【25】

氏名・(本籍)	山田俊彦（やまだとしひこ）
学位の種類	理学博士
学位記番号	第 1575 号
学位授与の日付	昭和44年1月13日
学位授与の要件	学位規則第5条第2項該当
学位論文題目	**Metacyclic 群の代数体上の群環について**
論文審査委員	(主査) 教授 永尾　汎 (副査) 教授 大嶋　勝　教授 中岡　稔

論文内容の要旨

G を有限群, K を代数体とするとき, 群環 $K[G]$ は semi-semple である：

$$K[G]=A_1\oplus A_2\oplus\cdots\cdots\oplus A_n.$$

各単純成分 A_i は G の K 上の既約指標 ψ_i と1対1に対応し, ψ_i は次のように絶対既約指標の和に分解する。$\psi_i=m_i(x_1^{(i)}+\cdots\cdots+x_{\gamma_i}^{(i)})$, ここで $x_1^{(i)}$, ……, $x_{\gamma_i}^{(i)}$ は K 上互いに代数的に共役な指標の全体で, m_i は $x_\nu^{(i)}(1\leqslant i\leqslant\gamma_i)$ の (K上の) Schur index とよばれる。m_i は simple algebra A_i の index でもあり, また指標 $x_\nu^{(i)}$ の絶体既約表現 $U_\nu^{(i)}$ が realize されるような体 $F\supset K(x_\nu^{(i)})$ に対する $[F:K(x_\nu^{(i)})]$ の最小値でもある。

この論文は, G が cyclic normal subgroup A の cyclic extension (即ち metacyclic), かつ A と G/A の位数が互いに素である場合に, 群環 $Q[G]$ の構造と G のすべての既約表現の Schur indices を決定したものである。他方 Schur index を求める問題は, R. Brauer によってhyperelementary groups のそれに帰着された。hyperelementary group とは $\langle\omega\rangle.P$ (半直積), ω の位数m, P は p 群, $(m,p)=1$ の形の群であるが, P が cyclic の場合は我々の扱っている metacyclic group であるから, この場合の Schur index の問題は解決された。

以下, 順をおって内容を説明する。まず §2 において, G が位数 m のcyclic normal subgroup と位数 s の cyclic subgroup の半直積の場合に, すべての既約表現が誘導表現により exphlicit に決定され, その個数も公式により与えられる。これにより $Q[G]$ の単純成分の個数も容易に分かる。

§3 においては, §2 で得られた各既約表現 U に対して, Q 上の enveloping algebra $\mathrm{env}_Q(U)$ (即ち U に対応する $Q[G]$ の単純成分) が cyclc algebra として explicit に書き表わされる。証明の核心は, U が部分群 H から誘導されるとき, $\mathrm{env}_Q(U\mid H)$ が $\mathrm{env}_Q(U)$ の maximal subfield

となり，G における relation $\sigma^{-1}\omega\sigma=\omega^{\gamma}$ ($G=\langle\omega,\sigma\rangle$)がそのまま $\mathrm{env}_{Q}(U)$ の構造に反映して，$U(\sigma)$ が $\mathrm{env}_{Q}(U\mid H)$ の automorphism を与えることにある。代数体上の simple algebra はすべて cyclic algebra であるが，この場合は matrix algebra $\mathrm{env}_{Q}(U)$ が，既約表現 U に即して最も自然な形で cyclic algebra として表わされる点が面白い。

§4 は Schur index の計算である。§3 の結果によって，K を円体，ζ を1の巾根とするとき，norm 剰余記号を $\left(\frac{\zeta,K/k}{\mathfrak{p}}\right)$ をすべての素点 $\mathfrak{p}\subset k$ について求めればよい。一般に norm 剰余記号の計算は，円体，Kummer 拡大等でも困難であるが，今の場合は ζ が1の巾根であることにより，主として局所類体論を用いて求められる。

最後に Appendix において，任意の標数 $p>2$ に対して Artin 表現が p 進体 Q_p 上 rational でない例を与えた。Davenport-Hasse curves はある種の metacyclic groups を automorphism groups として持つが，その各既約表現の Schur index は本文から求められ，また素点の分岐の状態から Galois 群の ℓ 進表現が決定されて，上記の結果が得られる。

論文の審査結果の要旨

有限群 G の（絶対）既約表現 U を与えたとき，U を実現する数体をその分解体という。U の分解体はつねにその指標の値を有理数体 Q に添加した体 $Q(\chi)$ を含むが，分解体の $Q(\chi)$ 上の最小次数を Schur 指数という。

既約表現 U の Schur 指数を具体的に求めるということは，G が比較的簡単な群であっても一般には非常に困難な問題で，これについてきわだった結果は殆んど知られていない。

本論文は，巡回群を巡回群で拡大したいわゆる metacyclic な群について上記の問題を考察したもので，二つの巡回群の位数がたがいに素であるとき，metacyclic 群の既約表現と，それぞれの Schur 指数をすべて決定したものである。すなわち，G を位数の m 巡回群$\langle\omega\rangle$を位数 s の巡回群 $\langle\sigma\rangle$ で拡大した群とし，$\sigma^{-1}\omega\sigma=\sigma^{\gamma}$, $\gamma \bmod m$ の位数を u, また $(m,s)=1$ とする。このとき，G の任意の既約表現は $\langle\omega\rangle$ を含む指数 t（ただし t/u）の部分群 $H_t=\langle\omega\rangle\langle\sigma^t\rangle$ の一次の表現 $S^{(t)}_{\alpha,\beta}:\omega\rightarrow\exp\dfrac{2\pi i\alpha}{d_t}$, $\sigma^t\rightarrow\exp\dfrac{2\pi i\beta t}{s}$（ただし，$d_t=(\gamma^t-1,m)$, $1\leq\alpha\leq d_t$, $1\leqq\beta\leqq s/t$）を適当にとれば，その誘導表現で与えられることを示し，このようにして，既約表現が三つの parameter (t,α,β) できまるという結果を得た。また，(t,α,β) によってきまる既約表現 $U^{(t)}_{\alpha,\beta}$ の Q 上の enveloping algebra はその中心 $Q(\chi^{(t)}_{\alpha,\beta})$ 上の巡回多元環になるが，その形を具体的に与えることによって，G の Q 上の群環の構造を完全に決定した。最後に巡回多元環の Schur 指数を求めることは，ノルム剰余記号の計算に帰着されることを用いて，数論的考察により，$U^{(t)}_{\alpha,\beta}$の Schur の指数をその parameter (t,α,β) を用いて計算する公式を与えた。この公引は，一般の場合は少し複雑であるが，例えば $\langle\omega\rangle$ が p 群のときには，Schur 指数が2となる例外を除いて，一般に次のようなきれいな形で与えられる。

$$\frac{t}{\left(t,\frac{p^{f}-1}{v_{t,\beta}}\right)}$$

ここで，$v_{t,\beta}=\frac{s/t}{(s/t,\beta)}$，$f$ は $p \mod v_{t,\beta}$ の位数である。

このように，本論文は Schur 指数の決定という困難な問題について，metacyclic 群に対する完全な解答を与えたもので，理学博士の学位論文として価値あるものと認める。