【35】

氏名・(本籍)	志磨裕彦（しまひろひこ）
学位の種類	理学博士
学位記番号	第 2958 号
学位授与の日付	昭和48年12月15日
学位授与の要件	学位規則第5条第2項該当
学位論文題目	**可解リー群が作用している等質ケーラー多様体について**
論文審査委員	(主査) 教授 村上 信吾 (副査) 教授 中岡 稔 教授 尾関 英樹

論文内容の要旨

Mを連結等質ケーラー多様体とする。即ちM上に連結リー群Gが正則等長変換群として推移的に作用しているものとする。MのG-不変ケーラー計量より定まるG-不変体積要素vがある局所座標$\{z_1, z_2, \cdots z_n\}$によって $v = i^n F(z, \bar{z})\, dz_1 \wedge \cdots \wedge dz_n \wedge d\bar{z}_1 \wedge \cdots \wedge d\bar{z}_n$ と表わされている時、

$h = \sum_{i,j} \dfrac{\partial^2 \log F(z, \bar{z})}{\partial z_i \partial \bar{z}_j} dz_i\, d\bar{z}_j$ とすればhは局所座標のとり方によらないで定まるM上のG-不変エルミット形式である。これをMの標準エルミット形式と呼ぶ。この標準エルミット形式と等質ケーラー多様体Mの構造とのあいだには興味深い密接な関係がある。リー群Gが半単純、コンパクト、簡約可能、ユニモジュラー等の場合、その等質ケーラー多様体Mの構造はA. Borel, J. L. Koszul, 松島与三、埴野順一氏等によって研究され明らかにされている。Vinberg, Gindikin, Pjatetskii-Šapiroは等質ケーラー多様体の研究をケーラー代数というある種の条件をみたすリー代数の研究に帰着させその理論を展開している。G/Kを等質ケーラー多様体、$\mathfrak{g}$をGのリー代数、kをKに対応する$\mathfrak{g}$の部分代数とする。このときG/KのG-不変複素構造テンソルとケーラー形式に対してそれぞれ$\mathfrak{g}$の線型変換Jと$\mathfrak{g}$上の歪対称双線型形式ρで次の条件をみたすものが存在する。

K. 1. $Jk \subset k, \quad J^2X \equiv -X \mod k.$

K. 2. $[JX, W] \equiv J[X, W] \mod k, \quad X \in \mathfrak{g}, \quad W \in \boldsymbol{k}.$

K. 3. $[JX, JY] \equiv J[JX, Y] + J[X, JY] + [X, Y] \mod \boldsymbol{k}.$

K. 4. $\rho(X, W) = 0, \quad X \in \mathfrak{g}, \quad W \in \boldsymbol{k}.$

K. 5. $\rho(JX, JY) = \rho(X, Y).$

K. 6. $\rho(JX, X) > 0, \quad X \in \boldsymbol{k}$

K. 7. $\rho([X, Y], Z) + \rho([Y, Z], X) + \rho([Z, X], Y) = 0$

この$(\mathfrak{g}, \boldsymbol{k}, J, \rho)$をG/Kのケーラー代数という。

Ψを$\Psi(X)=\mathrm{Tr}\,\mathfrak{g}/\mathfrak{k}(\mathrm{ad}(JX)-J\mathrm{ad}(X))$、$X\in\mathfrak{g}$，によって定義される$\mathfrak{g}$上の一次形式とする。この時$\eta(X, Y)=\frac{1}{2}\Psi([JX, Y])$，$X, Y\in\mathfrak{g}$，とおけば$\eta$はMの標準エルミット形式hに対応する$\mathfrak{g}$上の 双線型形式である。

この論文ではケーラー代数の理論を用いて次の定理を証明するのが主たる目標である。

定理、Mを連結単連結な等質ケーラー多様体でその標準エルミット形式hが非退化とする。もしMに可解リー群が単純推移的に作用しているならばhは正定符号であり従ってMは等質有界領域と正則同型である。

$I^{\circ}(M)$をMの等長変換全体の群の単位元を含む連結成分、$\hat{G}$をhを不変にするMの正則変換全体の群の単位元を含む連結成分とする。標準エルミット形式hが非退化ならば$I^{\circ}(M)\subset\hat{G}$で特にMが等質有界領域のとき$I^{\circ}(M)=\hat{G}$であることが知られている。上の定理と埴野、Vinbergの結果より次の2つの系が得られる。

系1．$M=G/K$を等質ケーラー多様体でその標準エルミット形式が非退化とする。もし$I^{\circ}(M)=\hat{G}$でその中心が有限、且つKがGの極大コンパクト部分群ならばMは等質有界領域と正則同型である。

系2．Mを等質ケーラー多様体でその標準エルミット形式が非退化とする。もし$I^{\circ}(M)=\hat{G}$でその中心が有限、且つMの点が共役点を持たないならばMは等質有界領域と正則同型である。

上記定理は次の命題から得られる。

命題．($\mathfrak{g}$, $\{0\}$, J, ρ)をケーラー代数、$\mathfrak{g}$を可解リー代数でηが$\mathfrak{g}$上で非退化とする。このとき$\mathfrak{g}$は次のように直和分解する。

(0)　$\mathfrak{g}=\sum_{k=1}^{m}(\{JE_k\}+\{E_k\}+P_k)$

(1)　$\mathfrak{g}_k=\{JE_k\}+\{E_k\}+P_k$とおけば$\mathfrak{g}_k$はJ-不変部分代数で$JP_k\subset P_k$，$[JE_k, E_k]=E_k$，$[JE_k, P_k]\subset P_k$で$\mathrm{ad}(JE_k)$の$P_k$上の固有値の実部は$\frac{1}{2}$であり、更に$[E_k, P_k]=\{0\}$，$[P_k, P_k]\subset\{E_k\}$がなりたつ。

(2)　$\mathfrak{g}^{k+1}=\mathfrak{g}_{k+1}+\cdots+\mathfrak{g}_m$とおけば$\mathfrak{g}^{k+1}$はJ-不変部分代数で$[JE_k, \mathfrak{g}^{k+1}]\subset\mathfrak{g}^{k+1}$で$\mathrm{ad}(JE_k)$の$\mathfrak{g}^{k+1}$上の固有値の実部は0であり更に$[E_k, \mathfrak{g}^{k+1}]=\{0\}$，$[P_k, \mathfrak{g}^{k+1}]\subset P_k$がなりたつ。

(3)　$\mathrm{y}=\sum_{k=1}^{m}(\{JE_k\}+\{E_k\}+P_k)$の各成分は$\eta$に関して直交しており$\eta$は$\mathfrak{g}$上で正定符号である。

この命題は数学的帰納法で証明される。

論文の審査結果の要旨

志磨君の論文はリー群が推移的に作用する複素等質空間の中で複素ユークリッド空間C^nの有界領域として実現可能なものを特徴づけるという問題に関するものである。このように実現される空間は対称エルミート空間となることが次元≦3のとき、E. Cartanによって1935年に証明され、高次元のときにも同様の結果が期待されて多くの研究がなされた。しかし、対称空間とならないC^4の等質有界領域の例がI. I. Pjateckii－Šapiroにより1956年に発見され、以来この問題はリー群が推移的に作用する等質ケーラー空間の構造を決定しようという形に一般化されて論じられるようになった。未だその全

面的解決は得られていないが、この問題を扱うのにはこの空間上の標準エルミート形式がつねに重要な役割を演じている。

このような状況にあって、志磨君は単連結等質ケーラー空間Mであって、可解リー群がM上に単純推移的に作用し、またその標準エルミート形式hが非退化であるという条件をみたすものを考察した。これらの条件はMをしてC^nの等質有界領域をとるときには満足され、この場合にはhは正定値である。本論文の主定理は、上の条件のもとでhは正定値となりMはC^nの等質有界領域として実現可能であることを主張し、この系として他にもC^nの等質有界領域を特徴づけるいくつかの条件が与えられている。主定理に証明されたhの非退化性からその正定値性が導かれるという事実は、上記の等質ケーラー空間の構造論の立場から見ても大へん興味があり、またその証明に駆使されたj-代数に関する帰納的法手法も独創性に富むものである。

以上志磨君の研究は等質ケーラー空間の構造論に大きく寄与したものと考えられ、本論文は理学博士の学位論文として十分価値あるものと認められる。