【8】

氏名・（本籍）	小　磯　深　幸（こ いそ み ゆき）
学位の種類	理　学　博　士
学位記番号	第　6664　号
学位授与の日付	昭和 59 年 12 月 10 日
学位授与の要件	理学研究科　数学専攻 学位規則第5条第1項該当
学位論文題目	**R^3 内の極小曲面の安定性について**
論文審査委員	（主査） 教 授　柴田　敬一 （副査） 教 授　田辺　広城　教 授　村上　信吾　講 師　小松　玄

論　文　内　容　の　要　旨

Dは，平面内の有界領域であって，その境界∂Dは，有限個の区分的に滑らかな閉曲線より成るものとする。$\mathfrak{x}:\overline{D}\to\mathrm{R}^3$ は特異点のない極小曲面であって，∂Dを越えて，極小曲面として拡張可能であるとする。このとき$\mathfrak{x}$は，その境界値を固定するすべての変分に対して，面積汎函数の臨界点である。$\mathfrak{x}$が，このようなすべての変分に対して面積極小であるとき，「$\mathfrak{x}$は安定である」と定義し，安定でないとき，「不安定である」と定義する。

$\mathfrak{x}$のGauss写像を$\mathfrak{G}$で示す。このとき，$\mathfrak{x}$の安定性に関して次の結果が知られている。

定理（Barbosa–do Carmo)。　$\mathfrak{G}(\overline{D})$ の面積が 2π よりも小さいならば，$\mathfrak{x}$は安定である。

この評価は次の意味でsharpである：不安定な極小曲面であって，そのGauss写像の像の面積が 2π よりも大きく，かつ，2π にいくらでも近いようなものが存在する。

それでは，$\mathfrak{G}(\overline{D})$ の面積が丁度 2π に等しい場合には，$\mathfrak{x}$の安定性は如何様であろうか。本論文では，この問題の解答を与えている。

定理 1.　$\mathfrak{G}(\overline{D})=2\pi$ であり，$\mathfrak{G}(\overline{D})$がいかなる閉半球面とも一致しないならば，$\mathfrak{x}$は安定。

定理 2.　$\mathfrak{G}(\overline{D})$ が閉半球面Hと一致するとする。もしも $\mathfrak{G}(\partial \mathrm{D})\neq\partial \mathrm{H}$ならば，$\mathfrak{x}$は安定。

最後に，$\mathfrak{G}(\overline{D})$ が閉半球面Hと一致し，しかも，$\mathfrak{G}(\partial D)=\partial H$なる場合には，$\mathrm{R}^3$の適当な回転を施すことにより，$H$は下半球面$\mathrm{H}^-$ と一致するとしてよい。このとき，$\mathfrak{x}$のWeierstrass表示の要素函数をf, gとして，$F(w)=\sum_{\zeta\in g^{-1}(w)} g'(\zeta)/f(\zeta)$ と定義すれば，Fは単位円板D_0で正則であり，次の結果が成立する。

定理 3.　$\mathrm{Re}F''(0)\neq 0$ならば，$\mathfrak{x}$は不安定。

したがって，定理３の仮定を満足するような極小曲面は，物理的には存在しない。また，Fは，$\mathfrak{x}$のパラメーターの変換に依らずに決まる函数である。

定理１～３の証明には，固有値問題「$\overline{D}$上，$\triangle v-\lambda KWv=0$かつ，$\partial D$上，$v=0$」（$\mathfrak{x}$のGauss曲率および面積要素を，それぞれ，$K, Wd\xi d\eta$とおいた。）の最小固有値$\lambda_1$と面積汎函数の第２変分$I^{(2)}(v)$の符号，および$\mathfrak{x}$の安定性に関する次の補題が本質的である。

補題　(1) $\lambda_1>2$ならば，常に$I^{(2)}(v)>0$であり，よって$\mathfrak{x}$は安定。(2) $\lambda_1=2$ならば，常に$I^{(2)}(v)\geqq 0$であり，$I^{(2)}(v)=0$となるのは，vが最小固有空間E_1に属するとき，かつ，そのときに限る。(3) $\lambda_1<2$ならば，$I^{(2)}(v)<0$となる変分vが存在し，よって$\mathfrak{x}$は不安定。

定理１および２は，$\lambda_1>2$を示すことにより証明される。定理３は上の補題の(2)の場合にあたるので，E_1に属するvについて，面積の第３変分$I^{(3)}(v)$を計算することによって，これを証明する。

論文の審査結果の要旨

$\mathbf{R}^3$内の極小曲面の安定性をガウス写像によって判定しようとする発想はH. A. Schwarzにまで遡ることができる。即ち，彼の一連の研究から導かれる系として次の結果が広く知られている。

定理１（Schwarz）. $\mathbf{R}^3$内の極小曲面のガウス写像が１：１で，且つ像集合が半球面Hを含むならば，その極小曲面は不安定である。

1976年に至り，定理１に於ける，集合の包含関係をより弱い面積の大小関係で置き換えた，次の判定条件が発表された。

定理２(Barbosa and do Carmo). $\mathbf{R}^3$内の極小曲面のガウス像の面積が2πよりも小さければそれは安定である。

任意の正数εを与えるとき，ガウス像の面積が2πと$2\pi+\varepsilon$との間にあるような不安定極小曲面が存在することがわかるから，その意味で定理２は精確であるが，丁度2πに等しい場合については不問に付されており，未解決の問題として残されていた。小磯君はこの問題を研究して次の結果を得た。Dをパラメター領域とするとき，

定理３（小磯）. $\mathbf{R}^3$内の極小曲面$\mathfrak{x}=\mathfrak{x}(w)\,(w\in\overline{D})$のガウス像$G(\mathfrak{x})$の面積が$2\pi$に等しいとする。もし，$G(\mathfrak{x}(\overline{D}))$が半球面$H$に一致しないか，または一致しても$G$が$\overline{D}$から$H$の上への分岐被覆でなければ，$\mathfrak{x}(w)$は安定である。

この定理は面積汎函数の第２変分，それに付随するラプラシアンの固有値問題の解，及び等周不等式を用いて証明される。

次に，極小曲面$\mathfrak{x}(w)$をWeierstrass表示する際の正則及び有理型函数f, gを用いて正則函数$F(w)=\sum_{\zeta\in g^{-1}(w)} g'(\zeta)/f(\zeta)$が導入され，定理３の仮定をみたさない場合について，使い易い十分条件が得られる：

定理４（小磯）. $G(\mathfrak{x}(w))$が$\overline{D}$から下半球面の上への被覆面を定義している場合に，もし，Re｛F''

$(0)\} \fallingdotseq 0$ ならば，$x(w)$ は不安定である。

この方法によれば，不安定な極小曲面を具体的に多数，構成できるのみならず，1つの不安定極小曲面の適当な制限が安定になる限界を知ることも可能になった。

以上のように本論文は極小曲面の安定性の判定について本質的な進歩をもたらしたものであり，理学博士の学位論文として十分に価値のあるものと認められる。