

| | |
|--------------|---|
| Title | Metacyclic群の代数体上の群環について |
| Author(s) | 山田, 俊彦 |
| Citation | |
| Issue Date | |
| Text Version | none |
| URL | http://hdl.handle.net/11094/29859 |
| DOI | |
| rights | |
| Note | |

Osaka University Knowledge Archive : OUKA

<https://ir.library.osaka-u.ac.jp/>

Osaka University

| | |
|---------|--|
| 氏名・(本籍) | 山 田 俊 彦 やま だ とし ひこ |
| 学位の種類 | 理 学 博 士 |
| 学位記番号 | 第 1 5 7 5 号 |
| 学位授与の日付 | 昭 和 4 4 年 1 月 1 3 日 |
| 学位授与の要件 | 学位規則第 5 条第 2 項該当 |
| 学位論文題目 | Metacyclic 群の代数体上の群環について |
| 論文審査委員 | (主査) 教 授 永 尾 汎 (副査) 教 授 大 嶋 勝 教 授 中 岡 稔 |

論 文 内 容 の 要 旨

G を有限群, K を代数体とすると, 群環 $K[G]$ は semi-simple である:

$$K[G] = A_1 \oplus A_2 \oplus \cdots \oplus A_n.$$

各単純成分 A_i は G の K 上の既約指標 ψ_i と 1 対 1 に対応し, ψ_i は次のように絶対既約指標の和に分解する。 $\psi_i = m_i (x_1^{(i)} + \cdots + x_{r_i}^{(i)})$, ここで $x_1^{(i)}, \dots, x_{r_i}^{(i)}$ は K 上互いに代数的に共役な指標の全体で, m_i は $x_\nu^{(i)} (1 \leq \nu \leq r_i)$ の (K 上の) Schur index とよばれる。 m_i は simple algebra A_i の index でもあり, また指標 $x_\nu^{(i)}$ の絶対既約表現 $U_\nu^{(i)}$ が realize されるような体 $F \supset K(x_\nu^{(i)})$ に対する $[F : K(x_\nu^{(i)})]$ の最小値でもある。

この論文は, G が cyclic normal subgroup A の cyclic extension (即ち metacyclic), かつ A と G/A の位数が互いに素である場合に, 群環 $Q[G]$ の構造と G のすべての既約表現の Schur indices を決定したものである。他方 Schur index を求める問題は, R. Brauer によって hyper-elementary groups のそれに帰着された。hyper-elementary group とは $\langle \omega \rangle \cdot P$ (半直積), ω の位数 m , P は p 群, $(m, p) = 1$ の形の群であるが, P が cyclic の場合は我々の扱っている metacyclic group であるから, この場合の Schur index の問題は解決された。

以下, 順をおって内容を説明する。まず §2 において, G が位数 m の cyclic normal subgroup と位数 s の cyclic subgroup の半直積の場合に, すべての既約表現が誘導表現により explicit に決定され, その個数も公式により与えられる。これにより $Q[G]$ の単純成分の個数も容易に分かる。

§3 においては, §2 で得られた各既約表現 U に対して, Q 上の enveloping algebra $\text{env}_Q(U)$ (即ち U に対応する $Q[G]$ の単純成分) が cyclic algebra として explicit に書き表わされる。証明の核心は, U が部分群 H から誘導されるとき, $\text{env}_Q(U|H)$ が $\text{env}_Q(U)$ の maximal subfield

となり、 G における relation $\sigma^{-1}\omega\sigma=\omega^r$ ($G=\langle\omega,\sigma\rangle$)がそのまま $\text{env}_q(U)$ の構造に反映して、 $U(\sigma)$ が $\text{env}_q(U|H)$ の automorphism を与えることにある。代数体上の simple algebra はすべて cyclic algebra であるが、この場合は matrix algebra $\text{env}_q(U)$ が、既約表現 U に即して最も自然な形で cyclic algebra として表わされる点が面白い。

§4 は Schur index の計算である。§3 の結果によって、 K を円体、 ζ を1の中根とするとき、norm 剰余記号を $\left(\frac{\zeta, K/k}{p}\right)$ をすべての素点 $p \subset k$ について求めればよい。一般に norm 剰余記号の計算は、円体、Kummer 拡大等でも困難であるが、今の場合 ζ が1の中根であることにより、主として局所類体論を用いて求められる。

最後に Appendix において、任意の標数 $p>2$ に対して Artin 表現が p 進体 Q_p 上 rational でない例を与えた。Davenport-Hasse curves はある種の metacyclic groups を automorphism groups として持つが、その各既約表現の Schur index は本文から求められ、また素点の分岐の状態から Galois 群の ℓ 進表現が決定されて、上記の結果が得られる。

論文の審査結果の要旨

有限群 G の(絶対)既約表現 U を与えたとき、 U を実現する数体をその分解体という。 U の分解体はつねにその指標の値を有理数体 Q に添加した体 $Q(\chi)$ を含むが、分解体の $Q(\chi)$ 上の最小次数を Schur 指数という。

既約表現 U の Schur 指数を具体的に求めるということは、 G が比較的簡単な群であっても一般には非常に困難な問題で、これについてきわだった結果は殆んど知られていない。

本論文は、巡回群を巡回群で拡大したいいわゆる metacyclic な群について上記の問題を考察したもので、二つの巡回群の位数がたがいに素であるとき、metacyclic 群の既約表現と、それぞれの Schur 指数をすべて決定したものである。すなわち、 G を位数の m 巡回群 $\langle\omega\rangle$ を位数 s の巡回群 $\langle\sigma\rangle$ で拡大した群とし、 $\sigma^{-1}\omega\sigma=\omega^r$, $r \bmod m$ の位数を u , また $(m, s)=1$ とする。このとき、 G の任意の既約表現は $\langle\omega\rangle$ を含む指数 t (ただし t/u) の部分群 $H_t=\langle\omega\rangle\langle\sigma^t\rangle$ の一次の表現 $S_{\alpha,\beta}^{(t)}: \omega \rightarrow \exp \frac{2\pi i \alpha}{d_t}, \sigma^t \rightarrow \exp \frac{2\pi i \beta t}{s}$ (ただし、 $d_t=(r^t-1, m)$, $1 \leq \alpha \leq d_t$, $1 \leq \beta \leq s/t$) を適当にとれば、その誘導表現で与えられることを示し、このようにして、既約表現が三つの parameter (t, α, β) できまるという結果を得た。また、 (t, α, β) によってきまる既約表現 $U_{\alpha,\beta}^{(t)}$ の Q 上の enveloping algebra はその中心 $Q(\chi_{\alpha,\beta}^{(t)})$ 上の巡回多元環になるが、その形を具体的に与えることによって、 G の Q 上の群環の構造を完全に決定した。最後に巡回多元環の Schur 指数を求めることは、ノルム剰余記号の計算に帰着されることを用いて、数論的考察により、 $U_{\alpha,\beta}^{(t)}$ の Schur の指数をその parameter (t, α, β) を用いて計算する公式を与えた。この公引は、一般の場合は少し複雑であるが、例えば $\langle\omega\rangle$ が p 群のときには、Schur 指数が2となる例外を除いて、一般に次のようなきれいな形で与えられる。

$$\frac{t}{\left(t, \frac{p^f - 1}{v_{i,\beta}}\right)}$$

ここで, $v_{i,\beta} = \frac{s/t}{(s/t, \beta)}$, f は $p \bmod v_{i,\beta}$ の位数である。

このように, 本論文は Schur 指数の決定という困難な問題について, metacyclic 群に対する完全な解答を与えたもので, 理学博士の学位論文として価値あるものと認める。