



Title	マルコフ性をもつ正規定常過程と佐藤の超函数
Author(s)	岡部, 靖憲
Citation	大阪大学, 1974, 博士論文
Version Type	
URL	https://hdl.handle.net/11094/30934
rights	
Note	著者からインターネット公開の許諾が得られていないため、論文の要旨のみを公開しています。全文のご利用をご希望の場合は、 ＜a href="https://www.library.osaka-u.ac.jp/thesis/#closed">https://www.library.osaka-u.ac.jp/thesis/#closed >大阪大学の博士論文についてをご参照ください。

The University of Osaka Institutional Knowledge Archive : OUKA

<https://ir.library.osaka-u.ac.jp/>

The University of Osaka

氏名・(本籍)	おか 岡	べ 部	やす 靖	のり 憲
学位の種類	理	学	博	士
学位記番号	第	3022	号	
学位授与の日付	昭和49年3月15日			
学位授与の要件	学位規則第5条第2項該当			
学位論文題目	マルコフ性をもつ正規定常過程と佐藤の超函数			
論文審査委員	(主査) 教授	池田	信行	
	(副査) 教授	渡辺	毅	教授 熊ノ郷 準
	教授	田辺	広城	助教授 福島 正俊

論文内容の要旨

$X = (X(t); t \in R)$ を平均が0で L^2 連続な実正規定常過程とする。 R の開部分集合 D に対して、すべての $X(t) (t \in D)$ によって生成される σ -加法族を $F(D)$ と記す。この論文でいうマルコフ性とは、現在の芽の σ -加法族 $\partial F(0) = \bigcap_{\epsilon > 0} F((-\epsilon, \epsilon))$ で条件をつけたとき、未来の σ -加法族 $F((0, \infty))$ が過去の σ -加法族 $F((-\infty, 0))$ と独立であるときをいう。一般性を失うことなく、 X は純非決定的であるとする。

このとき、K. Karhunenの定理によって、負の実軸で0となる実 L^2 函数 E とブラウン運動 $B = (B(t); t \in R)$ が存在して、

$$\begin{cases} X(t) = \sqrt{2\pi}^{-1} \int_{-\infty}^t E(t-s) dB(s), \\ F((-\infty, t)) = \sigma(B(s) - B(s'); s, s' < t) \end{cases} \quad (t \in R)$$

が成り立つ。この E は標準核とよばれる。なお、 E の Fourier 逆変換を h とするとき、 h の絶対値の2乗 $|h|^2$ は X の共分散函数 k のスペクトル密度 Δ になっている。

いわゆる N 重マルコフ性とは、 X がマルコフ性をもち、 X の標本函数が $N-1$ 回迄 L^2 の意味で微分可能で、 $\partial F(0) = \sigma(X^{(n)}(0); 0 \leq n \leq N-1)$ が成り立つことであるが、J. L. Doob は、1944年に、 N 次の多項式 P が存在して、L. Schwartzの超函数の意味で、

$$(1) \quad P\left(\frac{1}{i} \frac{d}{dt}\right) E = 2\pi \delta$$

が成り立つことと同値であることを示した。このことは、 X 、 B を超過程 (random distribution) と考えて、

$$P\left(\frac{1}{i} \frac{d}{dt}\right) X(t) = \sqrt{2\pi} B'(t)$$

が成り立つことと同じである。

この論文でいうマルコフ性をもつ X で、その標本函数が L^2 の意味で無限回微分可能で、 $\partial F(0)$

$=\sigma(X^{(n)}(O); n=0, 1, 2, \dots)$ を満たす例が K. Urbanik によって 1962 年に与えられた。さらに、1964 年に、N. Levinson—H. P. McKean, Jr. は、 X がマルコフ性をもつための必要十分条件は、 $(\check{h})^{-1}$ ($= (h(-\cdot))^{-1}$) が極小の指数型の整函数であることを示した。彼等はこのことを、指数型の整函数を三角多項式によって、スペクトル密度 Δ を重みとする L^2 空間の中で近似するという Bernstein の問題に帰着させて、解いた。

この論文では、前半において、J. L. Doob の精神に立って、局所作用素を用いて、マルコフ性をもつ正規定常過程を特徴付ける。この特徴付けに従って、後半では、 σ -加法族 $\partial F(O)$ の構造を解析し線型予測の問題で重要な役割をもつ表現式を導く。

まず、佐藤の超函数の空間の上で局所作用素を考えることにより、式(1)の作用素 $P(\frac{1}{i} \frac{d}{dt})$ が無限次の場合までも取扱える様にする。さらに、 X を境界上の確率過程とする超過程 (hyper-process) μ_x を導入することによって、論文の前半で、マルコフ性をもつ X が作用素論的に特徴付けられる。そのために、 X の共分散函数 k を再生核にもつヒルベルト空間 K を考え、 $(\check{h})^{-1}$ を表象にもつ K から $L^2(R)$ への線型作用素を定義する。そして、佐藤の超函数論を用いて、 X のマルコフ性、 K の局所性、 $(\check{h})^{-1}$ は極小な指数型の整函数である、という 3 つのことは同値であることが、§ 2, § 4, § 5 において表示される。§ 6 で X を境界上の確率過程とする超過程 μ_x を定義して、マルコフ性をもつ X の線型予測問題において、局所作用素の族 $(S_t; t > 0)$ が構成されて、

$$(2) \quad E(X(t) | F((-\infty, 0))) = S_t(\frac{1}{i} \frac{d}{dx}) \mu_x(O)$$

が成り立つことが示される。

論文の後半では、 X はマルコフ性を持ち、標準核 E は正の実軸で実解析的であると仮定する。このとき、予測函数とよばれる函数 $P(z, \varphi)$ ($z \in C, \varphi \in \mathcal{O}(\{0\})$) を定義して、(2) における S_t は、

$$S_t(z) = P(z, E(t-\cdot))$$

を満たすことが § 7 で示される。この応用として、標準核 E に関する公式が § 8 において得られる。この公式を用いて、§ 9 で、 R^∞ に値をもつ正規定常過程 $Y=(Y(t); t \in R)$ を定義して、

$$F(D) = \sigma(Y(t); t \in D)$$

が示され、 Y の標本函数としての性質が調べられる。参考論文 3 において述べられている如く、 Y の単純マルコフ性が示されるので、 X の現在の芽の σ -加法族 $\partial F(O)$ の表示：

$$\partial F(O) = \sigma(Y(O))$$

が得られたことになる。

論文の審査結果の要旨

岡部君の論文はマルコフ性を持つ正規定常過程の構造を特徴づける問題に関するものである。平均が零の正規定常過程 $X = \{X(t), t \in R\}$ が純非決定的ならば、その共分散函数 k の密度函数 $\Delta(\lambda)$ は $\Delta(\lambda) = |h(\lambda)|^2$ の形に表わされ、 $h(\lambda)$ のフーリエ変換 $E(t)$, $t \in R$, は負の実軸上で 0 になる。しかも h は E が標準核になるようにとれる。そのとき $\check{h}(\lambda) = h(-\lambda)$ とおけば N. Levinson—H. P.

McKean, Jr. の結果により、正規定常過程 X がマルコフ性を持つための必要十分条件は $(\check{h})^{-1}$ が極小指数型の整函数となることである。

本論文において岡部君は局所作用素を用いて正規定常過程 X のマルコフ性の特徴づけを行っている。そのために共分散函数 k を再生核にもつヒルベルト空間を考え、その上に $(\check{h})^{-1}$ を表象とする線型作用素を定める。その線型作用素の局所性、 $(\check{h})^{-1}$ が極小指数型の整函数であることおよび正規定常過程 X がマルコフ性をもつことの関連が佐藤の超函数論を用いて考察されている。さらにこの特徴づけに従って、正規定常過程 X の現在の状態を記述する σ -加法族の構造を解析し、線型予測の問題で重要な役割を持つ表現式を導いている。これらの結果は正規定常過程の構造論の立場から見て興味深いものであり、またその証明に駆使された手法は独創性に富むものである。

以上岡部君の研究は正規定常過程の構造論に大きく寄与したものと考えられ、本論文は理学博士の学位論文として十分価値あるものと認められる。