

振幅変動を受けた周波数被変調波 に対する FM 検波器の出力 SN 比

正員 森永 規彦[†] 准員 小牧 省三^{††}
正員 滑川 敏彦[†]

Output Signal-to-Noise Ratios of FM Detector for Frequency Modulated Signal with Amplitude Fluctuation

Norihiko MORINAGA[†], Member, Shozo KOMAKI[†], Associate
and Toshihiko NAMEKAWA[†], Member

あらし システム利得変動(たとえば、機器の振動、送受信器の利得変動など)による振幅変動を受けた周波数被変調波を普通の FM 検波器で受信する場合、検波器出力の雑音やひずみが増加することが考えられるであろうし、またスレシホールドの変化も予想されるにもかかわらず、それらに対する振幅変動の影響については十分明らかにはされていない。このため現実的な問題として、振幅変動を受けた周波数被変調波に対する FM 検波器出力の諸特性を振幅変動の影響を考慮して解析することが必要となる。本論文では FM 検波器の入力として、“振幅変動を受けた周波数被変調波+ガウス雑音”を仮定し、実際の通信状況に即して、スレシホールドの近傍以上の入力 CN 比における検波器の出力特性(出力信号成分、出力雑音成分、出力 SN 比)に対する振幅変動および入力 CN 比の影響を論じている。

1. ま え が き

今日広く用いられている FM 通信系における諸受信特性、たとえば出力 SN 比、スレシホールドについては古くから解析されてきた。しかし、これらの多くは、振幅一定の純粋な FM 波*に対する FM 検波器の出力特性であり、振幅変動を伴った FM 通信系に対しては、フェージング通信路または雑音搬送波を対象とする解析があるが^{(1),(2)}、その場合には振幅変動と相関のある位相変動も有する狭帯域ガウス雑音を搬送波のモデルとして採用している。

これに対し種々の状況のもとで、雑音搬送波をモデルとしたいわゆるフェージング通信路以外での振幅変動を受ける場合も多々あり、一般には、むしろそのような場合のほうが問題にされることが多いといっても

さしつかえない。たとえば、機器の振動、送受信器の利得変動、アンテナの移動による利得変動など、特に移動通信の分野においてはこのようなシステム利得変動による振幅変動を受ける機会が非常に多い。このような振幅変動を受けた FM 波を普通の FM 検波器で受信するときには、検波器出力の雑音やひずみが増加することが考えられるであろうし、またスレシホールドの変化も予想されるにもかかわらず、それらに対する振幅変動の影響についてはわれわれの知る限りでは十分明らかにはされていない。このため現実的な問題として、振幅変動を受けた FM 波に対する FM 検波器出力の諸特性を振幅変動の影響を考慮して解析することが必要となる。

本論文では、図 1 の FM 検波器の入力として、“振幅変動を受けた FM 波+ガウス雑音”を仮定し、実際の通信状況に即してスレシホールドの近傍以上の入力 CN 比**における検波器の出力特性に対する振幅変動および入力 CN 比の影響を論じる。すなわち、FM 検波器の出力信号成分、出力雑音成分、出力 SN

[†] 大阪大学工学部通信工学教室、吹田市

Faculty of Engineering, Osaka University, Suita-shi, Japan
560

^{††} 現在 電電公社武蔵野電気通信研究所伝送研究室

論文番号：昭 47-374 [B-96]

* 以後本論文では簡便のため、周波数被変調波のことを FM 波と呼ぶことにする

** Carrier-to-noise power ratio.

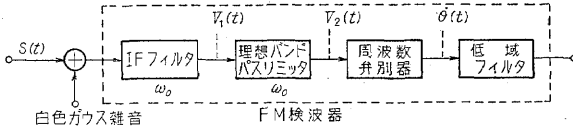


図1 FM 検波系
Fig. 1-FM detection system.

比に対する一般的解析を行ない、さらに数値例として、振幅変動がガウス形確率分布にしたがい、正弦波で FM 変調された信号に対する出力ランダム雑音、出力クリック雑音、出力 SN 比ならびにスレシホールドと入力 CN 比および振幅変動との関係を詳しく論じている。

なお本解析においては Rice の FM 検波器のモデル⁽¹⁾を用いた。このモデルによる解析は、スレシホールドの近傍以上の入力 CN 比に対してよく成立する近似解析*ではあるが、FM 出力雑音を構成している連続的なランダム雑音とインパルスのなクリック雑音とを分離して解析的に簡潔に取り扱うことができるといふ利点を有しており、さらにはまた、通常の FM 通信系では、スレシホールドの近傍以上の入力 CN 比で動作していることも考慮すれば、Rice のモデルにしたがった本解析は十分現実性に富んだ結果を与えているといえる。また文献 (2) においても Rice のモデルを用いているが、それはあくまでフェージング通信路を対象とする特殊な雑音搬送波に対する解析であり、そこにおいては振幅変動と位相ジッターとがある相関を有するので振幅変動の影響だけを明らかにすることはできず、本論文の目的とする振幅変動を受けた FM 波を対象とする場合には全くあてはまらない。

2. 一般的解析

2.1 周波数弁別器の出力成分

図1の FM 検波器の入力信号、すなわち振幅変動を受けた FM 波 $s(t)$ を次式のように定義する。

$$s(t) = A(t) \cos[\omega_0 t + \phi(t)] \\ = A_0 [1 + \mu(t)] \cos[\omega_0 t + \phi(t)] \quad (1)$$

ここで、

$A(t)$: 時間的に大きさの変動する振幅

A_0 : 搬送波の振幅

$\phi(t)$: 角度変調信号 ($\dot{\phi}(t) = d\phi(t)/dt$)

: 平均値 0 の FM 変調信号)

* Rice によれば約 3 dB 以上の入力 CN 比に対してこの解析法の妥当性が示されている。

$\mu(t)$: 振幅変動成分

ω_0 : 搬送角周波数

この被変調波 $s(t)$ と白色ガウス雑音の和が中心周波数 $f_0 (= \omega_0/2\pi)$ 、帯域幅 $2B$ の方形 IF フィルタを通過する。フィルタ出力の雑音 $n(t)$ は狭帯域表示され次式で与えられる。

$$n(t) = x(t) \cos[\omega_0 t + \lambda(t)] \\ = x_c(t) \cos \omega_0 t - x_s(t) \sin \omega_0 t \quad (2)$$

ここで $x(t)$ はレーレ分布、 $\lambda(t)$ は $(0, 2\pi)$ で一様分布、 $x_c(t)$ 、 $x_s(t)$ は互いに統計的の独立でそれぞれ平均値 0、分散 σ_n^2 のガウス分布をする。ただし、 σ_n^2 は入力狭帯域ガウス雑音電力である。したがって理想バンドパスリミッタ入力 (IF フィルタ出力) $V_1(t)$ はつぎのように表示できる。

$$V_1(t) = s(t) + n(t) \\ = R(t) \cos[\omega_0 t + \theta(t)] \quad (3)$$

ただし、

$$R(t) = [\{A(t) + x(t) \cos(\lambda(t) - \phi(t))\}^2 \\ + x^2(t) \sin^2(\lambda(t) - \phi(t))]^{1/2} \quad (4)$$

$$\theta(t) = \phi(t) + \tan^{-1} \left(\frac{x(t) \sin(\lambda(t) - \phi(t))}{A(t) + x(t) \cos(\lambda(t) - \phi(t))} \right) \quad (5)$$

理想バンドパスリミッタの出力、すなわち周波数弁別器の入力 $V_2(t)$ は、

$$V_2(t) = \cos[\omega_0 t + \theta(t)] \quad (6)$$

となり、また周波数弁別器の出力は $\dot{\theta}(t) (d\theta(t)/dt)$ で与えられる。さて入力信号の振幅 $A(t)$ は時間的に変動するが、普通、システム利得変動は十分浅い振幅変調 ($|\mu(t)| \ll 1$) とみなすことができるので、スレシホールド領域以上の入力 CN 比に対しては、ほとんどの時間において $A(t)/x(t) \gg 1$ が成立するとみてよく、このため図2の雑音ベクトルは点 P の付近を回転している。このような場合、式 (5) の $\theta(t)$ は次式

$$\theta(t) \approx \theta'(t) = \phi(t) + \psi(t) \quad (7)$$

ただし、

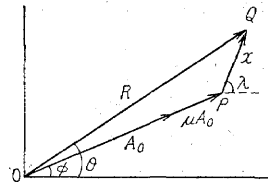


図2 リミッタ入力のベクトル表示
Fig. 2-Vector representation of a limiter input.

$$\psi(t) = x(t) \sin(\lambda(t) - \phi(t)) / A(t) \quad (8)$$

さらにまたこの場合、合成ベクトル $R(t)$ (点 Q) はときには点 P の付近をはなれて原点 0 のまわりを点 0 にきわめて接近して一回転し再び点 P の付近にもどることもあり、そのとき生じるインパルス状のクリック雑音 (文献 (3), p. 400 参照) の影響も考慮に入れると周波数弁別器の出力はつきに示すように式 (7) の微分とクリック雑音との和で与えられる。

$$\begin{aligned} \hat{\theta}(t) &= \hat{\theta}'(t) + (\nu_+(t) - \nu_-(t)) \\ &= \dot{\phi}(t) + \dot{\psi}(t) + (\nu_+(t) - \nu_-(t)) \end{aligned} \quad (9)$$

ここで第 1 項は信号出力、第 2 項はランダム雑音出力、第 3 項は正および負のインパルス状のクリック雑音出力を示す。そして $\nu_+(t)$, $\nu_-(t)$ に関しては、面積 2π をもつ互いに独立でランダムに生起するインパルス列からなるとして次式で与えられる。

$$\left. \begin{aligned} \nu_+(t) &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} 2\pi\delta(t-t_k) \\ \nu_-(t) &= \sum_{l=-\infty}^{\infty} 2\pi\delta(t-t_l) \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

ただし、 t_k および t_l はクリックの発生するランダムな時刻を示し、また $\nu_+(t)$, $\nu_-(t)$ は互い同志および $\hat{\theta}'(t)$ とともに統計的に独立なポアソンプロセスにしたがうと仮定される。したがって周波数弁別器の出力自己相関関数 $R_{\hat{\theta}}(\tau)$ は、式 (9) から、

$$\begin{aligned} R_{\hat{\theta}}(\tau) &= \langle \hat{\theta}(t) \hat{\theta}(t+\tau) \rangle \\ &= \langle \dot{\phi}(t) \dot{\phi}(t+\tau) \rangle + \langle \dot{\psi}(t) \dot{\psi}(t+\tau) \rangle \\ &\quad + \langle (\nu_+(t) - \nu_-(t)) (\nu_+(t+\tau) - \nu_-(t+\tau)) \rangle \\ &\quad + \langle \dot{\phi}(t) \dot{\psi}(t+\tau) \rangle + \langle \dot{\phi}(t+\tau) \dot{\psi}(t) \rangle \\ &\quad + \langle (\dot{\phi}(t) + \dot{\psi}(t)) (\nu_+(t+\tau) - \nu_-(t+\tau)) \rangle \\ &\quad + \langle (\dot{\phi}(t+\tau) + \dot{\psi}(t+\tau)) (\nu_+(t) - \nu_-(t)) \rangle \end{aligned} \quad (11)$$

となる。また式 (2), (8) より、

$$\begin{aligned} \psi(t) &= x(t) \sin(\lambda(t) - \phi(t)) / A(t) \\ &= [x_c(t) \sin \phi(t) - x_s(t) \cos \phi(t)] / A(t) \end{aligned} \quad (12)$$

となり、 $\langle \dot{\phi}(t) \rangle = 0$, $\langle x_c(t) \rangle = \langle x_s(t) \rangle = \langle \dot{x}_c(t) \rangle = \langle \dot{x}_s(t) \rangle = 0$ を用いると式 (11) の $R_{\hat{\theta}}(\tau)$ は次式のようになる。

$$R_{\hat{\theta}}(\tau) = R_{\dot{\phi}}(\tau) + R_{\dot{\psi}}(\tau) + R_{\nu}(\tau) \quad (13)$$

ここで、

$$\left. \begin{aligned} R_{\dot{\phi}}(\tau) &= \langle \dot{\phi}(t) \dot{\phi}(t+\tau) \rangle \\ R_{\dot{\psi}}(\tau) &= \langle \dot{\psi}(t) \dot{\psi}(t+\tau) \rangle \\ R_{\nu}(\tau) &= \langle (\nu_+(t) - \nu_-(t)) \\ &\quad \cdot (\nu_+(t+\tau) - \nu_-(t+\tau)) \rangle \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

であり、 $R_{\dot{\phi}}(\tau)$ は出力信号成分、 $R_{\dot{\psi}}(\tau)$ はランダム雑音成分、 $R_{\nu}(\tau)$ はクリック雑音成分の自己相関関数

である。そして記号 $\langle \rangle$ は信号および雑音に関する平均演算を意味する。

2.2 $R_{\nu}(\tau)$, $R_{\dot{\psi}}(\tau)$ ($R_{\phi}(\tau)$) について

入力 CN 比の比較的大きな領域、すなわちスレッシュホールド付近から上の領域では、クリック雑音は互いに独立にランダムに生起する正または負のパルス列からなるとみなされショット効果として考えられる。このため正のクリック雑音 $\nu_+(t)$, 負のクリック雑音 $\nu_-(t)$ は、平均値 $2\pi N_+$, $2\pi N_-$ をもつ互いに独立なポアソンプロセスに属すると仮定することができる。ここで N_+ , N_- は単位時間中に発生する正および負のクリック数の期待値である。したがって、ポアソンプロセスについてのよく知られた結果⁽⁴⁾ を用いると、

$$\left. \begin{aligned} \langle \nu_{\pm}(t) \rangle &= 2\pi N_{\pm} \\ \langle \nu_{\pm}(t) \nu_{\pm}(t+\tau) \rangle &= 4\pi^2 (N_{\pm}^2 + N_{\pm} \delta(\tau)) \\ \langle \nu_+(t) \nu_-(t+\tau) \rangle &= \langle \nu_+(t+\tau) \nu_-(t) \rangle \\ &= 4\pi^2 N_+ N_- \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

となる。そして式 (15) を用いると、式 (14) の $R_{\nu}(\tau)$ は次式のようになる。

$$\begin{aligned} R_{\nu}(\tau) &= 4\pi^2 (N_+ + N_-) \delta(\tau) \\ &\quad + 4\pi^2 (N_+ - N_-)^2 \end{aligned} \quad (16)$$

つぎに $R_{\dot{\psi}}(\tau)$ に関しては、 $\psi(t)$ の自己相関関数 $R_{\psi}(\tau)$ と $R_{\dot{\psi}}(\tau) = -d^2 R_{\psi}(\tau) / d\tau^2$ の関係⁽⁵⁾ にあるので、ここでは $R_{\psi}(\tau)$ を求めておくことにする。すなわち、式 (12) および $\langle x_c(t) x_s(t) \rangle = 0$ より、

$$\begin{aligned} R_{\psi}(\tau) &= \langle \psi(t) \psi(t+\tau) \rangle \\ &= \langle \{x_c(t) x_c(t+\tau) \sin \phi(t) \sin \phi(t+\tau) \\ &\quad / A(t) A(t+\tau) + \{x_s(t) x_s(t+\tau) \\ &\quad \cdot \cos \phi(t) \cos \phi(t+\tau)\} / A(t) A(t+\tau) \rangle \\ &= R_{x_c}(\tau) \langle \cos[\phi(t) - \phi(t+\tau)] \\ &\quad / A(t) A(t+\tau) \rangle \end{aligned} \quad (17)$$

$$\begin{aligned} R_{x_c}(\tau) &= \langle x_c(t) x_c(t+\tau) \rangle \\ &= \langle x_s(t) x_s(t+\tau) \rangle \end{aligned} \quad (18)$$

となる。さらに振幅 $A(t)$ と角度変調信号 $\phi(t)$ が独立なプロセスであることを仮定すれば、式 (17) の $\cos[\phi(t) - \phi(t+\tau)]$ と $1/A(t) A(t+\tau)$ の平均は分離できて、

$$R_{\psi}(\tau) = R_{x_c}(\tau) R_A(\tau) R_{c\phi}(\tau) \quad (19)$$

となる。ただし、

$$\left. \begin{aligned} R_A(\tau) &= \langle 1/A(t) A(t+\tau) \rangle \\ R_{c\phi}(\tau) &= \langle \cos[\phi(t) - \phi(t+\tau)] \rangle \end{aligned} \right\} \quad (20)$$

2.3 出力信号対雑音電力比 (出力 SN 比)

式 (13) に得られた出力自己相関関数のうち、第 1

項は出力信号成分の自己相関関数であり、第 2, 第 3 項は出力雑音成分の自己相関関数である。したがって、FM 変調信号を取り出すための低域フィルタの全出力電力 P_0 は、

$$P_0 = S_0 + N_{0\dot{\phi}} + N_{0v} \quad (21)$$

とおくことができる。ここで S_0 , $N_{0\dot{\phi}}$, N_{0v} はそれぞれ出力信号電力, 出力ランダム雑音電力, 出力クリック雑音電力を示し、しゃ断周波数 f_c の方形低域フィルタを仮定すれば、それぞれ次式で与えられる。

$$\left. \begin{aligned} S_0 &= \int_{-f_c}^{f_c} G_{\dot{\phi}}(f) df, \quad N_{0v} = \int_{-f_c}^{f_c} G_v(f) df \\ N_{0\dot{\phi}} &= \int_{-f_c}^{f_c} G_{\dot{\phi}}(f) df = \int_{-f_c}^{f_c} (2\pi f)^2 G_{\phi}(f) df \end{aligned} \right\} (22)$$

ただし、 $G_{\dot{\phi}}(f)$, $G_{\phi}(f)$, $G_v(f)$ はそれぞれ $R_{\dot{\phi}}(\tau)$, $R_{\phi}(\tau)$, $R_v(\tau)$ に対する電力スペクトル密度であり、また $G_{\dot{\phi}}(f) = (2\pi f)^2 G_{\phi}(f)$ の関係がある ($G_{\phi}(f)$ は式 (19) に対する電力スペクトル密度である)。

式 (16) のフーリエ変換を行なうと、出力クリック雑音電力スペクトル密度 $G_v(f)$ は次式のようになる。すなわち、

$$G_v(f) = 4\pi^2(N_+ + N_-) + 4\pi^2(N_+ - N_-)^2 \delta(f) \quad (23)$$

式 (22), (23) を用いると出力クリック雑音電力は

$$N_{0v} = 8\pi^2(N_+ + N_-)f_c + 4\pi^2(N_+ - N_-)^2 \quad (24)$$

となる。そして出力 SN 比をつぎのように定義する*。

$$(S/N)_0 = S_0 / (N_{0\dot{\phi}} + N_{0v}) \quad (25)$$

ただし、

$$N_{0v}' = N_{0v} - 4\pi^2(N_+ - N_-)^2 \quad (26)$$

である。

3. ガウス形確率分布にしたがう振幅変動を受けた場合の数値解析

つぎに具体例として振幅変動がガウス形確率分布にしたがう場合について解析を行なう。まず振幅 $A(t)$ の確率密度関数 $p(A)$ を次式で与える。

$$p(A) = \exp\{- (A - A_0)^2 / 2\sigma_A^2\} / \sqrt{2\pi}\sigma_A \quad (27)$$

すなわち、図 3 に示すように平均値 A_0 , 分散 σ_A^2 のガウス分布で表現されているものとする。換言すれば、正弦搬送波の振幅 A_0 にガウス分布にしたがう振幅変動 $\mu(t)$ がのっている場合に相当する。ただしここでは振幅変動による過変調はないものとし、したが

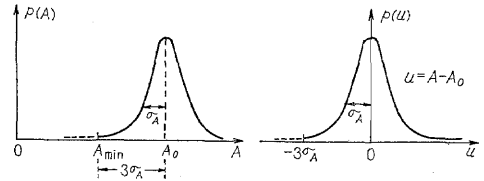


図 3 $A(t)$ および $u(t)$ の確率密度関数 $p(A)$, $p(u)$
Fig. 3—Probability density functions $p(A)$ and $p(u)$ of $A(t)$ and $u(t)$.

って $A(t)$ の最小値 A_{\min} については $A_{\min} > 0$ で、しかも $A_0 - A_{\min} = 3\sigma_A$ を満足するものとする*。このとき過変調となる確率はわずかに 0.136% にすぎず、たとえ A_{\min} を設けたとしても解析的には大きな影響を与えないものと考えられる。さらにまた振幅変動は、普通、浅い振幅変動とみなせるので、

$$\alpha \equiv \sigma_A / A_0 \ll 1 \quad (28)$$

がなりたつと仮定する。ここで $u (= \mu A_0) = A - A_0$ の変数変換 (式 (1) 参照) を行なうと、 $u(t)$ の確率密度関数 $p(u)$ は次式のようになる。

$$p(u) = \begin{cases} \exp(-u^2/2\sigma_A^2) / \sqrt{2\pi}\sigma_A; & u \geq -3\sigma_A \\ 0 & ; u < -3\sigma_A \end{cases} \quad (29)$$

また結合確率密度関数 $p(u_1, u_2)$ は次式で与えられる。

$$p(u_1, u_2) = p(A_1 = u_1 + A_0, A_2 = u_2 + A_0) \quad (30)$$

ただし、 $p(A_1, A_2)$ は $A(t)$ の結合確率密度関数である。さらに正弦波で周波数変調されているものとするれば、変調信号 $\dot{\phi}(t)$ は次式のようになる。

$$\dot{\phi}(t) = \Delta\omega \cos(\omega_m t + \varphi) \quad (31)$$

ただし、 $\Delta\omega$ は最大角周波数偏移、 ω_m は変調角周波数、 φ は $0 \sim 2\pi$ で一様分布する位相、で特にここでは最大角周波数偏移 $\Delta\omega$ を IF フィルタの帯域幅の半分 B に等しく、変調角周波数 ω_m を低域フィルタのしゃ断角周波数 $2\pi f_c$ に等しくとるものとする。

3.1 出力信号電力

式 (31) から明らかなように出力信号電力 S_0 はつぎのように与えられる。

$$S_0 = (\Delta\omega)^2 / 2 \quad (32)$$

* 式 (23) から明らかなように、式 (24) の第 2 項はクリック雑音に含まれる直流成分の電力を表わしている。しかし普通、このような直流成分は出力雑音とはみずに動揺成分のみを考えるので、ここでも N_{0v} から直流成分を引いたものを N_{0v}' として、これを出力雑音電力に合めている。

* ガウス分布を仮定する限り、厳密にはその平均値を中心に $\pm\infty$ の変動幅をもっているわけであるが、実際問題としては無限大の変動幅をもつ場合はきわめてわずかで、たとえば平均値を中心に $\pm 3\sigma$ (σ : 標準偏差) の変動幅内に入る確率は約 99.73% にもなり、 3σ の変動幅をこえる確率は、両側合わせてもわずかに 0.27% (片側では 0.136%) にしかならない。したがって本論文のように、平均的な量 (SN 比) でシステムの評価を行なうような場合には、図 3 に示した仮定を設けても解析的には大きな影響は与えず、しばしば変動幅の目安として用いられる (たとえば文献 (6), p. 392 参照)。

3.2 出力ランダム雑音電力

式 (20) の $A(t)$ に対する平均演算は、結合確率密度関数が式 (30) のように表現できるので次式のような $u(t)$ の平均演算に変換できる。

$$R_A(\tau) = \langle 1/(u_1 + A_0)(u_2 + A_0) \rangle \\ = A_0^{-2} \langle 1/(1 + u_1/A_0)(1 + u_2/A_0) \rangle \quad (33)$$

ここで式 (28) で仮定したように振幅変動幅 σ_A がその平均値 A_0 に比べて十分小さく ($\alpha \ll 1$)、しかも u_1, u_2 の最大値もせいぜい $3\sigma_A$ 程度であることを考え合わせると式 (33) は次式で近似できる。

$$R_A(\tau) \approx A_0^{-2} \langle 1 - u_1/A_0 - u_2/A_0 \rangle \\ = A_0^{-2} \int_{-3\sigma_A}^{\infty} (1 - 2u/A_0) p(u) du \\ = A_0^{-2} (0.9986 + 0.0124 \alpha) \quad (34)$$

また式 (20), (31) より,

$$R_{c\phi}(\tau) = \langle \cos[\beta \sin(\omega_m t + \varphi) - \beta \sin(\omega_m(t + \tau) + \varphi)] \rangle \\ = J_0^2(\beta) + 2 \sum_{n=1}^{\infty} J_n^2(\beta) \cos n \omega_m \tau \quad (35)$$

ただし $\beta = 4\omega/\omega_m$ は変調指数である。式 (34), (35) のフーリエ変換 $G_A(f)$, $G_{c\phi}(f)$ はそれぞれデルタ関数で表現され、また方形 IF フィルタを用いているので $R_{xc}(\tau)$ に対する電力スペクトル密度 $G_{xc}(f)$ は,

$$G_{xc}(f) = \begin{cases} \sigma_n^2/2\beta f_m; & |f| \leq \beta f_m \\ 0 & ; |f| > \beta f_m \end{cases} \quad (36)$$

である。したがって式 (19) から

$$G_{\phi}(f) = G_A(f) \otimes G_{c\phi}(f) \otimes G_{xc}(f) \\ = (\sigma_n^2/A_0^2) (0.9986 + 0.0124 \alpha) \\ \cdot \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n^2(\beta); |f - n f_m| \leq \beta f_m \quad (37)$$

ただし \otimes はたたみ込み積分を示す。式 (22) に式 (37) を代入し、 $f_c = f_m$ とおけば、出力ランダム雑音電力 N_{ϕ} は,

$$N_{\phi} = (2\pi f_m)^2 C (0.9986 + 0.0124 \alpha) / 6 \rho_0 \beta \quad (38)$$

となる。ただし ρ_0 は入力 CN 比で,

$$\rho_0 = A_0^2 / 2\sigma_n^2 \quad (39)$$

また

$$C = J_0^2(\beta) + 2 \sum_{n=1}^{\beta-1} J_n^2(\beta) + J_{\beta}^2(\beta) \quad (40)$$

であり、たとえば $\beta=5$ に対して $C=0.89$ の値をとる。最大周波数偏移 $4\omega/2\pi=75$ kHz, 変調指数 $\beta=5$ に対する出力ランダム雑音電力 N_{ϕ} を図 4, 図 5 に示す。式 (38), (28) より明らかなように、出力ランダム雑音電力 N_{ϕ} に対する振幅変動の影響は非常に

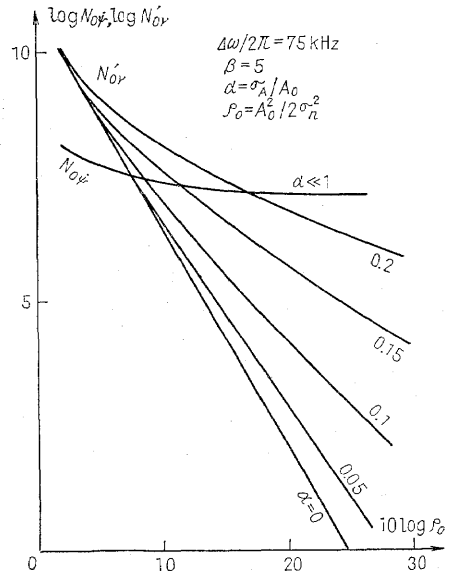


図 4 出力ランダム雑音電力 N_{ϕ} と出力クリック雑音電力 N_{ϕ}'
Fig. 4—Output random noise power N_{ϕ} and output click noise power N_{ϕ}' .

小さく、その値は振幅変動のない場合の値にほぼ等しい。このように出力ランダム雑音に対する振幅変動成分の影響が少ない原因としては、すなわち、信号ベクトルと同相の浅い AM 変調 (振幅変動成分) が存在しても、それが合成波の位相に与える影響 (AM 変調による出力ランダム雑音の増加) は、入力雑音 $n(t)$ の信号と直交した成分 $x_s(t)$ の与える影響 (AM 変調のかかっていない場合の出力ランダム雑音) より十分に小さいことによるものである (図 2 参照)。

3.3 出力クリック雑音電力

クリックによる雑音成分は、式 (16), (23) で示されているように、直流成分と電力スペクトル一定の白色雑音成分 (インパルス成分) とからなりたっている。ただし本論文では、このうち、直流成分の電力は出力雑音電力には含まないことにして、出力クリック雑音電力として、式 (24) の N_{ϕ} の代わりに式 (26) の N_{ϕ}' を用いている。しかし一般に、正弦変調信号のように $\langle \dot{\phi}(t) \rangle = 0$ の周波数変調を受けている場合には、単位時間に発生する正のクリック数の期待値 N_+ と負のクリック数の期待値 N_- とは等しくなるので、この例の場合、クリック雑音の直流成分は 0 になり、式 (24) は,

$$N_{\phi} = 16 \pi^2 N_+ f_c = N_{\phi}' \quad (41)$$

となって、結局 $N_{o\psi}$ と $N_{o\psi}'$ とは等しくなる。

さてクリック数の期待値 N_+ , N_- は、Rice の解析法にしたがえばつぎのように得られる (文献 (3), p. 405 参照)。

$$N_{\pm} = N_{\pm} = \int_{A_0 - 3\sigma_A}^{\infty} dA p(A) [(d\omega/2\pi)\pi^{-1} \exp(-\rho(t)) + (b/\sqrt{4\pi})\rho^{-1/2}(t)I_0(a\rho(t))] \cdot \exp(-(1+a)\rho(t)) \quad (42)$$

ここで b は IF フィルタの実効帯域幅で、帯域幅 $2B$ の方形フィルタの場合 $b=B/\sqrt{3}$ であり、また a , $\rho(t)$ はそれぞれ次式で与えられる。

$$\left. \begin{aligned} \rho(t) &= A^2(t)/2\sigma_n^2 \\ a &= \langle \phi^2(t) \rangle / (2\pi b)^2 = 1.5 \end{aligned} \right\} \quad (43)$$

さらに $A(t)$ はランダムな時間関数であるから、式 (42) において $A(t)$ に関する平均演算が残っている。式 (42) を $u=A-A_0$ で変数変換すると、

$$N_{\pm} = N_{\pm} = (d\omega/2\pi)\pi^{-1} \int_{-3\sigma_A}^{\infty} \exp(-(u+A_0)^2/2\sigma_n^2) \cdot (\sqrt{2\pi}\sigma_A)^{-1} \exp(-u^2/2\sigma_A^2) du + (b/\sqrt{4\pi}) \int_{-3\sigma_A}^{\infty} \{\sqrt{\rho_0}(1+u/A_0)\}^{-1} \cdot \exp\{-(1+a)\rho_0(1+u/A_0)^2\} \cdot I_0(a\rho_0(1+u/A_0)^2) (\sqrt{2\pi}\sigma_A)^{-1} \cdot \exp(-u^2/2\sigma_A^2) du \quad (44)$$

ここで式 (28) の仮定を用いて計算すると、式 (44) は近似的に次式のようになる (付録参照)。

$$N_{\pm} = N_{\pm} = (d\omega/2\pi)\pi^{-1} \exp\{-\rho_0/(1+2\rho_0\alpha^2)\} \cdot (2\sqrt{1+2\rho_0\alpha^2})^{-1} \operatorname{erfc}[\sqrt{(1+2\rho_0\alpha^2)}/2] \cdot \{-3+2\rho_0\alpha/(1+2\rho_0\alpha^2)\} + (b/\sqrt{4\pi}) \exp\{-\rho_0/(1+2\rho_0\alpha^2)\} \cdot \rho_0^{-1/2} \exp(-a\rho_0) I_0(a\rho_0) \{1+K(a\rho_0) \cdot 4\rho_0\alpha^2/(1+2\rho_0\alpha^2)\} (2\sqrt{1+2\rho_0\alpha^2})^{-1} \cdot \operatorname{erfc}[\sqrt{(1+2\rho_0\alpha^2)}/2] \{-3+2\rho_0\alpha/(1+2\rho_0\alpha^2)\} - \sqrt{2/\pi} (\alpha/(1+2\rho_0\alpha^2)) K(a\rho_0) \cdot \exp[-\{(1+2\rho_0\alpha^2)/2\} \{-3+2\rho_0\alpha/(1+2\rho_0\alpha^2)\}^2] \} \quad (45)$$

ただし、 $I_0(\)$ は変形ベッセル関数、 $K(\)$ は式 (A・8) に与えられている。したがって出力クリック雑音電力 $N_{o\psi}'$ は、式 (41), (45) より計算される。最大周波数偏移 $d\omega/2\pi=75\text{kHz}$ 、変調指数 $\beta=5$ に対する $N_{o\psi}'$ を、振幅変動率 $\alpha=\sigma_A/A_0$ をパラメータとして図 4 に示す。図 4 より明らかなように $N_{o\psi}'$ は入力 CN 比 ρ_0 および振幅変動率 α の影響をかなり受

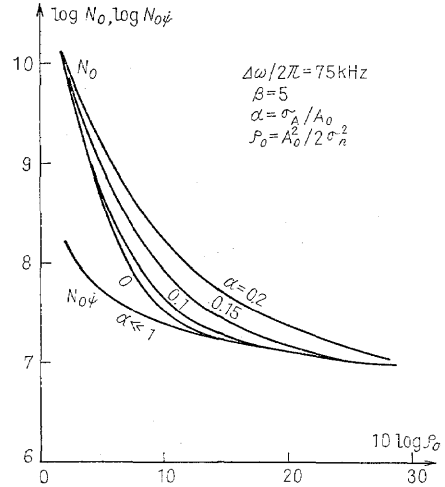


図 5 出力ランダム雑音電力 $N_{o\psi}$ と全出力雑音電力 N_o
Fig. 5—Output random noise power $N_{o\psi}$ and total output noise power N_o .

けることがわかる。入力 CN 比一定のとき出力クリック雑音電力は振幅変動のない場合 ($\alpha=0$) より振幅変動のある場合に必ず大きくなり、影響のほとんどない出力ランダム雑音電力の場合とは相当異なった様子を呈する。これはすなわち、クリック雑音の発生する過程はランダム雑音の場合とは異なって、信号と同相の入力雑音成分 $x_c(t)$ に強く依存しているため、それとまた同相の振幅変動成分の影響も顕著となってくるわけである。

3.4 全出力雑音電力

$d\omega/2\pi=75\text{kHz}$, $\beta=5$ に対して、入力 CN 比と全出力雑音電力 $N_o(=N_{o\psi}+N_{o\psi}')$ との関係 α をパラメータにして図 5 に示す。入力 CN 比の十分大きい場合は図 4 から明らかなように、クリック雑音に比べランダム雑音のほうが支配的である。さらに 3.2 で述べたように、振幅変動のランダム雑音に対する影響はきわめて小さいため、全雑音電力に対する振幅変動の影響もきわめて小さくなる。入力 CN 比の比較的小さい場合は、クリック雑音がランダム雑音と同等またはそれ以上になる。そして 3.2, 3.3 で述べたようにランダム雑音に対する振幅変動の影響はきわめて小さく、また入力 CN 比の比較的小さい領域ではクリック雑音に対しても振幅変動の影響は小さいので、この場合も全雑音電力 N_o に対する振幅変動の影響は小さい。これに対して、入力 CN 比が 10 dB を中心とするいわゆるスレシホールド付近にある場合には、ランダム雑音およびクリック雑音ともに同程度の大きさに

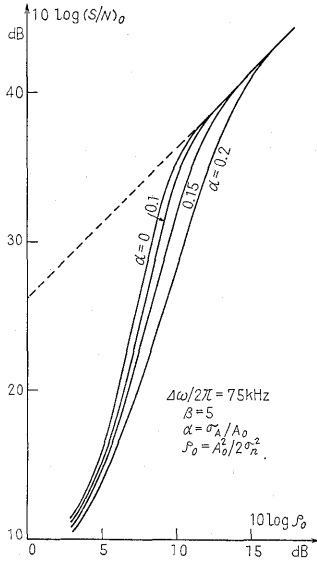


図6 出力信号対雑音電力比
Fig. 6—Output signal-to-noise power ratios.

なるため、主としてクリック雑音に対する振幅変動の影響がそのまま全出力雑音電力にも現われて、振幅変動の影響が顕著となる。

3.5 出力 SN 比

式 (32), (38), (41), (45) を用いて式 (25) にしたがえば出力 SN 比を求めることができる。 $\Delta\omega/2\pi=75$ kHz, $\beta=5$ に対して ρ_0 と $(S/N)_o$ の関係を α をパラメータにして図6に示す。この出力 SN 比の特性に対する振幅変動の影響については、3.2~3.4 において行ってきた説明内容から容易に理解することができる。そして振幅変動率 α が増加するとスレッシュホールド点は右に移動し不利になることも明らかである。ただし、 α が大きいほどスレッシュホールド付近での出力 SN 比の変化は急峻でなくなりスレッシュホールドの位置がわかりにくくなる。

4. むすび

振幅変動を受けた FM 波に対する FM 検波器の応答に関してはこれまで明らかにされていなかったが、本論文は Rice の解析法を用いることによって、出力 SN 比に対する振幅変動の影響を一般的ならびに数値的に明らかにした。すなわち、FM 出力雑音をランダム雑音成分とクリック雑音成分とに分離して解析を行ない、それぞれの雑音成分に対する振幅変動の影響を定量かつ定性的に解明することにより、全体的な出力 SN 比におよぼす影響が明らかにされている。そして

その一般式は式 (25) に、またその数値結果は図6にまとめて示されている。その結果、FM 検波器の出力に対する振幅変動の影響は、入力 CN 比が 10 dB を中心とするいわゆるスレッシュホールド領域において顕著に現われることが判明した。なお本解析結果のうち振幅変動率 $\alpha=0$ の場合は、振幅一定の FM 波に対する Rice の結果と一致するものである。

文 献

- (1) H.E. Rowe: "Frequency or phase modulation with a noise carrier", Proc. IEEE, **52**, 4, p. 396 (April 1964).
- (2) D.L. Schilling, E.A. Nelson and K.K. Clarke, "Discriminator response to an FM signal in a fading channel", IEEE Trans., **COM-15**, p. 252 (April 1967).
- (3) S.O. Rice: "Noise in FM receivers" in Time Series Analysis, John Wiley and Sons, Inc. (1963).
- (4) W.K. Pratt: "Laser communication systems", John Wiley and Sons, Inc., p. 255 (1969).
- (5) D. Middleton: "Introduction to statistical communication theory", McGraw-Hill Book Co. Inc., p. 153 (1960).
- (6) H.E. Rowe: "Amplitude modulation with a noise carrier", Proc. IEEE, **52**, 4, p. 389 (April 1964).

付 録 N_+ , N_- の導出

式 (44) の第1項を I_1 , 第2項を I_2 とおくと、

$$N_+ = N_- = I_1 + I_2 \quad (\text{A}\cdot\text{1})$$

まず I_1 はつぎのように計算されて誤差関数となる。

$$\begin{aligned} I_1 &= \frac{\Delta\omega}{2\pi} \frac{1}{\pi} \exp\left\{-\frac{A_0^2}{2(\sigma_n^2 + \sigma_A^2)}\right\} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_A} \\ &\cdot \int_{-3\sigma_A}^{\infty} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sigma_n^2} + \frac{1}{\sigma_A^2}\right)u\right] \\ &\cdot \left\{u + \frac{A_0/\sigma_n^2}{1/\sigma_n^2 + 1/\sigma_A^2}\right\}^2 du \\ &= \frac{\Delta\omega}{2\pi} \frac{1}{\pi} \exp\left\{-\frac{A_0^2}{2(\sigma_n^2 + \sigma_A^2)}\right\} \frac{1}{\sqrt{1 + \sigma_A^2/\sigma_n^2}} \\ &\cdot \frac{1}{2} \operatorname{erfc}\left[\sqrt{\frac{1}{2}\left(1 + \frac{\sigma_A^2}{\sigma_n^2}\right)}\left\{-3 + \frac{\sigma_A A_0}{\sigma_n^2 + \sigma_A^2}\right\}\right] \end{aligned} \quad (\text{A}\cdot\text{2})$$

Z が十分大きい場合、変形ベッセル関数 $I_0(Z)$ は次式のように漸近展開することができる ($Z \gg 1$)。

$$I_0(Z) = \frac{e^Z}{\sqrt{2\pi Z}} \left(1 + \frac{1}{8Z} + \frac{9}{128Z^2} + \dots\right) \quad (\text{A}\cdot\text{3})$$

本解析では $\rho(t) \gg 1$ を仮定しているのので、式 (44) の変形ベッセル関数に式 (A.3) を適用でき、 I_2 は次式のようになる。

$$I_2 = \frac{b}{\sqrt{4\pi}} \int_{-3\sigma_A}^{\infty} \frac{\exp\{-\rho_0(1+u/A_0)^2\}}{\sqrt{\rho_0} \sqrt{2\pi} a \rho_0 (1+u/A_0)^2} \cdot \left\{ 1 + \frac{1}{8a\rho_0(1+u/A_0)^2} + \frac{9}{128a^2\rho_0^2(1+u/A_0)^4} + \dots \right\} \exp\left(-\frac{u^2}{2\sigma_A^2}\right) / \sqrt{2\pi}\sigma_A \quad (\text{A}\cdot 4)$$

さらに式 (28) の仮定を考慮すればつぎの近似式を用いることができる。

$$(1+u/A_0)^m \approx 1 - m(u/A_0) \quad (\text{A}\cdot 5)$$

式 (A.4) に式 (A.5) を用いると、

$$I_2 \approx \frac{b}{\sqrt{4\pi}} \frac{\exp\{-A_0^2/2(\sigma_n^2 + \sigma_A^2)\}}{\sqrt{\rho_0} \sqrt{2\pi} a \rho_0} \cdot \int_{-3\sigma_A}^{\infty} \left\{ \left(1 + \frac{1}{8a\rho_0} + \frac{9}{128a^2\rho_0^2} + \dots \right) - 2\frac{u}{A_0} \left(1 + \frac{2}{8a\rho_0} + \frac{3\cdot 9}{128a^2\rho_0^2} + \dots \right) \right\} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_A} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sigma_n^2} + \frac{1}{\sigma_A^2}\right)\right] \cdot \left\{ u + \frac{A_0/\sigma_n^2}{1/\sigma_n^2 + 1/\sigma_A^2} \right\}^2 du \quad (\text{A}\cdot 6)$$

となる。そして式 (A.6) の積分結果に再び式 (A.3)

の関係を用いると I_2 は次式となる。

$$I_2 \approx \frac{b}{\sqrt{4\pi}} \exp\{-A_0^2/2(\sigma_n^2 + \sigma_A^2)\} \frac{1}{\sqrt{\rho_0}} \exp(-a\rho_0) \cdot I_0(a\rho_0) \left\{ \left(1 + 2K(a\rho_0) \frac{\sigma_A^2}{\sigma_n^2} \frac{1}{1 + \sigma_A^2/\sigma_n^2} \right) \cdot \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{1 + \sigma_A^2/\sigma_n^2}} \operatorname{erfc}\left[\sqrt{\frac{1}{2}}(1 + \sigma_A^2/\sigma_n^2)\right] \cdot \left(-3 + \frac{\sigma_A A_0}{\sigma_n^2 + \sigma_A^2} \right) \right\} - \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}} \frac{\sigma_A}{A_0} \frac{1}{1 + \sigma_A^2/\sigma_n^2} \cdot K(a\rho_0) \exp\left[-\frac{1}{2}(1 + \sigma_A^2/\sigma_n^2)\right] \cdot \left(-3 + \frac{\sigma_A A_0}{\sigma_n^2 + \sigma_A^2} \right)^2 \quad (\text{A}\cdot 7)$$

ただし、

$$K(a\rho_0) = \frac{[1 + 2/8 a \rho_0 + 3 \cdot 9/128 a^2 \rho_0^2 + \dots]}{[1 + 1/8 a \rho_0 + 9/128 a^2 \rho_0^2 + \dots]} \quad (\text{A}\cdot 8)$$

式 (A.2), (A.7) における A_0, σ_A, σ_n の代わりに、式 (28), (39) の ρ_0, α を用いれば式 (45) が得られる。

(昭和 47 年 3 月 3 日受付)