quad (5.6)$$

$$G = G_1 - F_{12} F_2^{-1} G_2 \quad (5.7)$$

$$H = H_1 - H_2 F_2^{-1} F_{21} \quad (5.8)$$

$$D = -H_2 F_2^{-1} G_2 \quad (5.9)$$

とおいた。

(5.6)~(5.8) 式の右辺の各行列には未知パラメータが含まれるから、 $F, G, H$  にも未知パラメータが含まれることになる。(5.4), (5.5) 式において、 $F, G, H$  が未知パラメータを含むことをあらわに書いて

$$d\bar{x}_t = F(\theta)\bar{x}_t dt + G(\theta) dv_t \quad (5.10)$$

$$d\bar{y}_t = H(\theta)\bar{x}_t dt + D dv_t + R^{1/2} dw_t \quad (5.11)$$

とし、これを低次元化適応推定のモデルとする。

## 5.3 パラメータの条件つき確率密度関数

ここでは、アルゴリズムに依らないパラメータ推定値の性質を調べるために、パラメータの最適推定値、すなわち、観測値に関するパラメータの条件つき期待値をパラメータ推定値と考えることにする。これは、パラメータの条件つき確率密度関数を  $p_t(\theta)$  とおけば

$$\hat{\theta}_t = \int_{\mathbf{R}^d} \theta p_t(\theta) d\theta \quad (5.12)$$

で定義される。したがって、パラメータ推定値の性質を調べるためには、条件つき確率密度関数  $p_t(\theta)$  の性質を調べればよいことになる。

第 3 章で述べたように、未知パラメータが固定の場合の適応推定問題では、非線形フィルタにおける Kushner の方程式を解いて、パラメータの条件つき確率密度関数を陽に求めることができる。(5.10), (5.11) 式の低次元化モデルの場合には、この条件つき確率密度関数  $p_t(\theta)$  はつぎようになる。

$$p_t(\theta) = p_0(\theta) \exp \{l_t(\theta)\} \quad (5.13)$$

$$l_t(\theta) = -\frac{1}{2} \int_0^t \xi_s^T(\theta) R_0^{-1} \xi_s(\theta) ds + \int_0^t \xi_s^T(\theta) R_0^{-1} d\bar{v}_s \quad (5.14)$$

$$d\bar{v}_t = d\bar{y}_t - \widehat{H}\bar{x}_t dt \quad (5.15)$$

$$\xi_t(\theta) = H(\theta)\hat{x}_t(\theta) - \widehat{H}\bar{x}_t \quad (5.16)$$

$$R_0 = R + DD^T \quad (5.17)$$

ここで,  $\widehat{H}\bar{x}_t$  は  $H(\theta)\bar{x}_t$  の条件つき期待値であり,  $\hat{x}_t(\theta)$  は (5.10), (5.11) 式において  $\theta = \theta$  としたときの Kalman フィルタの解である.  $\hat{x}_t(\theta)$  は, 定常状態においては  $K(\theta)$  を定常 Kalman 利得として

$$d\hat{x}_t(\theta) = F(\theta)\hat{x}_t(\theta)dt + K(\theta)(d\bar{y}_t - H(\theta)\hat{x}_t(\theta)dt) \quad (5.18)$$

に従う. なお (5.14) 式の  $l_t(\theta)$  はパラメータの対数尤度になる.

パラメータの真の値が  $\theta^0$ , すなわち,  $F = F(\theta^0)$ ,  $G = G(\theta^0)$ ,  $H = H(\theta^0)$  で, (5.4), (5.5) 式が真の状態と観測値を表わすものとする, (5.13) 式は  $t \rightarrow 0$  においてつぎのような漸近形をもつ.

$$p_t(\theta) \sim \exp\{-t\Phi_1(\theta)\} \quad (5.19)$$

$$\Phi_1(\theta) = \frac{1}{2}E\{[\eta_t(\theta)]^T R_0^{-1}\eta_t(\theta)\} + \text{const} \quad (5.20)$$

$$\eta_t(\theta) = H(\theta)\hat{x}_t(\theta) - H\bar{x}_t \quad (5.21)$$

ここで, (5.20) 式の右辺の const は  $\Phi_1(\theta)$  の  $\theta$  に関する最小値が 0 になるように決める. (5.21) 式はさらに

$$e_t(\theta) = \hat{x}_t(\theta) - \bar{x}_t \quad (5.22)$$

$$\Delta H(\theta) = H(\theta) - H \quad (5.23)$$

とおくと

$$\eta_t(\theta) = H(\theta)e_t(\theta) + \Delta H(\theta)\bar{x}_t \quad (5.24)$$

と変形でき, (5.20) 式の  $\Phi_1(\theta)$  は  $e_t(\theta)$  と  $\bar{x}_t$  の定常状態での相関関数を用いてつぎのように表わされる.

$$\Phi_1(\theta) = \frac{1}{2}\text{trace}\{R_0^{-1}[H(\theta)\bar{R}_e(\theta)H^T(\theta) + 2H(\theta)\bar{R}_{ex}(\theta)\Delta H^T(\theta) + \Delta H(\theta)\bar{R}_x\Delta H^T(\theta)]\} \quad (5.25)$$

ここで相関関数は

$$R_e(\theta) = E\{e_t(\theta)e_t^T(\theta)\} \quad (5.26)$$

$$\bar{R}_e(\theta) = R_e(\theta) - R_e(\theta^0) \quad (5.27)$$

$$R_{ex}(\theta) = E\{e_t(\theta)\bar{x}_t^T\} \quad (5.28)$$

$$\bar{R}_{ex}(\theta) = R_{ex}(\theta) - R_{ex}(\theta^0) \quad (5.29)$$

$$R_x = E\{\bar{x}_t\bar{x}_t^T\} \quad (5.30)$$

$$\bar{R}_x = R_x - R_x(\theta^0) \quad (5.31)$$

と定義した. (5.22) 式の  $e_t(\theta)$  は, (5.18), (5.4), (5.5) 式により

$$de_t(\theta) = (C(\theta)e_t(\theta) + \Delta C(\theta)\bar{x}_t)dt + (K(\theta)D - G)dv_t + K(\theta)R^{1/2}dw_t \quad (5.32)$$

に従う. ここで

$$C(\theta) = F(\theta) - K(\theta)H(\theta) \quad (5.33)$$

$$\Delta C(\theta) = \Delta F(\theta) - K(\theta)\Delta H(\theta) \quad (5.34)$$

$$\Delta F(\theta) = F(\theta) - F \quad (5.35)$$

とおいた. (5.32) 式と (5.4) 式から,  $\bar{R}_e(\theta)$ ,  $\bar{R}_{ex}(\theta) = \bar{R}_{xe}^T(\theta)$ ,  $\bar{R}_x$  の従う方程式を求めるとつぎのようになる.

$$0 = C(\theta)\bar{R}_e(\theta) + \bar{R}_e(\theta)C^T(\theta) + \Delta C(\theta)\bar{R}_{xe}(\theta) + \bar{R}_{ex}(\theta)\Delta C^T(\theta) + \Delta K(\theta)R_0\Delta K^T(\theta) \quad (5.36)$$

$$0 = F\bar{R}_{xe}(\theta) + \bar{R}_{xe}(\theta)C^T(\theta) + KR_0\Delta K^T(\theta) + \bar{R}_x\Delta C^T(\theta) \quad (5.37)$$

$$0 = F\bar{R}_x + \bar{R}_x F^T + KR_0K^T \quad (5.38)$$

ここで

$$K = K(\theta^0) = (R_e(\theta^0)H^T + GD^T)R_0^{-1} \quad (5.39)$$

は推定問題 (5.4), (5.5) 式における定常 Kalman 利得で,

$$\Delta K(\theta) = K(\theta) - K \quad (5.40)$$

とおいた.

ここまでは、低次元化モデル (5.10), (5.11) 式に基づく適応推定器を, (5.5) 式の低次元化モデルからの観測値  $\bar{y}_t$  へ適用するものとして解析を進めてきた. ところが, 実際に低次元化適応推定器が適用されるのは, (5.3) 式のフルオーダーモデルからの観測値  $y_t$  である. そこで, (5.15) 式の右辺の  $\bar{y}_t$  を  $y_t$  で置き換えて, 前と同様に, パラメータの条件つき確率密度関数の  $t \rightarrow \infty$  における漸近形を求めるとつぎのようになる.

$$p_t^\mu(\theta) \sim \exp\{-t\Phi^\mu(\theta)\} \quad (5.41)$$

$$\Phi^\mu(\theta) = \frac{1}{2} E\{[\eta_t^\mu(\theta)]^T R_0^{-1} [\eta_t^\mu(\theta) - 2H_2 \zeta_t^\mu]\} + \text{const} \quad (5.42)$$

ここで, const は前と同様,  $\Phi^\mu(\theta)$  の  $\theta$  に関する最小値が 0 になるように決める. また

$$\eta_t^\mu(\theta) = H(\theta)\hat{x}_t^\mu(\theta) - Hx_t \quad (5.43)$$

$$\zeta_t^\mu = z_t + F_2^{-1} F_{21} x_t \quad (5.44)$$

とおいてある.  $\eta_t^\mu(\theta)$ ,  $\hat{x}_t^\mu(\theta)$  は, それぞれ (5.21), (5.18) 式の  $\eta_t(\theta)$ ,  $\hat{x}_t(\theta)$  に対応するものであるが,  $\bar{y}_t$  が  $y_t$  に置き換わったことにより  $\mu$  に依存するから, 肩字 ( $\mu$ ) を付けて表わしてある.  $\eta_t^\mu(\theta)$  は (5.22) 式と同様に

$$e_t^\mu(\theta) = \hat{x}_t^\mu(\theta) - x_t \quad (5.45)$$

と定義すると

$$\eta_t^\mu(\theta) = H(\theta)e_t^\mu(\theta) + \Delta H(\theta)x_t \quad (5.46)$$

と変形でき,  $\Phi^\mu(\theta)$  はつぎのように表わされる.

$$\Phi^\mu(\theta) = \Phi_1(\theta) + \Phi_2(\theta) + O(\mu) + \text{const} \quad (5.47)$$

$$\Phi_2(\theta) = \text{trace}\{R_0^{-1}H(\theta)K(\theta)H_2R_\zeta F_2^{-T}H_2^T\} \quad (5.48)$$

ここで,  $R_\zeta$  は

$$R_\zeta = \lim_{\mu \rightarrow 0} \mu E\{\zeta_t^\mu(\zeta_t^\mu)^T\} \quad (5.49)$$

で定義される行列で

$$0 = F_2 R_\zeta + R_\zeta F_2^T + G_2 G_2^T \quad (5.50)$$

に従う. なお, (5.48) 式の導出には

$$E\{e_t^\mu(\theta)[e_t^\mu(\theta)]^T\} = R_e(\theta) + O(\mu) \quad (5.51)$$

$$E\{e_t^\mu(\theta)x_t^T\} = R_{ex}(\theta) + O(\mu) \quad (5.52)$$

$$E\{x_t x_t^T\} = R_x + O(\mu) \quad (5.53)$$

$$\mu E\{\zeta_t^\mu(\zeta_t^\mu)^T\} = R_\zeta + O(\mu) \quad (5.54)$$

となることを利用した.

(5.47) 式を (5.41) 式に代入すると, 低次元化適応推定器をフルオーダーモデルへ適用した場合のパラメータの条件つき確率密度関数の漸近形はつぎのようになる.

$$p_t^\mu(\theta) \sim \exp\{-t[\Phi_1(\theta) + \Phi_2(\theta) + O(\mu) + \text{const}]\} \quad (5.55)$$

(5.19) 式と (5.55) 式を比べてみるとわかるように,  $\mu \rightarrow 0$  において  $p_t^\mu(\theta)$  は  $p_t(\theta)$  と一致しない.

## 5.4 パラメータ推定値のバイアス

低次元化適応推定器をフルオーダーモデルへ適用して得られるパラメータ推定値は, (5.12) 式の右辺の  $p_t(\theta)$  を (5.41) 式の  $p_t^\mu(\theta)$  で置き換えた

$$\hat{\theta}_t^\mu = \int_{\mathbf{R}^d} \theta p_t^\mu(\theta) d\theta \quad (5.56)$$

である. この推定値の  $t \rightarrow \infty$ ,  $\mu \rightarrow 0$  における漸近値を

$$\hat{\theta} = \lim_{\mu \rightarrow 0} \lim_{t \rightarrow \infty} \hat{\theta}_t^\mu \quad (5.57)$$

とおく. この値は (5.55) 式を (5.56) 式に代入して Laplace の方法 [66] を用いれば得られてつぎのようになる.

$$\hat{\theta} = \{(\Phi_1(\theta) + \Phi_2(\theta)) \text{ の最小点} \} \quad (5.58)$$

したがって,  $\theta$  がパラメータの真値  $\theta^0$  と一致するためには  $\Phi_1(\theta) + \Phi_2(\theta)$  の  $\theta^0$  における微係数が 0 になる必要がある. このことを調べる.

まず, (5.26)–(5.31) 式の定義からただちに  $\bar{R}_e(\theta^0) = 0$ ,  $\bar{R}_{ex}(\theta^0) = 0$  となる. (5.36) 式を  $\theta_i$  で微分して  $\theta = \theta^0$  とすると

$$C \frac{\partial \bar{R}_e(\theta)}{\partial \theta_i} \Big|_{\theta=\theta^0} + \frac{\partial \bar{R}_e(\theta)}{\partial \theta_i} \Big|_{\theta=\theta^0} C^T = 0 \quad (5.59)$$

となるが、 $C$  は安定だから

$$\left. \frac{\partial \bar{R}_c(\theta)}{\partial \theta_i} \right|_{\theta=\theta^0} = 0 \quad (5.60)$$

となる。これらから、(5.25) 式の  $\Phi_1(\theta)$  は

$$\left. \frac{\partial \Phi_1(\theta)}{\partial \theta} \right|_{\theta=\theta^0} = 0 \quad (5.61)$$

を満足することがわかる。しかしながら、(5.48) 式の  $\Phi_2(\theta)$  は恒等的に 0 でないかぎり一般に

$$\left. \frac{\partial \Phi_2(\theta)}{\partial \theta} \right|_{\theta=\theta^0} \neq 0 \quad (5.62)$$

であるから、この  $\Phi_2(\theta)$  が存在することにより  $\theta^0$  は  $\Phi_1(\theta) + \Phi_2(\theta)$  の最小点にはならない。すなわち、パラメータ推定値には  $\mu \rightarrow 0$  としてもバイアスが残る。パラメータ推定値のバイアスの大きさを見積もるためには、 $\Phi_1(\theta)$ 、 $\Phi_2(\theta)$  を  $\theta^0$  のまわりで Taylor 展開して

$$\Phi_1(\theta) = \Phi_1(\theta^0) + \frac{1}{2}(\theta - \theta^0)^T \frac{\partial^2 \Phi_1(\theta^0)}{\partial \theta \partial \theta^T} (\theta - \theta^0) + \dots \quad (5.63)$$

$$\Phi_2(\theta) = \Phi_2(\theta^0) + \frac{\partial \Phi_2(\theta^0)}{\partial \theta^T} (\theta - \theta^0) + \dots \quad (5.64)$$

とし、それぞれ、2次と1次で打ち切ったものを

$$0 = \left. \frac{\partial}{\partial \theta} (\Phi_1(\theta) + \Phi_2(\theta)) \right|_{\theta=\hat{\theta}} \quad (5.65)$$

に代入して解けばよい。こうして

$$\hat{\theta} - \theta^0 \sim - \left[ \frac{\partial^2 \Phi_1(\theta^0)}{\partial \theta \partial \theta^T} \right]^{-1} \frac{\partial \Phi_2(\theta^0)}{\partial \theta} \quad (5.66)$$

を得る。

このように、一般に  $\mu$  を 0 にもっていった極限においても、パラメータ推定値にバイアスが残る原因は、実は (5.14) 式の右辺第 2 項の確率積分の中にある。この確率積分は本来 Itô の積分として定義されたものであり、観測値が真に低次元化モデルからの (5.5) 式で与えられるものであれば、(5.15) 式に (5.5) 式を代入した

$$d\bar{v}_t = -(\widehat{H}\bar{x}_t - H\bar{x}_t)dt + Ddv_t + R^{1/2}dw_t \quad (5.67)$$

のうち、 $Ddv_t$  の部分との積

$$\int_0^t \xi_s^T(\theta) R_0^{-1} Ddv_s \quad (5.68)$$

も Itô の積分として計算されるべきものである。ところが、観測値がフルオーダーモデルからの (5.3) 式で与えられるときには (5.68) 式に対応するものは

$$\int_0^t [\xi_s^\mu(\theta)]^T R_0^{-1} H_2 \zeta_s^\mu ds \quad (5.69)$$

となる。ここで、 $\xi_t^\mu(\theta)$  は (5.16) 式の  $\xi_t(\theta)$  に対応して

$$\xi_t^\mu(\theta) = H(\theta)\hat{x}_t^\mu(\theta) - \widehat{H}x_t^\mu \quad (5.70)$$

で定義されるもので

$$\lim_{\mu \rightarrow 0} \xi_t^\mu(\theta) = \xi_t(\theta) \quad (5.71)$$

となる。また、 $\zeta_t^\mu$  は (5.44) 式で定義されたもので、 $\mu \rightarrow 0$  のとき白色 Gauss 過程に近づく。すなわち、その時間積分はブラウン運動に近づく。具体的には

$$\lim_{\mu \rightarrow 0} H_2 \int_0^t \zeta_s^\mu ds = Dv_t \quad (5.72)$$

となる。したがって (5.69) 式の各要素は (5.68) 式の各要素に近づく。しかしながら、(5.69) 式の積分自体は Wong-Zakai [91] が指摘したように、 $\mu \rightarrow 0$  のとき Itô の積分 (5.68) 式には近づかない。それは、 $\xi_t^\mu(\theta)$  が  $\zeta_t^\mu$  とは独立でない確率過程だからである。(5.69) 式の  $\mu \rightarrow 0$  の真の極限は、 $\zeta_t^\mu$  が 1 次元、もしくは過去と未来について対称な過程の場合には (5.68) 式に Wong-Zakai の補正項を付加したもの、すなわち (5.68) 式を単に Stratonovich 積分と解釈し直したものになる。一般の場合の極限は、Papanicolaou-Stroock-Varadhan の極限定理 [68] (2.4.2 節参照) を用いて計算するとつぎのようになる。

$$\lim_{\mu \rightarrow 0} \int_0^t [\xi_s^\mu(\theta)]^T R_0^{-1} H_2 \zeta_s^\mu ds = \int_0^t \xi_s^T(\theta) R_0^{-1} Ddv_s - t\Phi_2(\theta) \quad (5.73)$$

すなわち、ここから  $\Phi_2(\theta)$  が生じる。

## 5.5 バイアス除去の方法

低次元の適応推定モデルを用いることにより生じるパラメータ推定値のバイアスを除去するのに 2 通りの方法が考えられる。

まず、第一の方法はアルゴリズムから Wong-Zakai の補正項に相当するものを差し引くことである。(5.10)、(5.11) 式のモデルを真のシステムとみなした場合の漸近最適

なアルゴリズムは、第3章で導いたように、次式で与えられる。

$$dv_t = dy_t - H(\hat{\theta}_t)\hat{x}_t dt \quad (5.74)$$

$$d\hat{x}_t = F(\hat{\theta}_t)\hat{x}_t dt + K(\hat{\theta}_t)dv_t \quad (5.75)$$

$$d\hat{\theta}_t = L_t dv_t \quad (5.76)$$

$$dS_t = (C(\hat{\theta}_t)S_t + M_t)dt + dN_t \quad (5.77)$$

$$\dot{V}_{\theta\theta} = -L_t R_0 L_t^T \quad (5.78)$$

ここで

$$M_t = \frac{\partial}{\partial \theta^T} (F(\theta) - K(\hat{\theta}_t)H(\theta))\hat{x}_t \Big|_{\theta=\hat{\theta}_t} \quad (5.79)$$

$$dN_t = \frac{\partial}{\partial \theta^T} K(\theta)dv_t \Big|_{\theta=\hat{\theta}_t} \quad (5.80)$$

$$L_t = V_{\theta\theta}(H(\hat{\theta}_t)S_t + I_t)^T R_0^{-1} \quad (5.81)$$

$$I_t = \frac{\partial}{\partial \theta^T} H(\theta)\hat{x}_t \Big|_{\theta=\hat{\theta}_t} \quad (5.82)$$

とおいた。パラメータ推定値の更新の(5.76)式を平均化法を用いて調べると

$$d\hat{\theta}_t \sim -V_{\theta\theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\Phi_1(\theta) + \Phi_2(\theta)) \Big|_{\theta=\hat{\theta}_t} dt \quad (5.83)$$

という形になる。すなわち、 $\hat{\theta}_t$  が  $\Phi_1(\theta) + \Phi_2(\theta)$  の最小点に収束するような構造になっている。したがって、 $\Phi_1(\theta) + \Phi_2(\theta)$  のかわりにそこに  $\Phi_1(\theta)$  だけがあらわれるような構造にすることができればバイアスは除去できる。そのためには、(5.76)式を補正して

$$d\hat{\theta}_t = L_t dv_t + V_{\theta\theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \Phi_2(\theta) \Big|_{\theta=\hat{\theta}_t} dt \quad (5.84)$$

としてやればよい。ただし、補正項を決めるためには速い変数のダイナミクスがわかっている必要がある。

バイアスを除去するもう一つの方法は、アルゴリズム(5.74)–(5.78)式を近似するのに刻みの粗い前進差分公式を用いることである。(5.74)–(5.78)式を前進差分で近似すると

$$\Delta v_k = y_k - y_{k-1} - H(\hat{\theta}_{k-1})\hat{x}_{k-1}\Delta t \quad (5.85)$$

$$\hat{x}_k = \hat{x}_{k-1} + F(\hat{\theta}_{k-1})\hat{x}_{k-1}\Delta t + K(\hat{\theta}_{k-1})\Delta v_k \quad (5.86)$$

$$\hat{\theta}_k = \hat{\theta}_{k-1} + L_{k-1}\Delta v_k \quad (5.87)$$

$$S_k = S_{k-1} + (C(\hat{\theta}_{k-1})S_{k-1} + M_{k-1})\Delta t + \Delta N_k \quad (5.88)$$

$$V_{\theta\theta,k} = V_{\theta\theta,k-1} - L_{k-1}R_0L_{k-1}^T \quad (5.89)$$

のようになるが、広帯域雑音に駆動される差分方程式の極限定理[44]により、差分の刻み  $\Delta t$  が  $\zeta_t^\mu$  の相関時間 ( $\sim \mu$ ) に比べて十分大きいときには、(5.85)–(5.89)式は(5.74)–(5.78)式を Itô 型で近似するものになる。したがって、(5.87)式は、そのまま、(5.76)式を近似するようなものになっている。

## 5.6 シミュレーション結果

例として遅い変数と速い変数がともに2次系のつぎのようなモデルを取りあげる。

$$dx_t = F_1 x_t dt + G_1 dv_{1,t} \quad (5.90)$$

$$\mu d\zeta_t = F_2 \zeta_t dt + G_2 dv_{2,t} \quad (5.91)$$

$$dy_t = (c_1 x_{1,t} + c_2 \zeta_{1,t})dt + \sqrt{r}dw_t \quad (5.92)$$

ここで

$$x_t = \begin{bmatrix} x_{1,t} \\ x_{2,t} \end{bmatrix}, \quad \zeta_t = \begin{bmatrix} \zeta_{1,t} \\ \zeta_{2,t} \end{bmatrix} \quad (5.93)$$

であり、 $v_{1,t}$ ,  $v_{2,t}$ ,  $w_t$  は互いに独立な標準ブラウン運動とする。このモデルにおいてパラメータの値を

$$F_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -4 & -2 \end{bmatrix}, \quad F_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -4 & -4 \end{bmatrix} \quad (5.94)$$

$$G_1 = G_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (5.95)$$

$$c_1 = 1, \quad c_2 = 0.2, \quad r = 0.01 \quad (5.96)$$

とすると、(5.90)–(5.92)式に対応する低次元化モデルは

$$d\bar{x}_t = F_1 \bar{x}_t dt + G_1 dv_{1,t} \quad (5.97)$$

$$d\bar{y}_t = c_1 \bar{x}_{1,t} dt + \sqrt{r_0} dw_t \quad (5.98)$$

$$(r_0 = r + (c_2/4)^2 = 0.0125)$$

となり、低次元化モデルでの Kalman 利得の値は

$$K = \begin{bmatrix} k_1^0 \\ k_2^0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2.188 \\ 2.394 \end{bmatrix} \quad (5.99)$$

となる。未知パラメータをこの Kalman 利得の

$$\Theta = (k_1, k_2)^T \quad (5.100)$$

にとり、 $\mu = 0.05$  として低次元化モデルで適応推定を行った場合の  $k_1$  の推定値を図 5.2 に示す。図から明らかなように推定値はバイアスをもつ。 $\mu$  の値を様々にかえて  $t = 5,000$  における  $k_1$  の推定値をプロットしたのが図 5.3 である。 $\mu$  を 0 に近づけても推定値の真の値には近づかないで、一定のバイアスが残ることがわかる。予想されるバイアスの大きさは (5.66) 式を用いて見積もると

$$\begin{aligned} \hat{k}_1 - k_1^0 &\sim \frac{1}{r_0} \left( \frac{c_2}{4} \right)^2 (k_1^0 + 2) \\ &= 0.838 \end{aligned} \quad (5.101)$$

の程度であり、得られた推定値のバイアスとほぼ一致している。図 5.3 にはあわせて、5.5 節で示したバイアス除去の方法を用いたシミュレーションの結果もプロットしてあるが、アルゴリズムに補正項を加えるか、もしくは  $\mu$  に比べて  $\Delta t$  を大きく選べばバイアスが除去されることがわかる。

## 5.7 考察

本章では特異摂動系を (5.1)~(5.3) 式のように仮定した。これは、文献 [21], [22], [78], [40] で標準型の特異摂動系として用いられているものである。このモデルは、 $\mu \rightarrow 0$  において速い変数の共分散と帯域幅とがともに  $\mu^{-1}$  のオーダーで増大するという特徴をもつ。したがって、 $\mu \rightarrow 0$  において白色雑音に近づくような有色雑音を表わすためには適切なモデルであり、その場合のパラメータ推定には、本章で述べたような注意が必要である。しかしながら、速い変数の共分散が  $\mu \rightarrow 0$  においても有限にとどまる、あるいは  $\mu^{-1}$  よりも小さいオーダーで無限大になるというような場合には、特異摂動系の別の定式化が必要になる。たとえば、遅いモードと速いモードとの違いが単に時間スケールの違いだけで、速い変数はマイクロな時間  $\tau = t/\mu$  では、遅い変数の方程式 (5.1) と同じような

$$dz_\tau = (F_{12}x_\tau + F_2z_\tau)d\tau + G_2dv_\tau \quad (5.102)$$

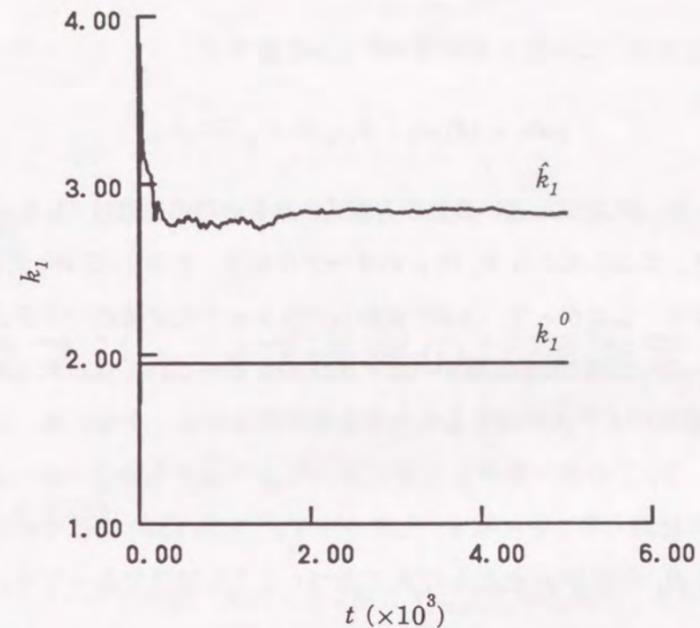


図 5.2 パラメータの推定結果

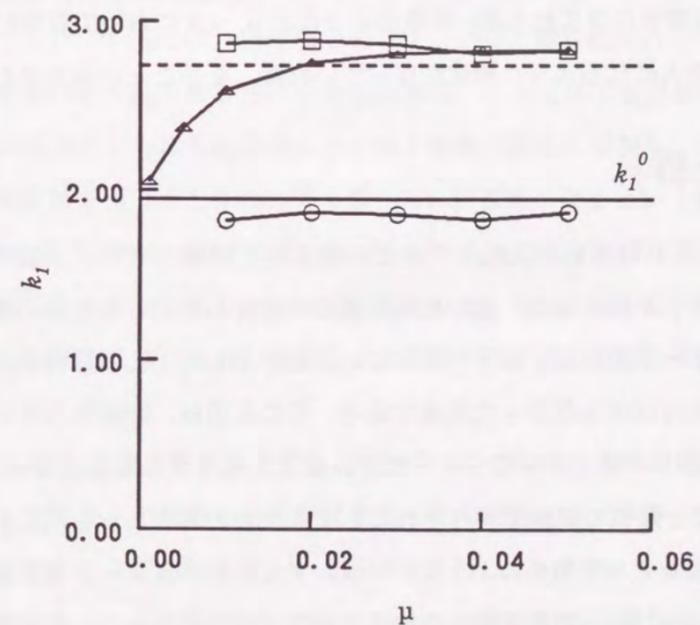


図 5.3 シミュレーション結果と理論値との比較

- ... : バイアスをもつ推定値の理論値 ((5.101) 式)
- :  $\Delta t = \mu/10$  としたときの  $k_1$  の推定値
- : 補正項をもつアルゴリズムによる  $k_1$  の推定値
- △ :  $\Delta t$  を 0.005 に固定したときの  $k_1$  の推定値

で記述されるとする。これを  $t$  の時間スケールに直せば

$$\mu dz_t = (F_{12}x_t + F_2z_t)dt + \sqrt{\mu}G_2dv_t \quad (5.103)$$

となる。すなわち、(5.2) 式の速い変数の方程式の雑音の項の係数は  $G_2$  から  $\sqrt{\mu}G_2$  にかわる。このとき、(5.50) 式から  $R_\zeta$  は  $\mu$  のオーダーになり、さらに (5.48) 式から  $\Phi_2(\theta)$  も  $\mu$  のオーダーになる。したがって、(5.66) 式からパラメータ推定値のバイアスは  $\mu$  のオーダーになり、 $\mu \rightarrow 0$  において推定値のバイアスは消える。これを逆にたどれば、 $\mu \rightarrow 0$  において推定値のバイアスが消えるための条件が得られる。すなわち、(5.66), (5.48), (5.54) 式から、 $H_2\zeta_t^\mu$  の共分散が  $\mu \rightarrow 0$  において  $\mu^{-1}$  よりも小さいオーダーであれば推定値のバイアスは消えることになる。したがって、(5.1), (5.2) 式はそのまま、(5.3) 式の  $z_t$  の係数  $H_2$  だけが  $\mu$  とともに 0 に近づくような構造であってもバイアスは消える。

このように、低次元化モデルに基づいて設計された低次元化適応推定器が、 $\mu \rightarrow 0$  で理想的なものに近づくかどうかは、はじめの特異摂動系の定式化しだいであり、あらくいって、観測値に含まれる速い変数の共分散が  $\mu \rightarrow 0$  において有限にとどまるか、ゆっくりと無限大になるような構造になっていれば、そのことが保証される。

## 5.8 まとめ

特異摂動系における低次元化モデルでの適応推定問題を考察し、低次元化モデルに基づくパラメータ推定値は、速い変数を無限に速くしていったときの極限において必ずしもフルオーダーでの推定値と一致しないことを示した。これは特異摂動型の線形推定問題の場合には生じなかった現象であり、その原因は、非線形フィルタの方程式の中に現われる Itô 型の確率積分の一部が、低次元化モデルで推定を行う場合には、Stratonovich 型と類似の積分で実行されてしまうためであることを明らかにした。さらに、低次元化モデルでのそのような不一致、すなわちパラメータ推定値のバイアスが生じるのは、はじめの特異摂動系の構造に依存することを示し、バイアスを生じさせないための条件を明らかにした。

# 第 6 章

## マルコフジャンプ過程の状態推定

### 6.1 まえがき

状態やパラメータが時折、突然大きく変化するような現象は、マヌーバを行う目標の追尾 [8], [67] や故障診断 [89], [57] などの問題に現われる。このようなジャンプを伴う過程の推定は、非線形問題のなかでも特に非線形性が強く、線形化による近似や、分布の正規性を仮定した近似では良いアルゴリズムが得られない。これに対処する最も有力な方法とされているのは、各時間でのジャンプの有無を仮説として取扱い、仮説の事後確率を用いる方法である [8]。しかしながら、この方法で最適推定値を得ようとすれば時間の経過とともに仮説の組合せの数が指数関数的に増加し、またその増加を抑えて良い推定値を得ようとすればアルゴリズムが複雑になるという難点がある。

また、非線形フィルタリングによるアプローチとしては、状態空間を離散化して連続時間の非線形フィルタの閉じた方程式系を導くという方法もある [92] が、これは並列計算に適した形ではないため、離散化した状態の数が多くなると計算が容易ではなくなるという難点がある。

本章ではこれらの難点を克服するために、ジャンプを伴う過程の推定を離散時間の非線形フィルタリングの問題として定式化し、その問題をニューラルネットを用いて解く方法を示す。ここで用いるニューラルネットは、Hopfield ネットワーク [7], [27] に類似のものである。Hopfield ネットワークは、それぞれは単純な機能をもつ多数の素子（ニューロン）間の相互作用とフィードバックにより、全体として、エネルギー関数と呼ばれる評価関数の極値探索を行う。それゆえ、この型のネットワークは、組合せ最適化問題の準最適解を高速で求めるのに適している。そして、ジャンプを伴う過程を推定する問題はまさにそのような場合である。

本章ではまず 6.2 節で、ジャンプを伴う過程のモデルとしてマルコフジャンプ過程を導入し、状態推定問題としての定式化を行う。次に 6.3 節で、マルコフジャンプ過程の状態推定問題は、あるエネルギー関数の極値探索問題に帰着させられることを示す。6.4 節では、このエネルギー関数の極値探索を相互結合型のニューラルネットによる並列計算で実行する方法を示す。さらに、計算例を用いて、実際にこのニューラルネットで得られるマルコフジャンプ過程の状態推定値が、高い精度をもち、かつジャンプのタイミングまで正しく検出するようなものであることを検証する。6.4 節でのニューラルネットによる状態推定はバッチフィルタに相当するものであるが、6.5 節では、逐次型フィルタに相当するニューラルネットが移動窓を用いて構成可能であることを示す。ここでも計算例を用いて、バッチフィルタの場合と同様に高精度での状態推定値が得られることを検証する。6.6 節では、それまでのマルコフジャンプ過程に対する状態推定法を拡張して、速度がジャンプするような過程の状態推定へ適用する。

## 6.2 状態推定のモデル

見通しを良くするために、推定モデルには、ジャンプを伴う過程としては最も単純な 1 次元のマルコフジャンプ過程 [13] を選ぶ。これは、ジャンプとジャンプの間では、一定値を取るようなマルコフ過程である。さらに簡単のために、始めから離散時間で扱うことにする。

$X_k, k = 0, 1, \dots$  を有界閉区間  $S = [0, 1]$  に値をとるマルコフジャンプ過程とする。ジャンプの頻度  $\gamma \equiv \Pr\{X_k \neq X_{k-1}\}$  は  $k$  によらず一定で、初期分布とジャンプした場合の行き先の分布はともに  $S$  上で一様であるとする。すなわち  $X_0$  の確率密度関数と  $X_{k-1}$  から  $X_k$  への遷移確率密度はそれぞれ

$$p_0(x_0) = 1 \quad (6.1)$$

$$p(x_k | x_{k-1}) = \gamma + (1 - \gamma)\delta(x_k - x_{k-1}) \quad (6.2)$$

と表わされる。ただし  $\delta(\cdot)$  はディラックの  $\delta$  関数である。観測値は

$$Y_k = X_k + \sqrt{r}W_k, \quad k = 0, 1, \dots \quad (6.3)$$

で与えられるものとする。ここで、 $W_k, k = 0, 1, \dots$  は平均 0、分散 1 の白色ガウス雑音である。さらに、 $\gamma \ll 1, r \ll 1$  を仮定する。 $\gamma \ll 1$  は、ジャンプがまれにしか生じないことを意味し、 $r \ll 1$  は、観測雑音が小さいこと、いい換えれば観測雑音に比

べて状態の変動が大きいことを意味する。図 6.1 に、マルコフジャンプ過程とその観測値との例を示す。この例では、 $\gamma = 0.05, r = 0.05^2$  としてある。

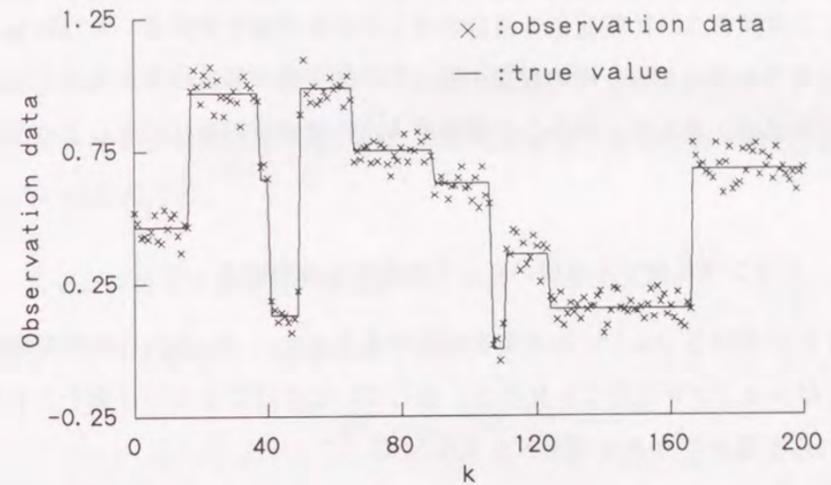


図 6.1 マルコフジャンプ過程とその観測値の例

便宜上、過去から現在までの状態と観測値をベクトルで、それぞれ  $\mathbf{X} = (X_0, X_1, \dots, X_n)^T, \mathbf{Y} = (Y_0, Y_1, \dots, Y_n)^T$  と表わす。ここで取り扱う問題は、 $\mathbf{Y}$  が与えられたときに、 $\mathbf{X}$  の準最適な推定値を計算する並列処理型のアルゴリズムを導くことである。

## 6.3 状態推定の評価関数

Hopfield ネットワークのようなエネルギー最小化型のニューラルネットで状態推定値を求めるには、その推定値が何らかの評価関数の極値を与えるものになっている必要がある。そのような評価関数としてもっとも簡単なものは条件つき確率すなわち事後確率であり、そのときの推定値が最大事後確率 (MAP) 推定値であるが、一般の非線形推定の場合には 2.2 節で述べたように、MAP 推定値は必ずしも適切な推定値とはならない。いまの問題の場合、観測値  $\mathbf{Y}$  が与えられたときの  $\mathbf{X}$  の条件つき確率密度関数は、(6.1)~(6.3) 式から

$$p(\mathbf{x} | \mathbf{Y}) = C_1 \exp \left[ -\frac{1}{2r} \|\mathbf{Y} - \mathbf{x}\|^2 \right] \prod_{k=1}^n [\gamma + (1 - \gamma)\delta(x_k - x_{k-1})] \quad (6.4)$$

と表わせる。ここで、 $\|\cdot\|$  はユークリッドノルムを表わす。また  $C_1$  は適当な正の定数であり、以後  $C_2, C_3, \dots$  も適当な正の定数とする。(6.4) 式の条件つき確率密度関数は  $\delta$  関数を含むために最大値を求めるということが意味をもたず、また  $\delta$  関数を通常関数で近似した場合には、近似の仕方次第で最大となる  $\mathbf{x}$  の値が大きく変わってくる。したがって、これ以外の評価関数が必要になる。ここではジャンプに関する仮説を導入して、2種類の MAP 推定値を組合わせて状態推定値を決める。すなわち、事後確率最大となる仮説を選び、その仮説に基づく状態変数の事後確率が最大となるように推定値を決める。そして、それら2種類の MAP 推定が同時に行えるような評価関数を導く。

### 6.3.1 ジャンプに関する仮説のもとでの条件つき期待値

時間  $k$  におけるジャンプの有無を表現するために、 $A_k$  という確率変数を導入する。 $A_k$  はジャンプが生じていれば 1、生じていなければ 0 という値をとるものとする。これらを集めて  $n$  次元確率ベクトル  $A$  を

$$A = (A_1, A_2, \dots, A_n)^T \quad (6.5)$$

と定義する。状態変数はジャンプしなければ一定値にとどまると仮定したことにより、 $\mathbf{X}$  が決まれば  $A$  は一意的に決まる。この関係を

$$A = \phi(\mathbf{X}) \quad (6.6)$$

と表わす。要素ごとに書けば

$$A_k = \phi_k(\mathbf{X}) = \begin{cases} 1, & X_k \neq X_{k-1} \\ 0, & X_k = X_{k-1} \end{cases} \quad (6.7)$$

である。逆に、 $A$  を  $\lambda \in \{0, 1\}^n$  に固定したとき、 $\mathbf{X}$  がとりうる値の集合を  $L_\lambda$  と表わす。すなわち

$$L_\lambda = \{\mathbf{x}; \phi(\mathbf{x}) = \lambda\} \quad (6.8)$$

であり、 $L_\lambda$  は  $S^{n+1}$  の線形部分空間になる。

観測値  $\mathbf{Y}$  が与えられて、 $A = \lambda$  と仮定したとき（これは、ジャンプに関する仮説として  $\lambda$  を採用することを意味する）の  $\mathbf{X}$  の条件つき期待値を  $\hat{\mathbf{x}}_\lambda$  と置く。そのときの  $\mathbf{X}$  の事前確率は (6.1), (6.2) 式の仮定により、 $L_\lambda$  上では一様となるから、 $\mathbf{X}$  の事

後確率（条件つき確率）は、 $L_\lambda$  上で  $\mathbf{x}$  の尤度

$$\begin{aligned} f(\mathbf{x}) &\equiv p(\mathbf{Y}|\mathbf{x}) \\ &= C_2 \exp\left[-\frac{1}{2r}\|\mathbf{Y}-\mathbf{x}\|^2\right] \end{aligned} \quad (6.9)$$

に比例する。 $f(\mathbf{x})$  は Gauss 型であるから  $\hat{\mathbf{x}}_\lambda$  はほぼ MAP 推定値に等しい。すなわち

$$f(\hat{\mathbf{x}}_\lambda) \doteq \max_{\mathbf{x} \in L_\lambda} f(\mathbf{x}) \quad (6.10)$$

である。なお、これが等号にならないのは  $S$  が有界領域であるためであるが、 $r$  が小さければ良い近似になる。

### 6.3.2 ジャンプに関する仮説の事後確率

ジャンプに関する仮説  $\lambda$  の事後確率

$$g(\lambda) \equiv p(\lambda|\mathbf{Y}) \quad (6.11)$$

は Bayes の定理により

$$\begin{aligned} g(\lambda) &= \frac{p(\lambda)p(\mathbf{Y}|\lambda)}{p(\mathbf{Y})} \\ &= C_3 p(\lambda) \int_{S^{n+1}} p(\mathbf{Y}|\mathbf{x}) p(\mathbf{x}|\lambda) d\mathbf{x} \\ &= C_3 p(\lambda) \int_{L_\lambda} f(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \\ &= C_3 p(\lambda) K_\lambda f(\hat{\mathbf{x}}_\lambda) \end{aligned} \quad (6.12)$$

と変形できる。ここで

$$K_\lambda = \frac{1}{f(\hat{\mathbf{x}}_\lambda)} \int_{L_\lambda} f(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \quad (6.13)$$

と置いた。(6.12) 式のうち  $A$  の事前分布  $p(\lambda)$  はジャンプの頻度が  $\gamma$  であるという仮定から

$$p(\lambda) = \gamma^{|\lambda|} (1-\gamma)^{n-|\lambda|} \quad (6.14)$$

となる。ここで  $|\lambda| = \lambda_1 + \dots + \lambda_n$  である。また  $\lambda$  の要素のうち 1 になるものを  $\lambda_{k_1}, \lambda_{k_2}, \dots, \lambda_{k_{|\lambda|}}$  とおいて (6.13) 式の積分を計算すると

$$K_\lambda \doteq \prod_{j=1}^{|\lambda|+1} \left( \frac{2\pi r}{k_j - k_{j-1}} \right)^{1/2} \quad (6.15)$$

となる。ここで、 $k_0 = 0, k_{|\lambda|+1} = n + 1$  と置いた。(6.15) 式の  $K_\lambda$  は、ジャンプの間隔  $k_j - k_{j-1}, j = 1, \dots, |\lambda| + 1$  に依存する形になっているが、あとで  $\mathbf{X}$  の推定のための評価関数を単純な形に導くためには、ジャンプの個数  $|\lambda|$  だけに依存する形にしたほうが都合が良い。そこで、ジャンプの間隔をその平均値で置き換えて

$$k_j - k_{j-1} = \frac{1}{\gamma}, \quad j = 1, \dots, |\lambda| + 1 \quad (6.16)$$

とし、 $K_\lambda$  は

$$K_\lambda \doteq (2\pi r \gamma)^{\frac{|\lambda|+1}{2}} \quad (6.17)$$

と近似したものをを用いることにする。このような近似を用いたことにより、ジャンプが引き続いて生じる場合には  $K_\lambda$  を過小に評価することになるから、そのような場合にもジャンプを正しく検出できるか否かは、シミュレーションで確認することにする。

(6.14), (6.17) 式を (6.12) 式に代入すると

$$\begin{aligned} g(\lambda) &\doteq C_3 \gamma^{|\lambda|} (1 - \gamma)^{n - |\lambda|} (2\pi r \gamma)^{\frac{|\lambda|+1}{2}} f(\hat{\mathbf{x}}_\lambda) \\ &= C_4 \exp(-\alpha |\lambda|) f(\hat{\mathbf{x}}_\lambda) \end{aligned} \quad (6.18)$$

を得る。ここで

$$\alpha = \log \frac{1 - \gamma}{\gamma \sqrt{2\pi r \gamma}} \quad (6.19)$$

と置いた。

### 6.3.3 評価関数の導出

観測値に関する条件つき分散を最小にするという意味で最適な状態推定値は条件つき期待値である。 $\mathbf{X}$  の条件つき期待値は

$$\hat{\mathbf{x}} = \sum_{\lambda \in \{0,1\}^n} \hat{\mathbf{x}}_\lambda g(\lambda) \quad (6.20)$$

と表わせる。 $A$  の事後確率  $g(\lambda)$  は、 $\gamma \ll 1, r \ll 1$  という仮定により、少数の  $\lambda$  の集合の上に分布が集中していることが予想される。そこで  $g(\lambda)$  を最大にする  $\lambda$  を  $\lambda^*$ , すなわち

$$g(\lambda^*) = \max_{\lambda \in \{0,1\}^n} g(\lambda) \quad (6.21)$$

として、(6.20) 式を  $\hat{\mathbf{x}} \doteq \hat{\mathbf{x}}_{\lambda^*}$  と近似し、この右辺を状態推定値と考えることにする。求めたい評価関数は  $\mathbf{x} = \hat{\mathbf{x}}_{\lambda^*}$  で最大となるような関数である。それには

$$I(\mathbf{x}) = \left. \frac{f(\mathbf{x})}{f(\hat{\mathbf{x}}_\lambda)} g(\lambda) \right|_{\lambda = \phi(\mathbf{x})} \quad (6.22)$$

とすればよい。 $I(\mathbf{x})$  が実際に  $\mathbf{x} = \hat{\mathbf{x}}_{\lambda^*}$  で最大となることは、簡単に

$$\begin{aligned} \max_{\mathbf{x} \in S^{n+1}} I(\mathbf{x}) &\leq \max_{\lambda \in \{0,1\}^n} \max_{\mathbf{x} \in L_\lambda} \frac{f(\mathbf{x})}{f(\hat{\mathbf{x}}_\lambda)} g(\lambda) \\ &\doteq \max_{\lambda \in \{0,1\}^n} g(\lambda) = g(\lambda^*) \end{aligned} \quad (6.23)$$

$$I(\hat{\mathbf{x}}_{\lambda^*}) = g(\lambda^*) \quad (6.24)$$

により確かめられる。なお、(6.24) 式を導くのに、 $\phi(\hat{\mathbf{x}}_\lambda) = \lambda$  という性質を用いた。

(6.9), (6.18) 式を (6.22) 式に代入すると

$$I(\mathbf{x}) \doteq C_5 \exp \left[ -\frac{1}{2r} \|\mathbf{Y} - \mathbf{x}\|^2 - \alpha \nu(\mathbf{x}) \right] \quad (6.25)$$

を得る。ここで

$$\nu(\mathbf{x}) = |\phi(\mathbf{x})| \quad (6.26)$$

と置いた。なお、 $\nu(\mathbf{x})$  は  $\mathbf{x}$  に含まれるジャンプの個数にほかならない。

評価関数  $I(\mathbf{x})$  を最大にすることは、

$$\mathcal{E}(\mathbf{x}) = \frac{1}{2r} \|\mathbf{Y} - \mathbf{x}\|^2 + \alpha \nu(\mathbf{x}) \quad (6.27)$$

を最小にすることとほぼ等価である。さらに  $\nu(\mathbf{x})$  は関数  $\rho$  を

$$\rho(u) = \begin{cases} 0, & u = 0 \\ 1, & u \neq 0 \end{cases} \quad (6.28)$$

と定義すれば

$$\nu(\mathbf{x}) = \sum_{k=1}^n \rho(x_k - x_{k-1}) \quad (6.29)$$

と表わせるから、 $\mathcal{E}(\mathbf{x})$  は

$$\mathcal{E}(\mathbf{x}) = \frac{1}{2r} \|\mathbf{Y} - \mathbf{x}\|^2 + \alpha \sum_{k=1}^n \rho(x_k - x_{k-1}) \quad (6.30)$$

と表わせる。ここでは (6.30) 式の  $\mathcal{E}(\mathbf{x})$  をニューラルネットのエネルギー関数に選ぶ。

## 6.4 ニューロコンピューティングによる状態推定

### 6.4.1 エネルギー関数の変形

ニューラルネットを用いた並列処理で計算したいのは (6.30) 式のエネルギー関数  $\mathcal{E}(\mathbf{x})$  を最小にする  $\mathbf{x}$  である。そのためには、並列処理による極値探索に適した手法で

ある最急勾配法を用いるのが有望に思われる。ところが、 $\mathcal{E}(\mathbf{x})$  は (6.30) 式の右辺の  $\rho(\cdot)$  のために微分可能ではなく、そのうえ  $2^n$  個もの局所最小点をもつ (付録 6A 参照)。したがってこのままでは最急勾配法を用いることができない。そこで、 $\rho(u)$  を

$$\rho_\epsilon(u) = 1 - \exp\left(-\frac{u^2}{2\epsilon}\right) \quad (6.31)$$

と近似し、エネルギー関数は  $\rho(u)$  を  $\rho_\epsilon(u)$  で置き換えた

$$\mathcal{E}_\epsilon(\mathbf{x}) = \frac{1}{2r} \|\mathbf{Y} - \mathbf{x}\|^2 + \alpha \sum_{k=1}^n \rho_\epsilon(x_k - x_{k-1}) \quad (6.32)$$

で近似することにする。このとき  $\mathcal{E}_\epsilon(\mathbf{x})$  は滑らかな関数となるから、その局所最小点の一つは  $\hat{\mathbf{x}}$  を新たな時間  $s$  の関数として運動方程式

$$\tau \frac{d\hat{\mathbf{x}}}{ds} = -\frac{\partial \mathcal{E}_\epsilon(\hat{\mathbf{x}})}{\partial \hat{\mathbf{x}}} \quad (6.33)$$

の定常解として求めることができる。ここで、 $\tau > 0$  は適当な定数である。

(6.31) 式において  $\epsilon$  を十分大きくとれば、 $|u| \leq 1$  で

$$\rho_\epsilon(u) \sim \frac{u^2}{2\epsilon} \quad (6.34)$$

となるから (6.32) 式の  $\mathcal{E}_\epsilon(\mathbf{x})$  は  $\mathbf{x}$  の 2 次式で近似できて、大域的な最小点以外には局所最小点はないことになる。また  $\epsilon \rightarrow 0$  とすれば各  $\mathbf{x} \in S^{n+1}$  ごとに  $\mathcal{E}_\epsilon(\mathbf{x}) \rightarrow \mathcal{E}(\mathbf{x})$  となる。以上のことから、方程式 (6.33) 式において、十分大きな  $\epsilon$  から出発して、(6.33) 式の時定数に比べてゆっくりと  $\epsilon$  を 0 に近づければ、その解は  $\mathcal{E}(\mathbf{x})$  の最小点に到達することが期待される。このことを模式的に描いたのが 図 6.2 である。

#### 6.4.2 ニューラルネットの構成

運動方程式の (6.33) を要素ごとに書くと

$$\begin{aligned} U_0: \quad \tau \frac{d\hat{x}_0}{ds} &= -\frac{1}{r}(\hat{x}_0 - Y_0) + \alpha \rho'_\epsilon(\hat{x}_1 - \hat{x}_0) \\ U_k: \quad \tau \frac{d\hat{x}_k}{ds} &= -\frac{1}{r}(\hat{x}_k - Y_k) + \alpha [\rho'_\epsilon(\hat{x}_{k+1} - \hat{x}_k) - \rho'_\epsilon(\hat{x}_k - \hat{x}_{k-1})], \\ & \quad k = 1, \dots, n-1 \\ U_n: \quad \tau \frac{d\hat{x}_n}{ds} &= -\frac{1}{r}(\hat{x}_n - Y_n) - \alpha \rho'_\epsilon(\hat{x}_n - \hat{x}_{n-1}) \end{aligned} \quad (6.35)$$

$$\rho'_\epsilon(u) = \frac{u}{\epsilon}(1 - \rho_\epsilon(u))$$

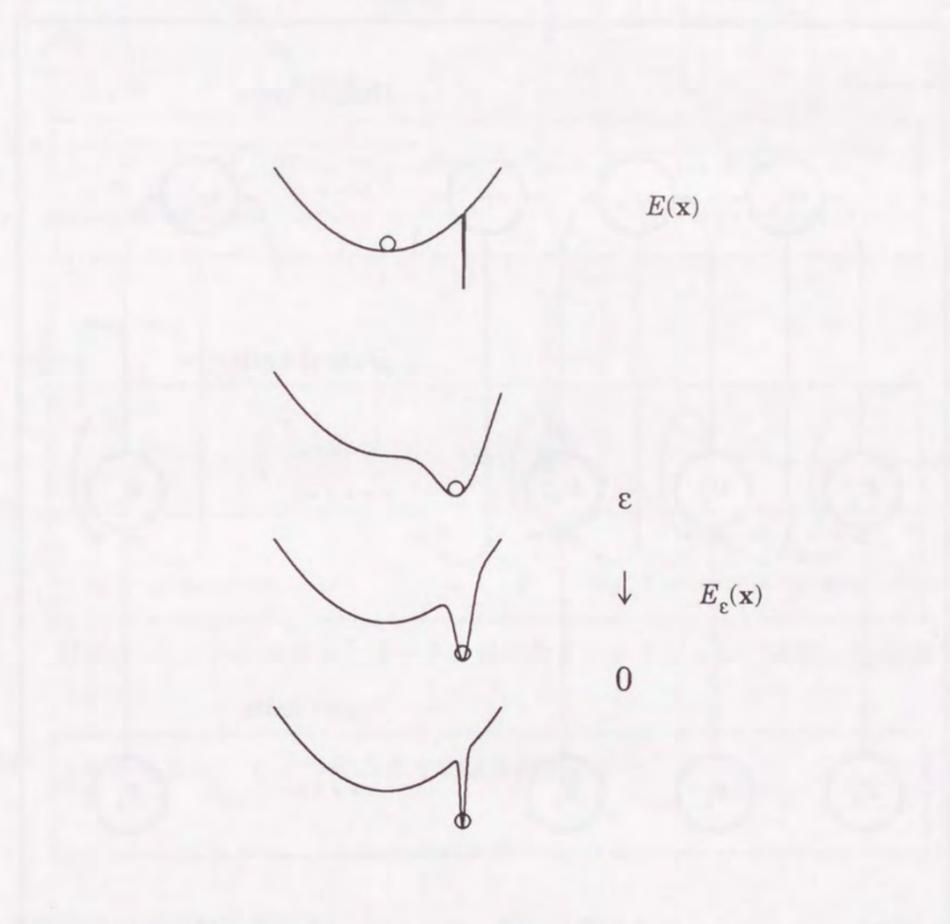


図 6.2 エネルギー関数  $\mathcal{E}(\mathbf{x})$  の変形

となる。これは各要素の方程式が観測値を入力として含み、隣り合う要素とのみ結合するような構造になっていて、並列処理に適した形である。方程式系(6.35)の解は、図6.3に示すような入力層、出力層、隠れ層の3層からなるフィードバック型のニューラルネットワークで計算できる。

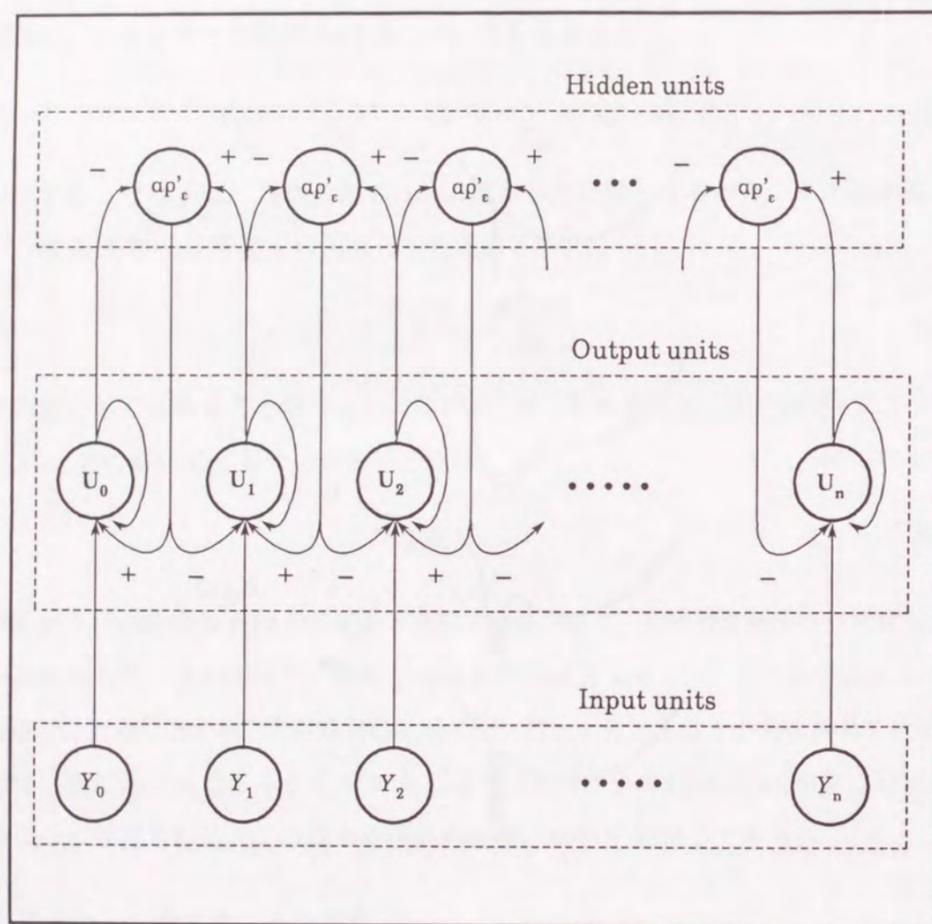


図 6.3 マルコフジャンプ過程の推定のためのニューラルネットワーク

### 6.4.3 計算例

図 6.3 に示すニューラルネットワークの動作、すなわち、(6.35) 式の解の挙動を調べるために、逐次型計算機でシミュレーションを行った。入力データには(6.1)~(6.3) 式のモデルから得られるサンプルを用い、(6.35) 式は差分方程式で近似して解を求めた。図

6.4 にシミュレーション結果の一例を示す。この例ではパラメータの値は  $\gamma = 0.05$ ,  $r =$

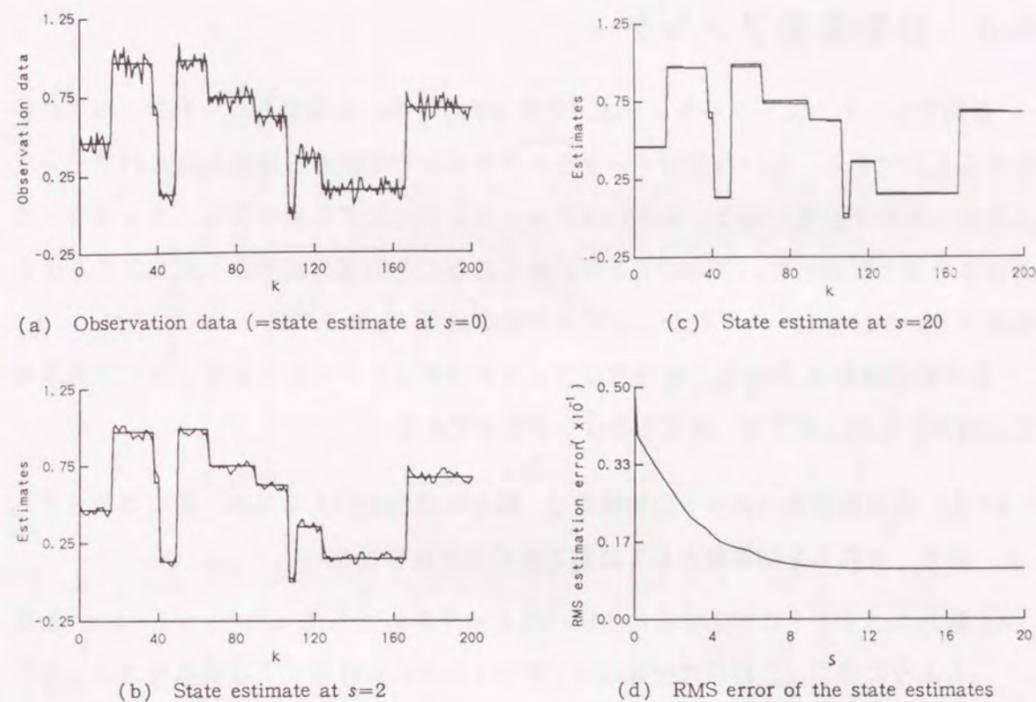


図 6.4 ニューラルネットワークを用いたマルコフジャンプ過程の推定値

$0.05^2$ ,  $n = 200$  とし、 $\epsilon$  はつぎのような減少関数とした。

$$\epsilon = \epsilon_0 \exp(-s), \quad \epsilon_0 = 0.1 \quad (6.36)$$

また状態推定値の初期値は  $\hat{x} = Y$  とした。図から明らかなように、ジャンプのタイミングはすべて正しく推定されており、理想的な状態推定が行われている。これはジャンプが短時間のうちに引き続いて生じている  $k = 38$  と  $41$ 、および、 $k = 107$  と  $111$  のところでもそうである。図には示していないが他の例においても、ジャンプのタイミングはそれらの間隔にはよらないで正しく検出されており、(6.17) 式の近似は結果に悪影響を及ぼさないことが確認された。

このシミュレーションでは差分の刻みを  $\Delta s = 0.05$  としてあり、 $s = 10$  の付近で収束しているから、およそ 200 回の反復計算で解が得られたことになる。このように多数の反復が必要なのは、各  $\epsilon$  ごとに十分に定常値に近づくようにゆっくりと  $\epsilon$  を 0

に近づけるためである。しかしながら、(6.35)式は完全に並列化が可能であるから、並列処理により、計算時間は  $1/(n+1)$  にまで短縮することができる。

## 6.5 移動窓型フィルタ

前節で示したニューラルネットは、全データを一挙に処理するバッチフィルタに相当するものである。短い時系列データをオフラインで処理する場合にはこれで十分であるが、データが長い場合、あるいはオンラインで処理する場合には、ネットワークの長さを適当に縮めて、さらにデータが得られるごとの逐次処理の方式でフィルタを構成するのが好ましい。それがここで示す移動窓型フィルタである。

移動窓の幅を  $L$  とする。移動窓型フィルタのネットワークと運動方程式は基本的には前節のものと同じで、異なるのはつぎの点である。

- 入、出力層の各ユニットの状態量は、新たな観測値が入る都度、隣のユニットへ移り、それらを初期値として運動方程式の計算を行う。
- 隠れユニット  $l$  に対応する小さいパラメータを  $\epsilon_l$  とし  $\epsilon_0 > \epsilon_1 > \dots > \epsilon_L$  となるように選ぶ。これらは前節のバッチフィルタにおける  $\epsilon$  とは異なりユニットごとに固定された値とする。

観測値  $Y_k$  が入力したときの運動方程式はつぎのようになる。

$$\begin{aligned}
 U_0: \quad \tau \frac{d}{ds} \hat{x}_k &= -\frac{1}{r}(\hat{x}_k - Y_k) - \alpha \rho'_{\epsilon_0}(\hat{x}_k - \hat{x}_{k-1}) \\
 U_l: \quad \tau \frac{d}{ds} \hat{x}_{k-l} &= -\frac{1}{r}(\hat{x}_{k-l} - Y_{k-l}) + \alpha [\rho'_{\epsilon_{l-1}}(\hat{x}_{k-l+1} - \hat{x}_{k-l}) - \rho'_{\epsilon_l}(\hat{x}_{k-l} - \hat{x}_{k-l-1})], \\
 &\quad l = 1, \dots, L-1 \\
 U_L: \quad \tau \frac{d}{ds} \hat{x}_{k-L} &= -\frac{1}{r}(\hat{x}_{k-L} - Y_{k-L}) + \alpha [\rho'_{\epsilon_{L-1}}(\hat{x}_{k-L+1} - \hat{x}_{k-L}) - \rho'_{\epsilon_L}(\hat{x}_{k-L} - \hat{x}_{k-L-1})]
 \end{aligned}
 \tag{6.37}$$

ここで  $\hat{x}_{k-L-1}$  はすでに窓の外に出た推定値であり値は変化しない。(6.37)式を解くことにより推定値  $\hat{x}_{k-L}$  が確定するが、この計算はつぎの観測データが与えられるまでに終えてなければならない。なお、観測データの時間間隔を  $\Delta t$  とすれば、 $Y_k$  が与えられてから  $\hat{x}_k$  を得るまでの時間遅れは  $(L+1)\Delta t$  となる。

図 6.5 に、前と同じ観測データのサンプルを用いて行った、移動窓型フィルタのシミュレーションの例を示す。この例では、 $L = 20$ ,  $\epsilon_0 = 0.1$ ,  $\epsilon_l = \epsilon_0 \times 10^{-4l/L}$  とした。

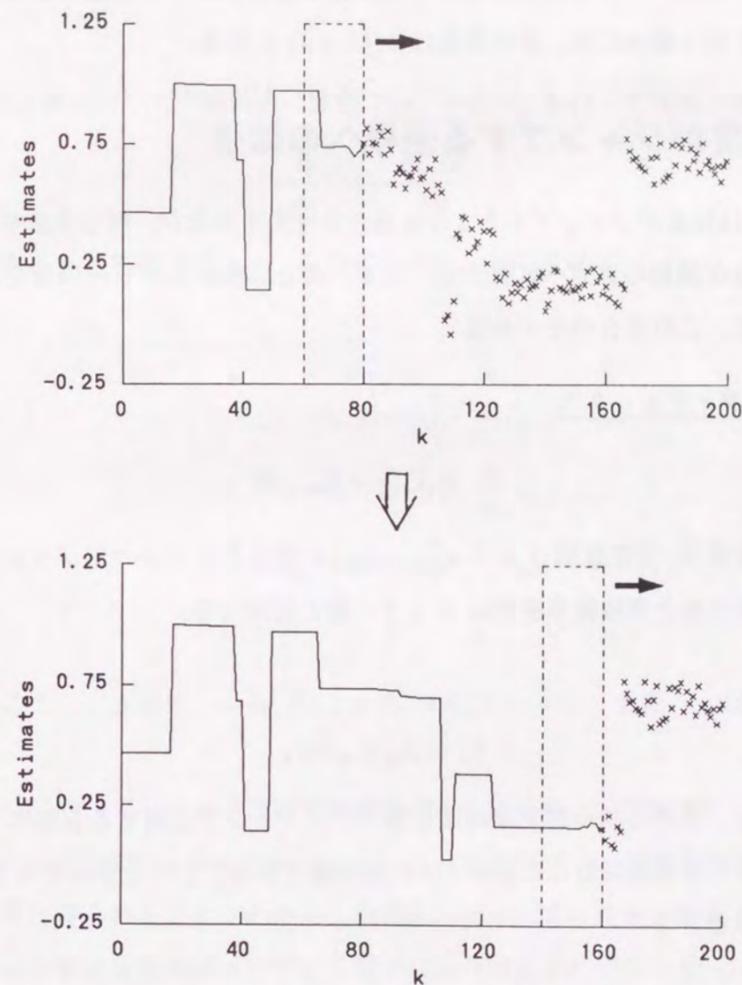


図 6.5 移動窓型フィルタを用いたマルコフジャンプ過程の推定値

図から明らかなように、状態推定値の精度は若干劣化するが、ジャンプのタイミングは正しく推定されている。なお、(6.37)式は前と同様に差分方程式で近似し、新たな観測データを取得したときの反復の回数は10回とした。したがって、観測データを取得してから状態推定値が確定するまでの反復回数は210回で、バッチ処理の場合と同じであるが、観測データを取得するごとの反復回数は少なくすむ。さらにこの計算を並列処理で行う場合には、計算時間は $1/(L+1)$ になる。

## 6.6 速度がジャンプする過程への拡張

これまでは位置がジャンプするような場合を考えてきたが、同じ手法を速度がジャンプするような過程の推定へ拡張する。まず、前と同様にスカラーの場合から考えることにすると、この場合のモデルは

### 状態のダイナミクス

$$X_k = X_{k-1} + V_{k-1} \Delta t \quad (6.38)$$

速度  $V_k$  は閉区間  $S = [-v_{\max}, v_{\max}]$  に値をとるマルコフジャンプ過程。初期分布と遷移確率密度は  $S$  上で一様と仮定する。

### 観測値

$$Y_k = X_k + \sqrt{r} W_k \quad (6.39)$$

と表わされる。求める状態推定値は前と同じく、ジャンプに関する仮説のうち事後確率最大となるものを採用したときのMAP推定値とする。このときエネルギー関数は、前と同様の導き方で

$$\begin{aligned} \mathcal{E}(\mathbf{x}) &= \frac{1}{2r} \|\mathbf{Y} - \mathbf{x}\|^2 + \alpha_v \nu(\mathbf{v}) \\ &= \frac{1}{2r} \|\mathbf{Y} - \mathbf{x}\|^2 + \alpha_v \sum_{k=1}^{n-1} \rho(v_k - v_{k-1}) \end{aligned} \quad (6.40)$$

$$v_k = x_{k+1} - x_k \quad (6.41)$$

という形に求まる。ここで  $\nu(\mathbf{v})$  は  $\mathbf{v} = (v_0, v_1, \dots, v_{n-1})^T$  に含まれるジャンプの個数、すなわち、 $v_k \neq v_{k-1}$  となるような  $k (1 \leq k \leq n-1)$  の個数を表わす。

(6.40), (6.41) 式の関数の形自体は、(6.30)式の場合と同様きわめて簡単であるが、そこに含まれるパラメータ  $\alpha_v$  の計算はいささか面倒である。この計算の概略は付録6Bに示すことにして結果だけを記すと

$$\alpha_v = \log \frac{1}{\gamma} \left( \frac{2 + \sqrt{3}}{6\pi r \gamma^3} \right)^{1/2} \quad (6.42)$$

となる。

状態推定は前と同じく評価関数の変形  $\mathcal{E}(\mathbf{x}) \rightarrow \mathcal{E}_\epsilon(\mathbf{x})$  を行って運動方程式

$$\tau \frac{d\hat{\mathbf{x}}}{ds} = -\frac{\partial \mathcal{E}_\epsilon(\hat{\mathbf{x}})}{\partial \hat{\mathbf{x}}} \quad (6.43)$$

をニューラルネットで解けばよい。この式を要素ごとに書けば

$$\begin{aligned} \tau \frac{d\hat{x}_k}{ds} &= -\frac{1}{r} (\hat{x}_k - Y_k) \\ &\quad - \frac{\alpha}{\epsilon} \left\{ (\hat{v}_{k-1} - \hat{v}_{k-2}) \exp \left[ -\frac{1}{2\epsilon} (\hat{v}_{k-1} - \hat{v}_{k-2})^2 \right] \right. \\ &\quad \left. - 2(\hat{v}_k - \hat{v}_{k-1}) \exp \left[ -\frac{1}{2\epsilon} (\hat{v}_k - \hat{v}_{k-1})^2 \right] \right. \\ &\quad \left. + (\hat{v}_{k+1} - \hat{v}_k) \exp \left[ -\frac{1}{2\epsilon} (\hat{v}_{k+1} - \hat{v}_k)^2 \right] \right\}, \end{aligned} \quad k = 0, 1, \dots, n \quad (6.44)$$

となる。ここで、 $\hat{v}_{-2} = \hat{v}_{-1} = \hat{v}_0$ ,  $\hat{v}_{n-1} = \hat{v}_n = \hat{v}_{n+1}$  とする。また、 $\epsilon$  は  $s$  の減少関数である。

速度がジャンプする場合の状態推定の例を図6.6に示す。この例では  $\gamma = 0.01$ ,  $r = 25$ ,  $n = 200$ ,  $\epsilon_0 = 1000$ ,  $\epsilon = \epsilon_0 \exp(-s)$  とした。位置がジャンプする場合と同様に良好な推定結果が得られることがわかる。ただし、(6.43)式を差分方程式で近似する際に、差分の刻み幅は位置がジャンプする場合に比べはるかに小さな値  $\Delta s = 0.001$  としなければ、良い推定値が得られなかった。これは逐次型計算ではかなりの負担になるが、前と同様、並列処理を用いることにより計算時間は  $1/(n+1)$  にまでは短縮できる。

次に、2次元の速度がジャンプするような状態推定の問題をとりあげる。この場合、推定すべき対象は、平面上を直線的に運動し、時折、速度がステップ状に変化することによりその向きを変えて、また直線的な運動を続けるものとする。また、観測値は2次元の位置の変数に2次元の白色ガウス雑音を加わったものとする。この場合もエ

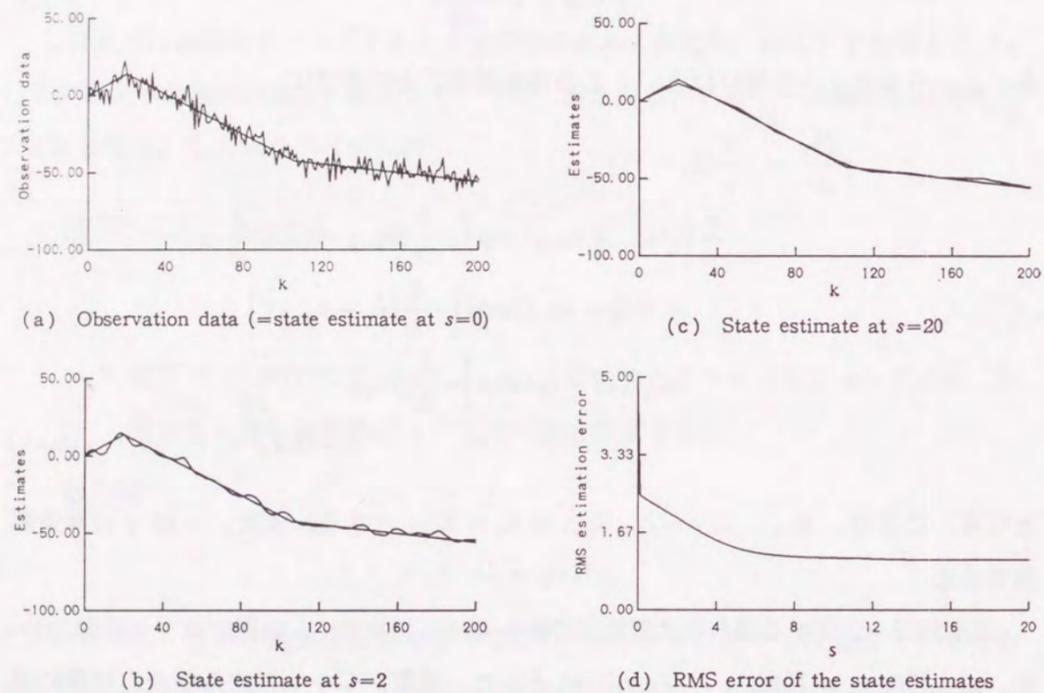


図 6.6 速度にジャンプを含む過程の推定値

エネルギー関数は前と同様

$$\begin{aligned} \mathcal{E}(\mathbf{x}) &= \frac{1}{2r} \|\mathbf{Y} - \mathbf{x}\|^2 + \alpha_v \nu(\mathbf{v}) \\ &= \frac{1}{2r} \sum_{k=0}^n |Y_k - x_k|^2 + \alpha_v \sum_{k=1}^{n-1} \rho(|v_k - v_{k-1}|) \end{aligned} \quad (6.45)$$

$$v_k = x_{k+1} - x_k \quad (6.46)$$

とすればよい。ただし、 $Y_k, x_k, v_k$  は 2次元の変数とし、 $|\cdot|$  は 2次元のユークリッドノルムを表わすものとする。ニューラルネットワークで解くべき運動方程式は前と同じく

$$\tau \frac{d}{ds} \hat{\mathbf{x}} = -\frac{\partial \mathcal{E}_\epsilon(\hat{\mathbf{x}})}{\partial \hat{\mathbf{x}}} \quad (6.47)$$

である。ただし、 $\hat{\mathbf{x}}$  は今度は  $2(n+1)$  次元のベクトルであり、この式を要素ごとに書けば

$$\begin{aligned} \tau \frac{d\hat{x}_{i,k}}{ds} &= -\frac{1}{r} (\hat{x}_{i,k} - Y_{i,k}) \\ &\quad - \frac{\alpha}{\epsilon} \left\{ (\hat{v}_{i,k-1} - \hat{v}_{i,k-2}) \exp \left[ -\frac{1}{2\epsilon} |\hat{v}_{k-1} - \hat{v}_{k-2}|^2 \right] \right. \\ &\quad \left. - 2(\hat{v}_{i,k} - \hat{v}_{i,k-1}) \exp \left[ -\frac{1}{2\epsilon} |\hat{v}_k - \hat{v}_{k-1}|^2 \right] \right. \\ &\quad \left. + (\hat{v}_{i,k+1} - \hat{v}_{i,k}) \exp \left[ -\frac{1}{2\epsilon} |\hat{v}_k - \hat{v}_{k-1}|^2 \right] \right\}, \\ &\quad i = 1, 2, \quad k = 0, 1, \dots, n \end{aligned} \quad (6.48)$$

となる。

2次元の速度がジャンプする場合の状態推定の例を図 6.7 に示す。この例では  $\gamma = 0.01, r = 25, n = 200, \epsilon_0 = 1000, \epsilon = \epsilon_0 \exp(-s)$  とした。

速度にジャンプを含む過程の場合にも、前のマルコフジャンプ過程の場合と同じく、移動窓型フィルタを用いてのリアルタイム処理が可能であり、ニューラルネットワークの運動方程式は (6.48) 式に対応して次のようになる。

$$\begin{aligned} \tau \frac{d\hat{x}_{i,k-l}}{ds} &= -\frac{1}{r} (\hat{x}_{i,k-l} - Y_{i,k-l}) \\ &\quad - \alpha \left\{ \frac{1}{\epsilon_l} (\hat{v}_{i,k-l-1} - \hat{v}_{i,k-l-2}) \exp \left[ -\frac{1}{2\epsilon_l} |\hat{v}_{k-l-1} - \hat{v}_{k-l-2}|^2 \right] \right. \end{aligned}$$

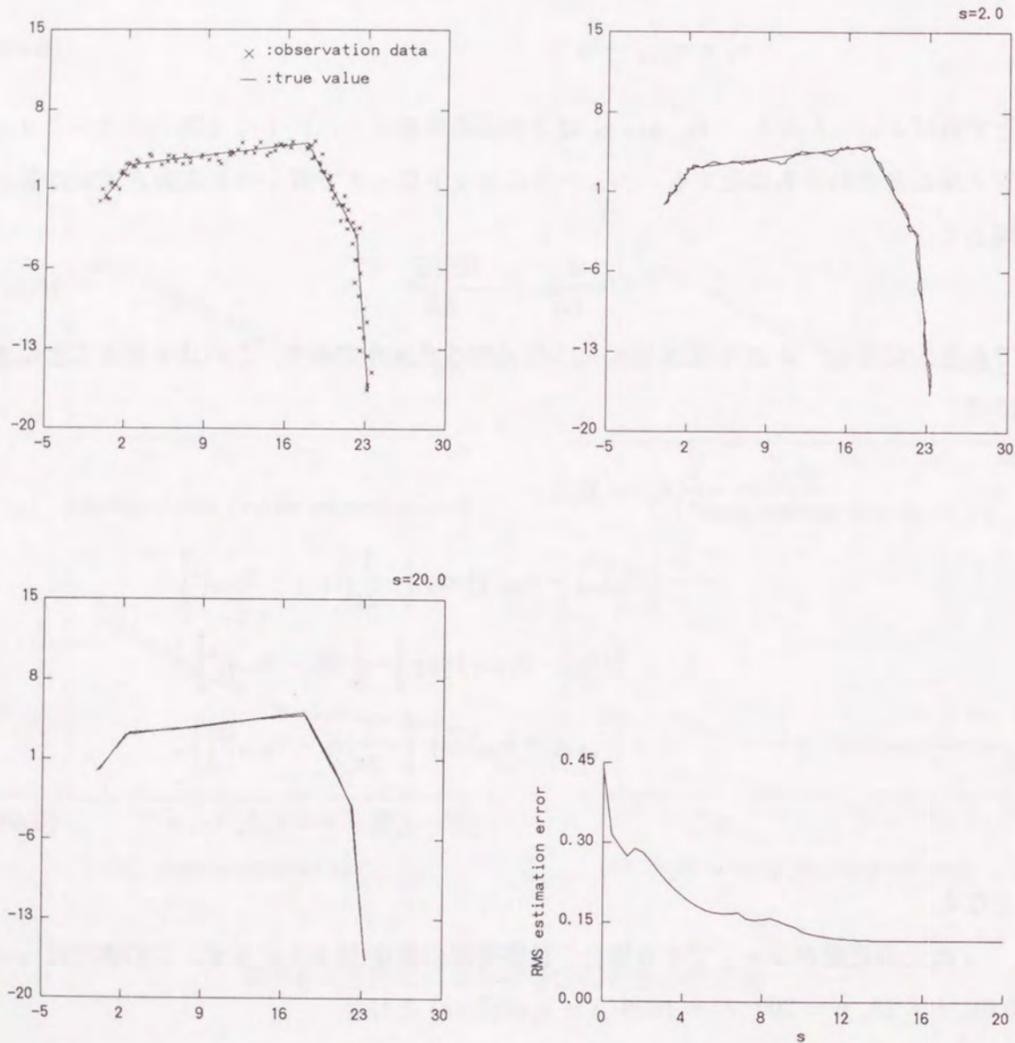


図 6.7 2次元の速度にジャンプを含む過程の推定値

$$\begin{aligned}
 & - \frac{2}{\epsilon_{l-1}} (\hat{v}_{i,k-l} - \hat{v}_{i,k-l-1}) \exp \left[ -\frac{1}{2\epsilon_{l-1}} |\hat{v}_{k-l} - \hat{v}_{k-l-1}|^2 \right] \\
 & + \frac{1}{\epsilon_{l-2}} (\hat{v}_{i,k-l+1} - \hat{v}_{i,k-l}) \exp \left[ -\frac{1}{2\epsilon_{l-2}} |\hat{v}_{k-l+1} - \hat{v}_{k-l}|^2 \right] \Big\}, \\
 & i = 1, 2, \quad l = 0, 1, \dots, L \quad (6.49)
 \end{aligned}$$

ここで  $\hat{v}_{k-1} = \hat{v}_k = \hat{v}_{k+1}$  であり,  $\epsilon_l$  は  $\epsilon_0 > \epsilon_1 > \dots > \epsilon_L$  となるように選ぶ.

移動窓型フィルタを用いて, 2次元の速度がジャンプする場合の状態推定を行った例を図 6.8 に示す.

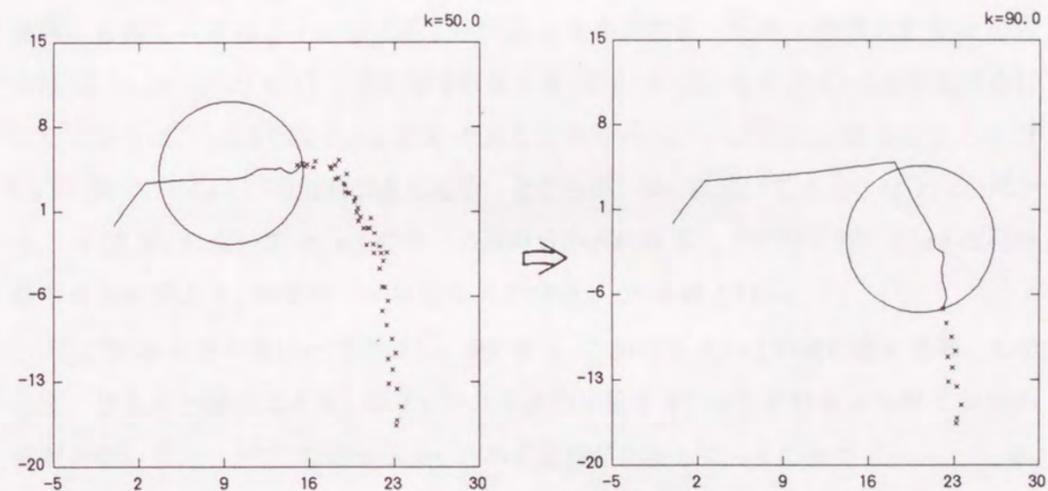


図 6.8 2次元の速度にジャンプを含む過程の移動窓型フィルタによる推定値

## 6.7 まとめ

マルコフジャンプ過程の状態推定を, 離散時間の非線形フィルタリングの問題として考察し, この状態推定が, ある評価関数の極値探索問題に帰着させられることを明らかにした. さらに, この評価関数をエネルギー関数とみて相互結合型のニューラルネットを用いることにより, ジャンプのタイミングまで含めて高い精度で状態推定値が得られることを明らかにした. またこの方法は, エネルギー関数を適当に設定することにより速度にジャンプを含む過程の状態推定へも拡張可能であり, 高精度の状態推定が行い得ることを示した.

なお本章では、ジャンプを伴う過程の簡単なモデルとして1次元のマルコフジャンプ過程や、1次元及び2次元の速度にジャンプを含む過程を選んだが、ここで示した方法は、多次元の場合や、ジャンプとともに拡散を含む過程の状態推定の場合へも適用可能である。しかしながら、その場合のエネルギー関数は、本章の場合と同じく構造は簡単ながら、その中に現われるパラメータの値を理論的に求めるのは困難になることが予想される。したがって、そのパラメータの値を学習によって求める方法が重要になるが、このことについては次章で詳しく述べることにする。

## 付録 補遺

### 6A $\mathcal{E}(\mathbf{x})$ の局所最小点の個数

(6.25) 式の  $\mathcal{E}(x)$  を二つの部分にわけて

$$\mathcal{E}(\mathbf{x}) = \mathcal{E}_1(\mathbf{x}) + \mathcal{E}_2(\mathbf{x}) \quad (6A.1)$$

$$\mathcal{E}_1(\mathbf{x}) = \frac{1}{2r} \|\mathbf{Y} - \mathbf{x}\|^2 \quad (6A.2)$$

$$\mathcal{E}_2(\mathbf{x}) = \alpha\nu(\mathbf{x}) \quad (6A.3)$$

と書く。まず、 $\tilde{\mathbf{x}}$  を  $\mathcal{E}(\mathbf{x})$  の局所最小点の一つと仮定して  $\lambda = \phi(\tilde{\mathbf{x}})$  ( $\phi$  は (6.6) 式で定義) とおく。 $\tilde{\mathbf{x}}$  はジャンプに関する仮説  $\lambda$  を満足する。仮説  $\lambda$  を満足する  $\mathbf{x}$  の集合は  $L_\lambda = \{\mathbf{x}; \phi(\mathbf{x}) = \lambda\}$  と表わされるが  $\tilde{\mathbf{x}}$  は  $L_\lambda$  においても  $\mathcal{E}(\mathbf{x})$  の局所最小点になる。さらに、 $\mathcal{E}_2(\mathbf{x})$  は  $L_\lambda$  上の  $\tilde{\mathbf{x}}$  のある近傍で  $\mathcal{E}_2(\mathbf{x}) = \alpha|\lambda| = \text{定数}$  となり、 $\tilde{\mathbf{x}}$  は  $L_\lambda$  において  $\mathcal{E}_1(\mathbf{x})$  の局所最小点となる。ところが、 $L_\lambda$  において  $\mathcal{E}_1(\mathbf{x})$  は下に凸だから、 $\tilde{\mathbf{x}}$  は  $L_\lambda$  において  $\mathcal{E}_1(\mathbf{x})$  の唯一の局所最小点になる。したがって、 $\mathcal{E}(\mathbf{x})$  の局所最小点の個数は  $L_\lambda$  の個数 (= 異なる  $\lambda$  の個数)  $2^n$  を越えない。

逆に仮説  $\lambda$  を任意に一つ固定し、 $\tilde{\mathbf{x}}_\lambda$  を  $L_\lambda$  における  $\mathcal{E}_1(\mathbf{x})$  の最小点とする。そのとき、ほとんど確実に ( $\tilde{\mathbf{x}}_\lambda$  が  $L_\lambda$  のある真部分集合  $L'_\lambda$  に含まれるような確率 0 の事象を除いて)、 $S^{n+1}$  における  $\tilde{\mathbf{x}}_\lambda$  のある近傍が存在して、その中で  $\mathcal{E}_2(\mathbf{x}) \geq \mathcal{E}_2(\tilde{\mathbf{x}}_\lambda)$  が成立する。すなわち、 $\tilde{\mathbf{x}}_\lambda$  は  $S^{n+1}$  において  $\mathcal{E}(\mathbf{x})$  の局所最小点となる。したがって、 $\mathcal{E}(\mathbf{x})$  の局所最小点の個数はほとんど確実に  $\tilde{\mathbf{x}}_\lambda$  の個数 (= 異なる  $\lambda$  の個数)  $2^n$  以上である。前のこととあわせると、局所最小点がほとんど確実に  $2^n$  個存在することがわかる。

### 6B 速度がジャンプする場合のエネルギー関数

速度のジャンプに関する仮説を  $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_{n-1})^T$  と表わす。 $\lambda_k$  は時間  $k\Delta t$  での速度のジャンプの有無にしたがって、それぞれ 1, 0 という値をとるものとする。仮説  $\lambda$  を任意に一つ固定する。このとき、速度  $\mathbf{V} = (V_0, V_1, \dots, V_{n-1})^T$  がとりうる値の集合は (6.7) 式と同様、 $L_\lambda = \{\mathbf{v}; \phi(\mathbf{v}) = \lambda\}$  と表わせる。ただし関数  $\phi = (\phi_1, \dots, \phi_{n-1})^T$  は (6.6b) 式で定義したものである。さらに、 $\mathbf{X}$  がとりうる値の集合は

$$M_\lambda \equiv D(\mathbf{R} \times L_\lambda \Delta t)$$



これと (6B.8) 式を (6B.7) 式に代入して

$$I(\mathbf{x}) \doteq C_{10} \exp \left[ -\frac{1}{2r} \|\mathbf{Y} - \mathbf{x}\|^2 - \alpha_v \nu(\mathbf{v}) \right] \quad (6B.15)$$

$$\alpha_v = \log \frac{1}{\gamma} \left( \frac{2 + \sqrt{3}}{6\pi r \gamma^3} \right)^{1/2} \quad (6B.16)$$

を得る.  $I(\mathbf{x})$  を最大にすることと

$$\mathcal{E}(\mathbf{x}) = \frac{1}{2r} \|\mathbf{Y} - \mathbf{x}\|^2 + \alpha_v \nu(\mathbf{v}) \quad (6B.17)$$

を最小にすることとは等価だから, この  $\mathcal{E}(\mathbf{x})$  をニューラルネットのエネルギー関数として用いることができる.

## 第7章

# ジャンプを伴うマルコフ過程の学習と推定

### 7.1 まえがき

状態遷移にジャンプを伴うような確率過程の推定は, 非線形推定問題の中でも特に非線形性が強く, 線形近似や分布に正規性を仮定する近似では良い推定値が得られない. この問題に対処するために, 第6章では, 時間を離散化してニューロコンピューティングによるアプローチをとり, エネルギーを最小化するような相互結合型のニューラルネットが, ジャンプを含む過程の推定に有効であることを示した. 本章では, このニューラルネットによる推定法の一般化のために, そこで用いるエネルギー関数を学習で決める方法について示す.

第6章で用いたエネルギー関数は, Bayes 推定の立場から理論的に導いたものである. すなわち, ジャンプの頻度を事前情報として与え, 事前情報と観測データに関する条件つき期待値 (正確にはその近似値) を望ましい推定値として定め, そこで最小値をとるような関数を構成してそれをエネルギー関数としたものである. 得られたエネルギー関数は極めて単純な形をしており, ニューラルネットでの計算に適した形になっている. しかしながら, このようにエネルギー関数を最初に決定しておいてからニューロコンピューティングを行うことには次の様な問題がある.

- 1) エネルギー関数を導くのに, 単純なモデルの場合ですら煩雑な近似計算が必要であり, 一般化が容易ではない.
- 2) エネルギー関数を最小化するニューラルネットを構成し, それを非線形フィルタとして実現する際に, さらにいくつかの近似を必要とし, その過程で当初のエネルギー関数が必ずしも適切なものではなくなっている可能性がある.

このような問題を解決するために本章では、ニューラルネットのエネルギー関数を学習によって求めるというアプローチをとる。すなわち、想定したモデルからエネルギー関数を完全に決定するのではなく、一部自由度を残しておいて、それをデータのサンプルから決めるという方法である。このアプローチにより、エネルギー関数を求めることが簡略化されて、ジャンプを含むより一般的な確率過程の推定へのニューラルネットの適用が可能になる。

本章ではまず7.2節で、マルコフジャンプ過程の状態推定にニューラルネットを用いる方法について概説する。次に7.3節で、この状態推定法で用いられるニューラルネットのエネルギー関数について考察し、新たな自由度を付加するための妥当な形をAIC(Akaike's information criteria) [3], [4] との比較から明らかにする。またその自由度に対応するパラメータを動かしたとき、推定性能がどのように変化するかを調べる。7.4節では、エネルギー関数の学習について考察し、確率近似法を用いることによりデータのサンプルから適切なエネルギー関数が決定できることを明らかにする。

## 7.2 状態推定のモデル

### 7.2.1 モデルとエネルギー関数

見通しを良くするために、推定モデルには、ジャンプを伴う過程としては最も単純な1次元のマルコフジャンプ過程 [13] を選ぶ。これはジャンプとジャンプの間では一定値をとるようなマルコフ過程である。さらに簡単のために、始めから離散時間で扱うことにする。

$X_k, k = 0, 1, \dots$  を有界閉区間  $S = \{x; 0 \leq x \leq 1\}$  に値をとるマルコフジャンプ過程とする。ジャンプの頻度  $\gamma \equiv \Pr\{X_k \neq X_{k-1}\}$  は  $k$  に依らず一定で、初期分布とジャンプした場合の行き先の分布とは共に  $S$  上で一様であるとする。また観測値は

$$Y_k = X_k + \sqrt{r}W_k, \quad k = 0, 1, \dots \quad (7.1)$$

で与えられるものとする。ここで  $W_k, k = 0, 1, \dots$  は平均0、分散1の白色雑音とする。便宜上、過去から現在までの状態と観測値をベクトルで、それぞれ  $\mathbf{X} = (X_0, \dots, X_n)^T$ ,  $\mathbf{Y} = (Y_0, \dots, Y_n)^T$  と表わす。 $\mathbf{X}$  と  $\mathbf{Y}$  との例は前章の図 6.1 に示した。

ここで取り扱う問題は、 $\mathbf{Y}$  が与えられたときに、 $\mathbf{X}$  の準最適な推定値を並列処理型のアルゴリズムで計算することである。第6章で示したように、そのためには、エ

ネルギー関数

$$\mathcal{E}(\mathbf{x}) = \frac{1}{2r} \|\mathbf{Y} - \mathbf{x}\|^2 + \alpha \nu(\mathbf{x}) \quad (7.2)$$

を最小にするような  $\mathbf{x} = (x_0, \dots, x_n)^T$  を求めてそれを推定値とすれば良い。ここで、 $\|\cdot\|$  は  $(n+1)$ -次元 Euclid ノルムである。また  $\nu(\mathbf{x})$  は  $\mathbf{x}$  に含まれるジャンプの個数であり

$$\rho(x) = \begin{cases} 0, & x = 0 \\ 1, & x \neq 0 \end{cases} \quad (7.3)$$

という関数を用いれば

$$\nu(\mathbf{x}) = \sum_{k=1}^n \rho(x_k - x_{k-1}) \quad (7.4)$$

と表わせる。(7.2) 式のエネルギー関数は、求めるべき状態推定値として、ジャンプに関する仮説のうち事後確率最大となるものを採用したときの最適状態推定値を選び、そこで最小値をとるように構成したものである。これは事前情報を利用する Bayes 推定に基づいており、(7.2) 式の右辺の  $\alpha$  はジャンプの頻度  $\gamma$  と観測雑音の大きさ  $r$  を用いて

$$\alpha = \log \frac{1-\gamma}{\gamma\sqrt{2\pi r\gamma}} \quad (7.5)$$

と表わされる。

### 7.2.2 ニューロコンピューティング

ニューラルネットワークで計算したいのは (7.2) 式のエネルギー関数  $\mathcal{E}(\mathbf{x})$  を最小にする  $\mathbf{x}$  であるが、 $\mathcal{E}(\mathbf{x})$  は  $\mathbf{x}$  について微分可能ではないから、そのかわりに少し変形を加えた関数

$$\mathcal{E}_\epsilon(\mathbf{x}) = \frac{1}{2r} \|\mathbf{Y} - \mathbf{x}\|^2 + \alpha \sum_{k=1}^n \rho_\epsilon(x_k - x_{k-1}) \quad (7.6)$$

$$\rho_\epsilon(x) = 1 - \exp(-x^2/2\epsilon) \quad (7.7)$$

を用いる。 $\mathcal{E}_\epsilon(\mathbf{x})$  は滑らかな関数だから、 $\hat{\mathbf{x}}$  を新たな時間  $s$  の関数として運動方程式

$$\tau \frac{d}{ds} \hat{\mathbf{x}} = -\frac{\partial \mathcal{E}_\epsilon(\hat{\mathbf{x}})}{\partial \hat{\mathbf{x}}} \quad (7.8)$$

を解けば、この定常解が  $\mathcal{E}_\epsilon(\mathbf{x})$  の一つの局所最小値になる。 $\mathcal{E}_\epsilon(\mathbf{x})$  は  $\epsilon$  を十分大きくとれば  $\mathbf{x}$  の2次式で近似できるから、局所最小値は唯一つでそれが大域的な最小値になる。また、 $\epsilon \rightarrow 0$  とすれば  $\mathcal{E}_\epsilon(\mathbf{x})$  は  $\mathcal{E}(\mathbf{x})$  に収束する。したがって、方程式 (7.8) に

において  $\epsilon$  も  $s$  の関数にして,  $s \rightarrow \infty$  のとき  $\epsilon \rightarrow 0$  となるようにすれば, その解は  $\mathcal{E}(\mathbf{x})$  の最小点に到達することが期待される.

運動方程式 (7.8) を要素ごとに書けば

$$\begin{aligned} \tau \frac{d}{ds} \hat{x}_0 &= -\frac{1}{r}(\hat{x}_0 - Y_0) + \alpha \rho'_\epsilon(\hat{x}_1 - \hat{x}_0) \\ \tau \frac{d}{ds} \hat{x}_k &= -\frac{1}{r}(\hat{x}_k - Y_k) \\ &\quad + \alpha[\rho'_\epsilon(\hat{x}_{k+1} - \hat{x}_k) - \rho'_\epsilon(\hat{x}_k - \hat{x}_{k-1})] \\ &\quad k = 1, \dots, n-1 \\ \tau \frac{d}{ds} \hat{x}_n &= -\frac{1}{r}(\hat{x}_n - Y_n) - \alpha \rho'_\epsilon(\hat{x}_n - \hat{x}_{n-1}) \end{aligned} \quad (7.9)$$

となる. これは各要素の方程式が観測値を入力として含み, 隣り合う要素とのみ結合するような構造になっていてニューラルネットによる並列処理に適した形になっている.

以上のことは全データを一挙に処理するバッチフィルタに相当するものであるが, 移動窓を用いれば, データが入ってくるごとの逐次処理の方式での実現が可能である. この場合,  $\epsilon$  は  $s$  の関数にはしないで, 移動窓の中の各ユニットごとに固定の値とし, 移動窓の入口から出口の方向に向かって次第に小さくなるようにしておけば良い. いま, 移動窓の幅を  $L$  とすると, 観測値  $Y_k$  が入力したときの移動窓の内部での処理は次の運動方程式で表わされる.

$$\begin{aligned} \tau \frac{d}{ds} \hat{x}_k &= -\frac{1}{r}(\hat{x}_k - Y_k) - \alpha \rho'_{\epsilon_0}(\hat{x}_k - \hat{x}_{k-1}) \\ \tau \frac{d}{ds} \hat{x}_{k-l} &= -\frac{1}{r}(\hat{x}_{k-l} - Y_{k-l}) \\ &\quad + \alpha[\rho'_{\epsilon_{l-1}}(\hat{x}_{k-l+1} - \hat{x}_{k-l}) - \rho'_{\epsilon_l}(\hat{x}_{k-l} - \hat{x}_{k-l-1})] \\ &\quad l = 1, 2, \dots, L \end{aligned} \quad (7.10)$$

ここで  $\epsilon_l$  は  $\epsilon_0 > \epsilon_1 > \dots > \epsilon_L$  となるように選ぶ.

移動窓型フィルタを用いて行ったマルコフジャンプ過程の状態推定のシミュレーション結果の例は前章の図 6.5 に示した.

### 7.3 状態推定の評価関数と推定性能

前節のニューロコンピューティングで用いたエネルギー関数は Bayes 推定の立場から導いたものである. すなわち, 事前情報としてジャンプの頻度が  $\gamma$  であることを仮定している. 一方, この事前情報を用いなくてもエネルギー関数を導く方法はある, それがここで示す AIC による導き方である. 注目すべきことは, いずれの場合のエネル

ギー関数も 1 つのパラメータの値を除けば形が一致していることである. すなわち, エネルギー関数は推定値と観測データとの誤差の自乗和の項と, 推定値に含まれるジャンプの個数を表わす項との重み付き和になっている. ここでは AIC による導き方を示したあとで, エネルギー関数の中に含まれるパラメータの値に推定性能がどのように依存しているかをシミュレーションで調べる.

#### 7.3.1 AIC によるエネルギー関数の導出

AIC はモデルの良さを評価するための評価基準として提案され [3], [4], モデルの次数を決定するのにその効果を発揮してきた. 同じ考え方でジャンプ過程の推定のためのエネルギー関数を導くことができる.

AIC は Kullback 情報量の不偏推定値であり, Kullback 情報量は想定したモデルから得られる観測値の分布と, 真の観測値の分布との距離を測る尺度である. いまの問題の場合, モデルと状態量を同一視して状態量を  $\mathbf{x}$  であると想定すると, それに応じて観測値の分布が

$$f(\mathbf{y} | \mathbf{x}) = C \exp \left[ -\frac{1}{2r} \|\mathbf{y} - \mathbf{x}\|^2 \right] \quad (7.11)$$

と定まる. 真の状態が  $\mathbf{X} = \mathbf{x}^0$  であるとする, 観測値の真の分布は

$$p(\mathbf{y}) = f(\mathbf{y} | \mathbf{x}^0) \quad (7.12)$$

に等しい. このとき Kullback の情報量は

$$\begin{aligned} I(p, f(\cdot | \mathbf{x})) &\equiv \int_{\mathbf{R}^{n+1}} p(\mathbf{y}) \ln \frac{p(\mathbf{y})}{f(\mathbf{y} | \mathbf{x})} d\mathbf{y} \\ &= -E \ln f(\mathbf{Y} | \mathbf{x}) + \text{const} \\ &= \frac{1}{2r} E \|\mathbf{Y} - \mathbf{x}\|^2 + \text{const} \end{aligned} \quad (7.13)$$

となる. この右辺は  $\mathbf{x} = \mathbf{x}^0$  のとき最小値をとるから

$$K(\mathbf{x}) \equiv E \left[ \frac{1}{2r} \|\mathbf{Y} - \mathbf{x}\|^2 \right] \quad (7.14)$$

を最小にするような  $\mathbf{x}$  を求めれば真の状態が得られる. しかし,  $K(\mathbf{x})$  は観測データから直接得られる量ではないから, 観測データだけから (7.14) 式の最小値

$$K^0 \equiv \min_{\mathbf{x}} K(\mathbf{x}) = K(\mathbf{x}^0) \quad (7.15)$$

を推定するために

$$\hat{K} \equiv \min_{\mathbf{x}} \left[ \frac{1}{2r} \|\mathbf{Y} - \mathbf{x}\|^2 \right] \equiv \frac{1}{2r} \|\mathbf{Y} - \hat{\mathbf{x}}\|^2 \quad (7.16)$$

を用いる. この (7.16) 式の  $\hat{K}$  は (7.15) 式の  $K^0$  の推定値としては  $\hat{\mathbf{x}}$  に含まれるパラメータの個数分だけ下に偏っている.  $\hat{\mathbf{x}}$  が  $m$  回ジャンプするような過程を表しているとすれば,  $\hat{\mathbf{x}}$  に含まれる独立なパラメータの個数はジャンプの位置の  $m$  個と, ジャンプとジャンプの間の状態量の  $m+1$  個をあわせた  $2m+1$  個である. したがって

$$\hat{K}' \equiv \frac{1}{2r} \|\mathbf{Y} - \hat{\mathbf{x}}\|^2 + 2\nu(\hat{\mathbf{x}}) + 1 \quad (7.17)$$

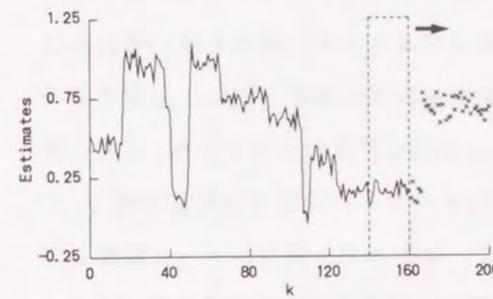
が  $K^0$  の不偏推定値になる. このことから,  $\mathbf{x}^0$  を推定するためには

$$\mathcal{E}(\mathbf{x}) = \frac{1}{2r} \|\mathbf{Y} - \hat{\mathbf{x}}\|^2 + 2\nu(\hat{\mathbf{x}}) \quad (7.18)$$

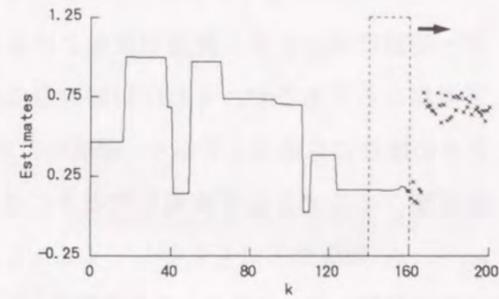
を最小にするような  $\mathbf{x}$  を選ばばよい. (7.18) 式は (7.2) 式のエネルギー関数と全く同じ形をしている. すなわち, (7.2) 式で  $\alpha = 2$  とおいたものが (7.18) 式になる. このことから, (7.2) 式の  $\alpha$  をパラメータとみなしてエネルギー関数に自由度を付加し,  $\alpha$  の値は推定性能を見て決めるということが考えられる.

### 7.3.2 推定性能の $\alpha$ への依存性

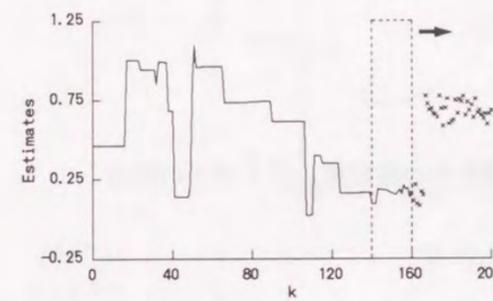
(7.2) 式のエネルギー関数の中の  $\alpha$  の値を変えるとニューラルネットによるフィルターの推定性能が変わる. ここでは  $\alpha$  の値を様々に変えたときのシミュレーション結果を示す. 図 7.1 は  $\alpha$  以外のパラメータの値は前章の図 6.5 と同じにして,  $\alpha$  の値だけを変えて (7.10) 式の移動窓型フィルタで推定した結果をプロットしたものである. まず  $\alpha = 0$  のときには観測値と推定値は同じものになる (図 7.1a). それはこのとき  $\mathbf{x} = \mathbf{Y}$  が (7.2) 式のエネルギー関数の最小値を与えることから明らかである.  $\alpha$  の値が過小であるときには余分なジャンプを検出するようになる (図 7.1b). また  $\alpha$  の値が過大であるときにはジャンプのうち検出しそこなうものも出てくる (図 7.1d). さらに,  $\alpha$  の値を極端に大きくしたときには, フィルターは全くジャンプを検出しなくなる (図 7.1e).  $\alpha$  の適切な値はこの例の場合,  $\alpha = 2.5$  の程度である (図 7.1c). この値は, Bayes 推定の立場から得られた (7.5) 式の  $\alpha = 6.52$  とも, AIC から得られた  $\alpha = 2$  とも異なっている. (7.5) 式の  $\alpha$  の値と異なっているのは, (7.5) 式を導く際の単純化で無視された様々の要因が影響しているものと考えられる. また, AIC から得られたものと異なっているのは, AIC ではジャンプの頻度を用いていないためであると考えられる.



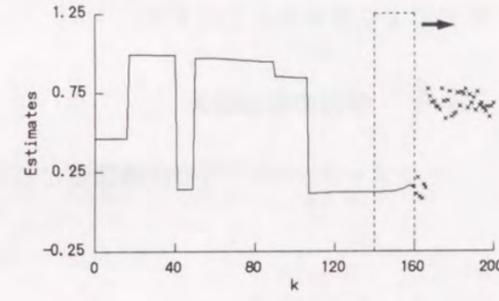
$\alpha = 0$



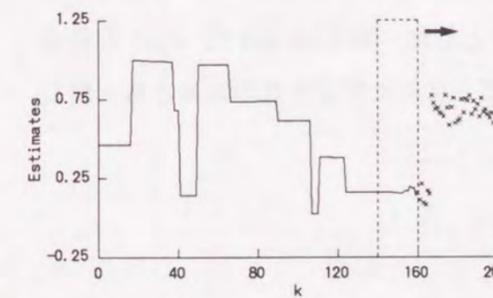
$\alpha = 6.5191$



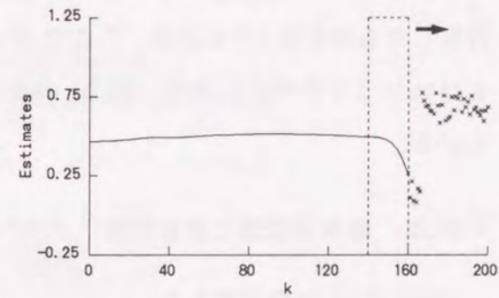
$\alpha = 1$



$\alpha = 50$



$\alpha = 2.5$



$\alpha = 200$

図 7.1 エネルギー関数の中のパラメータ  $\alpha$  の値を様々に変えたときの状態推定値

## 7.4 評価関数の学習

ニューラルネットによるマルコフジャンプ過程の推定性能は、そこで用いるエネルギー関数に依存する。推定精度を上げるために適切なエネルギー関数を用いることは重要なことであるが、それは観測雑音の大きさやジャンプの頻度と共に、想定するモデルの構造にも依存しており、理論的に求めるには煩雑な計算が必要である。また、移動窓型フィルタとして実現したときには、適切なエネルギー関数は移動窓の幅  $L$  や  $\epsilon_0, \dots, \epsilon_L$  の決め方にも依存してくる。したがって、エネルギー関数はデータのサンプルから学習によって得られるのが望ましい。ここでは、 $\alpha$  を自由に設定できるパラメータとしてエネルギー関数を (7.2) の形に仮定し、 $\alpha$  の適切な値を確率近似法を用いた学習により求めることにする。

### 7.4.1 学習の評価関数

パラメータ  $\alpha$  の学習の評価関数として、状態とその推定値との2乗平均誤差

$$J(\alpha) = E|X_k - \hat{x}_k(\alpha)|^2 \quad (7.19)$$

を用いる。推定値としては (7.10) 式の移動窓型フィルタで得られるものを用いる。

$J(\alpha)$  を  $(1/N) \sum_{k=1}^N |X_k - \hat{x}_k(\alpha)|^2$  と近似して、 $\alpha$  の値を変えながら  $J(\alpha)$  の値を計算したものを図 7.2 に示す。ここで  $N = 2000$  とした。図 7.2 において  $J(\alpha)$  の最小値は  $\alpha = 2.5$  の付近にあり、図 7.1 のサンプルごとに見た推定性能の結果とも一致している。

### 7.4.2 確率近似法による学習

$J(\alpha)$  を  $\alpha$  で微分すると

$$h(\alpha) \equiv \frac{1}{2} \frac{\partial J(\alpha)}{\partial \alpha} = E\psi_k(\alpha)(\hat{x}_k(\alpha) - X_k) \quad (7.20)$$

となる。ここで、 $\psi_k(\alpha) \equiv \partial \hat{x}_k(\alpha) / \partial \alpha$  は、(7.10) 式を  $\alpha$  で微分した

$$\begin{aligned} \tau \frac{d}{ds} \psi_k &= -\frac{1}{r} \psi_k \\ &\quad - \alpha \rho''_{\epsilon_0}(\hat{x}_k - \hat{x}_{k-1})(\psi_k - \psi_{k-1}) \\ &\quad - \rho'_{\epsilon_0}(\hat{x}_k - \hat{x}_{k-1}) \end{aligned} \quad (7.21)$$

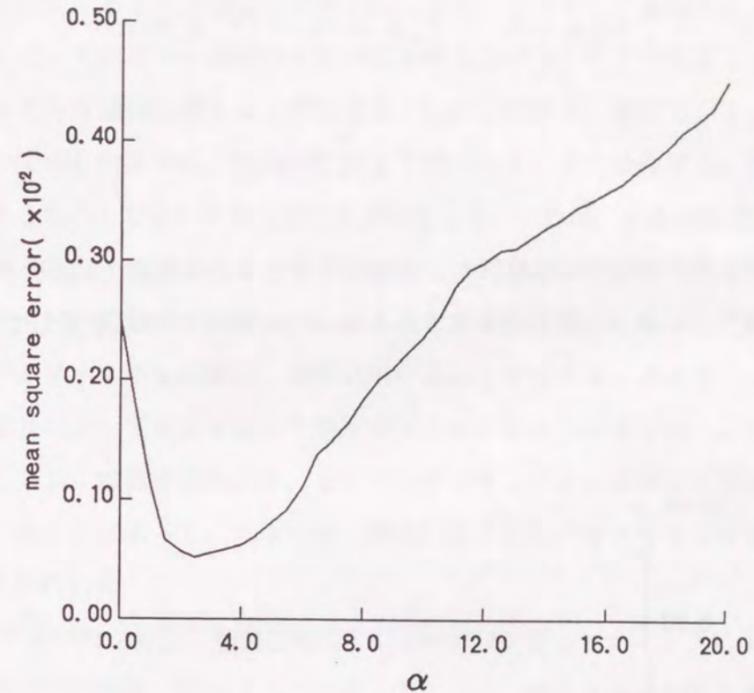


図 7.2 平均 2 乗誤差  $J(\alpha)$  vs.  $\alpha$

$$\begin{aligned} \tau \frac{d}{ds} \psi_{k-l} &= -\frac{1}{r} \psi_{k-l} \\ &\quad + \alpha [\rho''_{\epsilon_{l-1}}(\hat{x}_{k-l+1} - \hat{x}_{k-l})(\psi_{k-l+1} - \psi_{k-l}) \\ &\quad \quad - \rho''_{\epsilon_l}(\hat{x}_{k-l} - \hat{x}_{k-l-1})(\psi_{k-l} - \psi_{k-l-1})] \\ &\quad + \rho'_{\epsilon_{l-1}}(\hat{x}_{k-l+1} - \hat{x}_{k-l}) - \rho'_{\epsilon_l}(\hat{x}_{k-l} - \hat{x}_{k-l-1}) \end{aligned} \quad (7.22)$$

$l = 1, 2, \dots, L$

で計算できる。

求めたい  $\alpha$  は  $J(\alpha)$  の最小点であり、これは  $h(\alpha)$  の zero 点に等しい。これを求めるために、確率近似法の Robbins-Monro アルゴリズム [58] を用いる。このアルゴリズムは

$$\hat{\alpha}_{k+1} = \hat{\alpha}_k - g_k \psi_k(\hat{\alpha}_k)(\hat{x}_k(\hat{\alpha}_k) - X_k) \quad (7.23)$$

と書ける。ここで、利得  $g_k$  は次の条件を満たす必要がある。

$$\lim_{k \rightarrow \infty} g_k = 0, \quad \sum_{k=0}^{\infty} g_k = \infty, \quad \sum_{k=0}^{\infty} g_k^2 < \infty \quad (7.24)$$

例えば

$$g_k = \frac{a}{k_0 + k} \quad (7.25)$$

とすれば満たされる。

(7.15) 式のアプローチを用いて  $\alpha$  の推定を行なった例を図 7.3 に示す。図から明らかのように、 $\hat{\alpha}$  は  $J(\alpha)$  の最小点である  $\alpha = 2.5$  のあたりに収束しているのがわかる。

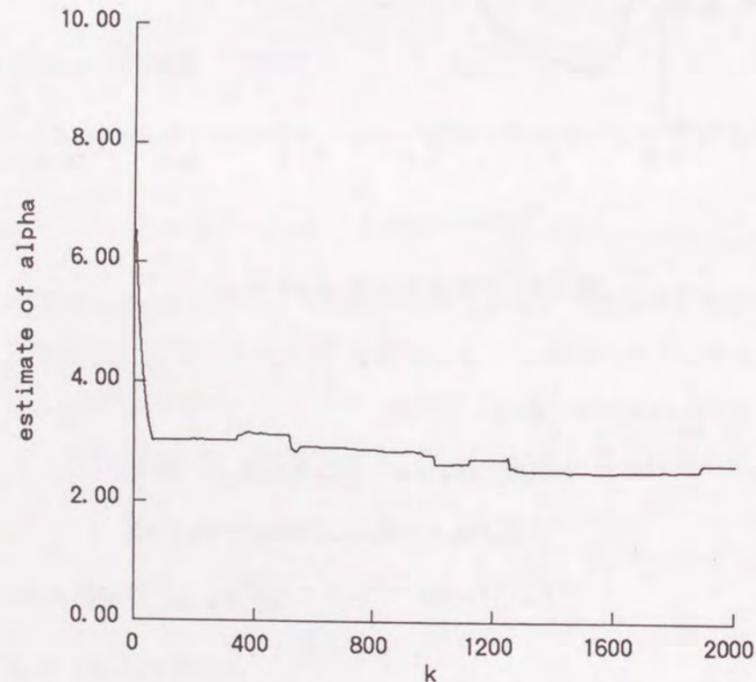


図 7.3 パラメータ  $\alpha$  の推定値

## 7.5 まとめ

本章では、ジャンプを含む過程の状態推定にニューロコンピューティングを用いる際の、エネルギー関数の学習の問題について考察した。ここではエネルギー関数の学

習を、関数の構造は仮定しておいて、その中に含まれるパラメータの値をデータのサンプルから決定することとして定式化した。マルコフジャンプ過程のような単純な過程の場合には、エネルギー関数はその中に含まれるパラメータの値まで含めて、近似的にはあるが理論的に導くことができる。しかしながら、本章でシミュレーションの例を用いて示したように、理論的に得られたパラメータの最適値と、実際に良い推定値を与えるものとはかなりな隔たりが出てくる。これは、近似の際に無視した様々な要因によるものと考えられる。さらに、ジャンプを含む過程の一般のモデルの場合には、パラメータの最適値を理論的に導くこと自体が困難になる。したがって、状態推定に用いるエネルギー関数は、実際に用いるニューラルネットとデータのサンプルを用いて学習によって決定することが重要なことになる。本章では、この学習のためのアプローチには確率近似法を、またデータのサンプルには真の状態量と観測データとを用いることによって、エネルギー関数に含まれるパラメータの値が決定できることを明らかにした。

第 6 章で述べたジャンプを含む過程のニューロコンピューティングによる推定法は、この章で示した学習法と併用することにより、今後、様々な拡張が可能になると考えられる。

## 第 8 章

### 結論

本論文では、宇宙・航空の分野における非線形推定問題として特に問題となる適応推定、ジャンプ過程の推定に対して有効な推定アルゴリズムを導くことを目的として、非線形フィルタリングの応用に関する基礎的な考察を行った。

非線形フィルタリングの基本原理は、対象のダイナミクスを事前情報としての Bayes の法則の適用である。連続時間の場合にはさらに、Kushner の方程式という非線形フィルタリングの基礎方程式が知られている。このように原理は単純であるが、これから直ちに推定アルゴリズムやその推定性能の評価が得られるわけではない。というのは、Kushner の方程式がそうであるように、非線形フィルタリングの理論から直接得られるのは条件つき分布の時間的发展であって、これから最適推定値 (= 条件つき期待値) を求めようとすると無限次元の方程式系を解かなければならなくなるからである。したがって、非線形フィルタリングの理論と実際的应用との間には相当の隔たりがあって、従来の非線形推定問題へのアプローチは必ずしも非線形フィルタリングの基本原理に基づくものではなかった。これに対して本論文では、非線形フィルタリングの基本原理から出発して、特異摂動法に基づく近似理論やニューロコンピューティングといった新たな理論や計算法を用いて推定方式を導くというアプローチをとった。そしてこのアプローチを、宇宙・航空における非線形推定問題の例である適応推定とジャンプ過程の推定へ応用した。本論文の第 3~5 章では、特異摂動法に基づく近似理論を適応推定問題へ適用し、推定性能の原理的な限界を求めるとともに、その限界へ漸近的に近づくような推定アルゴリズムを導いた。また、第 6, 7 章では、ニューロコンピューティングをジャンプ過程の推定へ適用し、高度な推定性能を与える推定法とその推定性能をさらに改善するための学習法を導いた。

本論文で明らかになったことは次の通りである。

## 第 3 章

- (1) パラメータが固定の場合の適応推定の問題に対する Kushner の方程式の解は、時間無限大の極限においてある種の漸近形をもつ。特に、パラメータの条件つき確率密度関数は

$$p_t(\theta) \sim \exp(-t\Phi(\theta))$$

という形になる (定理 3.1)。ここで、 $\Phi(\theta) \geq 0$  はパラメータの真の値  $\theta^0$  で 0 となるような関数である。このことから、パラメータの最適推定値 (= 条件つき期待値) は確率 1 で  $\theta^0$  に収束すること (定理 3.2)、パラメータの 2 次の条件つきモーメントは  $t^{-1}$  のオーダーになり、3 次以上の条件つきモーメントは  $t^{-2}$  のオーダーになる (定理 3.6) ことなどが導かれる。

- (2) 適応問題に対する非線形フィルタのモーメント方程式系は本来無限次元であるが、上記の条件つきモーメントのオーダー評価の結果を用いてスケールリングを行うと、特異摂動型の方程式系に変形することができ、さらにこの特異摂動型の方程式系から漸近的に無視できる項を落とせば、有限次元で閉じた方程式系が得られる。
- (3) この有限次元の方程式系を適応推定アルゴリズムとして用いることができる。このアルゴリズムによる推定値はその導き方により最適推定値と同じ漸近的性質をもつ。なお、ここで得られたアルゴリズムは Ljung が拡張 Kalman フィルタと勾配法とを組合わせて、発見論的に導き出したアルゴリズムを、連続時間に焼き直したものと一致する。

## 第 4 章

- (1) パラメータが変動する場合の適応推定の問題も、その変動が緩やかであるという条件のもとで、第 3 章と類似の漸近的な方法を用いて、条件つき分布の漸近的な挙動の解析やアルゴリズムの構成を行うことができる。
- (2) この場合、パラメータの条件つき確率密度関数は

$$p_\tau^\epsilon(\theta) \sim \exp\left\{-\frac{1}{\epsilon}\psi(\tau, \theta)\right\}$$

という漸近形をもつ。ここで、 $\epsilon$  はパラメータ変動の緩やかさを表わす小さなパラメータ、 $\tau = \epsilon t$  はスケール変更を行った時間である。また、 $\psi(\tau, \theta)$  はある Hamilton-Jacobi の方程式を解くことで得られる関数である。

- (3) パラメータが変動する場合も、条件つきモーメントのオーダ評価、それをを用いた非線形フィルタのモーメント方程式の特異摂動システムへの変形、漸近的に無視できる項を落とすことによる有限次元化などは、パラメータが固定の場合と全く同様に行うことができる。
- (4) 従来からも、変動する未知パラメータを推定するための手法として、拡張 Kalman フィルタを用いるものや、忘却因子を用いるものがあった。しかしながらこのうち前者は、始めから3次以上の条件つきモーメントを無視するような非線形フィルタの近似法であるため、この章のシミュレーション結果(図4.5)でも示したように、パラメータ推定値にバイアスを生じるという欠陥をはらんでいる。また後者は、忘却因子の大きさが ad hoc にしか決められないという問題があった。この章で示した推定アルゴリズムの構成法でその問題は、最適性の観点からは解決することになる。

## 第5章

- (1) 変数が遅い変数と速い変数とに分類できるような特異摂動型の確率システムでは、速い変数を無限に速くしていった極限において、遅い変数はあるマルコフ過程に近づく。遅い変数のふるまいにだけ興味がある場合には、このマルコフ過程を低次元化モデルとして用いることができる。しかしながら推定問題の場合には、この低次元化モデルに基づいて設計された低次元化推定器が、フルオーダの推定器のよい近似になっているかどうかは、必ずしも明白なことではない。この章では、係数に未知パラメータを含むような特異摂動系の適応推定問題を取りあげ、ひとつの反例を示した。すなわち、低次元化モデルに基づいて低次元化適応推定器を設計したとき、それから得られるパラメータ推定値には、速い変数を無限に速くしていった極限においてもバイアスが残る場合がある。
- (2) これは特異摂動系の線形推定問題の場合には生じなかった現象であり、その原因は、非線形フィルタの方程式の中に現われる Itô 型の確率積分が、低次元化モデルで推定を行う場合には、Stratonovich 型と類似の積分で実行されてしまうためである。
- (3) このようなバイアスが生じるか否かは、はじめの特異摂動系の構造に依存している。あらくいって、速い変数を無限に速くしていったとき、観測値に含まれる速

い変数の共分散が有限にとどまるか、ゆっくりと無限大になるような構造になっていれば、バイアスの生じないことが保証される。

## 第6章

- (1) 状態遷移にジャンプを伴うような確率過程の推定は、非線形推定問題の中でも特に非線形性が強く、線形近似や分布に正規性を仮定する近似では良い推定値が得られない。この章では、この問題に対してニューロコンピューティングによるアプローチをおこない、エネルギーを最小化するような相互結合型のニューラルネットワークが、ジャンプを含む過程の過程の推定問題に有効であることを示した。この章ではまず、マルコフジャンプ過程の状態量を雑音で汚された観測値から推定する問題を取り扱った。この問題に対する従来からのアプローチのうち最も有力なものは仮説検定に基づくものであるが、時間の経過とともにジャンプに関する仮説が指数関数的に増大して、計算を困難にするという難点がある。この難点を克服するためにここでは、求めるべき状態推定値として、ジャンプに関する仮説のうち事後確率最大となるものを採用したときの最適状態推定値を選び、その状態推定値のところで最小値をとるようにエネルギー関数を構成した。このエネルギー関数は微分可能ではなく、またきわめて多くの局所最小点をもつが、連続的に変形させることにより、ニューラルネットワークでその最小点へ到達できる。
- (2) ここで用いたニューラルネットワークは、時間軸を離散化して、それらの離散化された時間にニューロンを割り当てるものであり、それゆえ、バッチ処理が基本になるが、移動窓型フィルタを用いることにより逐次処理も可能であり、観測値が得られる都度、状態推定値を更新していくようなニューラルネットワークを構成することができる。
- (3) さらに、このニューラルネットワークを用いる推定法は位置がジャンプするような過程のみならず、速度がジャンプするような過程の推定へも拡張できる。

## 第7章

- (1) ジャンプを含む過程の推定のために第6章のニューロコンピューティングで用いたエネルギー関数は、単純なモデルについては、近似的にはあるが、理論的に導くこともできる。しかしながら、近似の際に無視した様々な要因のために、エ

エネルギー関数に含まれるパラメータの適切な値は、理論的に導かれたものと、実際に良い推定値を与えるものとは、かなりな隔たりが出てくる。また、これよりも複雑なモデルに対しては、エネルギー関数の中に含まれるパラメータの適切な値を理論的に導くこと自体が困難になる。

- (2) この章ではこのような問題を解決するために、エネルギー関数を学習によって定めるというアプローチをとった。すなわち、エネルギー関数の形は仮定しておいて、そこに含まれるパラメータの値を、データのサンプルを与えながら決めていくという方法をとった。この学習のためのアルゴリズムには確率近似法を、データのサンプルとしては真の状態量と観測データを用いる。この方法により、エネルギー関数に含まれるパラメータが時間と共に適切な値に落ちついていくことをシミュレーションで示した。

以上のように本論文では、非線形フィルタリングの基本原則を出発点として、非線形推定問題に対する高度な推定アルゴリズムを構成するための近似法や計算法についての基本的な検討を行った。今後、宇宙・航空の分野では、宇宙開発の進展や、機器の高性能化・複雑化に伴い、推定問題に対する要求性能はますます高度化する事が予想されるが、本論文の結果はこうした高精度の推定性能を与える推定アルゴリズムの設計に役立つものと考えられる。

## 謝 辞

おわりに、本研究を遂行し論文をまとめるに当たって、終始暖かい御指導と御鞭撻を賜った、大阪大学工学部土屋和雄教授に心より感謝の意を表します。また、本論文の作成にあたり数々の有益なご教示を頂いた大阪大学工学部木村英紀教授、大川善邦教授ならびに同大学基礎工学部田村坦之教授に対し、謹んで感謝の意を表します。

本研究は、三菱電機（株）通信機製作所、及び中央研究所において行ったものですが、本研究の機会を与えていただき、数多くの御配慮をいただいた、通信機製作所指揮通信情報システム部参事小林正明博士、中央研究所機械技術研究部第1グループグループマネージャ市川晃博士をはじめ関係各位に対し、謹んで感謝の意を表します。

最後に、研究を進めるにあたって三菱電機（株）中央研究所機械技術研究部の多くの方々に御支援や御助力をいただきました。ここに記して深く謝意を表します。

## 参考文献

- [1] E. Aarts and J. Korst, *Simulated annealing and Boltzmann machines*, John Wiley & Sons, 1990
- [2] D. H. Ackley et al., "A learning algorithm for Boltzmann machines," *Cognitive Science*, vol.9, no.1, pp.147-169, 1985
- [3] H. Akaike, "A new look at the statistical model identification," *IEEE Trans. Automatic Control*, vol.AC-19, no.6, pp.716-723, 1974
- [4] 赤池弘次, "知識の科学としての統計学," *科学*, vo.59 no.7, pp.446-454, 1989
- [5] B. D. O. Anderson and J. B. Moore, *Optimal filtering*, Prentice-Hall, 1979
- [6] L. Arnold, *Stochastic differential equations: theory and applications*, John Wiley & Sons, 1974
- [7] 麻生英樹, ニューラルネットワーク情報処理, 産業図書, 1988
- [8] Y. Bar-Shalom and T. E. Fortmann, *Tracking and data association*, Academic Press, 1988
- [9] V. E. Benes, "Exact finite-dimensional filters for certain diffusions with nonlinear drift," *Stochastics*, vol.5, pp.65-92, 1981
- [10] B. Z. Bobrovsky and Z. Schuss, "A singular perturbation method for the computation of the mean first passage time in a nonlinear filter," *SIAM J. Appl. MATH.*, vol.42, no.1, pp.174-187, 1982
- [11] B. Z. Bobrovsky and M. Zakai, "Asymptotic a priori estimates for the error in the nonlinear filtering problem," *IEEE Trans. Inform. Theory*, vol.IT-28, pp.371-376, 1982
- [12] R. S. Bucy, "Nonlinear filtering," *IEEE Trans. Automat. Control*, vol.AC-10, p.198, 1968
- [13] S. N. Ethier and T. G. Kurtz, *Markov Processes*. John Wiley & Sons, 1986
- [14] J. R. Fisher, "Optimal nonlinear filtering," *Advanced Control Systems* vol.5, pp.196-301, 1967
- [15] M. I. Freidlin and A. D. Wentzell, *Random perturbations of dynamical systems*, Springer-Verlag, 1984
- [16] M. Fuzisaki, G. Kallianpur and H. Kunita, "Stochastic differential equations for the nonlinear filtering problem," *Osaka J. Math.*, vol.9, pp.19-40, 1972
- [17] C. W. Gardiner, *Handbook of stochastic methods*, Springer-Verlag, 1983
- [18] S. Geman and D. Geman, "Stochastic relaxation, Gibbs distributions, and the Bayesian restoration of images," *IEEE Trans. Pattern Analysis and Machine Intelligence*, vol.PAMI-6, no.6, pp.721-741, 1984
- [19] A. Gelb, ed. *Applied optimal estimation*, MIT Press, 1974
- [20] G. C. Goodwin and K. S. Sin, *Adaptive filtering prediction and control*, Prentice-Hall, 1984
- [21] A. Haddad, "Linear filtering of singularly perturbed systems," *IEEE Trans. Automatic Control*, vol.AC-21, no.4, pp.515-519, 1976
- [22] A. Haddad and P. Kokotovic, "Stochastic control of linear singularly perturbed systems," *IEEE Trans. Automatic Control*, vol.AC-22, no.5, pp.815-821, 1977
- [23] H. Haken, *Synergetics, An introduction*, Springer, 1983
- [24] M. Hazewinkel and S. I. Marcus, "On Lie algebras and finite dimensional filtering," *Stochastics*, vol.7, pp.29-62, 1982
- [25] O. Hijab, "Asymptotic nonlinear filtering and large deviations," *Proceedings of the IFIP working conference on filtering and optimization*, Cocoyac, Mexico, Feb., 1982
- [26] J. J. Hopfield, "Neurons with graded response have collective computational properties like those of two-state neurons," *Proceedings of the National Academy of Science USA*, vol.81, pp.3088-3092, 1984
- [27] J. J. Hopfield and D. W. Tank, "Neural" Computation of decisions in optimization problems," *Biological Cybern.*, vol.52, pp.141-152, 1985
- [28] P. A. Ioannou and P. V. Kokotovic, *Adaptive systems with reduced models*, Springer-Verlag, 1983
- [29] M. R. James and J. S. Baras, "Nonlinear filtering and large deviations: a PDE-control theoretic approach," *Stochastics*, vol.23, pp.391-412, 1988
- [30] A. H. Jazwinski, "Filtering for nonlinear dynamical systems," *IEEE Trans. Automat. Contr.*, vol. AC-11, pp.765-766, 1966
- [31] A. H. Jazwinski, *Stochastic processes and filtering theory*, Academic Press, 1970

- [32] J. N. Juang and R. S. Pappa, "An eigensystem realization algorithm for modal parameter identification and model reduction," *J. Guidance, Control, and Dynamics*, vol.8, no.5, pp.620-627, 1985
- [33] G. Kallianpur, *Stochastic filtering theory*, Springer-Verlag, 1980
- [34] G. Kallianpur and C. Striebel, "Estimation of stochastic processes, arbitrary system process with additive white noise observation errors," *Ann. Math. Statist.*, vol.39, pp.785-801, 1968
- [35] R. E. Kalman, "A new approach to linear filtering and prediction problems," *Trans. ASME, Ser.D: J. Basic Eng.*, vol.82, pp.35-45, 1960
- [36] R. E. Kalman and R. S. Bucy, "New results in linear filtering and prediction theory," *Trans. ASME, Ser.D: J. Basic Eng.*, vol.83, pp.95-108, 1961
- [37] 狩野, 西村, "最適推定制御問題におけるマトリクス・リカッチ方程式," *計測と制御*, vol.20, no.6, pp.566-575, 1981
- [38] 片山徹, *応用カルマンフィルタ*, 朝倉書店, 1983
- [39] P. Katzur, B. Z. Bobrovsky and Z. Schuss, "Asymptotic analysis of the optimal filtering problem for one-dimensional diffusions measured in a low noise channel," *SIAM J. Appl. Math.*, Part I: vol.44, no.3, pp.591-604, 1984, Part II: vol.44, no.6, pp.1176-1190, 1984
- [40] H. K. Khalil, "Linear quadratic Gaussian estimation and control of singularly perturbed systems," in *Singular perturbations in systems and control*, Edited by M. D. Ardena, pp.191-214, Springer-Verlag, 1983
- [41] 喜多一, "ニューラルネットワークと組合せ最適化," *システム/制御/情報*, vol.34, no.4, pp.241-248, 1990
- [42] J. Korn, S. W. Gully and A. S. Willsky, "Application of the generalized likelihood ratio algorithm to maneuver detection and estimation," *Proc. American Control Conf.*, Arlington VA June, pp.792-798, 1982
- [43] 國田寛, *確率過程の推定*, 産業図書, 1976
- [44] H. J. Kushner and Hai Huang, "On the weak convergence of a sequence of general stochastic difference equations to a diffusion," *SIAM J. Applied Math.*, vol.40, pp.528-541, 1981
- [45] H. J. Kushner, "On the dynamical equations of conditional probability density functions, with applications to optimal stochastic control theory," *J. Math. Anal. Appl.*, vol.8, pp.332-344, 1964
- [46] H. J. Kushner, "On the differential equations satisfied by conditional probability densities of Markov processes," *SIAM J. Control*, vol.2, pp.106-119, 1964

- [47] H. J. Kushner, *Approximation and weak convergence methods for random processes, with applications to stochastic systems theory*, MIT Press, 1984
- [48] D. G. Lainiotis, "Optimal adaptive estimation: structure and parameter adaptation," *IEEE Trans. Automat. Contr.*, vol. AC-16, no.2, pp.160-167, 1971
- [49] ランダウ=リフシツ, *力学*, 東京図書, 1967
- [50] R. S. Liptser and A. N. Shiriyayev, *Statistics of random processes I: general theory, II: Applications*, Springer-Verlag, 1977
- [51] L. Ljung, "Asymptotic behavior of the extended Kalman filter as a parameter estimator for linear systems," *IEEE Trans. Automat. Contr.*, vol. AC-24, pp.36-51, 1979
- [52] L. Ljung and T. Söderström, *Theory and practice of recursive identification*, Prentice-Hall, 1984
- [53] R. K. Mehra, "On the identification of variances and adaptive Kalman filtering," *IEEE Trans. Automat. Contr.*, vol.AC-15, pp.175-184, 1970
- [54] R. K. Mehra, "Approaches to adaptive filtering," *IEEE Trans. Automat. Contr.*, vol. AC-17, no.5, pp.693-698, 1972
- [55] ミニ特集:最適化法の新展開, *計測と制御*, vol.29, no.12, 1990
- [56] 中溝高好, *信号解析とシステム同定*, コロナ社, 1988
- [57] 中溝, 秋月, 添田, "システムの統計的故障検知法," *計測と制御*, vol.18, no.6, pp.471-480, 1979
- [58] ネベルソン, ハスミンスキー, *確率近似法*, 共立, 1983
- [59] 西口, 土屋, "連続時間系における適応推定について—シミュレーションによる検討," *電子情報通信学会 確率過程とその応用時限研究会資料*, no.87-1, pp.1-8, 1987
- [60] 西口, 土屋, "連続時間の適応推定アルゴリズムについて," *計測自動制御学会論文集*, vol.23, no.9, pp.912-919, 1987
- [61] 西口, 土屋, "パラメータが緩やかに変動する場合の適応推定アルゴリズムについて," *計測自動制御学会論文集*, vol.24, no.8, pp.823-830, 1988
- [62] 西口, 土屋, "低次元化モデルに基づいた適応推定について," *計測自動制御学会論文集*, vol.25, no.8, pp.847-853, 1989
- [63] 西口, 土屋, "ニューラルネットワークを用いたマルコフジャンプ過程の状態推定法," *計測自動制御学会論文集*, vol.26, no.10, pp.1193-1200, 1990
- [64] 西口, 土屋, "ニューラルネットワークによるマルコフジャンプ過程の学習と推定," *計測自動制御学会論文集*, vol.27, no.11, pp.1296-1301, 1991

- [65] K. Nishiguchi and K. Tsuchiya, "Learning and estimation of Markov processes with jumps using a neural network," *Proc. IEEE Int. Conf. on Industrial Electronics, Control and Instrumentation*, pp.1343-1348, 1991
- [66] F. W. J. Olver, *Asymptotics and special functions*, Academic Press, 1974
- [67] 大島, 中溝, "方位角情報のみに基づく適応追尾フィルタ," 計測自動制御学会論文集, vol.23, no.8, pp.821-827, 1987
- [68] G. C. Papanicolaou, D. Stroock and S. R. S. Varadhan, "Martingale approach to some limit theorems," *Statistical Mechanics and Dynamical Systems*, Duke Turbulence Conference, M. Reed, ed., Duke Univ. Mathematics Series, 3, Durham NC, 1977
- [69] J. Picard, "Nonlinear filtering of one-dimensional diffusions in the case of a high signal-to-noise ratio," *SIAM J. Appl. Math.*, vol.46, no.6, pp.1098-1125, 1986
- [70] H. Robbins and S. Monro, "A stochastic approximation method," *Ann. Math. Statist.*, vol.22, pp.400-407, 1951
- [71] Z. Schuss, *Theory and applications of stochastic differential equations*, John Wiley & Sons, 1980
- [72] F. L. Sims, D. G. Lainiotis and D. T. Magill, "Recursive algorithms for the calculation of the adaptive Kalman filter weighting coefficients," *IEEE Trans. Automat. Contr.*, vol. AC-14, no.2, pp.215-218, 1969
- [73] A. V. Skorokhod, *Asymptotic methods in the theory of stochastic differential equations*, American Mathematical Society, 1989
- [74] D. W. Stroock, *An introduction to the theory of large deviations*, Springer-Verlag, 1984
- [75] Y. Sunahara, "An approximate method of state estimation for nonlinear dynamical systems," *Trans. ASME, J. Basic Eng.* vol.92D, pp.385-393, 1970
- [76] 砂原善文, "非線形濾波理論の展望," 計測と制御, vol.15, no.12, pp.923-934, 1976
- [77] N. Sundararajan and R. C. Montgomery, "Identification of structural dynamics systems using least-square lattice filters," *J. Guidance, Control, and Dynamics*, vol.6, no.5, pp.374-381, 1983
- [78] D. Teneketzis and N. Sandell, "Linear Regulator Design for stochastic systems by multiple time-scale method," *IEEE Trans. Automatic Control*, vol.AC-22, no.4, pp.615-621, 1977
- [79] 寺沢寛一編, 自然科学者のための数学概論応用編, 岩波書店, 1960
- [80] 土屋, 柏瀬, "大規模宇宙構造物(LSS)の制御," 計測と制御, vol.26, no.10, pp.855-862, 1987

- [81] K. Tsuchiya and K. Yamada, "Adaptive parameter estimation for a flexible structure: effects of spillover," *Proc. of AIAA Guidance and Control Conf.*, Gatlinburg, Tenn., Aug., pp.594-598, 1983
- [82] K. Tsuchiya, K. Yamada and S. Akishita, "Performance of reduced-order adaptive identifiers for oscillatory distributed parameter systems," *Proc. of AIAA Guidance and Control Conf.*, Seattle, Washington, Aug., pp.415-419, 1984
- [83] J. K. Tugnait, "Continuous-time system identification on compact parameter sets," *IEEE Trans. Inform. Theory*, vol.IT-31, pp.652-659, Sep. 1985
- [84] S. R. S. Varadhan, *Large deviations and applications*, SIAM, Philadelphia, 1984
- [85] 渡辺信三, 確率微分方程式, 産業図書, 1975
- [86] N. Wiener, *Extrapolation, interpolation and smoothing of stationary time series, with engineering applications*, MIT Press, 1949
- [87] A. S. Willsky, "A survey of design methods for failure detection in dynamic systems," *Automatica*, vol.12, pp.601-611, 1976
- [88] A. S. Willsky, J. J. Deyst and B. S. Crawford, "Two self-test methods applied to an inertial system problem," *J. Spacecraft Rockets*, vol.12, pp.434-437, 1975
- [89] A. S. Willsky and H. L. Jones, "A generalized likelihood ratio approach to the detection and estimation of jumps in linear systems," *IEEE Trans. Automatic Control*, vol.AC-21, no.1, pp.108-112, 1976
- [90] E. ワン, 情報と動的システムの確率過程, 産業図書, 1977
- [91] E. Wong and M. Zakai, "On the relation between ordinary and stochastic differential equations," *Intern. J. Engng. Sci.*, vol.3, pp.213-229, 1965
- [92] W. M. Wonham, "Some applications of stochastic differential equations to optimal nonlinear filtering," *SIAM J. Control*, vol.2, pp.347-369, 1965
- [93] P. Young, "Parameter estimation for continuous-time models — a survey," *Automatica*, Vol.17, No.1, pp.23-39, 1981

