The University of Osaka
Institutional Knowledge Archive

Title	「やさしい」ゼータ関数について
Author(s)	伊吹山, 知義; 齋藤, 裕
Citation	数学. 1998, 50(1), p. 1-11
Version Type	VoR
URL	https://hdl.handle.net/11094/3117
rights	
Note	

The University of Osaka Institutional Knowledge Archive : OUKA

https://ir.library.osaka-u.ac.jp/

The University of Osaka

論　説

「やさしい」ゼータ関数について

伊吹山 知 義
齋　藤　　裕

この論説の目的は種々のゼータ関数の中には，易しい表示を持つものが通常信じられているよりもずっと多いことを解説することにある．すなわち概均質ベクトル空間のゼータ関数や保型形式のゼータ関数の中には，定義のみではその易しさがわからないが，算術的知識を総動員して計算すると既知の関数になるものが思いがけず多いと言うことを説明したい．前半では数学的な正確さよりも流れに重点を置いて書く．

1　2種類のゼータ関数

ちょっと冗談めくが，ゼータ関数には2種類あると思うようになった．1つは「やさしいゼータ関数」もう1つは「むつかしいゼータ関数」である．とくにこれらの定義を正確に与えようというわけではないが，その気持ちは徐々に説明していきたい．

数列 $\{a_n\}$ と複素数 s に対し，$\sum_{n=1}^{\infty} a_n n^{-s}$ なる級数を Dirichlet 級数という．$\{a_n\}$ のとりかたによってはこの級数はかなり良い性質をもつ．たとえば $\zeta(s)=\sum_{n=1}^{\infty} n^{-s}$ とおくと次がなりたつ．

（1）　$\zeta(s)$ は $\mathrm{Re}(s)>1$ で絶対収束し，さらに全 s 平面に有理型に解析接続される．

（2）　$\zeta(s)$ は関数等式を持つ．すなわち $\xi(s)=\pi^{-s/2}\Gamma(s/2)\zeta(s)$ とおくと $\xi(1-s)=\xi(s)$ をみたす．

（3）　$\zeta(s)$ は Euler 積をもつ．すなわち $\zeta(s)=\prod_p(1-p^{-s})^{-1}$（$p$ は素数をわたる．）

この $\zeta(s)$ を Riemann のゼータ関数という．$\zeta(s)$ をモデルとして，上の (1)，(2)，(3) ないしはその一部をみたすような Dirichlet 級数が数多く考えられてきた．それらは適当な形容詞つきで，ゼータ関数ないしは L 関数の名称で呼ばれる．ここで $\{a_n\}$ は当然何らかの算術的に意味のある良い定義がなされているわけであるが，これは別に a_n 自身が非常に具体的な公式によって記述できるということを意味するわけではない．とりあえず a_n のやさしい具体的な公式があるときに，漠然と「やさしいゼータ関数」と呼ぶことにしよう．この観点から言えば，Riemann のゼータ関数はやさしいゼータの典型である．一方，Ramanujan のデルタ関数 $\varDelta=q\prod_{n=1}^{\infty}(1-q^n)^{24}=\sum_{n=1}^{\infty}\tau(n)q^n$ に対応する L 関数 $L(s,\varDelta)=\sum_{n=1}^{\infty}\tau(n)n^{-s}$ はむつかしいゼータの典型といっても良いであろう．

さて，その他のやさしいゼータ関数はどのようなものがあるであろうか．たとえば，一般に環 A に対し $Sym_m(A)$ を A 係数の m 次対称行列のなすベクトル空間とする．とくに $L_m=Sym_m(\boldsymbol{Z})$ と書こう．$S\in L_m$ とし，さらに簡単のため $S>0$ すなわち S を正定値とする．$T\in L_n$ に対し $A(S,T)=\#\{X\in M_{mn}(\boldsymbol{Z});\ {}^tXSX=T\}$ としよう．たとえば $\zeta(s,S)=\sum_{l=1}^{\infty}A(S,l)l^{-s}$ とおくと $\zeta(s,S)$ はやさしいであろうか．すなわち $A(S,l)$ の簡単な公式があるであろうか？例として Epstein のゼータ関数 $\zeta_m(s)=\sum_{x\in \boldsymbol{Z}^m-\{0\}}N(x)^{-s}$ を考えよう．ここで $N(x)={}^txx$ とした．これは全

平面に解析接続され関数等式をもつ．具体的な例をいくつか岩波の数学辞典より引用する．簡単のため $L(s)=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}(2n-1)^{-s}$ とおくと，たとえば

$$\zeta_6(s)=-4\zeta(s)L(s-2)+16\zeta(s-2)L(s),$$
$$\zeta_8(s)=16(1-2^{1-s}+2^{4-2s})\zeta(s)\zeta(s-3),$$
$$\zeta_{12}(s)=8(1-2^{6-2s})\zeta(s)\zeta(s-5)+16L(s,\phi).$$

ここで $L(s,\phi)$ は重さ 6 のカスプ形式からくる L 関数で，むしろむつかしいゼータである．$\zeta_{12}(s)$ が $\zeta_6(s)$ や $\zeta_8(s)$ に比べて複雑な理由を説明するために Siegel 公式の簡単な場合について復習する．今 $S_1, S_2\in L_m$ は適当な $g\in GL_n(\boldsymbol{Z})$ について ${}^tgS_1g=S_2$ となるとき同じ類に属するという．上記の解の個数 $A(S,T)$ などは類にしかよらない．一方で，任意の素数 p に対しある $g_p\in GL_m(\boldsymbol{Z}_p)$ ($\boldsymbol{Z}_p$ は p 進整数環) があって ${}^tg_pS_1g_p=S_2$ であり，かつ S_1 と S_2 が実数体上も基底の取り替えで同値なとき，この 2 つは，同じ genus に属するという．1 つの genus(つまり L_n の局所的には同値な元のなす部分集合) 内の類の個数をこの genus の類数という．類数は一般には 1 より大きい．類数が 1 より大きければ上記の解の個数のような大域的な量が，局所的な解の個数の評価などから求められるはずはない．実は 12 次単位行列 1_{12} は類数が 1 ではなく，これが $\zeta_{12}(s)$ が複雑な理由である．一方で 1 つの genus の中で類にわたる平均値をとればこれは局所的な量でかけるかもしれない．これを正確に述べたのが Siegel 公式の最初の定式化である．$\mathcal{L}\subset L_m$ を genus とし，簡単のため正定値な行列からなるとする．また，$S_1,\ldots,S_h$ を $\mathcal{L}$ 内の類の代表とする．$T\in L_n$ を 1 つ固定する．また $E(S)=A(S,S)$ とおき，$M(\mathcal{L})=\sum_{i=1}^{h}E(S_i)^{-1}$ と書く．$M(\mathcal{L})$ のことを $\mathcal{L}$ の mass という．

定理(Siegel) 上記の記号のもとで，次がなりたつ．

$$\left(\sum_{i=1}^{h}A(S_i,T)E(S_i)^{-1}\right)M(\mathcal{L})^{-1}=c_{m,n}\det(S)^{-n/2}\det(T)^{(m-n-1)/2}\prod_p\alpha_p(\mathcal{L},T).$$

ここで $c_{m,n}$ は m,n のみによる定数で詳しくは省略する．$\alpha_p(\mathcal{L},T)$ は局所密度と呼ばれる量で，$S\in Sym_m(\boldsymbol{Z}_p)$ に対し $A_{p^\nu}(S,T)=\#\{X\in M_{mn}(\boldsymbol{Z}/p^\nu\boldsymbol{Z});\,{}^tXSX\equiv T \bmod p^\nu\}$ とおき，$m>n$ なら $\epsilon=1$，$m=n$ なら $\epsilon=1/2$ と書くとき，

$$\alpha_p(S,T)=\epsilon\lim_{\nu\to\infty}p^{\nu(m(m+1)/2-mn)}A_{p^\nu}(S,T)$$

として定義される．ここで右辺のリミットの中身は十分大きい ν に対し一定であり矛盾無く定義される．また，$S\in\mathcal{L}$ のとりかたにもよらないので，これを上では $\alpha_p(\mathcal{L},T)$ と書いた．

さて，Siegel の公式にはもう一つ先がある．説明を簡単にするために $n=1$ の場合を考える．複素上半平面を $H=\{z\in\boldsymbol{C};\mathrm{Im}(z)>0\}$ と書く．$S\in L_n$ に付随する H 上のテータ関数

$$\vartheta(S,z)=\sum_{l=0}^{\infty}A(S,l)\exp(2\pi ilz)$$

は適当な離散群について H 上の保型形式になる．

定理(Siegel) 記号を前の通りとすると

$$M(\mathcal{L})^{-1}\sum_{i=1}^{h}\vartheta(S_i,z)E(S_i)^{-1}$$

は H 上の Eisenstein 級数とよばれる保型形式になる．

すなわちテータ関数の類にわたる「平均値」が比較的標準的な保型形式になるのである．これは

個々の l についての $A(S_i, l)$ の類にわたる「平均値」が局所密度で書けるばかりでなく，ゼータ関数 $\zeta(s, S_i)$ の全体の平均値も標準的なものになることを意味していて重要である．(行列 T の次数 n が 1 より大きい場合は Siegel 上半空間上でテータ関数と Eisenstein 級数を考えることになるが説明は省略する.)局所密度は，かなりよくわかる．実際には局所密度の完全に一般の公式は知られていないのであるが，それでも genus 内の類にわたる上記のようなゼータ関数の「平均値」を「やさしいゼータ」と呼ぶのにそれほど無理はないであろう．また，Eisenstein 級数はやさしいゼータの「もと」とでも呼ぶのは許されるであろう．(この点についてはまた後で触れることになる.)

ところで，単位行列 1_6 と 1_8 の genus は共に類数は 1 である．この点からすると $\zeta_6(s)$ と $\zeta_8(s)$ の両者に違いはないはずであるが，前者は Euler 積をもたず，後者はもつ．しかし，Siegel 公式から見れば，後者の方がより自然だと思う根拠はない．$\zeta_6(s)$ はまったく標準的なゼータ関数と言うほかはない．これから思うに次を主張しておきたい．

観察 1　よいゼータ関数が Euler 積をもつというのは幻想である．

ところで，Euler 積はもたないが，関数等式はもつような典型的なゼータ関数として概均質ベクトル空間のゼータ関数があげられる．これを次の節で述べる．

2　概均質ベクトル空間のゼータ関数

まず例を通じて，そもそもの研究の動機を述べよう．自然数 n と環 A について，$V(A)=Sym_n(A)$ とすると $GL_n(\boldsymbol{C})$ は $x \to {}^t gxg$ $(x \in V(\boldsymbol{C}), g \in GL_n(\boldsymbol{C}))$ で $V(\boldsymbol{C})$ に作用する．実は (GL_n, V) は $\boldsymbol{Q}$ 上定義された概均質ベクトル空間の例である．V 内の格子 L_n^* を

$$L_n^* = \{x = (x_{ij}) \in V; x_{ii} \in \boldsymbol{Z}, 2x_{ij} \in \boldsymbol{Z}\ (1 \leq i, j \leq n)\}$$

とおく．L_n^* の元はいわゆる半整数対称行列である．L_n^* の元 x で $x>0$ (正定値) になるものについて $\Gamma_x = \{\gamma \in SL_n(\boldsymbol{Z}); {}^t\gamma x \gamma = x\}$ とおき，$\mu(x) = \#(\Gamma_x)^{-1}$ と書く．L_n^* のゼータ関数を

$$\zeta(s, L_n^*) = \sum_{x \in L_n^*/\sim,\, x>0} \frac{\mu(x)}{\det(x)^s}$$

と定義しよう．ただし $L_n^*/\sim$ は L_n^* 内の $SL_n(\boldsymbol{Z})$ の作用に対する軌道の代表をあらわす．(対称行列自身がいろいろ動く点が前節で考えたゼータ関数 $\zeta(s, S)$ とは非常に異なる点である.) このゼータ関数の収束については，すでに Siegel の仕事があったが，その後，T.Shintani により深く研究され，解析接続や関数等式が示されていた (cf.[17])．このゼータ関数が非常に注目に値するひとつの理由はこのゼータの特殊値，すなわち s が 0 以下の整数値をとるときの値が Siegel 保型形式の次元公式の一部として現れる点である．これは $n=2$ は Y.Morita[12]，n 一般は Shintani[17] による．この特殊値は $n=2$ なら実際に計算できていた．この場合は $\det(x)$ を 3 元 2 次形式と見なせるので，Siegel の 2 次形式についてのゼータの結果からわかるという特殊事情があったのである．一般の n についてもなにしろ次元公式 (つまり整数を表す公式) に現れる位だから特殊値は有理数にはなるだろうと誰しも考えていたが，$n \geq 3$ では何もわかっていなかった．たったひとつの例外は Hashimoto と Tsushima による $\zeta(0, L_3^*) = 1/3456$ という結果であったが，この証明は恐ろしく複雑であった．すなわち，保型形式の次元公式を Selberg の跡公式と Lefschetz の不動点定理で 2 通りに計算し，わからずに残った項を比較すると値が求まるというものであった．一方で $\zeta(s, L_n^*)$ 自身は $n=2$ の時の表示の複雑さもあって，漠然とむつかしい対象と思われていた．かく

して，$\zeta(s, L_n^*)$ 自身は複雑怪奇かもしれないが特殊値だけなにか偶然的な事情で綺麗なのだろうということで contour integral による計算法などが試みられたが，実際に実行できるような計算量では無かったように思う．しかし本当は

観察 2 $\zeta(s, L_n^*)$ が複雑だと思うのは幻想である．実はこれは既知のゼータで書ける「やさしいゼータ」である．

実はこの観察をどこまでも敷衍して述べるのがこの論説の主たる目的である．

観察 2 を正確に定理として述べる前に，概均質ベクトル空間について簡単に(適当な条件付きで)復習しておく．その方が全体的な構図が見やすいように思われるからである．一般に V を $\boldsymbol{Q}$ 上の有限次ベクトル空間，G を V に作用する $\boldsymbol{Q}$ 上の連結簡約代数群とする．一般に代数多様体 W と環 A について W の A valued points (座標が A の点) を $W(A)$ とかく．$V(\boldsymbol{C})$ の代数的部分集合 S があって，$G(\boldsymbol{C})$ が $V(\boldsymbol{C})-S(\boldsymbol{C})$ に推移的に作用するとき，(G, V) を概均質ベクトル空間と言う．簡単のため，以下 $S(\boldsymbol{C})$ は既約超平面 $S(\boldsymbol{C})=\{x\in V(\boldsymbol{C}); P(x)=0\}$ とする．ここで $P(x)$ は，G の相対不変式すなわち $f(gx)=\chi(g)f(x)$ $(\chi(g)\in\boldsymbol{C}, g\in G(\boldsymbol{C}))$ となる多項式の生成元にとれる．次に $\Gamma\subset G(\boldsymbol{R})$ を covolume finite な離散群，L を $V(\boldsymbol{Q})$ の Γ 不変な格子とする．各 $x\in L$ を重みつきで加えたいのだがこのために G の不変測度 dg と V の G 不変測度 ω を固定する．$x\in L$ に対し $G_x=\{g\in G(\boldsymbol{R}); gx=x\}, \Gamma_x=\Gamma\cap G_x$ とおく．G_x の不変測度は，概均質なる性質から，dg と ω の「比」として定義できる．このような定義の仕方は x を一斉にとるときに不変測度の定数倍の曖昧さを避ける効果がある．さて，もし任意の $x\in L$ について，上記の測度についての体積 $\mu(x)=\mathrm{vol}(G_x/\Gamma_x)$ が有限であれば，ゼータ関数が次のように定義できる．今 $V(\boldsymbol{R})-S(\boldsymbol{R})$ を $G(\boldsymbol{R})$-orbit にわけて，$V(\boldsymbol{R})-S(\boldsymbol{R})=\coprod_i V^i$(disjoint) とする．各 V^i について，

$$\zeta_i(s, L)=\sum_{x\in L\cap V^i/\Gamma}\frac{\mu(x)}{|P(x)|^s}$$

と定義する．すなわち見かけ上 $G(\boldsymbol{R})$-orbit の個数分ゼータ関数があるわけである．(実際には i が異なってもゼータが一致することもある．)ゼータ関数の関数等式は，実はこれらのなすベクトル $(\zeta_i(s, L))$ と $(\zeta_i(s, L^*))$ の間の関係として与えられ，ひとつひとつ単独で関数等式を持つわけではない．ただし L^* は L の双対格子である．

さて，前に述べた $V=Sym_n$ かつ $G=GL_n$ の場合は，$0\leq i\leq n$ に対し V^i を符号が $(i, n-i)$ の実対称行列の集合とすると，これが実の軌道の分解を与え，見かけ上ゼータ関数は $n+1$ 個ある(もちろん $\zeta(s, L_n^*)=\zeta_n(s, L_n^*)$ である．) 定義から直ちに $\zeta_i(s, L)=\zeta_{n-i}(s, L)$ がわかる．以下，$L_n=Sym_n(\boldsymbol{Z})$ として，$L=L_n$ または L_n^* かつ $\Gamma=SL_n(\boldsymbol{Z})$ の場合のみ考える．なぜか従来気がつかれていなかったようなのだが，実は $\zeta_i(s, L)$ は $\delta=(-1)^{n-i}$ と $\epsilon=(-1)^{(n-i)(n-i+1)/2}$ のみによることが，2 次形式についての算術的な理論より示される．よって $L=L_n$ または L_n^* について $\zeta_i(s, L)=\zeta(s, L, \delta, \epsilon)$ と書くことにしよう．以下 $n\geq 3$ と仮定する．($n=2$ は結果がすでに知られているし，またいろいろ特殊だからである．これについてはまた後で触れる．)ゼータ関数の具体的な公式は n が奇数か偶数かで非常に異なっている．定理を簡単な形で述べるために記号を準備する．0 以上の整数 i に対して Bernoulli 数 B_i を $te^t/(e^t-1)=\sum_{i=0}^{\infty}B_i t^i/i!$ で定義する．また

$$b_n=\frac{\left|\prod_{i=1}^{[(n-1)/2]}B_{2i}\right|}{2^{n-1}\left(\left[\frac{n-1}{2}\right]\right)!},\qquad B''_{n/2}=2\left(\frac{n}{2}\right)!(2\pi)^{-n/2}\zeta\left(\frac{n}{2}\right)$$

とおく．さらに n が奇数の時

$$Q_n(s)=\zeta\left(s-\frac{n-1}{2}\right)\prod_{i=1}^{(n-1)/2}\zeta(2s-(2i-1)),$$

$$R_n(s)=\zeta(s)\prod_{i=1}^{(n-1)/2}\zeta(2s-2i)$$

とおこう．

定理 (cf.[7])

$$\zeta(s,L_n^*,\delta,\epsilon)=b_n2^{(n-1)s}(Q_n(s)+\epsilon\delta^{(n+1)/2}(-1)^{(n^2-1)/8}R_n(s)),$$
$$\zeta(s,L_n,\delta,\epsilon)=b_n(2^{(n-1)/2}Q_n(s)+\epsilon\delta^{(n+1)/2}(-1)^{(n^2-1)/8}R_n(s)).$$

みてわかるとおり，ゼータ関数は Euler 積は持っていないものの，Euler 積を持つ部分の 2 つの和である．

次に n が偶数としよう．まず

$$A_n(s)=\prod_{i=1}^{n/2-1}\zeta(2s-2i),\qquad B_n(s)=\prod_{i=1}^{n/2}\zeta(2s-(2i-1))$$

とおく．n が偶数の時はやや複雑であり，もっと記号が必要になる．

K で $\boldsymbol{Q}$ 上の 2 次拡大，d_K で 2 次体の判別式，χ_K で K に対応する 2 次指標をあらわす．ただし，$K=\boldsymbol{Q}\oplus\boldsymbol{Q}$ の場合も考えに入れて，このときは $d_K=1,\chi_K$ は単位指標と思うことにする．$\delta=\pm1$ に対して

$$D_n^*(s,\delta)=(-1)^{[n/4]}\sum_{(-1)^{n/2}\delta d_K>0}2(2\pi)^{-n/2}\Gamma(n/2)|d_K|^{(n-1)/2}L(n/2,\chi_K)$$
$$\times\frac{\zeta(2s)\zeta(2s-n+1)}{L(2s-n/2+1,\chi_K)}|d_K|^{-s}$$

とおく．ここで和は $(-1)^{n/2}d_K\delta>0$ となるような 2 次体 K または $K=\boldsymbol{Q}\oplus\boldsymbol{Q}$ を動かす．さて，

$$D_n^*(s,\delta)=\sum_{d=1}^{\infty}H(n/2,d,\delta)\,d^{-s}$$

とおくことで記号 $H(n/2,d,\delta)$ を定義し，さらには

$$D_n(s,\delta)=\sum_{d=1}^{\infty}H(n/2,4d,\delta)\,d^{-s}$$

と定義しよう．この D_n^* や D_n は Eisenstein 級数と密接な関係があるが，これは次節で述べる．

定理(cf.[7]) n を 4 以上の自然数とすると次がなりたつ．

$$\zeta(s,L_n^*,\delta,\epsilon)=b_n2^{ns}\left((-1)^{[n/4]}D_n^*(s,\delta)A_n(s)+\epsilon\delta_n(-1)^{n(n+2)/8}\frac{2B''_{n/2}}{n}B_n(s)\right),$$

$$\zeta(s,L_n,\delta,\epsilon)=b_n\left((-1)^{[n/4]}D_n(s,\delta)A_n(s)+\epsilon\delta_n(-1)^{n(n+2)/8}\frac{2^{(n+2)/2}B''_{n/2}}{n}B_n(s)\right).$$

ただし，もし $(-1)^{n/2}\equiv\delta \bmod 4$ ならば $\delta_n=1$ そうでないなら $\delta_n=0$ とおいた．

ここで $D_n(s,\delta)$ などは Euler 積を持たないが，よく見るとゼータ関数は Euler 積を持つ部分の無限個の和ではある．これは実は概均質ベクトル空間のゼータ関数一般について言えることが示されている（ただし具体的な公式を書くのは別問題である）．

これらの定理の証明には概均質ベクトル空間の一般論はいっさい使わない．定義から直接算術的

な計算をおこなう．このような具体的な定理がでてみれば，いままで不明であった多くのことがこの簡単な系としてでてしまう．たとえば詳しくは省略するが関数等式は一般論によらずに直接証明できる．しかも，Shintani によるものよりも，ずっと単純な結果になる．特殊値 $\zeta(1-m, L_n^*)$ $(m=1,2,\ldots)$ は任意の n と m について Bernoulli 数でみな書けてしまう．よって保型形式の次元公式は一般論が見込めるようになる．留数もわりと具体的に書ける．

さて，今述べたゼータ関数は self-dual homogeneous cone（symmetric cone ともいう）のゼータ関数でもある．あるいは一般の軌道まで考えるとむしろ形式的実ジョルダン代数のゼータ関数と言った方が正確であろう．このような関数は有界対称領域を離散群でわった空間の幾何学的不変量との関連で Satake, Ogata などによりかなり意識的にとりあげられていた（cf. [13]）．これらについても，基本的に同じ計算の手法が使えて，少なくとも典型的な $\boldsymbol{Q}$ form についてはゼータ関数は「やさしいゼータ」になることが示される．これらは概均質ベクトル空間の一部にすぎないが，より一般の場合にも多少拡張できる．さらには従来きわめて複雑と思われていた 2 元 3 次形式のゼータ関数などについても，意表を突く思いがけない関係式が知られつつある（Ohno，Nakagawa による）．そこで思い切って次の問題をあげたい．

問題　概均質ベクトル空間のゼータ関数の「平均値」はすべて「やさしいゼータ」か？

ここで「平均値」というのは，格子 L に対して genus と同じ概念を定義して Siegel 公式のように平均を取るという意味のつもりである．多くの (G, V) や L に対して類数は 1 になるので，たとえば前述の定理などでは平均を取る必要がなかったのである．「やさしいゼータ」というのはあいかわらず曖昧な表現だが，やや広い範囲の Eisenstein 級数（多重被覆群など）のゼータなどを念頭においている．この意味はまた先でも説明する．

3　実解析的な Eisenstein 級数

この節の目的は 2 つある．1 つは $D_n^*(s, \delta)$ などの保型形式的説明をおこなうこと，もう 1 つは特殊な（病理的な）$n=2$ の場合の，関数等式などの保型形式的な別証について解説することである（[9] を参照）．なお，$\delta=1$ の場合については Cohen[3]，Sturm[19] などの研究があったが，以下はその拡張とも見なせる．まず Shimura [16] 等に従い重さ半整数の 1 変数 Eisenstein 級数の定義を与える．正または負の奇数 k とパラメーター $\sigma \in \boldsymbol{C}$ および変数 $z \in H$（H は複素上半平面）にたいし，Eisenstein 級数 $E(k, \sigma, z)$ と $E^*(k, \sigma, z)$ を

$$E(k, \sigma, z) = y^{\frac{\sigma}{2}} \sum_{d=1, odd}^{\infty} \sum_{c=-\infty}^{\infty} \left(\frac{4c}{d}\right) \epsilon_d^{-k} (4cz+d)^{\frac{k}{2}} |4cz+d|^{-\sigma},$$

$$\begin{aligned} E^*(k, \sigma, z) &= E\left(-\frac{1}{4z}\right)(-2iz)^{\frac{k}{2}} \\ &= y^{\frac{\sigma}{2}} 2^{\frac{k}{2}-\sigma} e\left(-\frac{k}{8}\right) \sum_{d=1, odd}^{\infty} \sum_{b=-\infty}^{\infty} \left(\frac{-b}{d}\right) \epsilon_d^{-k} (dz+b)^{\frac{k}{2}} |dz+b|^{-\sigma} \end{aligned}$$

で定義する．ここで $\left(\frac{*}{*}\right)$ は 2 次剰余記号（正確な定義は Shimura [15] 参照），また $d \equiv 1$，または 3 mod 4 に従い $\epsilon_d = 1$ または $\sqrt{-1}$ とおいた．のぞみのゼータ関数を得るために次のようにおくのが便利である．

$$F(k, \sigma, z) = E(k, \sigma, z) + 2^{k/2-\sigma}(e(k/8) + e(-k/8))E^*(k, \sigma, z).$$

F は平行移動で不変なので $z=x+iy$ と書くと次のような Fourier 展開をもつ．

$$F(k,\sigma,z)=\sum_{d=-\infty}^{\infty}c_d(y)\,e^{2\pi idx}.$$

$c_d(y)$ の具体的な公式などは Shimura[16] などで容易にわかる．さらに $G(y)=\sum_{d=-\infty}^{\infty}c_d(y)$ と $H(y)=\sum_{d=-\infty}^{\infty}c_{4d}(y/4)$ とおく．すると保型性より

$$G(1/4y)=(-1)^{(k^2-1)/8}2^{1/2}y^{\sigma-k/2}H(y)$$

がわかる．2 つの Dirichlet 級数を

$$\Phi_{\sigma,k}(s)=\int_0^{\infty}(G(y)-c_0(y))\,y^{s-1}dy,$$

$$\Psi_{\sigma,k}(s)=\int_0^{\infty}(H(y)-c_0(y/4))\,y^{s-1}dy$$

で定める．実は n が偶数で $n>2$ の時は，

$$\Phi_{0,-n-1}(s)=(-1)^{n(n+2)/8+[n/4]}\pi^{n+1/2}\Gamma((n+1)/2)^{-1}\Gamma(n/2)^{-1}\zeta(n)^{-1}(2\pi)^{-s}\Gamma(s)D_n^*(s,1),$$

$$\Psi_{0,-n-1}(s)=(-1)^{n(n+2)/8+[n/4]}\pi^{n+1/2}\Gamma((n+1)/2)^{-1}\Gamma(n/2)^{-1}\zeta(n)^{-1}(2\pi)^{-s}\Gamma(s)D_n(s,1),$$

$$\Phi_{2,-n+3}(s)=(-1)^{n(n+2)/8+1+[n/4]}\pi^{n+1/2}\Gamma(n/2)^{-1}\Gamma((n-1)/2)^{-1}\zeta(n)^{-1}(2\pi)^{-s}\Gamma(s)$$
$$\times\left(D_n^*(s,1)I\left(s,\frac{n-1}{2},1\right)+D_n^*(s,-1)I\left(s,1,\frac{n-1}{2}\right)\right),$$

$$\Psi_{2,-n+3}(s)=(-1)^{n(n+2)/8+1+[n/4]}\pi^{n+1/2}\Gamma(n/2)^{-1}\Gamma((n-1)/2)^{-1}\zeta(n)^{-1}(2\pi)^{-s}\Gamma(s)$$
$$\times\left(D_n(s,1)I\left(s,\frac{n-1}{2},1\right)+D_n(s,-1)I\left(s,1,\frac{n-1}{2}\right)\right)$$

となることが示される．ただしここで

$$I(s,\alpha,\beta)=\int_0^{\infty}\frac{(1+u)^{\alpha-1}u^{\beta-1}}{(1+2u)^s}du$$

とおいた．さらには通常の Hecke の議論で

$$\Phi_{\sigma,k}(\sigma-k/2-s)=(-1)^{(k^2-1)/8}2^{2s-2\sigma+k+1/2}\Psi_{\sigma,k}(s)$$

がなりたつので関数等式や極の位置などもわかる．以上で当該の Dirichlet 級数は Eisenstein 級数で解釈できた．通常の Shimura 対応のように重さ整数の保型形式のゼータ関数にとりなおすのではなく，直接 Mellin 変換を取るところが面白いとも言えようか？

さて $n=2$ の場合はこれほど単純ではない．その理由は $x\in L_2\cap V^1$ かつ $-\det(x)$ が平方数なら，$\mu(x)$ が無限大になるという点にある．すなわち $\zeta_1(s,L_2)$ は実は定義自身かなり問題があることになる．$\mu(x)$ が有限な x のみについて和をとるというのも一つの手かもしれないが，実際にはこのようにするとよい関数等式を満たさない．結局どう定義を修正すればよいゼータになるかという問題になる．概均質ベクトル空間一般で，このようなときの修正方法はよくしられていないようである．今の場合は Shintani [17]，F. Sato [14] による結果があり解決されているが，我々の立場でも別証を与えることができる．すなわち上の Φ と Ψ において $k=1$ とおき，σ と s の関数とみなすと大ざっぱに言って次のようになる．実はこれらは適当な正規化のもとで $\sigma=2$ で極をもち $A(\sigma,s)+\zeta(\sigma-1)B(\sigma,s)$ ($A(\sigma,s)$, $B(\sigma,s)$ は σ について正則なある関数) のかたちになる．極の留数自身は Riemann ゼータでかけるのでとくに面白くはない．しかし $A(2,s)$ から $\mu(x)$ が有限の部分の和が自然にあらわれる．よって $\sigma=2$ でローラン展開して定数項を見ると $B(\sigma,s)$ の部分から補正項がでて，前の関数等式から補正されたゼータ（すなわち定数項）の間の関数等式がでる．

計算はそれなりに面倒だが，知られている結果はすべてこの方法で復活できる．この方法は保型形式，とくにEisenstein級数からすべて説明できるという点でわれわれの観点に合っていて気持ちがよい．

4 Koecher-Maass級数

前節までで漠然とEisenstein級数に付随するゼータ関数はやさしいというニュアンスのことを言ってきた．たとえばSiegelモジュラー群 $Sp(n, \boldsymbol{Z})$ の保型形式に付随するゼータ関数というのはなにを意味しているのか，このあたりをもう少し正確に述べてみたい．Siegel保型形式の正確なSiegel上半空間 $H_n=\{Z=X+iY\in Sym_n(C); X, Y\in Sym_n(\boldsymbol{R}), Y>0\}$ 上の正則関数 $F(Z)$ であって，$Sp(n, \boldsymbol{Z})$ の作用に関して適当な不変性（と増大度の条件）を満たすものをいう．保型形式は

$$F(Z)=\sum_{T\in L_n^*} a(T)\exp(2\pi i\,\mathrm{tr}(TZ))$$

とFourier展開される．ここで $a(T)$ は T が半正定値でなければ0になる．さて，

$$\zeta(s, F)=\sum_{T\in L_n^*, T>0}\frac{\mu(T)a(T)}{\det(T)^s}$$

とおこう．これを F に付随するKoecher Maass級数という．$n=1$ ならば，これはHeckeによって定義されたゼータ関数であり，とくに F がHecke作用素の同時固有関数であれば，Euler積をもつ．実は $n\geq 2$ ならKoecher Maass級数は従来あまり主流のゼータ関数ではなかった．表現論との関係から言えば，表現の局所分解（Euler積！）でゼータを定義する方が自然なので，Hecke作用素の固有値を用いてゼータ関数を定義する方が主流である．このようなゼータははじめからEuler積をもっているが，関数等式などの証明はかえってむつかしい．実際，一般の関数等式はわかっていない．一方，Koecher Maass級数は $n\geq 2$ では，これとは非常に異なる．関数等式の証明は比較的易しいが，普通はEuler積はもたない．

さて，上で定義した $\zeta(s, F)$ は見るからに $\zeta(s, L_n^*)$ と似ている．もちろん F がカスプ形式ならFourier係数の公式など一般には望みようもないから $\zeta(s, F)$ がいつでもやさしいゼータなどと言うことはありえない．一方で F が何らかのliftingなどと関係すればゼータはやさしいかもしれない．実際，$n=2$ のときに，Maass spaceやKlingen Eisenstein級数についてはBoecherer[2]のまとめがある．一般の n に関する次の定理はIbukiyamaとKatsuradaの共同研究による．

定理 F がSiegel Eisenstein級数なら，$\zeta(s, F)$ はRiemannゼータ関数や重さ半整数の1変数Eisenstein級数に付随するゼータ関数を用いて具体的に公式が書き下せる．

これは基礎体を $\boldsymbol{Q}$ から一般の体にあげた場合にもSaitoにより拡張された．詳しくは準備中の論文などを参照されたい．結果は $\zeta(s, L_n^*)$ よりも重さがパラメーターに入る点で複雑になるが，ムードは驚くほどよく似ている．上の定理を標語的に繰り返すと

観察3 Siegel Eisenstein級数のKoecher Maass級数は「やさしいゼータ」である．

Eisenstein級数はそもそもテータ関数の平均値であり，$\zeta(s, F)$ はFourier級数の平均値であるから，$\zeta(s, F)$ は平均値の平均値とでも言ったところであろうか．

問題 第1種Siegel領域（tube domain）上のカスプ形式の直交補空間の元，たとえばKlingenのEisenstein級数について，Koecher Maass級数を計算せよ．これらはやさしいゼータか？

これらの保型形式はもちろん境界上でカスプ形式 f になったりするからその部分のデータを避けることはできない．これを無視すればやさしいかという問いである．

かくして世の中の「やさしいゼータ関数族」はかなりの広がりを持っているように思われるのである．

5 次元公式と指数和

関連する重要な2つの話題について述べる．1つは有界対称領域 D の正則保型形式の次元公式である．これは適当な積分核をもちいて Selberg の跡公式で与えられる．実際に次元を計算するのはなかなか面倒であり，知られた公式は数少ない．積分核はある関数を保型形式を定義するときの離散群 Γ により動かした和の形なので，Γ の元，ないしは部分集合の寄与という概念が（収束する限り）意味を持つ．さて $D=G/K$ と書いたときの代数群 G がたとえば $\boldsymbol{Q}$ 上で定義されているとし，Γ を $G(\boldsymbol{Q})$ 内の数論的部分群とする．広く信じられていることとして

（1） $\gamma\in\Gamma$ の固有値の絶対値が1でなければこの元の寄与はゼロであろう．

（2） γ または $-\gamma$ の適当なべきがべき単元とする．そのジョルダン分解におけるべき単部分がある極大放物 $\boldsymbol{Q}$ 部分群のべき単根基の中心 U に属するものを中心的ということにしよう．もし中心的でなければ寄与はゼロであろう．

これらを信ずれば，レベルの高い合同部分群などでは次元公式への寄与は ±1（単位元）と中心的べき単元しか寄与がないことになる．いっぽう極大放物型部分群に対する U はジョルダン代数の構造を持つ．よってこの寄与は cone のゼータ関数の特殊値で書けることが期待される．その証明のためには概均質ベクトル空間の一般論には含まれない新しい関数等式などを証明しなくてはならないが適当な算術的な仮定のもとではこれらは実際に実行可能で，さらにやさしいゼータはその特殊値がわかることから保型形式の次元の予想が具体的に書けることになる．たとえば [4]，[6]，[9] を参照されたい．昔は領域の次数が上がるほどに複雑で手が着けられないと思われていたが，以上のことからみて，有界対称領域の保型形式の次元公式が将来的に本当に書き下せる可能性がでてきたと言えるであろう．

次に指数和について述べる．Lee と Weintraub は2次 Siegel 保型形式の次元公式に関連して，ある1のべき根に関する，従来見たこともないような和が Bernoulli 数で書けるという予想を提出した（[11]）．かなりの人がこの予想の初等的な証明に挑戦したが誰も成功しなかった．これらは Hashimoto や Arakawa によって，ある種の概均質ベクトル空間の L 関数の特殊値に関する予想に帰着する事が示された（[1]）．しかし実はわれわれの理論によればこの L 関数も具体的に書けるので Lee Weintraub の予想も解決した（[9]，[10]）．にもかかわらず，初等的な証明はいまだにわからない．さらにいえばより一般の概均質ベクトル空間でも類似の新しい指数和があっても良さそうであるが，まだよくわかっていない．ここには一般論の可能性があるように思う．

6 証明について

残念ながらそろそろ紙数もつきてきた．実は証明は結果の易しさに比べて非常に面倒である．もはや詳しく説明する余裕はないが，$\zeta(s, L_n)$ の公式の証明について少しだけ述べたい．よく見ると $\zeta(s, L_n)$ は L_n 内の genus の mass 分布を与えている．mass は Siegel 公式により局所密度の逆数

の積で与えられる．ここに現れる $\alpha_p(S,S)$ という形の局所密度は例外的によくわかっている．$p=2$ のときはかなり複雑ではあるがそれでも完全な公式が存在する．よって原則的にはこれを使えば計算できそうである．とくに $\alpha_p(S,S)^{-1}|\det(S)|_p^s$ の $S\in Sym_n(\boldsymbol{Z}_p)$ の同値類にわたる和のようなものを計算しておいてから積を取ることが考えられる．しかし実際にはいろいろ問題がある．

（1） まず局所的な（すなわち $\boldsymbol{Z}_p$ 上の）対称行列の組を行列式が皆等しいようにでたらめに与えても，これが大域的な（$\boldsymbol{Z}$ 上の）対称行列からくるとは限らない．このための条件は Hasse 不変量の積が 1 という条件である．しかし，いちいちこの条件を見ながらまとめるのは面倒なので局所的な Dirichlet 級数を考えるときに S の Hasse 不変量をかけたものとかけないものを考えて，p について積を作り後で和をとれば Hasse 不変量の積が 1 のものだけ生き残って都合がよい．これはたとえば relative trace formula などにもつかわれているテクニックである．

（2） 次の問題は，$p=2$ の局所同型類の分類が極端に複雑なことである．しかし，実はゼータ関数は genus の mass より粗いデータしか与えていない．同じ行列式を持つ genus はまとめるというのが Siegel 公式よりずっと簡単な量になる理由であり，実は同じジョルダン分解（一種の対称行列の標準形）ごとにまとめると同値類の分類定理を使わないで局所密度の逆数の平均値が計算できる．この部分はひとつの key lemma である．

（3） 前項で同じジョルダン分解ごとに計算したものをなるべく簡単な局所的な Dirichlet 級数にひとまとめにする必要がある．この作業はジョルダン分解の固定されたサイズによるまとめと，サイズを動かしたときのまとめの 2 段階にわかれ，後者では Taylor 展開の q 類似の公式などを使う．

（4） 前項で局所的な Dirichlet 級数といったものは，p と素な d_0 を固定して $\det(S)=d_0p^\nu$ となる局所同型類にわたる局所密度の逆数（ないしはそれに Hasse 不変量をかけたもの）の和を a_{p^ν} として得られる級数のことである．これはいわゆる Igusa local zeta をもっと細かく見たものに相当する．さて，これが d_0 によらなければ単にすべての p についてかけあわせたもので大域的な Dirichlet 級数がえられて簡単だが，実際には d_0 にかなりよる．よって大域的なまとめは個々の局所的な Dirichlet 級数を眺めながら注意深く書き直す作業が必要になる．

以上の証明では残念ながらなぜ最後の式が簡単になるかという本質的な説明，とくに $D_n(s,\delta)$ などがでてくる本質的な理由についてはなにもわからない．計算してみたらこうなったというほかはない．この事実の本質的な根拠を説明し別証を与えるのは非常に魅力のある問題と言えるであろう．われわれの結果は世の中にあまり風変わりなゼータはなかったと主張する点では積極的でないという見方もあるかもしれないが，多少の新しい知見と新たなる問題の広がりも与えているのであって，この意味では問題はまだ始まったばかりとも言えるであろう．

なお，ここでは文献の引用はごく基本的なものにとどめた．詳しくは [7]，[8]，[9] などの巻末を参照されたい．

文 献

[1] T. Arakawa, Special values of L-functions associated with the space of quadratic forms and the representation of $Sp(2n, F_p)$ in the space of Siegel cusp forms, Adv. Stud. Pure Math., **15** (1989), 99-169.

[2] S. Boecherer, Bemerkungen über die Dirichletreihen von Koecher Maass, Mathematica Gottingensis Schriftenreihe des SFB Heft, **68** (1986).

[3] H. Cohen, Sums involving the values at negative integers of L-functions of quadratic characters, Math. Ann., **217** (1975), 271-285.

[4] T. Ibukiyama, On dimensions of automorphic forms and zeta functions of prehomogenous vector space, 京都大学数理解析研究所講究録, **924** (1995), 127-133.

[5] T. Ibukiyama and H. Katsurada, On Koecher Maass series of Siegel Eisenstein series, preprint.

[6] T. Ibukiyama and H. Saito, On zeta functions associated to symmetric matrices and an explicit conjecture on dimension of Siegel modular forms of general degree, International Mathematics Research Notices, No.8 (1992), 161-169. (See Duke Math. J. **67**).

[7] T. Ibukiyama and H. Saito, On zeta functions associated with symmetric matrices, I : An explicit form of zeta functions, Amer. J. Math., **117** (1995), 1097-1155.

[8] T. Ibukiyama and H. Saito, On zeta functions associated with symmetric matrices, II MPI preprint series, 97-37.

[9] T. Ibukiyama and H. Saito, On zeta functions associated with symmetric matrices, III An explicit form of L functions, Nagoya Math. J., **146** (1997), 149-183.

[10] T. Ibukiyama and H. Saito, On L functions of ternary zero forms and exponential sums of Lee and Weintraub, J. Number Theory, **48** (1994), 252-257.

[11] R. Lee and S.H. Weintraub, On a generalization of a theorem of Erich Hecke, Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A., **79** (1982), 7955-7957.

[12] Y. Morita, An explicit formula for the dimensions of spaces of Siegel modular forms of degree two, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo Sect. IA Math., **21** (1974), 167-248.

[13] I. Satake and S. Ogata, Zeta functions associated to cones and thier special values, Advanced Studies in Pure Math. **15**. Automorphic Forms and Geometry of Arithmetic Varieties. (1989), 1-27. Kinokuniya and Academic Press.

[14] F. Sato, On zeta functions of ternary zero forms, J. Fac. Sci. Tokyo Sect. IA Vol.**28** (1981), 585-604.

[15] G. Shimura. On modular forms of half integral weight, Ann. of Math., **97** (1973), 440-481.

[16] G. Shimura, On the holomorphy of certain Dirichlet series, Proc. London Math. Soc., (3) **31** (1975), 79-98.

[17] T. Shintani, On zeta functions associated with the vector space of quadratic forms, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo Sect. IA, **22** (1975), 25-65.

[18] C.L. Siegel, Über die Zetafunktionen indefiniter quadratischer Formen, Math. Zeit., **43** (1938), 682-708.

[19] J. Sturm, Special values of zeta functions, and Eisenstein series of half integral weight, Amer. J. Math., **102** (1980), 219-240.

(1996年9月27日提出)

(いぶきやま　ともよし・大阪大学大学院理学研究科)
(さいとう　ひろし・京都大学大学院人間・環境学研究科)