Title	oblique derivative境界条件をもった波動方程式に対する混合問題
Author(s)	井川, 満
Citation	大阪大学, 1970, 博士論文
Version Type	
URL	https://hdl.handle.net/11094/30331
rights	
Note	著者からインターネット公開の許諾が得られていないため、論文の要旨のみを公開しています。全文のご利用をご希望の場合は、大阪大学の博士論文についてをご参照ください。

【23】

氏名・(本籍)	井川　満（いかわ　みつる）
学位の種類	理学博士
学位記番号	第 2163 号
学位授与の日付	昭和45年12月16日
学位授与の要件	学位規則第5条第2項該当
学位論文題目	**oblique derivative 境界条件をもった波動方程式に対する混合問題**
論文審査委員	(主査) 教授 田辺 広城 (副査) 教授 池田 信行　助教授 熊ノ郷 準

論文内容の要旨

本論文に於て、波動方程式に対してobliqve derivative境界条件を課した初期-境界値混合問題を考察する。空間次元は2とし、SをR^{2}のsimpleかつcompactなC$^\infty$-classの曲線Ωをその内部、あるいは外部領域とする。

$$
(1.1)\quad \begin{cases} \Box u=\left(\dfrac{\partial^2}{\partial t^2}-\dfrac{\partial^2}{\partial x^2}-\dfrac{\partial^2}{\partial y^2}\right)u(x,y,t) \\ \quad = f(x,y,t) \qquad \text{in}\ \Omega\times(0,T) \\ Bu=\left(b_1(x,y)\dfrac{\partial}{\partial x}+b_2(x,y)\dfrac{\partial}{\partial y}\right)u(x,y,t) \\ \quad = g(x,y,t) \qquad \text{on}\ S\times(0,T) \\ u(x,y,o)=u_o(x,y) \\ \dfrac{\partial y}{\partial t}(x,y,o)=u_1(x,y) \end{cases}
$$

なる問題を考察する。すなわち、$u_o(x,y)$, $u_1(x,y)$, $f(x,y,t)$, $g(x,y,t)$が与えられた時、$u(x,y,t)$をもとめるという事を考える。ここで$bi(x,y)$ $(i=1,2)$はS上で定義された十分滑かな実数値であって

$$b_1(x,y)n_2(x,y)-b_2(x,y)n_1(x,y)\neq\quad \text{on}\ S$$

であるとする。ここで$n(x,y)=(n_1(x,y), n_2(x,y))$は$(x,y)\in S$に於けるSの単位外法線とする。

(1.2)　$b_1(x,y)n_2(x,y)-b_2(x,y)n_1(x,y)\neq 0\quad \text{on}\ S$

である時boundary operator Bはoblique derivativeであるといわれる。我々は$b_i(x,y)$に対して(1.2)の条件のもとで問題(1.1)を考察することにする。

2階双曲型方程式に対する混合問題は、Dirichlet及びNeumann条件を課した場合が主として研究されて来たが、これに関してはほぼ十分な結果が得られている（たとえばM. Ikawa〔7〕+を参照されたい）。又双曲型方程式の単独高階、あるいは1階の系に対する混合問題は、最近になって多くの研究

者によってめざましい発展を見た。しかし（1・1）は条件（1・2）のもとではそれ等の結果のいずれにも含まれないのである。この問題の困難さは主として次の2つの事実に起因しているように思われる：(i) $\triangle = \partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial y^2$ に対して境界条件Bu＝0onSを課した時には、この作用素は$L^2(\Omega)$に於ける自己共役作用としての realization をもち得ない。(ii) □に対して境界条件BはS.Agmon〔1〕によっておかれたcomplementary conditionとよばれているもの、を満さない。

我々の問題についてのこれまでの研究についてふれておくと、まず筆者によってこの問題がDirichletやNeumann条件が課された場合とちがって、通常のL^2の意味ではwell posedでない事が示された。続いてJ. Chazarain〔3〕はtに関してultra-distributionという空間に於て解の存在を示した。一方Inoue〔8〕は定数係数で領域が半空間である場合について、解のくわしい評価を示した。Inoueの方法は変数係数の方程式に、あるいは境界が曲っている場合には適用し難いものであるように思われる。またChazarainの結果はultra-distributionという広い空間を用いているために、与えるdataを滑かにすると解がなめらかになるか、すなわち十分滑かなdataに対してはclassicalな意味での解が存在するであろうかという事については何も示す事が出来ないのである。我々は本論文に於て、境界が曲っている場合にも解のL^2-estimateと存在を示す定理を示している（Theorem 1）。これは解のL^2-estimateが得られているからdataが適当な条件を満しておれば（勿論十分滑かで）classicalな意味での解が存在する事が導かれるのである。

証明の方法は、まず変数係数で領域が半空間の場合を考える。t方向にLaplace変換を行ないparameter $s \in C^+$をもつ楕円型方程式の境界値問題へと変換し、そこで、解の適当なa priori estimate を得る（Theorem 2．1）．Theorem 2．1の結果は定理1を得るための主要部分であり本論文の中心部でもある。（2．7）の評価はDirichlet及びNeumann条件を課したwave equationの場合、あるいはAgmon〔1〕，Kreiss〔9〕，Sakamoto〔10〕等で得られているestimateより一段おちたものであるが、条件（1．2）のもとではbsstの結果である。Theorenr 2．1を得るためにpseudo-differeutial operatorの理論を用いるが、従来Cauchy problem等で用いられたのよりは一段と細い取扱いをする必要がある。page14でなされるa(y, w, s)の導入、あるいはLemma2. 8で得られるψ(x, y, w, s)の構成等がそれである。すなわちpseudo-differeutial operatorによる、もとのoperatorの2次近似ともいうべきものを得る必要があるのである。

最後に解の伝播速度についての結果をのべておく。Theorem 1によってこの問題も有限伝播速度をもった現象である事がわかっているが、そのspeedのestimateは1より大になっている。実際、定数係数で半空間の場合はspeedは1より大である（Appendix）．DirichletおよびNeumannを課した問題、又L^2-well posedが示されている〔5〕でとりあつかわれている問題はCauchy problemと同じだけの伝播速度をもっているが、obliqve derivative境界条件をつけた場合はCauchy problemのそれよりも大きい伝播速度をもつのである。この事は、L^2-ill posedな問題の一つの特徴であり、obliqve derivativeを課した問題の他のものとは違った特異な面を示しているものであろう。

注　$^+$〔 〕の番号は主論文のreferencesのものを示す。

論文の審査結果の要旨

双曲型方程式の混合問題については二階の場合でも近年まで多くは知られていなかった。この種の問題を扱う際にはエネルギ不等式を導くことが常に最初の課題となる。井川君は先ず境界条件がディリクレ型、ノイマン型の場合にエネルギ不等式を証明しそれを用いて解の存在と一意性を示した。境界条件が斜めの方向の導関数を含む場合には一般には通常の意味のエネルギ不等式が成立しないことも井川君によって示された。以上は参考論文でなされたことであるが主論文においては空間変数が二つの場合のダラムベリアンで斜めの方向の導関数を含む一般の境界条件のもとで解の存在と一意性を証明した。この場合は先に述べたことにより通常の意味のエネルギ不等式が成立しないからそれより弱い形のエネルギ不等式を導いている。その際遭遇する困難はロパティンスキーの条件が満たされない箇所と二つの特性根が虚軸上で一致する箇所に現れる。この二つの困難のうち後者はクライスの方法で処理しており、独創的な工夫がなされ、これが主論文の最も主要な部分をなしている。エネルギ不等式の証明には時間変数についてラプラス変換をして得られるreduced wave equationの境界値問題の解の評価式を先ず証明するのであるが、ロパティンスキーの条件が満たされぬ点では二つの特性根が異なっていることを用いて一階の連立方程式に直した方程式系を対角化し、次に特性根が虚軸の両側に分れて存在していることから擬微分作用素に関するゴルディングの不等式を用いて求めるエネルギー不等式を導いている。解の存在・一意性及び微分可能性はこの不等式を用いて証明される。更に波動の伝播速度が有限であることも証明しているが、その速度は初期値問題の場合よりも一般には大きいことが例によって示されている。

これ等の結果は本質的に新しく優れたものであり、その証明にはパラメータを含む擬微分作用素の理論をはじめ高度の技術が多く用いられており、理学博士の学位論文として十分な価値あるものと認める。