マニピュレータ・ダイナミクスの運動制御方式

昭和56年2月

竹 垣 盛 一

目次

1. 序　論

省力化の担い手として，また，悪環境下で人間に代って作業を実行するものとしてロボットが色々な分野で導入されている．現在，産業用ロボットとして普及しているものは，たいてい，プレイバック方式によって制御されている．すなわち，あらかじめ作業内容に従って，人間がロボットを動かして教示する（ティーチング）ことにより，その作業の順序や位置等の情報を記憶させ，これを忠実に再生（プレイバック）することにより作業を実行する方式である．[1] この方式によると高い位置精度が再現できる反面，作業の変更や環境および作業対象の変化に素早く対処することはできない．

これに対して，ロボットに適当な感覚（センサー）と知能（コンピューター）を備えることによって，より高度な作業を実行させようという，いわゆる，知能ロボットの研究が盛んに行なわれている．[2] その中でも，ロボット（マニピュレータ）の運動制御は重要な分野であり，機械工学的にも興味深い問題を含んでいる．

従来より，マニピュレータの運動制御に関して多くのすぐれた研究があるが，なおいくつかの問題が残されている．例えば，運動学的なレベルでは，以下に述べる座標変換に関する問題がある．

*Fig.1-1*に多関節マニピュレータの概形を示しているが，その先端には，人間の手に相当するものとして end effector がついている．この end effector に任意の位置と姿勢をとらせるためには，図のよう

に少くとも6つの自由度が必要である．通常，マニピュレータに作業させるためには，まず，作業を記述するのに適した座標系（作業座標系）を導入する必要がある．例えば，空間で物を運ぶような作業では，end effectorの空間座標が，また，クランクを回転させる作業では，Fig.1-2のような円柱座標が作業座標として選ばれる．従来のシステムでは，サーボ系の目標値は関節角度で与えなければならないので，これらの作業座標から各関節角度への変換が必要である[3]．ところが，これは一般に複雑な非線形方程式を解くことになる[3]

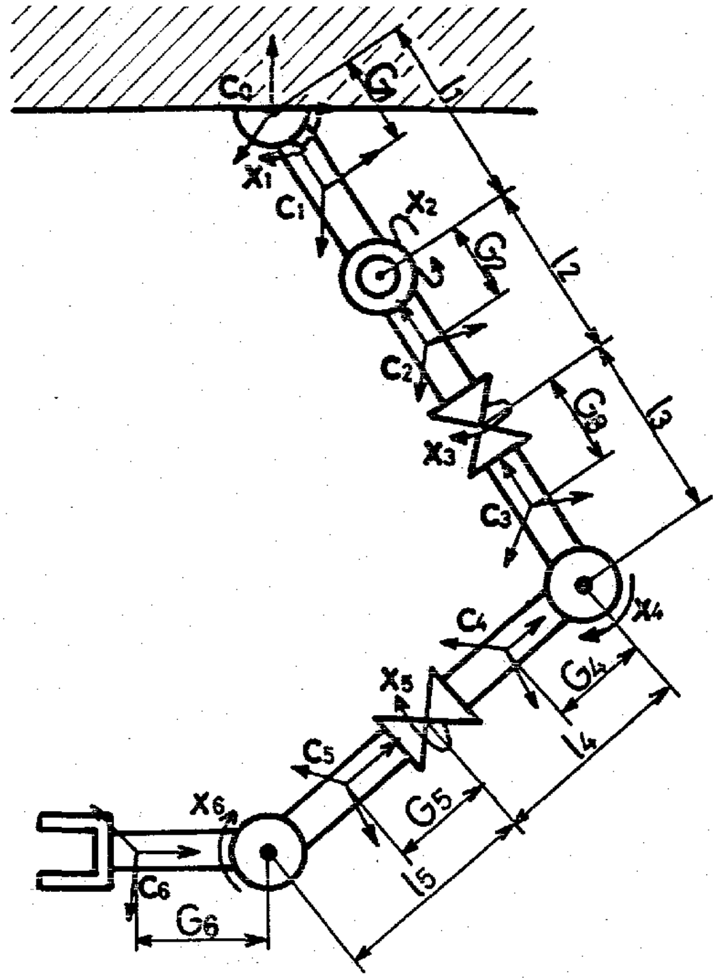


Fig.1-1 Anthropomorphic manipulator with 6 degrees of freedom and its coordinate frames

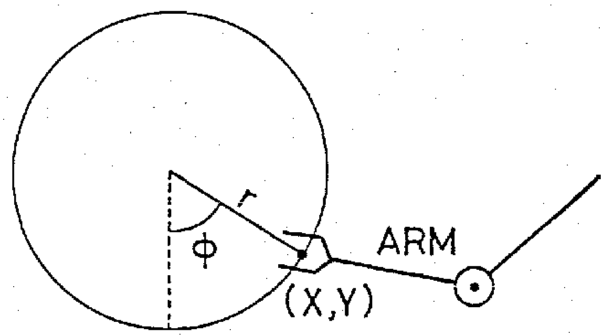


Fig.1-2 Task-oriented coordinate for turning a crank

ので，その実時間処理は極めて困難である．従来の計算機制御による方式がプレイバック方式にとってかわれなかった一つの理由はここにあると考えられる．

しかし，より重要なのは，動的な制御の問題である．従来より，マニピュレータのダイナミクスに対して多くの制御方式が提案されており，とくに最近では，計算機技術の著しい発達を背景にさまざまなソフトウェア・サーボ[4]の方式が報告されている．ところが，一般のマニピュレータのダイナミクスの具体的な表現はあまりにも複雑である[4]ので，これらの研究では，

1．まず，ダイナミクスの複雑な非線形性を実時間で補償してから制御系の設計を行なう方法[5]～[7]

2．関節角度およびその速度の現在値と目標となる加速度を与えて運動方程式から逆に各関節のトルクを時々刻々求める方法（逆問題の方法[8]）

3．あらかじめ目標軌道を設定し，同時にその軌道に沿って非線形性の補償入力を計算しておき，サーボ実行時にそれらを読み出す方法[9]～[11]

4．目標値付近で線形化する方法[12]，[13]

等が主流をなしているようである．1.，2.，3．の各方法では，当然，膨大な計算量を実時間で処理せねばならず，ＬＳＩの進歩とともにその実用化が可能になりつつある[4]とはいうものの，現段階では，コスト的に非常にぜいたくであると言わざるをえない．また，これらの方法が実現できたとしても，制御系の性能は数式モデルの精度に完全に依存するので，

予期できないパラメータの変動やモデルと実機のダイナミクスの相違，あるいは外乱等によるわずかな計算誤差にかかわらず制御系が正常に動作するという保証はない．実用性や信頼性の観点からすれば，マニピュレータの数式モデル自体から制御入力を決定するこれらの方法には問題が残されていると考えられる．4．の線形化による方法は実現が容易であると考えられるが，広い動作範囲で運動を考えると制御系のパラメータも変化してくるので，結局，複雑な手続きや前処理が必要になる[13]．また，その有効性が線形化されたシステムに限られていること自体にも問題があると考えられる．

これらの問題点を克服するためには，マニピュレータのダイナミクスの具体的な記述よりも，そのシステムとしての構造に着目して，数式モデルによらない制御方法を考える必要があると思われる．

本研究は，マニピュレータの運動制御の問題を機械力学系の制御という観点から一般的に考察し，実用的でかつ理論的にも有効性が保証されるような新しい制御方式を確立することを目的としている．

まず一般のマニピュレータ・ダイナミクスを作業座標で記述し直し，そのシステムの力学的な構造に着目することによって，作業空間で直接制御できる新しいフィードバック制御方式を導出する．また，この方式を冗長性[14]のある作業や対象物より拘束をうける作業に適用する場合を考察し，その有効性を理論的に示す．

次に，作業空間に設定された目標軌道に追従するための軌道制御方式を考察し，その制御系の設計について述べる．また，制御系の最適性や定常特性改

善のための積分形フィードバックのゲイン選択等について検討する。

次に，加速度の無視できない軌道に追従させるために，リャプノフの安定論に基づいた適応制御系の手法[15]を取り入れた適応的な軌道制御方式を導出する。M.R.A.C.S.(モデル規範形適応制御系)は，すでにDubowskyらによってマニピュレータの制御に応用されている[16]が，彼らは，各関節のサーボ系を独立な線形2次系として扱い，古典的な手法によって適応制御則を導いているのに対し，本論文で提案する適応制御則は，システムを多変数系として取扱い，現代的な手法によって導出されたもので，作業座標制御に直接適用できるという特長をもつ。

提案した各制御則の有効性は，4自由度を持つアームモデルを用いた計算機シミュレーションによって検証される。

最後に，本制御方式をマイクロコンピュータを用いたシステムで実現し，試作したマニピュレータ(Fig.1-1)にいくつかの作業を実行させることによってその実用性および有効性を実験的に検証する。

2. マニピュレータのダイナミクス

2・1　多自由度リンク系の運動方程式

一般にマニピュレータのような多節のリンク機構の運動は関節角度等の適当な変数を用いて表わされる．いま考えているリンク系の自由度をnとし，運動は一般化座標ベクトル$x = (x_1, \cdots, x_n)^T$（Tは転置を示す）で記述されているとする．ここで，考えているリンク系の具体的な構成が与えられるなら，ニュートン・オイラーの方法あるいはラグランジュやハミルトンの方法によって具体的な運動方程式を導出できるが，それはたいていの場合，非常に複雑になるので制御系設計の見通しを得ることは困難である．そこで，本論文では，マニピュレータのダイナミクスを含む一般の機械力学系を対象にし，そのシステムの構造的な特徴や力学的な性質に着目することによって制御系設計のための明確な方策を検討する．

まず，一般的な立場からシステムの方程式，すなわち，一般的な力学系の運動方程式を記述する．系の運動エネルギーTは

$$T = \frac{1}{2}\dot{x}^T R(x)\dot{x} \tag{2-1}$$

と書ける．ここで行列$R(x)$はxのみの関数であり任意のxに対して正定値対称と仮定できる[17]．一般化運動量$\mathbb{P} = (P_1, \cdots, P_n)^T$は次のように定義される．

$$\mathbb{P} = \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_1}, \cdots, \frac{\partial T}{\partial \dot{x}_n}\right)^T = \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}}\right)^T = R(x)\dot{x} \tag{2-2}$$

また系のポテンシャルを$V(x)$とする．関数$V(x)$はxに関して十分滑らかであるとする．このときハミルトニアンHは$H=T+V$となり運動方程式を書き下すと次のようになる．

$$\Sigma_0 \begin{cases} \dot{x} = \left(\dfrac{\partial H}{\partial \mathbb{P}}\right)^T = \left(\dfrac{\partial T}{\partial \mathbb{P}}\right)^T = R^{-1}(x)\mathbb{P} & (2\text{-}3) \\ \dot{\mathbb{P}} = -\left(\dfrac{\partial H}{\partial x}\right)^T + B\mathbb{u} = -\left(\dfrac{\partial T}{\partial x}\right)^T - \left(\dfrac{\partial V}{\partial x}\right)^T + B\mathbb{u} & (2\text{-}4) \end{cases}$$

ここで$\mathbb{u}=(u_1,\cdots,u_r)^T$は操作力のベクトル，行列$B$は$n\times r$の行列であり$B\mathbb{u}$が一般化力のベクトルになる．マニピュレータ系では自由度の分だけ独立な操作力を持つ，すなわち$r=n$で$|B|\neq 0$と仮定できる．従って一般性を失うことなく$B=I$（単位行列）とする．システムΣ_0はマニピュレータ系を記述するには一般的すぎるかもしれないが，ダイナミクスの力学系としての構造的な特徴は，具体的に記述された運動方程式より，むしろΣ_0によく表現されていると考えられる．

2・2　作業座標で記述されたダイナミクス

前節では，マニピュレータの運動は関節角度やスライド変位等マニピュレータの機械的な構造によって定まる自然な一般化座標xで記述された．しかし，マニピュレータに具体的な作業を自律的に行わせるためには前章で述べた様に，その作業に適した作業座標を導入し，その座標系で作業を計画しなければならない．このとき作業座標から一般化座標への変換を含まない制御方式を得る方法としてマニピュレータのダイナミクスを作業座標で記述し直すことが

考えられる[6],[11]が，例えば文献[6]のように作業座標を単に2階微分して運動方程式を得た場合には力学系としての構造は見失われてしまう．そこで本節では一般的な力学系の運動方程式Σ_0をその力学的な構造が見失われないようにして作業座標で記述し直す．いま目的の作業に対して$\mathbf{y}=(y_1,\cdots,y_m)^T$が作業座標に選ばれたとする．$\mathbf{y}$は$\mathbf{x}$によって陽に記述されるものとし

$$\mathbf{y}=(f_1(\mathbf{x}),\cdots,f_m(\mathbf{x}))^T=\mathbf{f}(\mathbf{x})$$

とする．n個の自由度で記述できる独立な関数はたかだかn個なので一般的に$m\leq n$であるが，まず最初は$m=n$とし，さらに$\mathbf{y}$の$\mathbf{x}$によるヤコビアン$J(\mathbf{x})$が考えている動作の範囲内で正則とする．すなわち

$$\det\left(\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}}\right)=\det\left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}\right)=\det J(\mathbf{x})\neq 0 \qquad (2\text{-}5)$$

が配置空間（$\mathbf{x}$の空間）内のある開集合$\mathcal{O}$で成立つとする．この開集合$\mathcal{O}$は$\mathbf{f}(\mathbf{x})$に依存し，具体的に求めるのは一般に非常に難しく，その形も複雑になると考えられるが，少くとも，ある$\mathbf{x}$で(2-5)式が成立てば$\mathcal{O}$は存在し，連続写像$\mathbf{f}$による像$\mathbf{f}(\mathcal{O})$も開集合になる．このとき陰関数定理より$\mathbf{f}$の逆関数$\mathbf{f}^{-1}$；$\mathbf{f}(\mathcal{O})\rightarrow\mathcal{O}$，が存在し$\mathbf{x}\in\mathcal{O}$は$\mathbf{y}$の一対一連続な関数とみなすことができる．なお，この場合，$\det J(\mathbf{x})=0$となる集合は配置空間において，たかだか$n-1$次元の多様体になる[18]ので，ほとんど全ての$\mathbf{x}$が(2-5)式を満しており，直観的には，$\det J(\mathbf{x})$

≠0となる$\mathbb{x}$の集合は配置空間のほとんどを占めていると考えられる．ただし，この集合は連結とは限らないので $\det J(\mathbb{x})=0$ となる集合を無視することはできない．こうして系のハミルトニアン$H(\mathbb{x},\mathbb{p})$は$\mathbb{y}$と$\dot{\mathbb{y}}$に対応する一般化運動量$\mathbb{q}$によって記述できる．ここで$\mathbb{q}$は次式のように書ける．

$$\mathbb{q}=\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\mathbb{y}}}\right)^T=(J^T)^{-1}RJ^{-1}\dot{\mathbb{y}} \tag{2-6}$$

行列J，Rやポテンシャル関数V等は$\mathbb{f}^{-1}$によってそのままで$\mathbb{y}$の関数とみなす．次に一般化力の項を考える．v_iをy_iに対応する一般化力とする．$\mathbb{y}$の仮想変位$\delta\mathbb{y}$に対して$\mathbb{x}$の仮想変位は $\delta\mathbb{x}=J^{-1}\delta\mathbb{y}$ となるので $\delta\mathbb{y}=(0,\cdots,\delta y_i,\cdots,0)^T$（第$i$要素が$\delta y_i$でその他は全て零のベクトルを表す）に対する仮想変位$\delta\mathbb{x}^i$は

$$\delta\mathbb{x}^i=\mathbb{J}^i\delta y_i \tag{2-7}$$

となる．ただし$\mathbb{J}^i$はJ^{-1}の第i列ベクトルである．すなわち．

$$J^{-1}=\left[\mathbb{J}^1;\mathbb{J}^2;\cdots;\mathbb{J}^n\right]$$

したがってこの場合仮想仕事は次のようになる．

$$v_i\delta y_i=\mathbb{u}^T\delta\mathbb{x}^i=\mathbb{u}^T\mathbb{J}^i\delta y_i \quad (i=1,\cdots,n) \tag{2-8}$$

これをまとめれば次式のように一般化力のベクトルを得ることができる．

$$\begin{bmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{u}^T \mathbf{J}^1 \\ \vdots \\ \mathbf{u}^T \mathbf{J}^n \end{bmatrix} = (\mathbf{J}^T)^{-1} \mathbf{u} \tag{2-9}$$

従って Σ_0を$\mathbf{y}$と$\mathbf{q}$で記述し直すと次式のようになる。

$$\Sigma_T \begin{cases} \dot{\mathbf{y}} = \left(\dfrac{\partial T}{\partial \mathbf{q}}\right)^T & (2\text{-}10) \\ \dot{\mathbf{q}} = -\left(\dfrac{\partial T}{\partial \mathbf{y}}\right)^T - \left(\dfrac{\partial V}{\partial \mathbf{y}}\right)^T + (\mathbf{J}^T)^{-1} \mathbf{u} & (2\text{-}11) \end{cases}$$

次に $m<n$ の場合を考える。このときは$\mathbf{x}$を$\mathbf{y}$のみで記述することはできない。制御の対象となる変数は $\mathbf{y} \in R^m$だが，ここで新に仮想的なベクトル $\mathbf{y}_s \in R^{n-m}$ を導入し$\mathbf{y}$と$\mathbf{y}_s$でシステムΣ_0を記述してみる。ただし$\mathbf{y}_s$はベクトル$\mathbf{y}_e \in R^n$を

$$\begin{aligned} \mathbf{y}_e^T = (\mathbf{y}^T, \mathbf{y}_s^T) &= (\overbrace{\mathbf{f}^T(\mathbf{x})}^{m}, \overbrace{\mathbf{f}_s^T(\mathbf{x})}^{n-m}) \\ &= (f_1(\mathbf{x}), \cdots, f_m(\mathbf{x}), f_{m+1}(\mathbf{x}), \cdots, f_n(\mathbf{x})) \\ &= \mathbf{f}_e(\mathbf{x}), \end{aligned} \tag{2-12}$$

$$\left(\frac{\partial \mathbf{f}_e}{\partial \mathbf{x}}\right) = \begin{bmatrix} \mathbf{J} \\ \hline \dfrac{\partial \mathbf{f}_s}{\partial \mathbf{x}} \end{bmatrix} = \mathbf{J}_e(\mathbf{x}) \tag{2-13}$$

とおいたとき

$$\det\left[\mathbf{J}_e(\mathbf{x})\right] \neq 0 \tag{2-14}$$

となるように選ぶものとする．ただし，一般性を失うことなく $\mathrm{rank}\, J = m$ が成立つとする．このように関数 $f_{m+1}(x), \cdots, f_n(x)$ を選ぶことはできるが以下の議論では具体的にそれらを計算して求める必要はない．このとき y_e と y_e に対応する一般化運動量 $q_e^T = (q^T, q_s^T)$ で記述された運動方程式は次のようになる．

$$
\Sigma_e \begin{cases} \dfrac{d}{dt}\left[\begin{array}{c} y \\ \hline y_s \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c} \left(\dfrac{\partial H}{\partial q}\right)^T \\ \hline \left(\dfrac{\partial H}{\partial q_s}\right)^T \end{array}\right] & (2\text{-}15) \\[2ex] \dfrac{d}{dt}\left[\begin{array}{c} q \\ \hline q_s \end{array}\right] = -\left[\begin{array}{c} \left(\dfrac{\partial H}{\partial y}\right)^T \\ \hline \left(\dfrac{\partial H}{\partial y_s}\right)^T \end{array}\right] + \left(J_e^T\right)^{-1} u & (2\text{-}16) \end{cases}
$$

システム Σ_e の制御を考えるとき y_s，q_s に関する情報を全く用いないで y，q を制御できるかどうかが問題になる．Σ_e の導出自体は自明であるが，この制御の問題に対して解を得るには，後述するように上式のような定式化が適していると考えられる．

このように作業座標で記述されたシステムでは一般化座標 x を作業座標 y の関数とみなすという操作が含まれているので，たとえ具体的な例が与えられても Σ_T，Σ_e の右辺を y の関数として陽に記述することは一般にできない．また既に述べたように Σ_T や Σ_e の記述は一般にグローバルなものではない．しかし，システムの力学的な構造に着目して制御則を導びくには，次章で述べるようにこれらのことは全く問題にならない．なお，$\det J(x) = 0$ となる x の集合では，結局，作業座標 y のうち独立なものだけが制御でき

るので，それを新めてξとおきシステムΣ_eの制御に帰着させればよい．また，このような特異点の集合は上で述べたように配置空間で測度ゼロの集合になるので，これを避けて作業を行うように制御できると考えられるが，そのとき特異点の集合に近づいても制御に支障をきたすことがないようにしなければならない．例えば，$J(x)$の逆行列を演算するような方式[6]や従来のようにξからxへの変換を含む方式はこのような観点からすればあまり好しくない方法であると考えられる．

運動方程式は運動エネルギーTによって導びかれる部分とポテンシャルエネルギーVによって導びかれる部分にわかれるが，システムの複雑さは一般に運動エネルギーから導びかれる部分によるものである．[4],[10] 具体的な運動方程式は付録Aに記述しているが，Tによって導びかれる力（遠心力やコリオリ力）は各リンク間の接続の仕方に関係して現われるもので自由度を増すごとに急激に複雑さを増す．これに対してVによって導びかれる力，すなわち重力項は各リンクの長さや重量を与えれば比較的簡単に算出できる（付録A）．詳しくは付録A, Bに述べるが，実用的な面からいって実時間で算出可能なのはせいぜい重力項，作業座標およびヤコビアンまでで，それ以外の項は精度や信頼性の面からいっても実時間算出は難しいと考えられる．もっとも，これは使用する計算機の能力に左右されるが，いずれにしてもかなり膨大な計算が必要であり，はたして実際に算出する必要，価値があるのか検討しなければならないと思われる．

3. 状態フィードバックによるマニピュレータの運動制御方式

3.1 フィードバック制御則の導出

ロボットのマニピュレータに作業させるために最低限要求される機能は，end effector を可能な範囲内で希望の位置へ制御できることである．より一般的に言えば作業座標の値を目標値に到達させることである．任意の初期条件（$\mathbf{y}^T, \dot{\mathbf{y}}^T$）から目標値（$\mathbf{y}^T, \dot{\mathbf{y}}^T$）=（$\bar{\mathbf{y}}^T, \mathbf{0}^T$）に到達させる最も確実な方法は点（$\bar{\mathbf{y}}^T, \mathbf{0}^T$）が漸近安定になるようにシステムの構造を修正することであるといえる．なぜなら，運動している間に外乱が加わったりして動きが乱されても（$\bar{\mathbf{y}}^T, \mathbf{0}^T$）が漸近安定なら結局は目標値に収束することが保証されるからである．一般の非線形システムでは，このような安定化制御は難しい問題とされているが，mechanical system では，よく知られている力学的な事実から容易に一つの安定化の方法が導びかれる．すなわち，系のポテンシャルが極小値をとる位置は安定であり，さらに完全な減衰を与えれば漸近安定になる[17]ということから，まず系のポテンシャルエネルギーの形を改善し，さらに完全なダンピングを与えればよいと考えられる．

まず作業座標 $\mathbf{y}$ に関するダイナミクス Σ_T について考える．制御の目的を考慮して望ましいポテンシャル関数が選ばれたとする．それを $V^0(\mathbf{y})$ と書くことにすると，このポテンシャルエネルギーを実現する入力 u_p は

$$\mathbf{u}_p = J^T\left\{ \left(\frac{\partial V}{\partial \mathbf{y}}\right)^T - \left(\frac{\partial V^0}{\partial \mathbf{y}}\right)^T \right\}$$

$$= \left(\frac{\partial V}{\partial \mathbf{x}}\right)^T - J^T\left(\frac{\partial V^0}{\partial \mathbf{y}}\right)^T \qquad (3-1)$$

となる．$V^0(\mathbf{y})$は$\mathbf{y}=\bar{\mathbf{y}}$で極小値$V^0(\bar{\mathbf{y}})=0$をとる正定値関数とする．ここで$\Sigma_T$（2−11）式の$\mathbf{u}$に

$$\mathbf{u} = \left(\frac{\partial V}{\partial \mathbf{x}}\right)^T - J^T\left(\frac{\partial V^0}{\partial \mathbf{y}}\right)^T + \mathbf{w} \qquad (3-2)$$

を代入するとΣ_Tは次のようになる．

$$\dot{\mathbf{y}} = \left(\frac{\partial \bar{H}}{\partial \mathbf{q}}\right)^T \qquad (3-3)$$

$$\dot{\mathbf{q}} = -\left(\frac{\partial \bar{H}}{\partial \mathbf{y}}\right)^T + (J^T)^{-1}\mathbf{w} \qquad (3-4)$$

ここで$\bar{H}$は

$$\bar{H} = T(\mathbf{y}, \mathbf{q}) + V^0(\mathbf{y}) \qquad (3-5)$$

で定義される正定値関数である．制御入力$\mathbf{w}$は点，$(\mathbf{y}^T, \mathbf{q}^T) = (\bar{\mathbf{y}}^T, 0^T)$が漸近安定になるように決めるが，そのために,関数$\bar{H}$がリャプノフ関数となるようにすることを考える．そこで,$\bar{H}$を(3−3),(3−4)式の解軌道に沿って微分すると次式が得られる．

$$\frac{d}{dt}\bar{H} = \left(\frac{\partial \bar{H}}{\partial \mathbf{y}}\right)\dot{\mathbf{y}} + \left(\frac{\partial \bar{H}}{\partial \mathbf{q}}\right)\dot{\mathbf{q}}$$

$$= \left(\frac{\partial \bar{H}}{\partial \mathbf{q}}\right)(J^T)^{-1}\mathbf{w} = \dot{\mathbf{y}}^T(J^T)^{-1}\mathbf{w} \qquad (3-6)$$

従ってwを

$$w = -J^T Q \dot{y} \qquad (3-7)$$

と選べば（3-6）式は

$$\frac{d}{dt}\bar{H} = -\dot{y}^T Q \dot{y} \qquad (3-8)$$

となる．ここで行列Qは正定値対称とする．（3-8）式より$\bar{H}$はリャプノフ関数となり，さらに集合$\{(y^T, q^T)\ ;\ \frac{d}{dt}\bar{H}=0\}$は，点$(\bar{y}^T, 0^T)$以外に全軌道[19]を含まないのでリャプノフ－ラ・サール－レフシェッツの定理[19]より$(\bar{y}^T, 0^T)$は大域的に漸近安定になる．（3-7）式のwは作業座標に沿って減衰を与えるダンピングの効果があると考えられる．

次にwとして

$$w = -Q\dot{x} \qquad (3-9)$$

を考える．物理的には，これはマニピュレータの各自由度（各関節角など）に減衰を与える形になっている．（3-9）式を（3-6）式に代入すれば

$$\frac{d}{dt}\bar{H} = -\dot{y}^T (J^T)^{-1} Q \dot{x} = -\dot{x}^T Q \dot{x} = -\dot{y}^T (J^T)^{-1} Q J^{-1} \dot{y}$$

となるので（3-9）式のwもシステム（3-3），（3-4）式を漸近安定化させることがわかる．

その他にもシステムに完全な減衰を与える仕方，すなわち，（3-6）式の右辺を$\dot{y}$あるいは$\dot{x}$に関して負定値にするようなwの選び方は色々考えられるが

(3-7), (3-9) 式のwが最も簡単である.
さらに, (3-7), (3-9) 式のwはそれぞれある意味で最適性を満足していることが示される.
まず評価関数

$$I_1 = \int_0^\infty \left\{ \frac{1}{2} \dot{x}^T Q \dot{x} + \frac{1}{2} w^T Q^{-1} w \right\} dt$$
$$= \int_0^\infty h_1(\dot{y}, w)\, dt \qquad (3\text{-}10)$$

を最小にするwを考える. この評価関数I_1の積分内オ1項は, 配置空間内での運動をなるべく滑らかにすることを, またオ2項はなるべくパワーの消費を少くすることを目指していると考えられる.
この最適問題はリャプノフ-ベルマンの方法[20]によって解くことができる. まず関数$\varphi(t)$を

$$\varphi(t) = \int_t^\infty h_1(\dot{y}(\tau), w(\tau))\, d\tau$$

とすれば, 最適性のためのハミルトン-ヤコービの方程式は, この場合次式のように書ける.

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} = \min_{w} \left\{ h_1(\dot{y}, w) + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}, \frac{\partial \varphi}{\partial q}\right) \begin{pmatrix} \dot{y} \\ \dot{q} \end{pmatrix} \right\} \qquad (3\text{-}11)$$

(3-11)式右辺の{ }内でwを含む部分を書き下すと

$$[w\text{を含む部分}] = \frac{1}{2} w^T Q^{-1} w + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial q}\right) (J^T)^{-1} w$$
$$= \frac{1}{2} \left\{ w + Q J^{-1} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial q}\right)^T \right\}^T Q^{-1} \left\{ w + Q J^{-1} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial q}\right)^T \right\}$$
$$- \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial q}\right) (J^T)^{-1} Q J^{-1} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial q}\right)^T$$

となるので最適制御$\boldsymbol{w}^*$は次式を満たさねばならない。

$$\boldsymbol{w}^* = -\,Q\,J^{-1}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial \boldsymbol{q}}\right)^T \qquad (3\text{-}12)$$

従って最適制御$\boldsymbol{w}^*$を求めるためには(3-11)式を満たす関数$\varphi(t)$を求めればよい。[20] ところが，φとして$\varphi=\bar{H}$を選ぶと（3-11）式が満たされることが確められる。よって最適制御$\boldsymbol{w}^*$は（3-12）式より

$$\boldsymbol{w}^* = -\,Q\,J^{-1}\left(\frac{\partial\bar{H}}{\partial \boldsymbol{q}}\right)^T = -\,Q\,J^{-1}\dot{\boldsymbol{y}} = -\,Q\,\dot{\boldsymbol{x}} \qquad (3\text{-}13)$$

のようになり，（3-9）式の$\boldsymbol{w}$が評価関数I_1（(3-10)式）を最小にする最適制御であることがわかる。
　評価関数としてI_1のかわりに

$$I_2 = \int_0^\infty \left\{ \frac{1}{2}\,\dot{\boldsymbol{y}}^T Q\,\dot{\boldsymbol{y}} + \boldsymbol{w}^T J^{-1} Q^{-1} (J^T)^{-1} \boldsymbol{w} \right\} dt \qquad (3\text{-}14)$$

を考えると同様にして　$\boldsymbol{w} = -J^T Q\,\dot{\boldsymbol{y}}$　がI_2を最小にする最適制御であることが示される。
　このようにして（3-7），（3-9）式のようにダンピングとして考えた速度のフィードバックが上で述べたような意味で最適性を満足していることがわかりその制御入力としての意義が明確になった。評価関数I_1，I_2に応じて制御則は次のように書ける。

$$I_1 \cdots \qquad \boldsymbol{u} = \left(\frac{\partial V}{\partial \boldsymbol{x}}\right)^T - J^T\left(\frac{\partial V^0}{\partial \boldsymbol{y}}\right) - Q\,\dot{\boldsymbol{x}} \qquad (3\text{-}15)$$

$$I_2 \cdots \qquad \boldsymbol{u} = \left(\frac{\partial V}{\partial \boldsymbol{x}}\right)^T - J^T\left(\frac{\partial V^0}{\partial \boldsymbol{y}}\right) - J^T Q\,\dot{\boldsymbol{y}} \qquad (3\text{-}16)$$

また両方のダンピングを合せて

$$u = \left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^T - J^T\left(\frac{\partial V^0}{\partial y}\right)^T - Q_1\dot{x} - Q_2\dot{y} \qquad (3-17)$$

を制御則として用いることが考えられる．ただし，Q_1, Q_2は正定値対称行列である．

一方，ポテンシャル関数$V^0(y)$については，最適性の観点から解析的な解を得ることは難しいと思われる．ポテンシャル関数の形は運動の方向を特徴づける重要な要因であり，様々な観点からの導出を試みることできる．例えば，作業空間においてend-effectorの位置をある面（曲面）や線（曲線）に拘束しながら目標値に到達させたいという場合には，拘束したい面や線からの距離に関する正定値関数をポテンシャル関数として新に付加することが考えられる．その他にも，腕のとる姿勢によって変化する慣性行列$R(x)$を考慮に入れてポテンシャル関数を変化させる等の方法も考えられるが，実用性を考えれば，あまり複雑な関数を考えると制御演算の実時間処理の点で問題がある．最も簡単な形は

$$V^0(y) = \frac{1}{2}(y-\bar{y})^T W(y-\bar{y}) \qquad (3-18)$$

のような２次形式であると考えられる．ここで行列Wは正定値対称行列である．このポテンシャルより導びかれる力は

$$\left(\frac{\partial V^0}{\partial y}\right)^T = W(y-\bar{y})$$

となり，位置の線形フィードバックで与えられる．

本論文では，この最も簡単な場合について考察する．すなわち，制御則が

$$u = \left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^T - J^T W(y - \bar{y}) - Q_1 \dot{x} - J^T Q_2 \dot{y} \qquad (3-19)$$

で与えられるものを考える．

作業座標 y は，その一部は適当なセンサーから直接計測できるかもしれないが，全てが直接計測できるとは限らないので，ある座標成分は計算機で一般化座標 x から算出しなければならない．

フィードバックゲイン W，Q（Q_1, Q_2）の選び方は本制御則を適用する上で重要な問題になるが，今のところ，系の応答をみながら試行錯誤によって徐々に改善していく以外に有効な方法は得られていない．ただし，ゲイン W，Q の物理的な意味が明確なので，改善する際にある程度は直観的に調整することができる．

以下の数節では，本制御則のいくつかの性質について考察する．

3・2 作業に対して冗長性のある場合

本節では，冗長性のある場合，すなわち，$m > n$ のときにも（3－19）式の制御則が有効なのかどうかについて考察する．なお，$m = n$ で $\det J(x) = 0$ となる場合も前章で述べたように結局ここで述べる考察に帰着される．

ここで考えるべきシステムは Σ_e（(2-15), (2-16) 式）である．制御の目的は（y^T, $\dot{y}^T$）に関する情報だけを用いて（y^T, $\dot{y}_e^T$）を目標値（$\bar{y}^T$, 0^T）に到達させることである．そのために前節と同じく制御則

(3-19) 式を用いる．ただし，各行列のサイズは J が $m \times n$，W が $m \times m$，Q_1 が $n \times n$，Q_2 が $m \times n$ $(m \times n)$ となっている．この制御則を用いた時のシステム Σ_e における $(\dot{y}^T, \dot{y}_e^T)$ に関する漸近安定性について考える．制御されたシステムのハミルトニアンは

$$\bar{H} = T(y_e, q_e) + \frac{1}{2}(y - \bar{y})^T W (y - \bar{y}) \qquad (3\text{-}20)$$

である．(3-19) 式の u のうち $u_p = \left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^T - J^T W (y - \bar{y})$ の効果を考えると J_e の定義より

$$\begin{aligned}(J_e^T)^{-1} u_p &= (J_e^T)^{-1}\left\{\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^T - J^T W (y - \bar{y})\right\} \\ &= \left(\frac{\partial V}{\partial y_e}\right)^T - W (y - \bar{y})\end{aligned}$$

となることより (3-20) 式の $\bar{H}$ がハミルトニアンとなることがわかる．この u を入力した Σ_e の解に沿って $\bar{H}$ を微分すれば (3-8) 式に対応して次式が得られる．

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\bar{H} &= \left(\frac{\partial \bar{H}}{\partial y_e}\right)\dot{y}_e + \left(\frac{\partial \bar{H}}{\partial q_e}\right)\dot{q}_e \\ &= -\dot{y}_e (J_e^T)^{-1}\{Q_1 \dot{x} + J^T Q_2 \dot{y}\} \\ &= -\dot{y}_e^T (J_e^T)^{-1} Q_1 J_e^{-1} \dot{y}_e - \dot{y}^T Q_2 \dot{y} \qquad (3\text{-}21)\end{aligned}$$

直観的にみれば，ポテンシャルエネルギーは $y = \bar{y}$ で極小値をとり完全なダンピングが与えられているので $y \to \bar{y}$ となることが予想される．しかし，y_e の空間でみると未知のベクトル y_s の分だけ任意性があ

るので(3-21)式の関係だけから$y \to \bar{y}$となることはいえない。この問題に対して，Oziraner と Rumiantsev らの「状態変数の一部分に関する安定性」の定理[21]を用いて考察することができる。彼らの結果をこのシステムに適用すると次のように述べることができる。

『y_sが常に有界であるなら$(y^T, \dot{y}_e^T)=(\bar{y}^T, 0^T)$の漸近安定性は，次のような正定値関数$v(y_e, \dot{y}_e)$の存在によって保証される。

(i) ある単調増加な連続関数$a(r)$ $(a(0)=0)$があって

$$v(y_e, \dot{y}_e) \geq a(\|(y^T, \dot{y}_e^T)\|) \tag{3-22}$$

(ii) $\dot{v}(y_e, \dot{y}_e) < 0 \cdots (y^T, \dot{y}_e^T) \neq (\bar{y}^T, 0^T)$

$\dot{v}(y_e, \dot{y}_e) = 0 \cdots (y^T, \dot{y}_e^T) = (\bar{y}^T, 0^T)$

(iii) 集合$\{(y_e^T, \dot{y}_e^T);\ \dot{v}=0\}$は$(\bar{y}^T, 0^T)$以外に全軌道を含まない。』

そこでvとしてHを考えると上で述べた条件(i)，(ii)，(iii)が全て満足されていることがわかる。従って，$(y^T, \dot{y}_e^T) \to (\bar{y}^T, 0^T)$となるためには$y_s$が有界であればよい。一般化座標$x$が全て角度を表すなら，$x$は有界なので$y_s$も適当に選ぶことによって有界にできる。従って，全ての自由度が回転要素よりなる場合には(3-19)式の制御則によって$y \to \bar{y}$となる。これは，一部の座標にのみ剛性を与え他の座標は無制御の状態にしておく制御の方法で作業が可能であることを示している。例えば，マニピュレータに水の

入ったコップを移動させる作業では，水をこぼさないようにするためには，end-effectorの姿勢を制御して，コップが鉛直軸に対して傾かないようにしなければならない．姿勢を表すには3つの独立なパラメータが必要だが，コップを傾けないようにするには，このうち2個を制御すればよく，残り1つのパラメータは自由にしておけばよい．関節角度レベルで目標値を与えなければならない従来の方式では，この残りのパラメータにも何らかの目標値を与えなければならない[10]が，本論文の方法では，無制御状態にすることが容易に実現でき，しかも，その有効性が保証されている．

一般化座標xがスライド変位を含むような場合にはy_sの有界性は限ずしも明白ではないので，厳密には大域的な漸近安定性を保証することはできない．このような場合には，リャプノフの方法によって一般的に漸近安定性を保証することはほとんどできないと考えられる[21]．しかし，物理的な観点からみれば，この場合xが有界でなくなるということはほとんど考えられず，数学的に厳密な保証はないが，一部の座標成分を無制御にするという方法は，この場合も適用できるものと考えられる．

3・3 拘束条件が付加されたシステム

外界より拘束をうけつつ行う作業は少くない．例えば，クランクを回転させる作業や作業物体の表面をならうというような作業では，特定の座標では拘束をうける．このような拘束は実際には不確定なものであり，厳密には定式化されにくいが，多くの場合，本質的には，ホロノミックな拘束条件として

処理できると考えられる。
本節では，システムΣ_Tに次のr個の拘束条件が付加された場合を考える。

$$\Psi(y) = (\psi_1(y), \ldots, \psi_r(y))^T = 0 \qquad (3\text{-}23)$$

関数$\psi_1, \ldots, \psi_r$はyに関して十分滑らかとする。作業座標が適当に選ばれれば，これらの関数の形は明白になる。また，$\psi_1, \ldots, \psi_r$は独立であるとする。すなわち

$$\operatorname{rank}\left(\frac{\partial \Psi}{\partial y}\right) = r \qquad (3\text{-}24)$$

とする。(3-23)式の拘束条件のもとでは仮想変位δyは次式を満たさなければならない。

$$\left(\frac{\partial \Psi}{\partial y}\right)\delta y = 0 \qquad (3\text{-}25)$$

仮定より，yのなかで$(n-r)$個の独立な成分があるので一般性を失うことなくyは独立な部分$y_I \in R^{n-r}$，とこのy_Iに従属な部分$y_D \in R^r$に分割され，$y^T = (y_I^T, y_D^T)$と書けるとする。(3-25)式より

$$\left(\frac{\partial \Psi}{\partial y}\right)\delta y = r\left\{\left(\underbrace{\frac{\partial \Psi}{\partial y_I}}_{n-r} ; \underbrace{\frac{\partial \Psi}{\partial y_D}}_{r}\right)\begin{pmatrix}\delta y_I \\ \delta y_D\end{pmatrix} = 0 \qquad (3\text{-}26)$$

となる。ここで$\det\left(\frac{\partial \Psi}{\partial y_D}\right) \neq 0$と仮定できるので$\delta y_D$は

$$\delta y_D = -\left(\frac{\partial \Psi}{\partial y_D}\right)^{-1}\left(\frac{\partial \Psi}{\partial y_I}\right)\delta y_I = D(y_I)\,\delta y_I \qquad (3\text{-}27)$$

と書ける。さて，(3−23)式の拘束が付加されたシステムの方程式は$\mathcal{Y}_I$のみでハミルトニアンを記述すれば得られる。以下では，$\mathcal{Y}_D$は$\mathcal{Y}_I$の関数とみなす。拘束されたシステムでの$\mathcal{Y}_I$に対応する一般化力$\mathcal{U}_c$は(3−27)式より仮想仕事を計算することによって次式のように算出される。

$$\mathcal{U}_c = \mathcal{V}_I + D^T \mathcal{V}_D \tag{3-28}$$

ここで，$\mathcal{V}_I \in R^{n-r}$，$\mathcal{V}_D \in R^r$は，$(J^T)^{-1}\mathcal{u} = \mathcal{V}$とおいたとき，$\mathcal{Y}^T = (\mathcal{Y}_I^T, \mathcal{Y}_D^T)$に対応して$\mathcal{V}^T = (\mathcal{V}_I^T, \mathcal{V}_D^T)$と分割したものである。これより，拘束条件(3−23)式が付加された運動方程式は次式のように書ける。

$$\Sigma_C \begin{cases} \dot{\mathcal{Y}}_I = \left(\dfrac{\partial T_c}{\partial \mathcal{q}_I}\right)^T & (3-29) \\[2ex] \dot{\mathcal{q}}_I = -\left(\dfrac{\partial T_c}{\partial \mathcal{Y}_I}\right)^T - \left(\dfrac{\partial V_c}{\partial \mathcal{Y}_I}\right)^T + \mathcal{V}_I + D^T \mathcal{V}_D & (3-30) \end{cases}$$

ここで$\mathcal{q}_I$は$\mathcal{Y}_I$に対応する一般化運動量で，T_c，V_cは$T(\mathcal{Y}, \mathcal{q})$，$V(\mathcal{Y})$を$\mathcal{Y}_I$，$\mathcal{q}_I$だけで記述したものである。

さて，(3−30)式で重力項$(\partial V_c/\partial \mathcal{Y}_I)^T$が

$$\left(\frac{\partial V_c}{\partial \mathcal{Y}_I}\right)^T = \left(\frac{\partial V}{\partial \mathcal{Y}_I}\right)^T + \left(\frac{\partial \mathcal{Y}_D}{\partial \mathcal{Y}_I}\right)^T \left(\frac{\partial V}{\partial \mathcal{Y}_D}\right)^T = \left(\frac{\partial V}{\partial \mathcal{Y}_I}\right)^T + D^T \left(\frac{\partial V}{\partial \mathcal{Y}_D}\right)^T \tag{3-31}$$

と書けることに注意すると，この重力項を補償するためには

$$\begin{pmatrix} \mathcal{V}_I \\ \mathcal{V}_D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \left(\dfrac{\partial V}{\partial \mathcal{Y}_I}\right)^T \\[2ex] \left(\dfrac{\partial V}{\partial \mathcal{Y}_D}\right)^T \end{pmatrix} = \left(\frac{\partial V}{\partial \mathcal{Y}}\right)^T$$

としておけばよいことがわかる。そこで，Σ_cにおいて

て $(\mathbf{y}_I^T, \mathbf{q}_I^T) = (\bar{\mathbf{y}}_I^T, \mathbf{0}^T)$ を漸近安定にするためには $\mathbf{v}$ を次のように選べばよいことがわかる。

$$\mathbf{v} = \begin{bmatrix} \mathbf{v}_I \\ \mathbf{v}_D \end{bmatrix} = \left(\frac{\partial V}{\partial \mathbf{y}}\right)^T - \begin{Bmatrix} W(\mathbf{y}_I - \bar{\mathbf{y}}_I) + Q\dot{\mathbf{y}}_I \\ \mathbf{0} \end{Bmatrix} \quad (3\text{-}32)$$

ただし，ゲイン行列 W，Q は $(n-r)\times(n-r)$ となる。
この $\mathbf{v}$ に対応する $\mathbf{u}$ は次式のようになる。

$$\mathbf{u} = J^T\mathbf{v} = \left(\frac{\partial V}{\partial \mathbf{x}}\right)^T - J^T \begin{Bmatrix} W(\mathbf{y}_I - \bar{\mathbf{y}}_I) + Q\dot{\mathbf{y}}_I \\ \mathbf{0} \end{Bmatrix} \quad (3\text{-}33)$$

制御則（3-33）式は，拘束条件のもとで独立な座標成分 $\mathbf{y}_I$ だけを制御し，従属な成分については無制御状態にする方式を表している。すなわち，従属な成分を自由にしておくことで，外界より無理な力をうけずに作業を実行させることが，この制御則によって実現されると考えられる。

対象物から拘束をうける作業の簡単な例として，マニピュレータにクランクを回転させる場合を考える。Fig.1-2 のように，空間に（X, Y, Z）の座標をとりクランクは（X, Y）平面にあるとする。end-effector（以下ではハンドと呼ぶ）の空間座標を（x, y, z）とし，r，ϕ を図のように定めると，作業変数としては（r, ϕ, z）およびハンドの姿勢を表す３つのパラメータを選んでくればよい。ここで，ハンドがクランクの取手を完全に把握していれば，r = const. z = const. という拘束条件がつく。また，ハンドの

姿勢のうち，X−Y平面内の回転を拘束すると運動に無理が生じてくる．従って，r，zおよびハンドのX−Y平面内の回転を表す座標成分にはフィードバックループを組まず，残りの成分，すなわち，ϕとハンドの姿勢の残りの成分についてのみフィードバックすることによって，クランクから無理な力をうけずに，クランクを回転させることができる．ここで，姿勢の一成分を自由にしておくことの妥当性は前節で述べた議論による．

ハンドのz方向の拘束が不十分であるときは，z方向にもフィードバックする必要があるが，これは，クランクを回転させる作業とは無関係に実行される．また，ϕ方向の制御を考えると，ϕのxによるヤコビ行列は簡単に求まって

$$\left(\frac{\partial\phi}{\partial x}\right) = \left(\frac{1}{r}\cos\phi, -\frac{1}{r}\sin\phi\right)\begin{pmatrix}\frac{\partial X}{\partial x}\\ \hdashline \frac{\partial Y}{\partial x}\end{pmatrix}$$

となる．これらのことから，上で述べたフィードバック制御ではクランクの回転角ϕさえ計測できれば，クランクの回転中心の位置等は全く知る必要がなく，また，フィードバックゲインW（いまの場合スカラーになる）にrの値を含めて考えることができるので，結局，rの値，すなわち，クランクの腕の長さも知る必要がないということがわかる．

3・4　配置空間での位置制御

一般の作業座標制御では，ポテンシャルエネルギーを改善するためには実時間で常に重力項$(\partial V/\partial x)^T$を補償する必要がある．これは，本論文では目標値

$\bar{y}$に対応する一般化座標$\bar{x}=f^{-1}(\bar{y})$を未知としているので，目標値での重力項をあらかじめ計算しておくことができないからである．線形化の理論[22]によれば，目標値の十分近くでは，目標値で線形化されたシステムを漸近安定化することによって，もとの非線形システムにおいても漸近安定性が保証されるので，目標値近傍で考える限り，線形のフィードバックと目標値を平衡点化する定値バイアス，すなわち，目標値における重力項によってシステムを漸近安定にできる[23]．

本節では，この線形フィードバックと定値バイアスよりなる制御則が，目標値の近傍だけでなく，十分広い範囲で用いることができることを示す．そのために，まず，実現するポテンシャル関数として次のものを考える．

$$V^0(x) = V(x) - V(\bar{x}) - \left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)(\bar{x})(x-\bar{x}) + \frac{1}{2}(x-\bar{x})^T W (x-\bar{x}) \tag{3-34}$$

ここで$\bar{x}$は配置空間での目標値である．このポテンシャル関数は次の線形フィードバックと定値バイアスよりなる入力によって実現される．

$$u_p = \left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^T(\bar{x}) - W(x-\bar{x}) \tag{3-35}$$

ここで制御則

$$u = \left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^T(\bar{x}) - W(x-\bar{x}) - Q\dot{x} \tag{3-36}$$

を用いて $x \to \bar{x}$ とするためには (3-34) 式の $V^0(x)$ が $x=\bar{x}$ で最小値をとる正定値関数であればよいが、そのためには $V^0(x)$ が狭義の凸関数[24]であれば十分である。これが可能であることを示すために、まず、$V^0(x)$ を x について微分する。

$$\left(\frac{\partial V^0}{\partial x}\right)^T = \left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^T(x) - \left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^T(\bar{x}) + W(x-\bar{x}) \qquad (3\text{-}37)$$

従って、

$$V^0(\bar{x})=0\ , \quad \left(\frac{\partial V^0}{\partial x}\right)(\bar{x}) = 0 \qquad (3\text{-}38)$$

が成立つ。さらに (3-37) 式を x で微分すれば

$$\left(\frac{\partial^2 V^0}{\partial x_i \partial x_j}\right) = \left(\frac{\partial^2 V}{\partial x_i \partial x_j}\right) + W \qquad (3\text{-}39)$$

が得られる。$V^0(x)$ が狭義の凸関数であるための必要十分条件は任意の x に対して

$$\left(\frac{\partial^2 V}{\partial x_i \partial x_j}\right) + W > 0 \qquad (3\text{-}40)$$

が成立つことである[24]。ところが、一般のマニピュレータでは $\left(\partial^2 V/\partial x_i \partial x_j\right)$ の各要素は任意の x に対して有界である（付録A）ので (3-40) 式が成立つように行列 W を選ぶことができる。すなわち、(3-36) 式の制御則によって $x \to \bar{x}$ とすることができることがわかる。このようにして、非線形システムであるマニピュレータのダイナミクスが単純な線形フィードバックと定値バイアスよりなる制御則によって大域的に安定化されることが示される。また、ゲイン行列

W，Qは特に対角行列に選ぶことができる．このことは，各自由度間の複雑な非線形の動的相互干渉にもかかわらず，各自由度を独立に制御する，いわゆるローカルな制御方式の有効性を示している．

3・5 過渡応答に関する若干の考察

導出した制御則(3−19)式は，非線形のmechanical systemにおいて目標値$(\bar{y}^T, 0^T)$を漸近安定にし，また，制御則中，ダンピングの項は，ある意味で最適性を満していることが3・1節で示されたが，目標値に到達するまでの過渡的な応答について評価することは難しい．よりよい応答を得るためには制御系のパラメータを調整しなければならないが，そのための定量的な目安を解析的に得ることは非常に難しく，いまのところ，試行錯誤に頼らざるを得ないと考えられる．定性的に言えば，速応性を得るには位置のゲインWを大きくすればよいが，大きくしすぎると振動的になりオーバーシュートを起す．ところで，本論文では配置空間をn次元ユークリッド空間R^nと仮定して議論しているが，xが角度を表すときには，配置空間はトーラスの積空間となり前節までの結果は全空間では成立しなくなる．従って，制御則(3−19)式によって$y \to \bar{y}$となる領域を明確にする必要がある．ここでは簡単のため$y = x$とし(3−36)式の制御則を用いる場合を考える．配置空間をn次元のトーラスとする．まず，xの閉集合Aを次のように定義する．

$$A = \{ x \ ; \ |x_i - \bar{x}_i| \leq \pi \quad i = 1, \ldots, n \}$$

一般化速度$\dot{x}$は$t=0$で$\dot{x}(0)=0$とする．ここで，(3−36)式の制御則によって上で定義した集合Aから外へ出ることなしに$x \to \bar{x}$となる位置$x(0)$の集合を考える．正の実数μを

$$\mu = \min \left[V^0(x) \ ; \ |x_i - \bar{x}_i| = \pi \quad i=1,\ldots,n \right]$$

と定義する．すると，$V^0(x)$の凸性から，任意の正数εに対して　$V^0(x) < \mu - \varepsilon$　なら$x \in A$となることが示される．関数Hは解軌道に沿って非増加であり，$\dot{x}(0)=0$としているので，全ての$t>0$に対して$V^0(x(0)) < \mu$なら$V^0(x(t)) < \mu$となる．したがって凸集合

$$M = \{ x \ ; \ V^0(x) \leq \mu \}$$

が求める集合になる．

次に，一般のyについても同様にして上で定義した集合Mに相当するものが求められるが，xからyへの変換$f^{-1}(y)$の計算が含まれるので具体的にそれを求めるのは非常に複雑である．

目標値と現在値（初期値）が離れすぎている時には（3−19）式の制御則を用いると初期の段階で入力が過大になり装置に支障を招く恐れがある．このような場合には，過渡応答を良くするためにも，目標値と現在値の間を補間して途中目標値をいくつか設定し，それらを経由して目標値に到達させるという方法が実用的である．

4. 目標軌道追従制御系の設計

4.1 目標軌道追従制御系

前章では，任意の点$\boldsymbol{y}$から目標値$\bar{\boldsymbol{y}}$へ到達させる制御則として（3-19）式を導出し，その有効性を理論的に示した．実際には，多くの作業では，目標値へ到達するまでの経路や運動状態にも制約が加えられるので単に目標値を与えてそれに到達させるというだけでは実用的には十分ではない．作業空間における経路だけが問題になる場合には，目標値までの間を適当に補間していくつかの途中目標値を設定し，各々の途中目標値点間で（3-19）式の制御則を用いればよいが，経路だけでなく，その変化率や移動速度も指定される場合には，作業空間に設定した軌道に追従させる制御方式が必要になると考えられる．

作業空間に目標軌道$\bar{\boldsymbol{y}}(t)$（$0 \leq t \leq T$）が与えられたとする．初期条件$\boldsymbol{y}(0)$，$\dot{\boldsymbol{y}}(0)$を与えれば，軌道$\bar{\boldsymbol{y}}(t)$を実現する入力$\bar{\boldsymbol{u}}(t, \boldsymbol{y}(0), \dot{\boldsymbol{y}}(0))$は理論上運動方程式から直接計算される[8]が，この$\bar{\boldsymbol{u}}(t)$だけの開ループ系では現実には軌道の追従性は保証されない．すなわち，軌道に関する漸近安定性が保証されなければならない．そのために目標軌道（$\bar{\boldsymbol{y}}^T(t)$, $\bar{\boldsymbol{q}}^T(t)$）に関する変分方程式系の安定化について考察する．ここで$\bar{\boldsymbol{q}}(t)$は$\bar{\boldsymbol{q}}(t) = (J^T)^{-1} R J^{-1} \dot{\bar{\boldsymbol{y}}}$より計算される．まず，$\Sigma_T$（2-11）式の$\boldsymbol{u}$に$\boldsymbol{u} = \bar{\boldsymbol{u}} + \delta\boldsymbol{u}$を代入し，$\delta\boldsymbol{y} = \boldsymbol{y} - \bar{\boldsymbol{y}}$，$\delta\boldsymbol{q} = \boldsymbol{q} - \bar{\boldsymbol{q}}$とおけば，目標軌道（$\bar{\boldsymbol{y}}^T(t)$, $\bar{\boldsymbol{q}}^T(t)$）に関する変分方程式は次式のように記述される．

$$\Sigma_L ; \frac{d}{dt}\begin{bmatrix}\delta y \\ \delta q\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}A(t) & C(t) \\ -B(t) & -A^T(t)\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\delta y \\ \delta q\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}0 \\ (J^T)^{-1}\end{bmatrix}\delta u \qquad (4-1)$$

ここで行列 $A(t)$, $B(t)$, $C(t)$ は

$$A(t) = \left(\frac{\partial^2 H}{\partial y_i \partial q_j}\right)(\bar{y}, \bar{q}) \qquad B(t) = \left(\frac{\partial^2 H}{\partial y_i \partial y_j}\right)(\bar{y}, \bar{q})$$

$$C(t) = \left(\frac{\partial^2 H}{\partial q_i \partial q_j}\right)(\bar{y}, \bar{q}) = J^T R^{-1} J(\bar{y}) \qquad (4-2)$$

を表す．（4－1）式のシステムは時変系であるが，目標軌道の変化率，すなわち，軌道の速度 $\dot{\bar{y}}$ が十分小さくて，係数の時間的変化が十分ゆるやかであると仮定する．このような仮定のもとでは，(4－1)式のシステムの安定性は各時刻で定数系として議論してよいことが知られている.[25] 従って，以下では，システム Σ_L を定数系として考え，時間のパラメータ t は省略する．定数系として考えたシステム Σ_L に対しては，例えば，非干渉制御や最適レギュレータなどの線形システム論的な制御の手法が適用できるが，これらは係数行列 A，B，C の具体的な値を用いるので，一般に非常に複雑な手続き[11] や膨大な容量のメモリを要することになる.[13] 実用性を考えると，Σ_L に対しても係数行列の値に依存しない制御則が望ましい．

Σ_L を安定化させる制御則として次のものを考える．

$$\delta u = -J^T(W\delta y + Q\delta\dot{y}) \quad (W, Q > 0) \qquad (4-3)$$

ここで正定値関数$v(\delta y, \delta\dot{y})$を次のように定義する．

$$v = \frac{1}{2}(\delta y^T, \delta\dot{y}^T)\begin{pmatrix} B - A^T C^{-1} A + W & 0 \\ 0 & C^{-1} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \delta y \\ \delta\dot{y} \end{pmatrix} \qquad (4-4)$$

この関数vは，制御則（4-3）式を入力したΣ_Lのハミルトニアンであることが確かめられる．ただし，行列Wは，$B - A^T C^{-1} A + W > 0$となるように選んでいるとする．vを（4-3）式を入力したΣ_Lの解軌道に沿って微分すると次式が得られる．

$$\dot{v} = -\delta\dot{y}^T Q \delta\dot{y} \qquad (4-5)$$

これよりvはリャプノフ関数となり，前章で述べたのと同様の議論から，システムが漸近安定になることが示される．このように，軌道追従制御においても（3-19）式と同じ形をした制御則（4-3）式が有効であることがわかる．ゲインW，Qは，(4-4)式のvが正定値であり，$\dot{v}$が$\delta\dot{y}$に関して負定値である限り任意でよく，軌道の時間変化にかかわらず一定のままでよい．しかし，よりよい応答を得るためには，前章で述べたと同様，試行錯誤によって良いゲインを選ぶ必要がある．

4.2 フィードバックゲインの最適性

線形制御系では，最適性[26]を満足するシステムは制御系としていくつかの有効な性質を持っているこ

とが知られている.[26]~[28] そこで，本節では，(4−3)式の制御則におけるフィードバックゲインW，Qをシステムが最適性を満たすように選べるかどうかについて考察する．簡単のため，$y = x$とし係数行列のうち$\dot{x}(t)$に関して2次以上のものを無視するとΣ_Lは次のように書ける．

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} \delta x \\ \delta\dot{x} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} O & I \\ -R^{-1}G & O \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \delta x \\ \delta\dot{x} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} O \\ R^{-1} \end{pmatrix}\delta u$$

$$= A\begin{bmatrix} \delta x \\ \delta\dot{x} \end{bmatrix} + B\,\delta u \qquad (4-6)$$

ここに行列Gは　$G = \left(\partial^2 V / \partial x_i \partial x_j\right)$ である．次の評価関数に関する最適レギュレータを考える．

$$\int_0^\infty \left\{ (\delta x^T, \delta\dot{x}^T)\, T \begin{pmatrix} \delta x \\ \delta\dot{x} \end{pmatrix} + \delta u^T S\, \delta u \right\} dt \qquad (4-8)$$

ここで重み行列T，Sは正定値対称とする．このとき，最適制御δu^*はリッカチの方程式[26]

$$A^T X + XA - XBS^{-1}B^T X = -T \qquad (4-9)$$

の正定値解Xを用いて

$$\delta u^* = -S^{-1}B^T X\begin{bmatrix} \delta x \\ \delta\dot{x} \end{bmatrix} = K\begin{bmatrix} \delta x \\ \delta\dot{x} \end{bmatrix} \qquad (4-10)$$

となる.[26] ここで行列T，Xを

$$T = \begin{bmatrix} T_{11} & T_{12} \\ T_{12}^T & T_{22} \end{bmatrix} \qquad X = \begin{bmatrix} X_{11} & X_{12} \\ X_{12}^T & X_{22} \end{bmatrix}$$

と分割する．さらに$T_{12}=O$とすると（4−9)式のリッカチの方程式は次のように分解される．

$$-(G R^{-1} X_{12}^T + X_{12} R^{-1} G) - X_{12} R^{-1} S^{-1} R^{-1} X_{12}^T = -T_{11} \qquad (4-11)_1$$
$$X_{11} - X_{22} R^{-1} G - X_{22} R^{-1} S^{-1} R^{-1} X_{12}^T = O \qquad (4-11)_2$$
$$X_{12} + X_{12}^T - X_{22} R^{-1} S^{-1} R^{-1} X_{22} = -T_{22} \qquad (4-11)_3$$

ゲイン行列Kは次式のように書ける．

$$K = -S^{-1}[O \ R^{-1}]\begin{bmatrix} X_{11} & X_{12} \\ X_{12}^T & X_{22} \end{bmatrix} = [-S^{-1}R^{-1}X_{12}^T, -S^{-1}R^{-1}X_{22}]$$

ここで$S^{-1}R^{-1}X_{12}^T = K_2$，$S^{-1}R^{-1}X_{22} = K_1$ とおき，さらに，$X_{22}=R$とおき，$K_2 = K_2^T$ とすると$(4-11)_1$〜$(4-11)_3$は

$$G S K_2 + K_2 S G + K_2 S K_2 = T_{11} \qquad (4-12)_1$$
$$X_{11} = K_2 + G \qquad (4-12)_2$$
$$R^{-1} S K_2 + K_2 S R^{-1} - K_1 = -T_{22} \qquad (4-12)_3$$

となる．従って，最適性を満たすための十分条件として，

$$K_1 > O, \ K_2 + G > O, \ K_1 - (R K_1^{-1} K_2 + K_2 K_1^{-1} R) > O \qquad (4-13)$$

が得られる．（4−13）式より，$K_2 = W$を$W + G > O$となるように選び，$K_1 = Q$は（4−13）式の最後の式が満たされるように十分大きくとれば，上で述べた

ような意味で最適性を満していることがわかる。

4·3　定常特性の改善

ここでは目標軌道が最終値 $\bar{y}(T)$ に到達したとし，目標値 $(y^T, \dot{y}^T) = (\bar{y}^T(T),\ 0^T)$ 近傍での解の様子を考察する。考えるシステムはこの場合も(4−1)式で，係数も定数行列と考えてよい。したがって，制御則も(4−3)式を用いればよいと考えられる。しかし，実際には，重力補償計算の誤差や機械的な固体摩擦等のために定常偏差が残るのが普通である。このような定常偏差を解消するためには，積分形のフィードバックを用いればよい[28]が，そのゲインの選び方も係数行列に依存しないものが望ましい。

まず，(4−1)式の Σ_L に未知の外乱（定値とする）が加わったシステムを考える。ただし，このとき係数行列のうちで $\dot{y}$ に関係する項は全て消えるので次のようになる。

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} \delta y \\ q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & C \\ -\bar{G} & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \delta y \\ q \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ (J^T)^{-1} \end{bmatrix}\delta u + \begin{bmatrix} 0 \\ d \end{bmatrix} \qquad (4-14)$$

ここで d は未知外乱であり，$\bar{G}$ は次式で定義される。

$$\bar{G} = \left(\frac{\partial^2 V}{\partial y_i \partial y_j}\right)(\bar{y}(T))$$

制御則として，(4−3)式の状態フィードバックに積分形フィードバックを加えた次式のものを考える。

$$\delta u = -J^T\left(W\delta y + Q\dot{y} + S\int_0^t \delta y\, d\tau\right) \qquad (4-15)$$

このδuを(4-14)式に代入するとδyは次式を満足する．

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix}\delta y\\ \delta\dot{y}\\ \delta\ddot{y}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & I & 0\\ 0 & 0 & I\\ -CS & -C(\overline{G}+W) & -CQ\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\delta y\\ \delta\dot{y}\\ \delta\ddot{y}\end{bmatrix} \tag{4-16}$$

フィードバックゲインSは，(4-16)式のシステムが安定になるように決める必要がある．そこで，(4-16)式のシステムの固有方程式を求めると

$$|C^{-1}\lambda^3+Q\lambda^2+(\overline{G}+W)\lambda+S|=0 \tag{4-17}$$

となる．ここで$S>0$として，(4-17)式の根が全て負の実部を持つ条件を考える．いまλが(4-17)式の根ならば，ある複素ベクトルaがあって

$$\lambda^3 C^{-1}a+\lambda^2 Qa+\lambda(\overline{G}+W)a+Sa=0 \tag{4-18}$$

となる．(4-18)式の左からa^*をかけると

$$\lambda^3 a^*C^{-1}a+\lambda^2 a^*Qa+\lambda a^*(\overline{G}+W)a+a^*Sa=0 \tag{4-19}$$

となる．ただし，a^*はaの共役転置ベクトルを表す．ここで，行列C，Q，$\overline{G}$，W，Sの固有値をそれぞれc_i，q_i，$\overline{g}_i$，w_i，s_i ($i=1\sim n$)とし，それぞれ

$$c_m\le c_i\le c_M,\quad q_m\le q_i\le q_M,\quad \overline{g}_m\le\overline{g}_i\le g_M$$
$$w_m\le w_i\le w_M,\quad s_m\le s_i\le s_M$$

となっているとすると

$$\frac{1}{C_M} \leq \frac{a^* C^{-1} a}{a^* a} \leq \frac{1}{C_m}, \quad q_m \leq \frac{a^* Q a}{a^* a} \leq q_M, \quad \cdots, \quad s_m \leq \frac{a^* S a}{a^* a} \leq s_M$$

となるので(4-19)式をa^*aで割ったものにフルヴィッツの安定条件[29]を適用することにより，次式の安定性のための十分条件が得られる.

$$q_m (\bar{q}_m + w_m) > s_M / c_m \tag{4-20}$$

従って，$S>0$の範囲でその固有値を十分小さくすれば(4-16)式は安定であることがわかる. Sも当然，対角行列でかまわない.

4·4 Σ_Lの指数安定性について

4·1節では(4-4)式の関数υがリャプノフ関数となることからシステムΣ_Lが漸近安定になることを述べたが，$\dot{\upsilon}$は(4-5)式に示されるように状態変数に関して半負定値になっているので，前章同様，リャプノフ－ラ·サール－レフシッツの定理が必要であった．一般に，システムが指数関数的に漸近安定であることを示すためには，その時間微分が状態変数に関して負定値であるようなリャプノフ関数を見い出さねばならない[19]．ところが，線形システムでは，一般的な条件のもとで，時間微分が半負定値であるリャプノフ関数から，時間微分が負定値であるリャプノフ関数を構成できることが知られている[20]．そこで，本節では，このような関数を構成することを考える.

まず，もとになるのは(4-4)式のυであるが，ここではこれをυ_1と記し，行列Xを

$$X = \begin{bmatrix} B - A^T C^{-1} A & 0 \\ 0 & C^{-1} \end{bmatrix}$$

とおく．すなわち

$$v_1 = \frac{1}{2}(\delta y^T, \delta \dot{y}^T) X \begin{pmatrix} \delta y \\ \delta \dot{y} \end{pmatrix} \qquad (4-4)'$$

とする．状態変数は，$(\delta y^T, \delta \dot{y}^T)$ を用いるので，(4−3) 式を入力したシステム Σ_L を $(\delta y^T, \delta \dot{y}^T)$ で書くと次のようになる．

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} \delta y \\ \delta \dot{y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & I \\ -C(B+W-A^T C^{-1} A) & -C(A^T C^{-1} - C^{-1} A + Q) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta y \\ \delta \dot{y} \end{bmatrix}$$

$$= \Gamma \begin{bmatrix} \delta y \\ \delta \dot{y} \end{bmatrix} \qquad (4-21)$$

すると (4−5)式の関係は，次のリャプノフの式で表わされる．

$$\Gamma^T X + X \Gamma = -\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & Q \end{pmatrix} \qquad (4-22)$$

ここで，行列 Γ の形が $\Gamma = \begin{pmatrix} 0 & I \\ * & * \end{pmatrix}$ となっていることから次の関係が得られる．

$$\Gamma^T \begin{pmatrix} Q & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Gamma = \begin{pmatrix} 0 & * \\ I & * \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Q & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & I \\ * & * \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & Q \end{pmatrix} \quad (4-23)$$

この関係を用いると，(4-22)式の両辺に前から $(\Gamma^T)^{-1}$，後から Γ^{-1} をかけることによって次式が得られる．

$$\Gamma^T\left((\Gamma^T)^{-1}X\Gamma^{-1}\right)+\left((\Gamma^t)^{-1}X\Gamma^{-1}\right)\Gamma=-\begin{pmatrix} Q & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (4-24)$$

これより新しいリャプノフ関数として

$$v_2=\frac{1}{2}(\delta y^T,\delta\dot{y}^T)(\Gamma^T)^{-1}X\Gamma^{-1}\begin{pmatrix}\delta y \\ \delta\dot{y}\end{pmatrix} \quad (4-25)$$

が得られた．さらに，システムの指数安定を保証するリャプノフ関数として　$v_3=\alpha v_1+\beta v_2$ $(\alpha,\beta>0)$ が得られる．v_3 の時間微分は

$$\dot{v}_3=\alpha\dot{v}_1+\beta\dot{v}_2=-\alpha\delta\dot{y}^TQ\delta\dot{y}-\beta\delta y^TQ\delta y \quad (4-26)$$

となり，状態変数に関して負定値となっている．対応するリャプノフの式は次のようになる．

$$\Gamma^T\left(\alpha X+\beta(\Gamma^T)^{-1}X\Gamma^{-1}\right)+\left(\alpha X+\beta(\Gamma^T)^{-1}X\Gamma^{-1}\right)\Gamma$$
$$=-\begin{pmatrix}\beta Q & 0 \\ 0 & \alpha Q\end{pmatrix} \quad (4-27)$$

行列 $\alpha X+\beta(\Gamma^T)^{-1}X\Gamma^{-1}$ を計算すると次のようになる．

$$\alpha X+\beta(\Gamma^T)^{-1}X\Gamma^{-1}=\begin{pmatrix}\bar{X}_{11} & \bar{X}_{12} \\ \bar{X}_{12}^T & \bar{X}_{22}\end{pmatrix}$$

$$\bar{X}_{11} = \alpha \Gamma_2 + \beta \left\{ C^{-1} + \Gamma_1 \Gamma_2^{-1} \Gamma_1 \right\}$$
$$\bar{X}_{12} = \beta \Gamma_1 \Gamma_2^{-1} C^{-1}$$
$$\bar{X}_{22} = \alpha C^{-1} + \beta C^{-1} \Gamma_2^{-1} C^{-1} \qquad (4\text{-}28)$$

ただし，$\Gamma_1 = A^T C^{-1} - C^{-1} A + Q$，$\Gamma_2 = B + W - A^T C^{-1} A$
とおいた。

(4-27) 式のリャプノフ式から収束指数を見積もることができる。残念ながら (4-27) 式は非常に複雑な形をしているので ((4-28) 式も含めて) 簡単な方法で収束指数を見積もるのは難しく，現在のところは数値計算に頼らざるをえない。なお，(4-27) 式，(4-28)式は次章でも用いる。

5. 適応的な軌道制御方式

5・1　制御則および適応調整則の導出

前章では，軌道追従制御について考察し，(3−19)式の制御則と同じ形をした簡単な制御則(4−3)式によって軌道の追従性が保証されることを示した．しかし，そこでは，開ループで目標軌道を実現する入力 $\overline{u}(t)$ については何も考察しなかった．この $\overline{u}(t)$ は(2−10)，(2−11)式より次のように計算される．

$$\overline{u}(t) = J^{T}(x)\left\{\dot{\overline{q}} + \left(\frac{\partial H}{\partial y}\right)^{T}(\overline{y}, \overline{q})\right\} \qquad (5-1)$$

ここで $\dot{\overline{y}}$ に関して2次以上の項を落すと

$$\overline{u}(t) = J^{T}(x)\left\{(J^{T})^{-1}RJ^{-1}\ddot{\overline{y}} + \left(\frac{\partial V}{\partial y}\right)^{T}(\overline{y}(t))\right\} \qquad (5-2)$$

となる．上式で｛ ｝内オ1項は軌道の加速度，オ2項は重力の影響を示している．オ2項は重力補償を実時間で行うことによって消去できるので問題となるのは結局，加速度 $\ddot{\overline{y}}$ に関する項だけになる．しかし，$\ddot{\overline{y}}$ の前にかかる係数行列 RJ^{-1} は，2章でも述べたように非常に複雑であるため，その実時間処理はほとんど望めない．従って，この項が無視できないときには，何らかの方法で補償せねばならない．

このような制御の目的に対して，本章では，リャプノフの安定論に基づいた適応制御の手法[15]を軌道追従制御に適用し，新しい軌道追従制御の一方式を導出する．

対象となるシステムは，(4−1)式の変分方程式系

であるが，ここでは状態変数を（δy^T, $\delta \dot{y}^T$）と選ぶ．すなわち，

$$\Sigma_L'\ ;\ \frac{d}{dt}\begin{bmatrix}\delta y\\ \delta\dot{y}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}O & I\\ -C(B-A^TC^{-1}A) & -C(A^TC^{-1}-C^{-1}A)\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\delta y\\ \delta\dot{y}\end{bmatrix}$$

$$+\begin{bmatrix}O\\ C(J^T)^{-1}\end{bmatrix}\delta u \qquad (5-3)$$

を考える．以下では，行列 A，B，C は全て未知として制御系の設計を行うが，上で述べたように $\bar{u}(t)$（(5-2) 式）も未知となる．ここで構成する制御系には，次の２つの目的がある．

1. システム Σ_L' を安定化する．
2. 加速度項 $\bar{u}(t)=J^TC^{-1}\ddot{y}$ および未知外乱を補償する．

この目的のために，制御入力 u を次のようにする．

$$u=\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^T(x)+J^T\left\{-K_1\delta\dot{y}-K_2\delta y+K_3\ddot{y}+k\right\} \qquad (5-4)$$

上式で，右辺才１項は重力補償，{ }内才３項は加速度補償，才４項は定値外乱の補償の役割を果すことになる．重力補償項は確定的であるが，ゲイン行列 K_1，K_2，K_3 及びベクトル k は適応的に調整して上記の目的を達成させる．（5-4）式のように u を決めると Σ_L' は次のようになる．

$$
\frac{d}{dt}\begin{bmatrix}\delta y\\ \delta\dot{y}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}O & I\\ -C(K_2+B-A^TC^{-1}A) & -C(K_1+A^TC^{-1}-C^{-1}A)\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\delta y\\ \delta\dot{y}\end{bmatrix}
$$

$$
+\begin{bmatrix}\mathbb{0}\\ (CK_3-I)\ddot{y}+C(\mathbb{k}+\mathbb{d})\end{bmatrix} \qquad (5-5)
$$

ここでベクトル$\mathbb{d}$は4.3節で述べた理由から生ずる定値の外乱である．K_3，$\mathbb{k}$は

$$
CK_3 \to I, \quad \mathbb{k}+\mathbb{d} \to \mathbb{0}
$$

となるように調整される，一方，K_1，K_2は系が安定になるように調整すればよいが，その一つの方法として

$$
-C(K_1+A^TC^{-1}-C^{-1}A) \to -\Lambda_1, \quad -C(K_2+B-A^TC^{-1}A) \to -\Lambda_2
$$

となるように調整することにする．ここで行列Λ_1，Λ_2は次の行列Λが安定になるように選ばれる．

$$
\Lambda = \begin{bmatrix}O & I\\ -\Lambda_2 & -\Lambda_1\end{bmatrix}
$$

また行列Γ_1，Γ_2を

$$
\Gamma_1 = C(K_1+A^TC^{-1}-C^{-1}A), \quad \Gamma_2 = C(K_2+B-A^TC^{-1}A)
$$

とおき，行列Γを次のように定義する．

$$
\Gamma = \begin{bmatrix} O & I \\ -\Gamma_2 & -\Gamma_1 \end{bmatrix}
$$

ここで，次の正定値関数vを導入する．

$$
\begin{aligned}
v = (\delta y^T, \delta \dot{y}^T)\, X \begin{pmatrix} \delta y \\ \delta \dot{y} \end{pmatrix} &+ \mathrm{trace}\Big\{ (\Gamma_1 - \Lambda_1)^T Y_1 (\Gamma_1 - \Lambda_1) \\
&+ (\Gamma_2 - \Lambda_2)^T Y_2 (\Gamma_2 - \Lambda_2) + (CK_3 - I)^T Y_3 (CK_3 - I) \Big\} \\
&+ (\mathbb{k} + \mathbb{d})^T C Y_4 C (\mathbb{k} + \mathbb{d}) \qquad (5-6)
\end{aligned}
$$

ただし，行列Y_i $(i = 1, \cdots, 4)$は正定値対称とする．ここで行列Xは

$$
\Lambda^T X + X \Lambda = -D \qquad (5-7)
$$

とおいてDが正定値になるように選ぶ．また，Xを次のように分解しておく．

$$
X = \begin{pmatrix} X_{11} & X_{12} \\ \underbrace{X_{12}^T}_{n} & \underbrace{X_{22}}_{n} \end{pmatrix} \begin{array}{l} \}n \\ \}n \end{array}
$$

関数vを(5-5)式の解に沿って微分すると次式が得られる．

$$\dot{v} = -(\delta y^T, \delta\dot{y}^T) D \begin{pmatrix} \delta y \\ \delta\dot{y} \end{pmatrix} + 2\,\mathrm{trace}\Big[(\Gamma_1-\Lambda_1)^T\{Y_1 C\dot{K}_1 - \mathbb{f}\,\delta\dot{y}^T\}$$

$$+ (\Gamma_2-\Lambda_2)^T\{Y_2 C\dot{K}_2 - \mathbb{f}\,\delta y^T\} + (CK_3 - I)^T\{Y_3 C\dot{K}_3$$

$$+ \mathbb{f}\,\ddot{y}^T\}\Big] + (\mathbb{k}+\mathbb{d})^T C(Y_4 C\dot{\mathbb{k}} + \mathbb{f}) \qquad (5-8)$$

ただし，ベクトル$\mathbb{f}$は次のように置いた．

$$\mathbb{f} = X_{12}^T \delta y + X_{22}\,\delta\dot{y} \qquad (5-9)$$

行列$\dot{K}_1 \sim \dot{K}_3$およびベクトル$\dot{\mathbb{k}}$は，(5-8)式右辺の才2項以降が全て0になるように決める．たとえば，$\dot{K}_1$は，$\dot{K}_1 = C^{-1}Y_1^{-1}\mathbb{f}\,\delta\dot{y}^T$とすればよいが，$C$は未知なので$Y_1$を適当に与えてもこれは計算できない．ところが，$C$は正定値対称行列なので重み行列$Y_1 \sim Y_4$を

$$Y_i = \left(\frac{1}{\gamma_i}\right) C^{-1} \quad (\gamma_i > 0) \quad i = 1, \cdots, 4 \qquad (5-10)$$

と選べば，$\dot{K}_1 \sim \dot{K}_3$，$\dot{\mathbb{k}}$は次のように決定される．

(i) $\dot{K}_1 = \gamma_1 \mathbb{f}\,\delta\dot{y}^T$ (ii) $\dot{K}_2 = \gamma_2 \mathbb{f}\,\delta y^T$

(iii) $\dot{K}_3 = -\gamma_3 \mathbb{f}\,\ddot{y}^T$ (iv) $\dot{\mathbb{k}} = -\gamma_4 \mathbb{f}$ (5-11)

これらの調整則を用いれば (5-8)式は

$$\dot{v} = -(\delta y^T, \delta\dot{y}^T) D \begin{pmatrix} \delta y \\ \delta\dot{y} \end{pmatrix}$$

これより，$t \to \infty$ で $(\delta \mathbb{y}^T, \delta \dot{\mathbb{y}}^T) \to \mathbb{O}^T$ となることが保証される。[30] (5−11)式で，(iii)は加速度補償，(iv)は未知外乱の補償のための適応調整則だが，$t \to \infty$ で $CK_3 \to I$，$\mathbb{k} + \mathbb{d} \to \mathbb{O}$ ではなくて，$(CK_3 - I)\ddot{\mathbb{y}} + C(\mathbb{k}+\mathbb{d}) \to \mathbb{O}$ となることが保証されることになる。また，一般に，$\Gamma_1 \to \Lambda_1$，$\Gamma_2 \to \Lambda_2$ となることは保証されないが，制御の目的としては，$(\delta \mathbb{y}^T, \delta \dot{\mathbb{y}}^T) \to \mathbb{O}^T$ となることで十分であると考えられる。

5·2　適応調整則に関する考察

前節では，リャプノフの安定論に基づいた考察から（5−11)式の4つの調整則を導びいた。安定性を保証するためには，（5−8)式の右辺オ2項以降を0にすればよく，そのためには(5−11）式の4つの調整則は同時に使わなければならない。したがって，理論的には，これらの調整則は一緒に用いることによってはじめて効果があると考える。ところで，（5−11）式をみると $\dot{K}_1$，$\dot{K}_2$ は（$\delta \mathbb{y}^T, \delta \dot{\mathbb{y}}^T$)に関して2次の関数になっているので，$K_1$，$K_2$ の変化は K_3，$\mathbb{k}$ の変化に比べてオーダ的に小さくなると考えられる。これは，次章で示すシミュレーションの結果から確かめることができる。したがって，(iii)，(iv)の加速度補償および外乱補償に対する調整則だけを用いても十分有効であると考えられる。

ゲイン $K_1 \sim K_3$，およびベクトル $\mathbb{k}$ の初期条件は，一応，任意だが，良い応答を得るためには，その選択にも注意しなければならない。$\mathbb{k}$ については，$\mathbb{k}(0) = \mathbb{O}$ でよいと考えられる。$K_1(0)$，$K_2(0)$は，行列 $\Gamma(0)$ が少くとも安定になるように選ぶべきである。今の場合，$\Gamma_1(0) = \Lambda_1$，$\Gamma_2(0) = \Lambda_2$ となるように $K_1(0)$，

$K_2(0)$を選ぶのが最も適していると考えられるが，I を安定にするには，前節でも述でたように$K_1(0)$，$K_2(0)$を次のように選べば十分である．

$$K_1(0) > 0 \ , \quad K_2(0) + B - A^T C^{-1} A > 0 \qquad (5\text{-}12)$$

特に対角行列にしておけば十分である．$K_3(0)$に関しても同じで，$K_3 = C(0)$としなくても，$K_3(0) = -\alpha I$ （$\alpha > 0$）のようにしておけばよいと思われる．

行列Xとしては，例えば，Λ_1，Λ_2 を正値対称行列とすれば，次式のようなものが考えられる．

$$X = \begin{bmatrix} \alpha\Lambda_2 + \beta(I + \Lambda_1\Lambda_2^{-1}\Lambda_1) & \beta\Lambda_1\Lambda_2^{-1} \\ \beta\Lambda_2^{-1}\Lambda_1 & \beta\Lambda_2^{-1} + \alpha I \end{bmatrix} \quad (5\text{-}13)$$

ここでα，β は正の実数とする．このとき

$$-D = \Lambda^T X + X\Lambda = -2\begin{pmatrix} \beta\Lambda_1 & 0 \\ 0 & \alpha\Lambda_1 \end{pmatrix} \qquad (5\text{-}14)$$

となる．これは，4·4節で述べたことの特別な場合になっている．特に，Λ_1，Λ_2を

$$\Lambda_1 = \mathrm{diag}\{\lambda_1^1, \lambda_1^2, \cdots, \lambda_1^n\} \quad \Lambda_2 = \mathrm{diag}\{\lambda_2^1, \lambda_2^2, \cdots, \lambda_2^n\}$$

とすれば，ベクトル$\mathfrak{f}$は次のように簡単になる．

$$\begin{aligned} \mathfrak{f} &= \beta\Lambda_2^{-1}\Lambda_1\delta\mathfrak{y} + (\alpha I + \beta\Lambda_2^{-1})\delta\dot{\mathfrak{y}} \\ &= (\cdots, \underbrace{\beta(\lambda_1^i/\lambda_2^i)\delta y_i + (\alpha + \beta/\lambda_2^i)\delta\dot{y}_i}_{\text{才 } i \text{ 項}}, \cdots)^T \quad (5\text{-}15) \end{aligned}$$

本研究では，シミュレーションおよび実験においても（5-15）式の f を用いている。

提案した適応制御系の構成をブロック線図にまとめるとFig.5-1のようになる。M.R.A.C.S.の場合と違って，reference model を用いないので，制御系の構成は，より簡単になっていることがわかる。

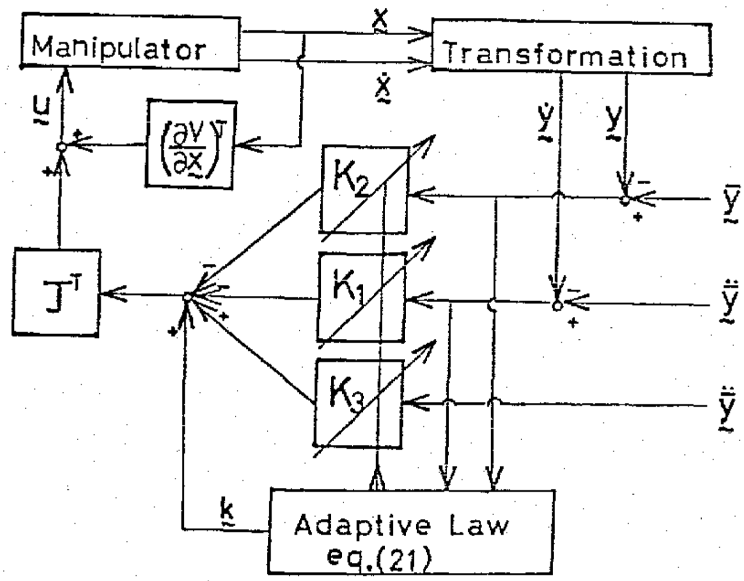


Fig.5-1 Block diagram of the adaptive control system

5·3 局所的な最適化による調整則の導出

5·1 節で，リャプノフの直接法を応用して安定性の観点から導びかれたゲインおよび k の調整則（5-11）式(i)～(iv)は，最適化の観点からも導びくことができる。

時刻 t の時点でフィードバックゲイン $K_1 \sim K_3$，およびベクトル k を改善して，微小時間 Δt 秒後に評価関数

$$P = (\delta \mathbb{y}^T, \delta \dot{\mathbb{y}}^T) X \begin{pmatrix} \delta \mathbb{y} \\ \delta \dot{\mathbb{y}} \end{pmatrix} \tag{5-16}$$

を減少させるような調整方式を考える.
$(\delta \mathbb{y}^T, \delta \dot{\mathbb{y}}^T) = \mathbb{z}^T$とおき，時刻$t$から$t+\Delta t$までゲイン（および$\mathbb{k}$）を一定としたときの応答を$\bar{\mathbb{z}}$とすれば

$$\mathbb{z}^T(t+\Delta t) X \mathbb{z}(t+\Delta t) - \bar{\mathbb{z}}^T(t+\Delta t) X \bar{\mathbb{z}}^T(t+\Delta t) \leqq 0 \tag{5-17}$$

となるようにゲインを調整すればよい.
$\mathbb{z}(t+\Delta t) - \bar{\mathbb{z}}(t+\Delta t) = \Delta \mathbb{z}$とおいて$\Delta \mathbb{z}$について2次以上の項を無視すれば（5-17）式は

$$\Delta \mathbb{z}^T X \mathbb{z}(t) \leqq 0 \tag{5-18}$$

となる．以下，Dressler の手法[31]に従って計算を進める．まず，（5-5）式で

$$\begin{bmatrix} \mathbb{0} \\ (CK_3 - I)\ddot{\mathbb{y}} + C(\mathbb{k} + \mathbb{d}) \end{bmatrix} = \mathbb{g}(t) \tag{5-19}$$

とおき，

$$\Gamma(t) = \Gamma(0) + \Delta\Gamma(t), \quad \mathbb{g}(t) = \mathbb{g}(0) + \Delta \mathbb{g}(t)$$

とする．ここで，$\Delta\Gamma(t)$，$\Delta \mathbb{g}(t)$は

$$K_1(t) = K_1(0) + \Delta K_1(t), \qquad K_2(t) = K_2(0) + \Delta K_1(t)$$
$$K_3(t) = K_3(0) + \Delta K_3(t), \qquad \mathbb{k}(t) = \mathbb{k}(0) + \Delta \mathbb{k}(t)$$

とおいたときの時変項による部分をまとめたもので $\Delta\Gamma(0) = 0$, $\Delta g(0) = 0$ である. いま補正項 $\Delta\Gamma(t)$, $\Delta g(t)$ は十分小さいとし次のようにおく.

$$\Delta\Gamma(t) = \delta\tilde{\Gamma}(t) \qquad \Delta g(t) = \delta\tilde{g}(t)$$

δ は微小な正数とする. このとき, δ に関して2次以上の項を落せば $\mathbb{z}(t)$ は

$$\mathbb{z}(t) = e^{\Gamma(0)t}\mathbb{z}(0) + \int_0^t e^{\Gamma(0)(t-\tau)} g(0)\, d\tau + \delta\int_0^t e^{\Gamma(0)(t-\tau)}\left(\tilde{g}(\tau) + \tilde{\Gamma}(\tau)\mathbb{z}(\tau)\right) d\tau$$

となる. これより, $\Delta\mathbb{z} = \mathbb{z}(t+\Delta t) - \bar{\mathbb{z}}(t+\Delta t)$ は

$$\begin{aligned}\Delta\mathbb{z} &= \delta\int_t^{t+\Delta t} e^{\Gamma(0)(t+\Delta t-\tau)}\Big\{\tilde{g}(\tau) - \tilde{g}(t) + \left(\tilde{\Gamma}(\tau) - \tilde{\Gamma}(t)\right)\cdot \\ &\qquad \cdot\mathbb{z}(\tau)\Big) d\tau \\ &= \int_0^{\Delta t} e^{\Gamma(0)(\Delta t-s)}\Big\{\delta\tilde{g}(t+s) - \delta\tilde{g}(t) + \\ &\qquad \left(\delta\Gamma(t+s) - \delta\Gamma(t)\right)\mathbb{z}(t+s)\Big\} ds \qquad (5\text{-}20)\end{aligned}$$

と計算できるが, $\Delta\mathbb{z}$ を Δt について展開すれば $(\Delta t)^2$ の項から始まり, それは次のように計算される.

$$\Delta_s z = \frac{1}{2}(\Delta t)^2 \left(\delta \dot{g}(t) + \delta \dot{\Gamma}(t) z(t) \right) \qquad (5-21)$$

したがって，$(\Delta t)^3$ 以上を無視すれば（5−18）式は

$$\Delta_s z^T X z = \frac{1}{2}(\Delta t)^2 \left\{ \delta \dot{g}^T(t) + z^T(t) \left(\delta \dot{\Gamma}^T(t) \right) \right\} X z \leqq 0 \quad (5-22)$$

となる．ここで，$\delta \dot{g}$，$\delta \dot{\Gamma}$ は

$$\delta \dot{g} = \begin{bmatrix} 0 \\ C\dot{K}_3 \ddot{y} + C\dot{k} \end{bmatrix} \qquad \delta \dot{\Gamma} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -C\dot{K}_2 & -C\dot{K}_1 \end{bmatrix}$$

であるので（5−22）式は

$$f^T (C\dot{K}_3 \ddot{y} + C\dot{k} - C\dot{K}_2 \delta y - C\dot{K}_1 \delta \dot{y}) \leqq 0 \quad (5-23)$$

となる．ここで（5−11）式の調整則(i)〜(iv)を用いれば（5−23）式が成立するので，提案した調整則（5−11）式は，ここで述べたような意味で，軌道からの偏差を減少させるように働くことがわかる．また，（5−23）式をみればわかるように，最適化の観点からすれば，（5−11）式の4つの調整則は，それぞれ独立に用いても意味があることがわかる．

前節でも述べように，$\dot{K}_1$，$\dot{K}_2$ は $\dot{K}_3$ および $\dot{k}$ に比べてオーダ的に小さいので，（5−23）式左辺の（ ）内では $C\dot{K}_3 \ddot{y} + C\dot{k}$ の項が支配的である．したがって，目標軌道への追従性を向上させるには，加速度補償，および外乱補償に対応する調整則(iii)，(iv) が特に効果があると考えられる．

6. 計算機シミュレーション

6・1 シミュレーションシステム

3，4，5章で提案した各制御方式の有効性を確めるために計算機シミュレーションを行なった。シミュレーションのために二つのシステムを用意した。一つは，Fig.6-1 に示される4自由度の固定モデル専用のシステムS.Iであり，もう一つは，回転自由度なら任意の自由度配分が選択できるシステムS.IIである。システムS.IIは，ほとんどのマニピュレータの運動をシミュレートできるが，自由度の増加につれて飛躍的に計算量が増すので，いまのところコスト的に不経済である。したがってシステムS.Iで制御則の有効性を検証し，システムS.IIは後述する実験と並行してシミュレートするときに用いた。

システムS.IIでは，付録Aで示しているような運動方程式を一般的に解いている。S.Iでは，モデルが固定されているのでS.IIに比べて細いところまで解析的に書き下せる。S.Iに用いた運動方程式は，一般化座標として $x = (\theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_4)^T$ を選ぶとラグランジュの方法によって機械的に導出できて次のようになる。

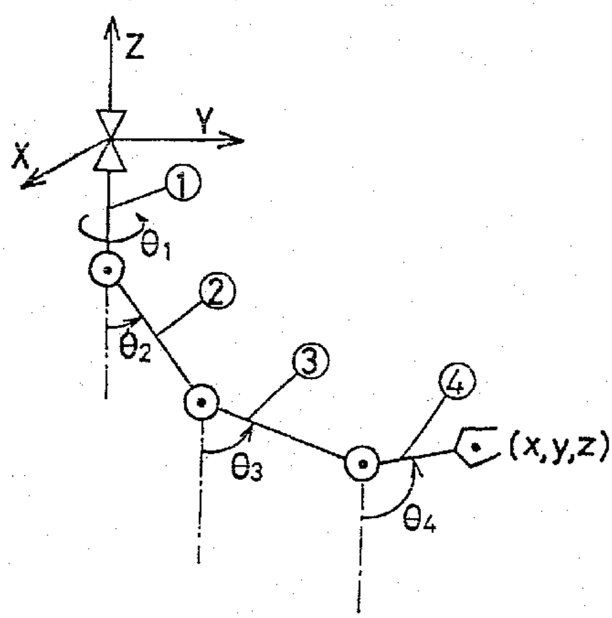


Fig.6-1 Manipulator model of system S.I

$$\dot{x} = R^{-1}(x)\,\mathbb{P} \tag{6-1}$$

$$\dot{P}_i = \frac{1}{2}\,\mathbb{P}^T R^{-1} R^i R^{-1} \mathbb{P} - g_i \sin\theta_i + u_i \tag{6-2}$$

ここで $\mathbb{P} = (P_1, P_2, P_3, P_4)^T$ である．行列R^iは

$$R^i = \left(\frac{\partial R}{\partial \theta_i}\right) \quad (i=1\sim 4)$$

と定義している．正値対称行列Rは4×4となるがその要素r_{ij} $(i, j=1\sim 4)$は次のようになる．

$$\begin{aligned} r_{11} = {} & (m_2 S_3^2 + m_3 l_2^2 + m_4 l_2^2 + I_{2y})(\sin\theta_2)^2 + (m_3 S_3^2 + m_3 l_3^2 \\ & + I_{3y})(\sin\theta_3)^2 + (m_4 l_4^2 + I_{4y})(\sin\theta_4)^2 + 2(m_3 l_2 S_3 \\ & + m_4 l_2 l_3)\sin\theta_2 \cdot \sin\theta_3 + 2 m_4 l_3 l_4 \sin\theta_3 \sin\theta_4 \\ & + 2 m_4 l_2 S_4 \sin\theta_2 \cdot \sin\theta_4 + I_{2z}(\cos\theta_2)^2 + I_{3z}(\cos\theta_3)^2 \\ & + I_{4z}(\cos\theta_4)^2 + I_{1z} \end{aligned}$$

$$r_{23} = (m_3 l_2 S_3 + m_4 l_2 l_3)\cos(\theta_2 - \theta_3) + I_{3x} + I_{4x}$$

$$r_{24} = m_4 l_2 S_4 \cos(\theta_2 - \theta_4) + I_{4x}$$

$$r_{34} = m_4 l_3 S_4 \cos(\theta_3 - \theta_4) + I_{4x}$$

$$r_{22} = m_2 S_2^2 + (m_3 + m_4) l_2^2 + I_{2x} + I_{3x} + I_{4Y}$$

$$r_{33} = m_3 l_3^2 + m_4 l_3^2 + I_{3x} + I_{4x}, \quad r_{44} = m_4 S_4^2 + I_{4x}$$

$$r_{12} = r_{13} = r_{14} = 0 , \quad r_{ji} = r_{ij}$$

重力項の係数 g_i（$i=1\sim4$）は次のようになる．

$$g_1 = 0 , \quad g_2 = (m_2 S_2 + m_3 l_2 + m_4 l_2) g , \quad g_3 = (m_3 S_3 + m_4 l_2) g$$

$$g_4 = m_4 S_4 g \qquad g = 9.8 \, m/s^2$$

ここで m_i，l_iはそれぞれ才iリンクの質量および長さを示す．S_iは才i関節から才iリンクの重心までの距離で $S_i = l_i/2$ としている．I_{ix}，I_{iy}，I_{iz}は，それぞれ才iリンクの x, y, z軸まわりの主慣性モーメントである．これらのパラメータの値は Table 6-1 のように設定している．

Table 6-1 Parameters of manipulator model of system S.I

Link	Mass(kg)	$I_x(kgm^2)$	$I_Y(kgm^2)$	$I_z(kgm^2)$	Length(m)
1	4.0	——	——	0.04	——
2	2.0	0.06	0.06	0.008	0.6
3	1.5	0.03	0.03	0.0025	0.5
4	1.0	0.01	0.01	0.0010	0.3

また，一般化力 u_i（$i=1\sim4$）は，関節トルク τ_i（$i=1\sim4$）とは次の関係がある．

$$\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tau_1 \\ \tau_2 \\ \tau_3 \\ \tau_4 \end{bmatrix}$$

この非線形微分方程式は，ルンゲ-クッタ-ジル法で解いている。以下，システムS.Iで行なったシミュレーションの結果について述べる。

6.2 シミュレーションの結果

(1) 配置空間での位置制御

まず，関節角度の形で直接目標値 $\bar{x}=(\bar{\theta}_1,\bar{\theta}_2,\bar{\theta}_3,\bar{\theta}_4)^T$ を与え，3.4節で求めた(3-36)式の制御則の有効性を確めた。フィードバックゲインWは(3-40)式が常に成立つように選ぶ必要がある。このモデルでは

$$\left(\frac{\partial^2 V}{\partial\theta_i\partial\theta_j}\right)=\begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&g_2\cos\theta_2&0&0\\0&0&g_3\cos\theta_3&0\\0&0&0&g_4\cos\theta_4\end{pmatrix}$$

となっており，この値を考慮してゲインを選んだ。Fig.6-2～Fig.6-4では，初期値を $x(0)=0$，目標値を

$$(\bar{\theta}_1,\bar{\theta}_2,\bar{\theta}_3,\bar{\theta}_4)=(0.0,0.52,0.52,0.52)\,(rad)$$

と選び，ゲインの改善とともに応答が改善される様子を示す。最初ゲインを次のように選んだときの応答をFig.6-2に示す。

$$W=diag\{0.0,10.5,9.5,5.7\} \quad \cdots(G\cdot1)$$

$$Q=diag\{0.0,9.0,6.0,3.5\} \quad \cdots(G\cdot2)$$

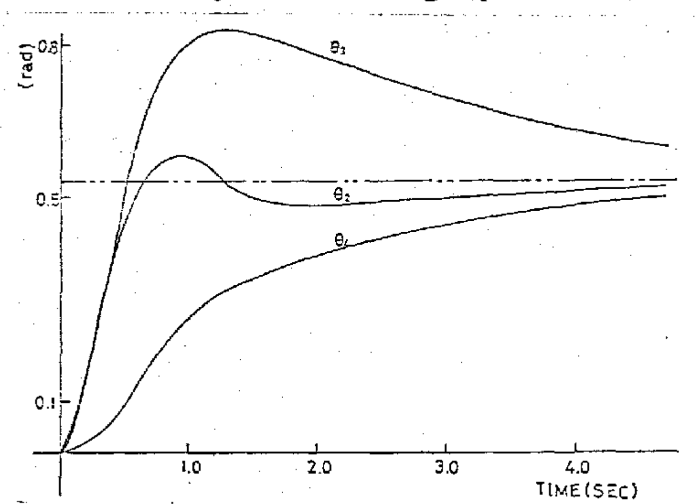


Fig.6-2 Simulation result in the configuration space. W;(G.1),Q;(G.2)

図ではこのあと $t\fallingdotseq6$ 秒程で収束しているが，

θ_2, θ_3に関してはオーバーシュートがひどく，θ_4はオーバーダンプなので，Wはそのままにして Q を

$$Q = \mathrm{diag}\{0.0,\ 11.5,\ 8.0,\ 2.3\} \quad \cdots \quad (G\cdot 3)$$

とするとFig.6-3 のような応答が得られた．さらに W, Q を

$$W = \mathrm{diag}\{0.0,\ 13.0,\ 12.5,\ 8.0\} \quad \cdots \quad (G\cdot 4)$$
$$Q = \mathrm{diag}\{0.0,\ 13.5,\ 8.5,\ 3.0\} \quad \cdots \quad (G\cdot 5)$$

としたときの応答をFig.6-4 に示す．このように，物理的な直観をもとに，フィードバックゲインW，Qを改善して良い応答を得ることができた．こうして最終的に得られたゲインは他の目標値に対しても良好な応答を示すことを確めている[32]．全く非線形補償を含まない線形フィードバック制御則(3-36)式は十分広い範囲で有効であることが確められた．なお，常

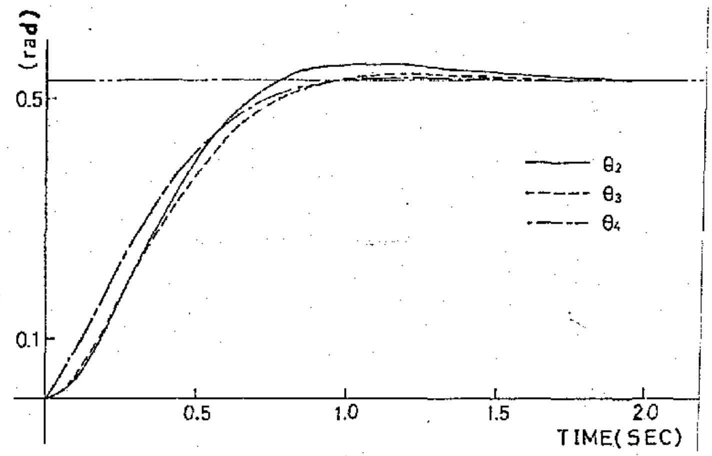


Fig.6-3 Simulation result in the configuration space. W;(G.1),Q;(G.3)

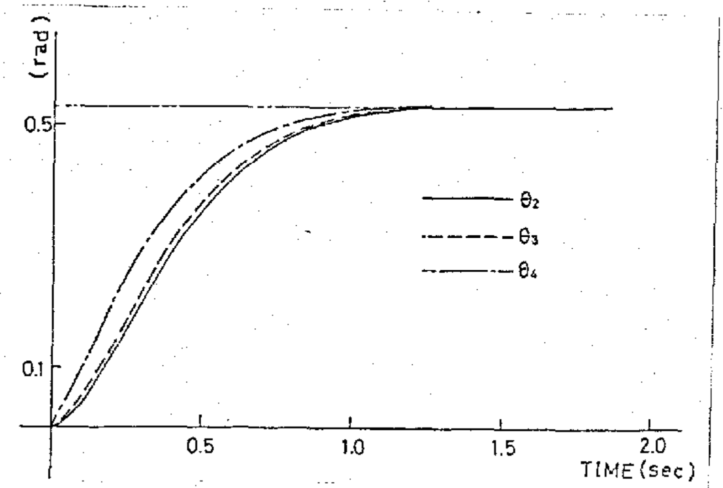


Fig.6-4 Simulation result in the configuration space. W;(G.4),Q;(G.5)

に重力項を補償すると，目標値だけで重力バイアスを計算する（3-36）式の制御則を用いたこれらの結果に比べて，応答がにぶくなった．

（2） 作業空間での位置制御および軌道制御

ここでは，作業座標フィードバック制御則（（3-19）式および（4-3）式）を用いたときの結果を示す．

a.直交座標系（Fig.6-5，Fig.6-6）

まず，Fig.6-1 に示されるように，ハンド部の空間座標（x, y, z）とθ_4を作業座標に選んだ．すなわち，$\boldsymbol{y} = (x, y, z, \theta_4)^T$とした．目標値は，

$\bar{\boldsymbol{y}} = \boldsymbol{y}(0) + \Delta\boldsymbol{y}$ の形で与えている．初期条件$\boldsymbol{x}(0)$は

$\boldsymbol{x}(0) = (\theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_4)^T = (0.0, -0.3, 1.2, 1.57)$(rad)

としている．$\Delta\boldsymbol{y}$ を

$$\Delta\boldsymbol{y} = (0.4\,m,\ 0.3\,m,\ 0.2\,m,\ 0\ rad)^T$$

で与えたときの応答をFig.6-5，Fig.6-6に示す．

Fig.6-5 は，(3-19)式の制御則を用い，ゲインW，Q_2を

$$W = \mathrm{diag}\{30,\ 30,\ 30,\ 5\} \quad \cdots \ (6\cdot 6)$$

$$Q_2 = \mathrm{diag}\{15,\ 20,\ 15,\ 5\} \quad \cdots \ (6\cdot 7)$$

としたときの応答である．ただし，$Q_1 = 0$としている．約2秒で滑らかに目標値に到達していることが図に示されている．このゲインW，Qは，何回かの

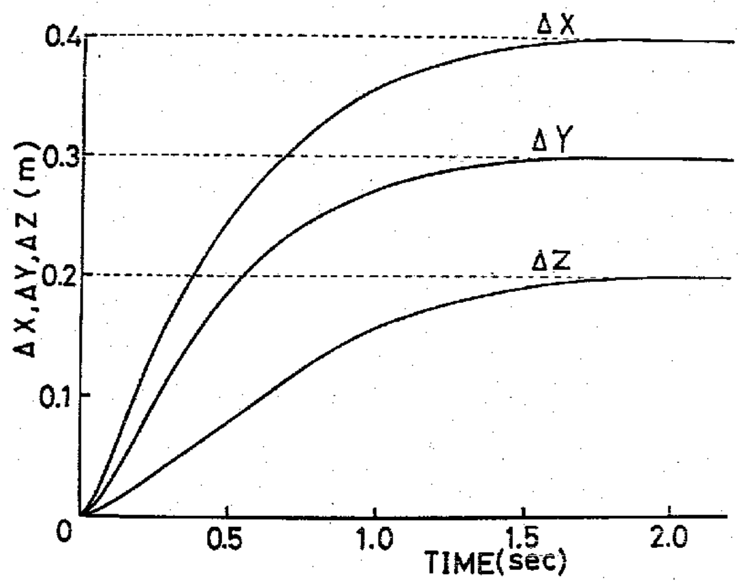


Fig.6-5. Simulation result in the Cartesian coordinates. W;(G.6),Q_2(G.7)

試行錯誤ののちに得られたが，いったんこのように選んだゲインW，Q_2は他の色々な初期値や目標値に対しても適用できることを確めている．次に，Fig. 6-6では，目標値を点線のような直線軌道に沿って変化させていったときの応答を示している．開ループで軌道を実現する入力$\bar{u}(t)$は考えず制御入力uは

$$u = \left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^T - J^T\left\{ W(y-\bar{y}(t)) + Q_2(\dot{y}-\dot{\bar{y}})\right\}$$

としている．目標軌道は$t = 1.75$ secで$\bar{y}$が最終目標値に達するよう設定している．$\dot{\bar{y}}$は，$t < 1.75$で$\dot{\bar{y}} = \Delta y/1.75$，$t \geq 1.75$で$\dot{\bar{y}} = 0$としている．
フィードバックゲインW，Q_2は(G.6), (G.7)と同じもの使っている．図に示されるように，最終目標値を過ぎてからオーバーシュートを生じているが，過渡的には，良く目標軌道に追従していることがわか

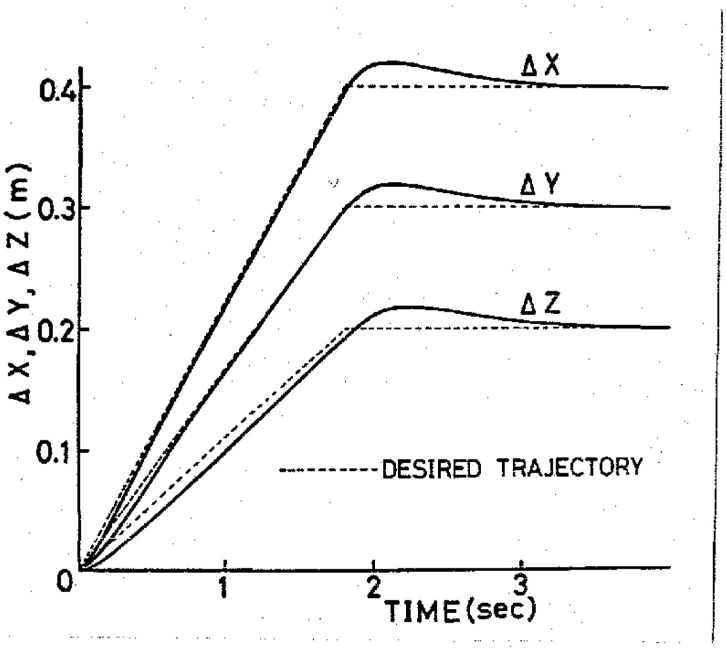


Fig.6-6 Simulation result in the Cartesian coordinate with setting a desired trajectory.

る．これらのオーバーシュートは，$\dot{y}$が不連続になるために生じたもので，途中の軌道を修正したりすることである程度抑えることができた．

他の初期条件や目標値に対してもほぼ同様の結果が得られており，(3-19)式および(4-3)式の制御則の有効性が確められた．

b.円柱座標系（Fig.6-7, Fig.6-8）

次に，作業座標としてFig.1-2 のr，ϕとz，θ_4を選び $y=(r,\phi,z,\theta_4)^T$ とした．目標軌道は，r = const.，z = const. という条件を保ちつつ，10秒間でϕが1回転するように決めている．円の半径は r = 20cm としている．初期条件$x(0)$は

$$(\theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_4) = (0, -0.7, 1.5, 1.57)\ (rad)$$

としている．ゲインW，Qは

$$W = \mathrm{diag}\{200,\ 5,\ 15,\ 3\} \quad \cdots \ (G\cdot 8)$$

$$Q = \mathrm{diag}\{200,\ 5,\ 15,\ 3\} \quad \cdots \ (G\cdot 9)$$

ここで，クランクを回転させることを想定すると r 方向には拘束をうけるので r 方向のゲインを他の方向のゲインに比べてかなり大きく選んでいる。このときの応答を Fig. 6-7，Fig. 6-8 に示す。

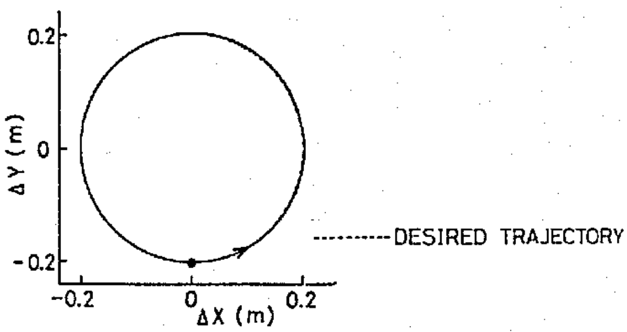


Fig.6-7 Simulation result in the cylindrical coordinates. (1) trace of the hand's position in X-Y plane.

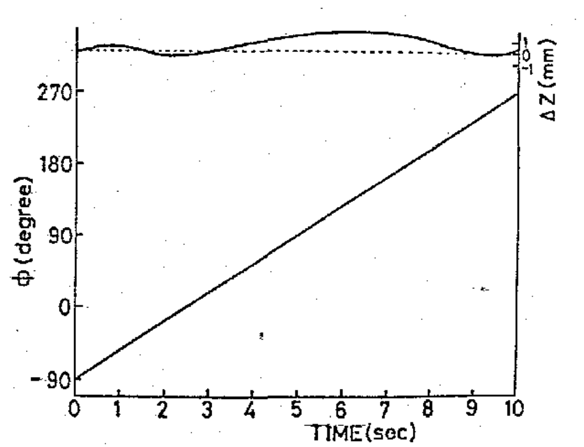


Fig.6-8 Simulation result in the cylindrical coordinates. (2) time response of ϕ and z axis.

Fig. 6-7 に示されるように，r = const. は完全に保たれている。Fig 6-8 に ϕ と z の応答を示している。z は最大 2 mm ほど変動するが，ほぼ完全に軌道に追従している。円の半径を r = 15～35 cm の間で変えたが，ほぼ同様の結果が得られている。

シミュレーションの結果をみる限り，目標値を十分ゆるやかな軌道で与える場合には，$\bar{\omega}(t)$ を考慮しなくても (4-3) 式の制御則だけで希望の作業が実行できることがわかった。

(3) 適応制御方式の有効性の検証

ここでは，5章で導出した適応的な軌道制御方式，すなわち，制御則（5−4）式とその調整則（5−11）式の有効性を調べる．最も基本的な制御則（3−19）式は，非線形の運動方程式そのものに対して理論的に有効性が保証されているのに対し，軌道制御方式（4−3）式や，とくに適応制御方式では，目標軌道は十分ゆるやかに変化するなどいくつかの仮定を含んでいるので，その有効性はシミュレーションによって十分調べる必要がある．

作業座標は $y = (x, y, z, \theta_4)^T$ をとっている．目標軌道 $\bar{y}(t)$ は，Fig.6-9のような3次関数で与えている．従って，速度 $\dot{\bar{y}}$ は，$t = 0$ および $t = T$ で0，中間点 $(t = \frac{T}{2})$ で最大となり，加速度 $\ddot{\bar{y}}$ は，図のような1次関数となる．また，$t > T$ では，$\dot{\bar{y}} = \ddot{\bar{y}} = 0$ とし，$\bar{y}(0) = y(0)$ とする．最終目標値 $\bar{y}(T)$ は，$\bar{y}(T) = y(0) + \Delta y$ で与える．Fig.6-10〜Fig.6-13に適応制御方式を用いたときの応答の一例を示す．目標値は

$$\Delta y = (0.3m, 0.3m, 0.3m, 0\,rad)^T$$

として与えている．また，角度の初期条件は

$$(\theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_4) = (0, -0.3, 1.2, 1.57)(rad)$$

としている．図では，破線が目標軌道，太線は，適応調整を用いないときの応答，細線は，適応調整を用いたときの応答を示している．まず，Fig.6-10で

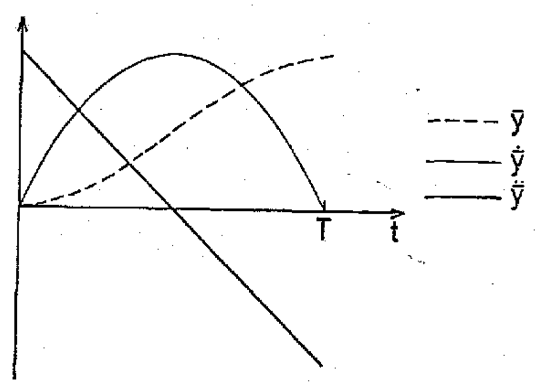


Fig.6-9 Profile of the command trajectory.

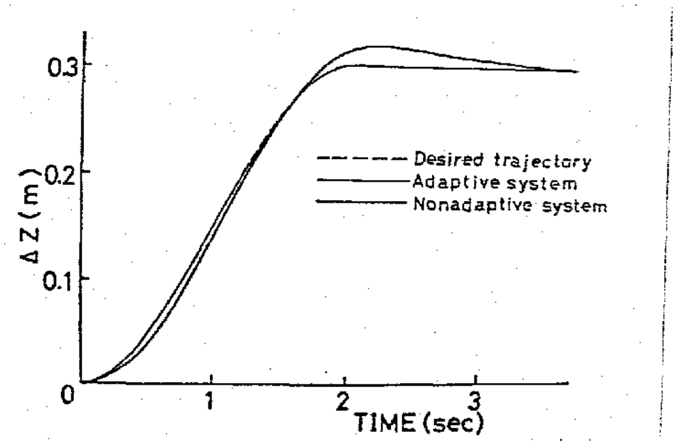


Fig.6-10 Response of the adaptive and non-adaptive system (T = 2 sec)

は，T＝2秒としたときのZ方向の応答を示す．フィードバックゲインK_1，K_2の初期値は

$$K_1 = diag\{15, 15, 15, 4\}, \quad K_2 = \{20, 20, 20, 4\} \cdots (6\cdot 10)$$

とし，K_3は，適応調整しないときは，$K_3 = 0$とし，調整するときは，$K_3 = diag\{-1, -1, -1, -1\}$としている．調整則（(5-11)式および(5-15)式のf）に現われる各パラメータは，$\gamma_1 = \gamma_2 = 30$，$\gamma_3 = 20$，$\gamma_4 = 1$とし，行列Xは，(5-13)式を用い，Λ_1，Λ_2は対角行列でΛの固有値が$-10 \pm 5i$になるように定め$\alpha = \beta = 10$とした．図のように，適応制御則を用いたときは，ほぼ完全に目標軌道に追従している．用いないときも比較的よい応答を示しているが，目標値を過ぎてからオーバーシュートが回復するまでかなり時間がかかっている．ゲインK_1〜K_3の初期条件を対角行列の形で色々に変えみたが，Fig. 6-10と同様，適応調整を用いた方が常に良い応答が得られた．

Fig.6-10.の条件でK_1～K_3の変化をみると，K_1，K_2は初期条件（G·10）の値に対して1/1000未満の変化しかなかったのに対し，K_3は初期条件と同じオーダで変化しており，（5-11）式の調整則で効果を発揮しているのは(iii)だけであることがわかった．次に，ゲインK_1，K_2を（G·10）と同じにして固定し，K_3の初期条件を

$$K_3 = \mathrm{diag}\{-1, -1, -1, -1\} \quad \cdots (G\cdot 11)$$

として，適応調整を全くしないときの応答とK_3だけを適応調整したときの応答とを比較したのがFig.6-11である．図をみれば，K_3を適応調整することが，目標軌道への追従性を向上させるのに効果があることは明白である．Fig.6-11では，目標軌道は，適応調整をしたときの応答とほとんど一致するので省い

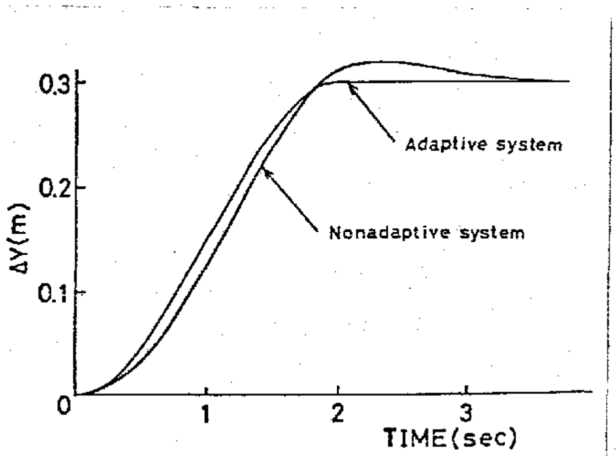


Fig.6-11 Comparison of the responses (response of the system with adaptively tuned gain K_3 and the system with fixed K_3)

ている．次に，$T=1$ 秒としたときの応答をFig.6－12に示す．フィードバックゲインの初期値は，初期値$x(0)$に対して，$\Gamma_1=\Lambda_1$，$\Gamma_2=\Lambda_2$となるようにK_1，K_2を決め，$K_3=C^{-1}$としている．また，各パラメータは，$\gamma_1=\gamma_2=0$，$\gamma_3=20$，$\gamma_4=1$，$\alpha=1$，$\beta=40$としている．さらに，Fig.6－13では，マニピュレータに物を持たせることを想定して，$t=0$で，ハンド

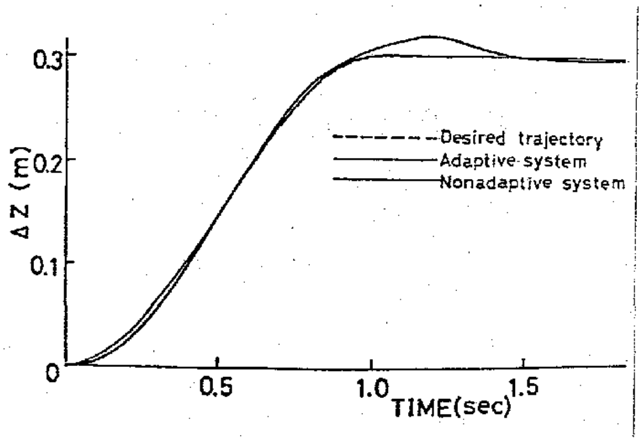


Fig.6-12　System response (T = 1 sec)

部（リンク4）の質量を2kg増加したときの応答を示している．他の条件（ゲイン，パラメータ等）は全てFig.6－12のときと同じである．ここで，適応制御をしないときには，荷重を加えたときバランスをくずして元の位置にもどらず，応答を比較しにくいので，最初だけは，あらかじめ平衡を保つようにバイアスを加えている．Fig.6－12で適応調整しないとき，ややオーバーシュートがあるが，それ程大きくはない．荷重を加えたときには，Fig.6－13に示すように，適応調整しないときは，$t=1$ 秒をすぎてもしばらく振動をつづける．重力補償項は，ハンド部に付加さ

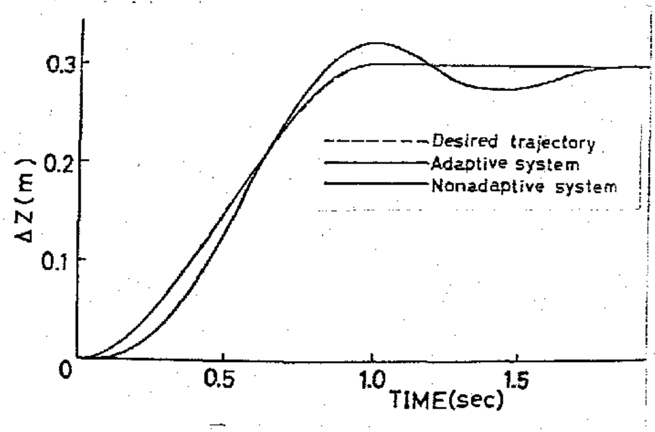


Fig.6-13 System response after grasping a load.

れた2Kgの荷重を補償していないので，適応調整しないときは最終目標値には収束せず，図では，このあとも振動をつづける（t＝3秒まで計算した）．これに対して，適応調整をしたときは，Fig.6-12，Fig6-13に示されるように，付加荷重の有無にかかわらずほぼ完全に目標軌道に追従している．荷重が付加された場合には，外乱補償項の効果が現れており，(5-11)式の調整則(iv)の有効性が確められた．

6·3 結果の考察

シミュレーションの結果より次のことがわかった．

(イ)良い応答を得るためには，試行錯誤によって，フィードバックゲインなどの制御系のパラメータを改善する必要があったが，基本的な運動に対して希望通りの応答を示すようなパラメータが得られたら，それらは，他の色々な運動に対しても同様に良い応答を示した．

(ロ)制御則（3-19）式および（4-3）式を用いるとき，物理的直観にもとづいたゲインの調整によって良い応答が得られた．

(ハ)適応的な軌道制御方式は，目標軌道の変化が十分ゆるやかであるという仮定のもとに得られたにもかかわらず，むしろ高速度の軌道追従に対して効果があった．また，加速度補償と外乱補償に関する調整機構によって，ほぼ完全に近い軌道追従性が得られた．なお，外乱補償項K_kを活すためには，$\alpha \ll \beta$とすればよいことがわかった．

(ニ)速度のゲインが大きすぎると不安定になりオーバーフローを起すことがあった。これは，物理的にみれば全く不合理だが，おそらく，離散化による計算誤差が悪影響を及ぼしているものと考えられる。

7. マニピュレータ実験システムと実験結果

7.1 実験の目的

前章では，計算機シミュレーションによって，提案した制御方式の有効性を検証した．しかし，計算機シミュレーションによって保証されるのは，結局，実物のモデルに対してたてられた運動方程式に対する有効性である．前章で述べたシミュレーションでは考慮されていない，実システムとの相違点として次のような事項があげられる．

1. 制御則の演算時間が無視されている．

2. 算出した重力項やヤコビアンの値は真の値であるとしている．

3. 実機では無視できない，固体摩擦や駆動伝達系のロス等による影響を無視している．

これらは，計算の中に組み入れられないこともないが，とくに，2.，3.の事項は，本来不確定なものなので，それらの発生メカニズムまで考慮しきれるものではないと考えられる．また，上であげた事項だけでなく，実機をあつかって始めて認識されるような問題も数多くあると考えられる．

本研究における実験の第1の目的は，提案した制御則が実際にはどの程度有効なのかを調べると同時に，現実的には，どのような問題点があって，それを克服するにはどうすればよいかということを検討

することである。次に、第2の目的は、本制御方式が、マイクロコンピューターのような低レベルのコントローラで容易に実現できることを実証し、その実用性を示すことである。

従来の産業用マニピュレータでは、高い位置精度や再現性が要求されるので、機械系の剛性が十分高くなるような機構になっているが、そのために、各関節のトルクを直接制御するのには不向きにできている。本実験で用いるために試作したマニピュレータは、トルクの制御ができるようにフレキシブルな機構になっているので、位置の精度をあげるのはそれだけに難しくなる。また、駆動伝達系にチェーンを用いているので、どうしてもガタを生じる。本実験では、このような問題をハード的にではなく、ソフト的に解決する立場をとる。

7.2 実験システム

試作したマニピュレータの自由度配分および概形はFig.1-1に示す通りである。図のように、マニピュレータは6自由度を有し、その自由度配分はほぼ人間と同様である。マニピュレータの各リンクのパラメータをTable 7-1に示す。ここで、m_iは第iリンクの質量を表し、l_iは、第i関節から第$i+1$関節までの距離を表す。第6リンクには、end-effectorとしてつかみ装置をつけ、物体を把握できるようにしている。このマニピュレータの運動方程式については付録Aで述べている。各関節のアクチュエータにはD.C.モータを用い、駆動源はD.C.アンプを用いている。D.C.アンプは、電流制御式なので直接トルクを制御することができる。また、各関節

Table 7-1 Parameters of manipulator used in experiments.

i	1	2	3	4	5	6
m_i (kg)	2.15	1.79	2.12	1.67	0.5	1.58
ℓ_i (m)	0.15	0.18	0.192	0.145	0.155	——
I_{ix} (kgm^2)	0.0051	0.017	0.0030	0.0065	0.0027	0.0012
I_{iy} (kgm^2)	0.0032	0.018	0.0021	0.0055	0.0028	0.0012
I_{iz} (kgm^2)	0.0045	0.0013	0.02	0.0015	0.01	0.0015

角度は，ポテンショメータで計る．マニピュレータの全長は0.95mで重さは約10Kgである．制御に必要な計算は全て一台のマイクロコンピューター（16ビット）によって行われる．

7・3 制御プログラム

提案した制御則を用いて実験を行っているが，制御則を単にプログラム化するというだけでは，マニピュレータに作業を行わせることはできない．すでに述べたように，制御系には調整すべきパラメータが多く含まれているので，これらを調整していくための合理的なシステムが必要になる．本実験では，シミュレーションの場合と同様，計算機との対話形式をとることによって合理的に制御系のパラメータを改善していく方法をとっている．実験のために開発した制御システムのフローチャートの概略をFig. 7－1に示す．以下，このフローチャートに沿って制御プログラムについて説明する．

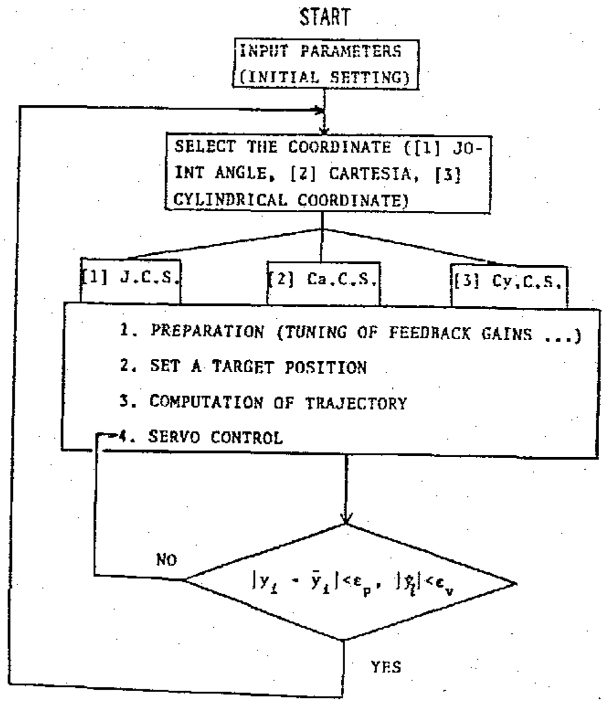


Fig.7-1 Flow chart of the control system.

(i) 初期設定

サーボシステムに入るための準備として，必要ならば，マニピュレータの自由度やリンクの質量や長さを変更し，また，各関節角度のゼロ点を調整する。

(ii) サーボシステムの選択

次に，どの座標系でサーボループを組むのかを選択する．本システムでは，(1)関節角座標（Joint Coordinate）(2) 直交座標（Cartesian Coordinate）(3)円柱座標（Cylindrical coordinate）の３つの作業座標を選択できる．それぞれの座標系に対応するサーボシステムを (1) J.C.S. (2) Ca.C.S. (3) Cy.C.S. と呼ぶことにする．

(iii) サーボシステム

上で述べた3つのサーボシステムはほとんど同じ構成になっている．まず，必要なら，フィードバックゲイン等の制御パラメータを調整したあと，目標値をそれぞれの座標系で与える．次に目標軌道を計算する．J.C.S. および Ca.C.S. では，ランプ状の軌道と Fig.6-9 のような3次関数の軌道を選べる．ここで，ランプ状の軌道（ランプ軌道）は，目標値 Δy と分割数 n を与え，途中目標値を n_c 回のサーボサイクルにつき $\Delta y/n$ だけ増加させるというもので，n，n_c を調節して目標到達時間を決める．従って，制御則は J.C.S. では (3-36) 式，Ca.C.S. では (3-19)式で，$\bar{x}$，あるいは $\bar{y}$ を上で述べたようにして変化させていくことになる．3次関数の場合には，到達時間，または，n と n_c を与えて Fig.6-9 のようにして速度および加速度を計算し，目標軌道と同時に記憶させておく．この場合は，制御則は (4-3)式の軌道制御則になる．ただし，適応制御方式については後で述べる．また，Cy.C.S. についても，方法が少し異なっているので後述する．こうして，目標軌道が計算されるとそれに沿って軌道制御が実行される．なお，目標値は，Ca.C.S. ではキーボード，J.C.S. ではキーボードか人間によるティーチングによって入力され，メモリの許す限り続けて入力できる．

(iv) 収束判定

軌道が最終目標値に達したら収束判定し，目標値に到達したと判定すれば，図のようにサーボシステムの選択のところへもどる．なお，物を持たせるような作業では，把握の状態も考慮する．

この制御プログラムによって制御パラメータの改善を能率よく行えた．また，マニピュレータの作業を合理的に実行できた．各サーボシステムのサーボサイクル（サンプリングタイムと同じ）については次節で述べる．

7・4　実験結果

上で述べた実験システムによってマニピュレータにいくつかの作業を行なわせる実験を行なった．

(1) 配置空間における位置制御（J.C.S.）

関節角度の形で目標値が与えられる場合はJ.C.S.によって制御される．J.C.S.では，目標軌道を計算するとき同時に軌道上の各点での重力項も計算してメモリーに格納し，サーボ実行時にバイアスとして順次読出していく．ここで，重力計算は，付録Aの（A−13）式で計算できるが，これは漸化式を用いることによってかなり簡単化され[33] 1回の計算時間は約20 msecとなった．なお，$\sin x_i$と$\cos x_i$の値はテーブルにして読み出すようにしており，角度については$\pi/2048$ (rad) $\doteqdot 0.09°$の分解能をもち，また，$\sin x_i$，$\cos x_i$の値は，1ビットが$1/2^9 \doteqdot 2\times10^{-3}$に相当する精度で与えられる．J.C.S.のサーボの実行時間は1サイクル当り9.8 msecとなっている．J.C.S.による制御では，ランプ軌道よりもFig. 6−9の3次関数の軌道によく追従するようであった．Fig. 7−2にその応答の一例を示す．この例では初期値は$x(0)=0$で目標値は

$$\bar{x}(T) = (\,0°,\ 0°,\ 25°,\ 45°,\ 0°,\ 47°\,)^T$$

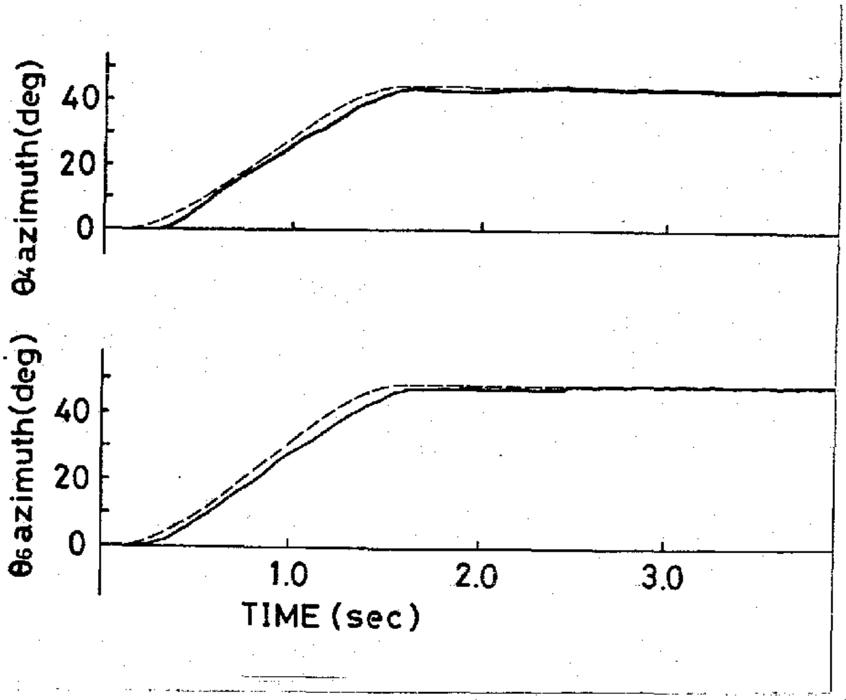


Fig.7-2 Response of the system under the control of J.C.S.

としている．なお，以下では，角度はラジアンではなく全て°(度)で表示する．軌道は80点に分割され $n_c = 2$ としているので目標到達時間は $T = 80 \times 2 \times 9.8 = 1.6$ 秒となる．フィードバックゲインW，Qは

$$W = \mathrm{diag}\{116,\ 52,\ 12,\ 311,\ 8,\ 50.5\}$$

$$Q = \mathrm{diag}\{1.15,\ 1.66,\ 0.24,\ 75.0,\ 0.29,\ 0.21\}$$

としている．また，軌道が最終目標値を過ぎてからは4·3節で述べた積分形フィードバックを追加しており，そのゲインSは

$$S = \mathrm{diag}\{45.2,\ 65.0,\ 7.35,\ 134,\ 5,\ 12.8\}$$

となっている．これらのゲインは応答をみながら徐々に大きくしていくことによって得られた．図のよ

うに，軌道に対して遅れはあるが比較的良い応答になっている．軌道が$\bar{x}(T)$に達したあとは積分フィードバックによって定常偏差が徐々に改善されていることがわかる．

J.C.S.は，作業させる最初の位置や別の作業点へハンドの位置を移す時に用いる．サーボサイクルが9.8 msecと短いので高速運動が可能である．

(2) 直交座標系での位置制御（Ca.C.S.）

水の入ったコップを移動させるような作業では，ハンドの位置だけでなくその姿勢の制御も必要である．J.C.S.を用いてもこのような作業を実行できなくはないが，そのためには，実際に作業の動作をかなり細く教示点をとってティーチングしなければならず，非常に不便である．このような作業には，Ca.C.S.が適している．作業座標は，ハンド部の空間座標（x，y，z）とハンドの姿勢を表わす変数をとる．具体的には，付録Bの(1)に示す．Ca.C.S.およびCy.C.S.では，サーボサイクルごとに重力項を計算して補償している．また，作業座標およびヤコビアンの計算（付録B）を含んでいるので，J.C.S.に比べてサーボサイクルの実行時間は長くなっており，1サイクル当り50 msecとなる．このため，Ca.C.S.では，あまり高速度の軌道に追従できず，また，3次関数の軌道よりもランプ軌道の方が良い応答を示した．Ca.C.S.によって物を運ぶときの応答の一例をFig. 7-3に示す．目標値は，ハンドの位置を

$$(\Delta x, \Delta y, \Delta z) = (-18, 17, 4)\ (\mathrm{cm})$$

だけ移動し，姿勢は一定に保つように与えている．

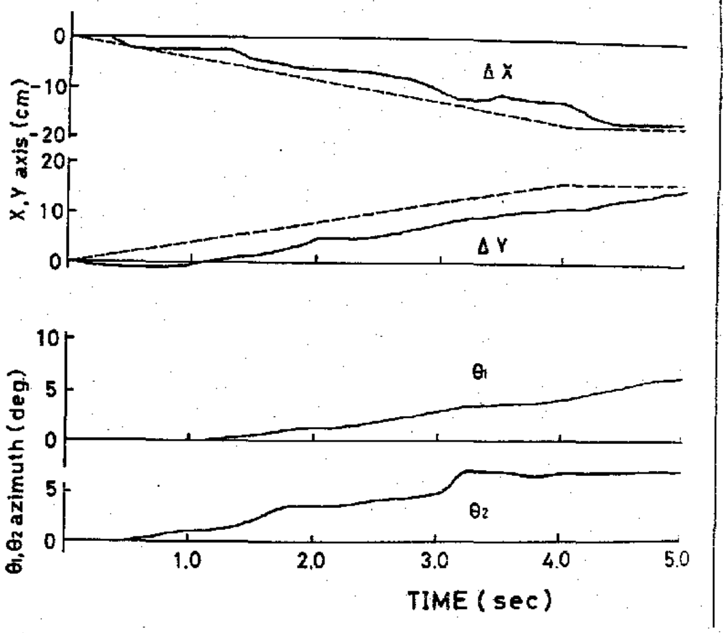


Fig.7-3 Response of the system under the control of Ca.C.S. (task of moving an object)

ただし，ハンドのX－Y平面内の回転は自由にするように，$(e_3^6)_x$（付録B，(B-3)式）に対するフィードバックゲインをゼロにしている．目標軌道は，図のようにランプ軌道（点線）で与えている．フィードバックゲインは

$$W = \mathrm{diag}\{88, 112, 112, 1.5, 1.5, 1.5\}$$

$$Q_1 = \mathrm{diag}\{3.0, 4.3, 0.16, 8.9, 0.34, 0.56\}$$

$$Q_2 = \mathrm{diag}\{0.2, 0.125, 0.125, 0, 0, 0\}$$

$$S = \mathrm{diag}\{8.75, 10.0, 10.0, 0, 0, 0\}$$

としている．J.C.S.による応答と比べると軌道の追従性は劣り，目標到達時間T＝4秒を過ぎてもかなり偏差を残している．しかし，積分フィードバッ

クの効果によってこの偏差は消去され，位置精度としては常に2mm～5mmの範囲におさまった．ただし，到達時間は10秒以上かかることもあった．図の下段には，直交座標系での応答に対応する関節角度1，2の動きを示す．腕の姿勢にもよるが，一般に，オ1，4，6関節はy，z方向の運動，オ2，3，5関節はx方向の運動に対応している．従って，x方向に関してはほぼ独立に運動させられるが，y，z方向にはどうしても相互干渉があり，そのために，軌道追従性があまりよくならないと考えられる．なお，軌道を3次関数で与えることによって速応性を増すことができるが，多くの場合，オーバーシュートを生じた．Fig.7-4はランプ軌道に対する応答，Fig.7-5は3次関数の軌道の応答を示している．ランプ軌道では，速度指令を与えていないので軌道に対して常に遅れを生じるが，ゆるやかに目標値に近

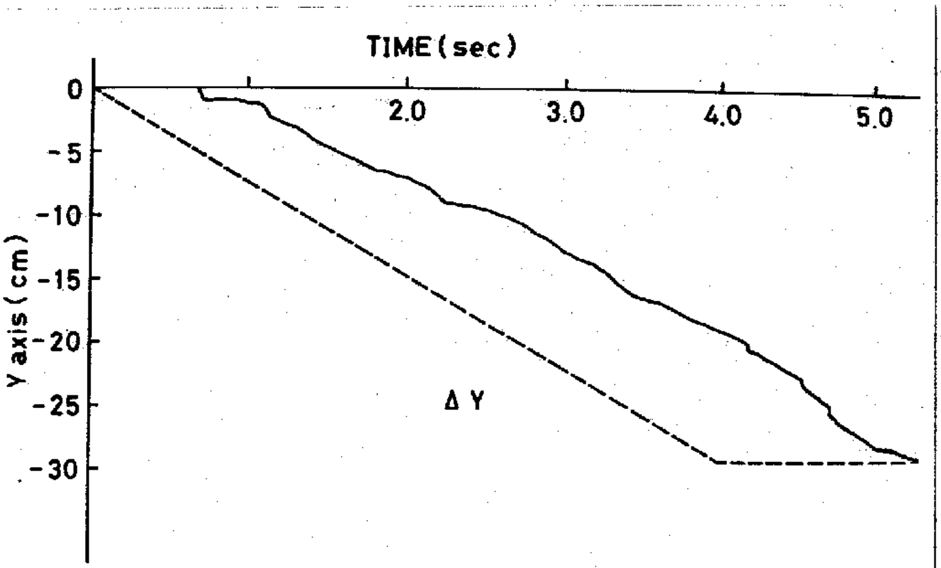


Fig.7-4 Response of Y-axis under the control of C_a.C.S. (ramp reference)

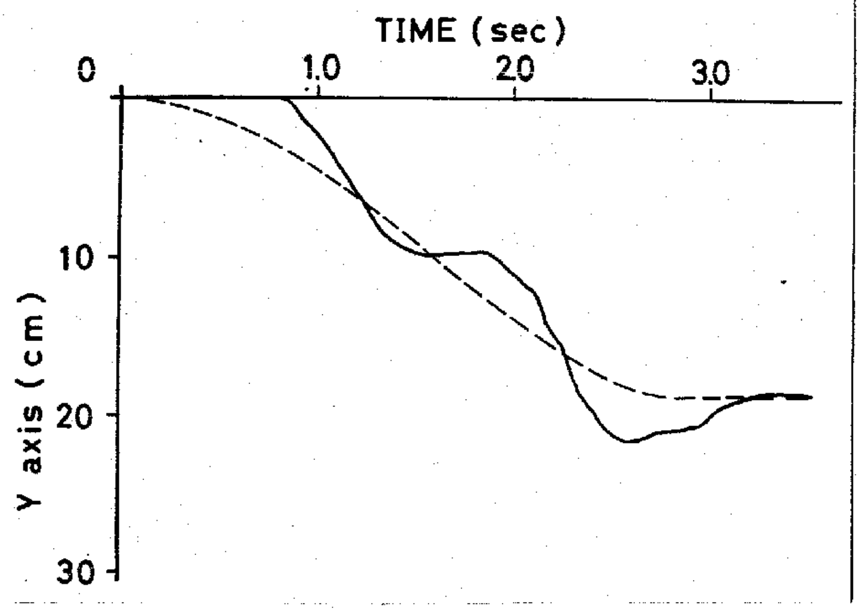


Fig.7-5 Response of Y-axis under the control of C_a.C.S. (command trajectory is set as in Fig.6-9)

づく．一方，３次関数の軌道を設定した場合は応答を速くすることができるが，Fig. 7-5 のように過渡的に目標軌道を追い越してしまう．しかし，目標到達時間T＝2.8秒を過ぎてからは速かに目標値に収束している．

Fig. 7-3 にみられるように，与えられた目標値に対して，各関節角度は人間と同じような動きを示しており，人間がやりやすい運動に対しては，マニピュレータも比較的良い動きを示し，やりにくい運動に対しては，応答はやはり悪かった．また，ハンドの姿勢を保持するような運動は，作業座標から関節角度への変換を必要とする従来の方式ではかなり手間のかかる準備計算がいる[10]が，Ca.C.S. では簡単に実行でき，水の入ったビーカーを水をこぼさずに移動させるという作業もオフラインで複雑な前処理

など全くせずに，ほぼ実時間で実行できた．

(3) クランクを回転させる作業 (Cy.C.S.)

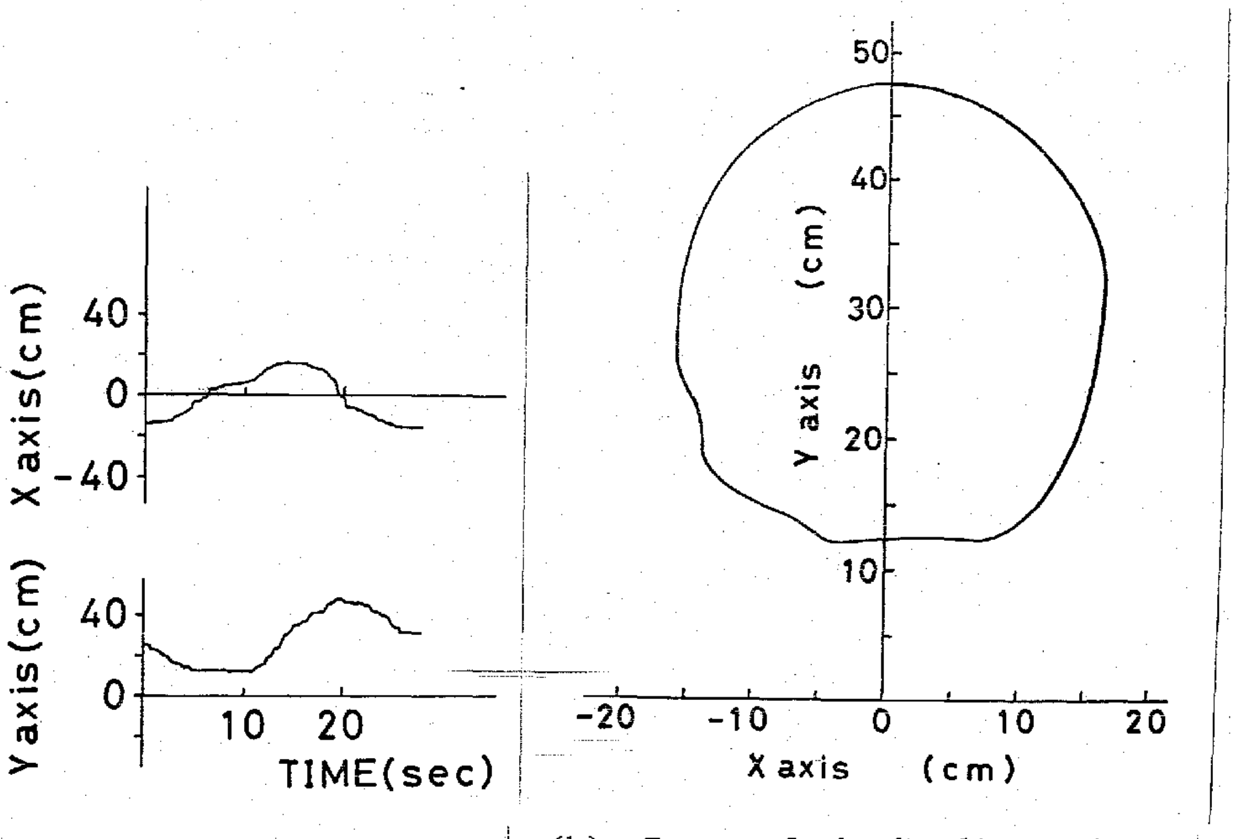
対象物より拘束をうける作業の一例として，クランクを回転させる作業をマニピュレータに行なわせた．サーボシステムはCy.C.S.を用いる．Cy.C.S.は，3·3節で述べたことを実行するシステムで，作業座標としては，Fig.1-2 の r，ϕ とハンドの位置の z 成分およびハンドの姿勢を選んでいる．

実験では，まず，クランクを適当な場所にX−Y平面内で回転するように設置し，その回転角はクランクに取付けたポテンショメータで計る．3·3節で述べたように，クランクの回転中心の位置や回転半径については知る必要がない．Cy.C.S.では，キーボートから目標の回転角度 $\overline{\Phi}$ と角度 $\Delta\phi$ を入力すると目標値を，ポテンショメータから読み取られた現在の ϕ の値より $\Delta\phi$ だけ増加させる．さらに，各サーボサイクルごとに読み取った ϕ の値を現在の目標値と比べ，小さいときは目標値をそのままにし，目標値より大きくなればその ϕ の値に $\Delta\phi$ をたしていくというようにして $\overline{\Phi}$ に到達させる方法になっている．この間，z および $(e_2^6)_x$，$(e_2^6)_y$ は一定となるようにし，また，$(e_3^6)_z$ は自由にしている．この場合のヤコビアンの具体的な計算は付録B,(2) で述べている．

クランクを回転させているときの応答の一例をFig.7-6 に示す．フィードバックゲインは

$$W = \mathrm{diag}\{15.2,\ 120,\ 1.5,\ 1.5,\ 0\}$$

$$Q_1 = \mathrm{diag}\{3.0,\ 4.3,\ 0.16,\ 8.9,\ 0.34,\ 0.57\}$$



(a) Time response of X and Y axis.

(b) Trace of the hand's position in X-Y plane.

Fig.7-6 Response of the system under the control of C_y.C.S. (task of turning a crank)

$$Q_2 = \mathrm{diag}\{\ 0.25\ ,\ 0.125\ ,\ 0.125\ ,\ 0\ ,\ 0\ \}$$

$$S = \mathrm{diag}\{\ 25.4\ ,\ 60\ ,\ 0\ ,\ 0\ ,\ 0\ \}$$

としている．また，rは一応 $r = 1\,m$ としている．実物のクランクの半径は17.5 cmである．軌道は時間の関数としては与えていないので，到達時間は設定されないが，この図の場合は約26秒で1回転している．図の(a)より，マニピュレータがクランクを回転させにくいところではゆっくりと回転させ，回転

させやすいところでは速かに回転させていることがわかる．図の(b)で，ハンドの位置がX－Y平面内で真円を描いていないが，これは，クランクのハンドルのつかみ方があまかったことや，ハンドの位置座標として計算している位置からずれた位置でハンドルをつかんでいたこと，さらに，クランクはX－Y平面に対してやや傾いた平面で回転していたことなどの理由によると考えられる．このように，作業空間の環境に多少のあいまいさや不正確さがあるにもかかわらず，クランクを回転することができた．

従来は，この種の作業では，力感覚を利用しなければ実行することが難しいとされていた[3]が，本実験システムのCy.C.S.では，特別な感覚を導入することなく作業が実行できた．

(4) 適応制御方式による応答

5章で導出した適応制御則の中の加速度補償項と外乱補償項は，前節で述べたシミュレーションの結果ではかなり有効であったが，実システムに対してはどの程度効果があるかを調べた．サーボシステムに新たに加わる加速度補償および外乱補償のための計算は，1サイクル当り10msecとなるので，J.C.S.では19.8msec，Ca.C.S.では60msecのサーボサイクルタイムになる．Ca.C.S.では，前に述べているように，Fig.6-9の3次関数の軌道にはまだうまく追従できていないし，サーボのサンプリングタイムもこのように長くなるので，適応調整の効果はあまりみられず，パラメータを大きくとりすぎるとかえって悪い応答になることがあった．そのため，ここではJ.C.S.に適応調整を用いたときの応答だけを示す．

初期条件は $x(0)=0$ とし，目標値は

$$\bar{x}(T)=(0°,0°,20°,45°,0°,45°)^T$$

とし，T = 1.6 秒に設定する．また，目標軌道は，Fig. 6-9 の軌道を用いる．まず，加速度補償だけを用いたとき，すなわち，(5-11)式 (iii)の調整則だけを用いたときの応答の一例を Fig. 7-7 に示す．制御則は (5-4)式を用いるが，重力項 $(\partial V/\partial x)^T$ は，すでに述べたように軌道に沿ってオフラインで計算してある．フィードバックゲイン K_1, K_2 は，$K_1=W$, $K_2=Q$ として本節(1) で述べた実験のときと同じ値を用いている．ゲイン K_3 の初期条件は，$K_3(0)=0$ としている．また，調整則でベクトル f は (5-15)式を用いているが，行列 Λ_1, Λ_2 は，計算機シミュレー

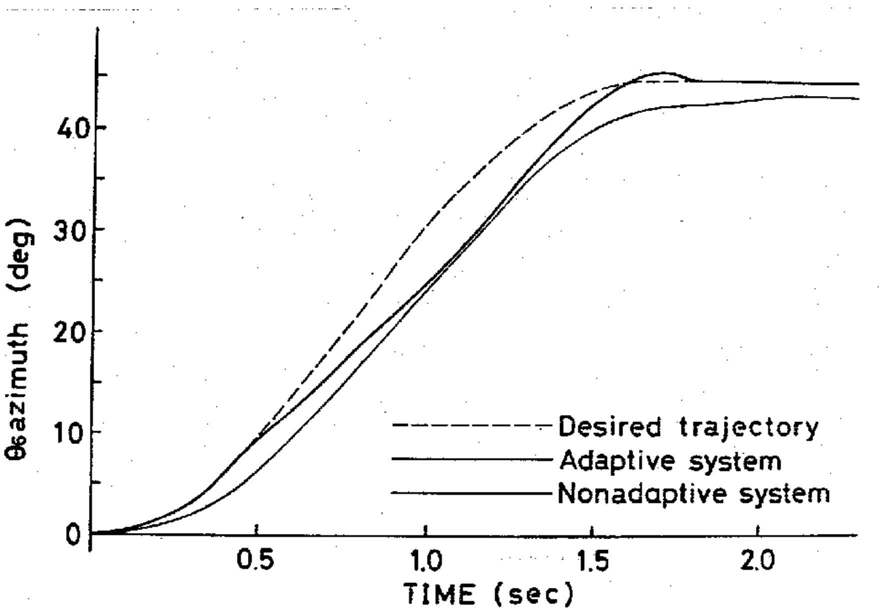


Fig.7-7 Response of the system with adaptive compensation of acceleration term (θ_6 azimuth)

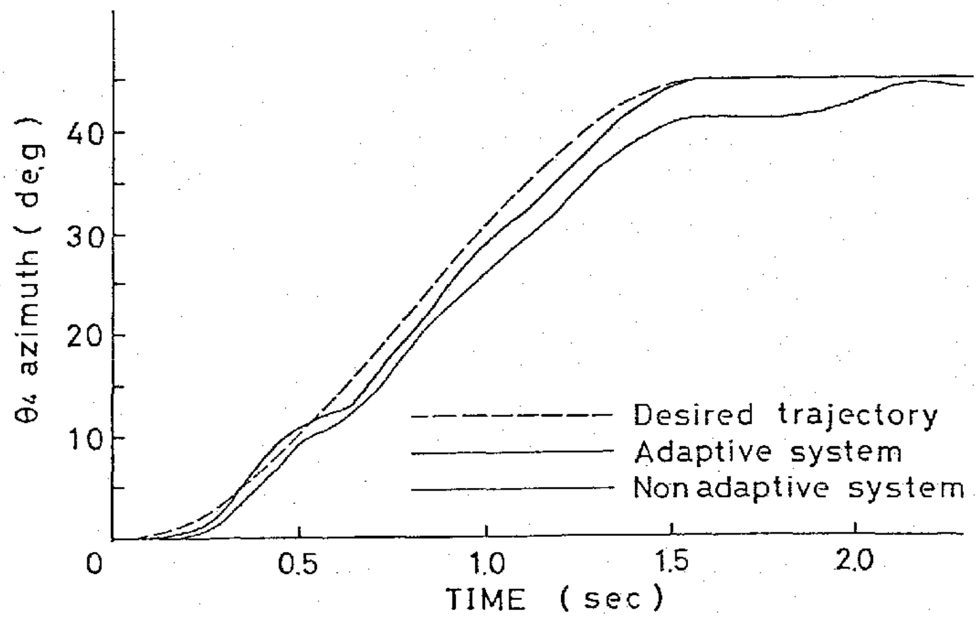
ション（6.2節の(3)）のとき用いたものと同じ値を使っている．パラメータγ_3, α, βは，計算の上では，結局，$\gamma_3\alpha$，$\gamma_3\beta$という形で現れてくるので，この2つをパラメータとして与えている．Fig.7-7の応答では

$$\gamma_3\alpha = 1 \;,\; \gamma_3\beta = 549$$

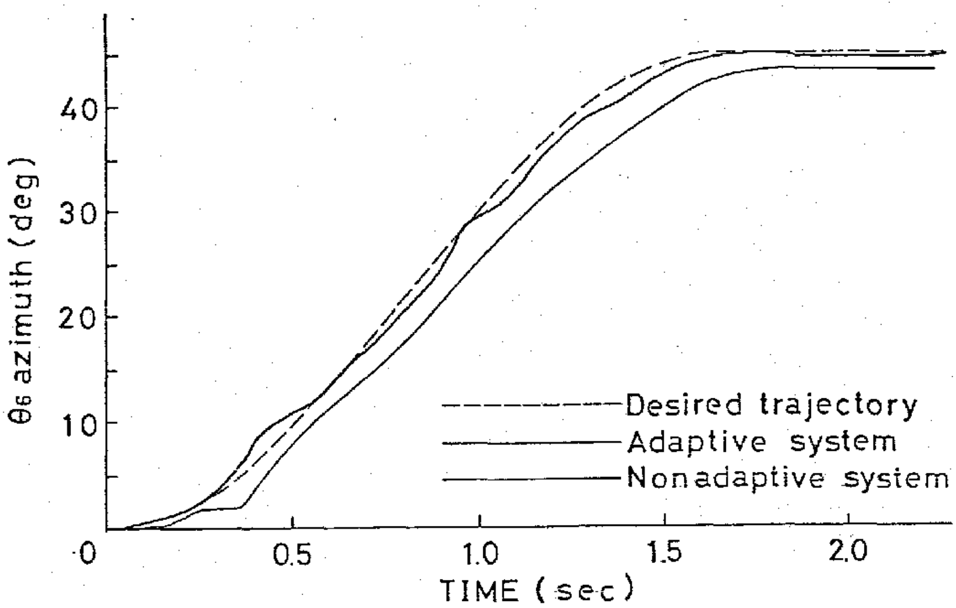
としている．図のように，全体的にみれば速応性が増し，とくに，$t = 0.5$秒まではかなり追従性が改善されて軌道とほとんど重なっているが，0.5秒をすぎると遅れが目立ちはじめ，最後に少しオーバーシュート気味になる．この原因として，マニピュレータの駆動伝達系の機械的ロスが大きいため加速度補償だけでは不十分であることが考えられる．また，応答の後半（$t > T/2 = 0.8$ sec）では，目標軌道に対して遅れているにもかかわらず，目標軌道の加速度が負の方向に増大していく（Fig.6-9）ため，その追従性をより悪くしている．オーバーシュートは，そのような急激な遅れ方に対する反動であると考えられる．そこで，外乱補償のための適応調整（(5-11)式，(iv)）も同時に行ない，また，後半の加速度補償を打切ることにした．Fig.7-8がそのときの応答で，パラメータは

$$\alpha = 0 \;,\; \gamma_3\beta = 549 \;,\; \gamma_4\beta = 2745$$

とした．ベクトル$\mathbb{k}$（(5-4)式）の初期条件は，$\mathbb{k}(0) = 0$としている．図のように，Fig.7-7のときと比べて，応答の後半になっても追従性が改善されていることがわかる．また，目標到達時間$T = 1.6$秒でほとんど定常偏差がなくなっていることがわかる．このようにして，本実験システムでは，外乱補



(a) Response of θ_4 azimuth.



(b) Response of θ_6 azimuth.

Fig.7-8 Response of the system with adaptive compensation of acceleration term and disturbance term.

償と加速度補償を併用し，さらに，$t > T/2$ で加速度補償を打切るという方法で軌道追従性がかなり改善されることが示された．

7·5　実験結果の考察

実験の結果より次のことが確かめられた．

(イ)提案した制御則（3-19）式は，作業空間における位置制御に対して有効である．

(ロ) 3·3 節で述べた方法によってクランクを回転させる作業が実行できる．

(ハ)水の入ったコップを運ぶ作業は，コップが水平を保つようにハンドの姿勢を制御し，同時に，その水平面内の回転は自由にしておくことで無理なく実行できる．

(ニ) J.C.S.で軌道制御をするとき，5章で述べた適応制御方式（適応的な加速度補償および外乱補償）によって軌道への追従性が改善される．

以上のように，本論文で得られた制御則によって作業の実行という目的は十分果せたと考えられる．しかし，計算機シミュレーションの結果と比べると，例えば，Ca.C.S.による軌道制御では，軌道への追従性がかなり劣るし，Cy.C.S.によるクランクの回転作業でも完全に滑らかに回すということはできなかった．

軌道追従性が劣ることの主な理由として二つのことが考えられる．一つは，Ca.C.S.やCy.C.S.ではサンプリングタイムが 50 msec とやや長くなっていることである．本制御プログラムでは，速度は単に

サンプリングごとの差分によって計算しているが，この方法では雑音の影響をうけやすいようで，とくにサンプリングタイムが長くなってくると速度の計算は不正確になりやすく，速度フィードバックのゲインを大きくするとかえって振動を起こすことがあった．もう一つの原因は，アクチュエータおよび駆動伝達系の性能に関する問題で，おそらく，これが最も大きい原因であると思われる．理論的には，モーターのトルクを制御することは可能だが，一般に市販されているモーターではトルクを直接制御するというようには設計されていない[34]ので，完全にはトルクを制御することは難しい．また，チェーンによる駆動伝達系ではあそびがあるため正確にトルクを伝達できない．定常的には，積分フィードバックによってこれらのロスの影響を解消することができたが，過渡的な応答を改善するためには，正確にトルクが制御できるアクチュエータとロスのない駆動伝達系が必要であると考えられる．

8. 結 論

マニピュレータ・ダイナミクスの運動制御について主に安定性の面から理論的に考察し，次のような結果が得られた．

1. マニピュレータ・ダイナミクスを作業座標で記述し直したシステムに対して，リャプノフの直接法に基づいた考察を行ない，作業空間の任意の点を漸近安定化する作業座標フィードバック制御則を得た．本制御則は，複雑な計算を一切を含んでいないので，マイクロコンピュータ程度のコントローラで容易に実現できる．また，作業空間で直接制御する方式なので，序論で述べた逆座標変換[3]の問題を同時に解消している．
2. 冗長性のある作業や拘束をうける作業の問題は，従来，個別に扱われており，また，動的な観点からはほとんど考察されていなかったが，本制御方式ではこれらの問題を総合的に取扱うことができる．
3. 作業空間で計画された目標軌道を追従するために，その目標軌道に関する変分方程式系の安定化制御を考察し，上で述べたフィードバック制御則と同じ形をした軌道制御方式を得た．また，その実用的な制御系設計について考察した．
4. 加速度の無視できないような軌道に追従させるために，M.R.A.C.S. の手法を上述の変分方程式系に適用し，その特徴を利用して簡単な構造の適応的な軌道制御方式を得た．また，その中で，と

くに加速度補償および外乱補償の適応制御則が効果があることを示した。

これらの制御方式は，まず，計算機シミュレーションによって詳しく調べられ，その有効性が確かめられた。制御則（3−19)式および（4−3）式を用いた場合，基本的な運動に対して良好な応答を示したフィードバックゲインW，Qは，作業空間において十分広い範囲で有効であった。また，適応的な軌道制御方式（（5−4）式と(5−11)式）は，軌道の変化が十分ゆるやかであるという仮定のもとに得られたにもかかわらず，高速度の目標軌道にもほぼ完全に追従させることができた。

最後に，提案した制御方式をマイクロコンピュータシステムによって実現し，従来は，非常に複雑な手続きや前処理を要した作業や力感覚等を導入しなければ難しいとされていた作業を試作したマニピュレータに実行させることによって，本制御方式の実用性および有効性を実験的に示した。実行した作業内容の質（例えば，軌道への追従性等）は，まだ完全には実用に耐えるものではないが，本文で述べているようなハード面での改良を加えることによってさらに良い結果が得られると考えられる。

本研究では，マニピュレータ・ダイナミクスの運動制御を考察する手段として，力学の基本的な原理からヒントを得た手法を示しているが，マニピュレータ以外の多くの力学的なシステムの制御に対しても，本手法は効果的に適用できるものと考えられる。また，M.R.A.C.S.の手法を取り入れて適応的な軌道制御方式を導びいたように，他の有効な制御の手法（

例えば，学習制御の手法等）を融合することによって新しい有効な方法が得られるのではないかと考えられる。

参考文献

(1) 長谷川：工業用ロボット，bitロボット特集号，PP154－163（1976）

(2) 辻：ロボティックス，情報処理，Vol.21-2，PP1223－1230（1980）

(3) 中野：ロボットの手の機構と制御，bitロボット特集号，PP76－97

(4) 高瀬：メカニカルアームとその制御，計測と制御，Vol.18-1，PP37－43（1979）

(5) Saridis, G.N. and Stephanou, H.E.：A Hierarchical Approach to the Control of a Prosthetic Arm, IEEE Trans. on Sys., Man, and Cyb., Vol.SMC-7-6, PP407－420（1977）

(6) 高瀬：マニピュレータの運動成分の一般的分解とその制御，計測自動制御学会論文集，Vol.12-3，PP300－306（1976）

(7) Freunde, E. and Syrbe, M.：Control of Industrial Robots by Means of Microprocessors, Lecture Note in Control and Information Sciences, Vol.2, Springer-Verlag, Berlin, PP.167－175（1976）

(8) Luh, J.Y.S., Walker, M.W. and Paul, R.P.C.：On-Line Computation Scheme for Mechanical Manipulator, J. of D.S.M.C., Trans. ASME Vol.102-G PP69－76（1980）

(9) Paul, R.：Modelling, Trajectory Calculation and Servoing of a Computer Controlled Arm, Stanford Univ. AI. Memo., AIM-177（1972）

(10) 内山：人工の手の運動制御に関する研究，日本機械学会論文集，Vol. 45-391 PP314-345 (1979)

(11) 浅田，花房：工業用ロボットの空間曲線ならい制御，計測自動制御学会論文集，Vol. 16-5，PP740-746 (1980)

(12) Book, J.W., Maizza-Neto, O., and Whitney, D.E.,：Feedback Control of Two Beam, Two Joint System with Distributed Flexibility, J. of D.S.M.C., Trans. ASME, Vol. 97-G, PP424-431 (1975)

(13) Yuan, J.S.-C.：Dynamic Decoupling of a Remote Manipulator, IEEE Trans. on A.C., Vol. AC-23-4, PP713-717 (1978)

(14) Whitney, D.E.：The Mathematics of Coordinated Control of Prosthetic Arms and Manipulators, J. of D.S.M.C., Trans. ASME, Vol. 12-G, PP303-309 (1972)

(15) Landau, Y.W., Adaptive Control - The Model Reference Approach, Control & System Theory, Vol. 8, M. Dekker, INC. (1979)

(16) Dubowsky, S. and DesFarges, D.T.：The Application of Model-Referenced Adaptive Control to Robotic Manipulators, J. of D.S.M.C., Trans. ASME, Vol. 101-G, PP193-200 (1979)

(17) Greenwood, D.T.; Classical Dynamics, Prenticehall (1977)

(18) Spivak, M., Calculus on Manifolds, W.A. Benjamin New York (1965)

(19) LaSalle, J. and Lefschetz, S., Stability by Lyapunov's Direct Method with Applications, Academic

Press. (1961)
(20) Letov, A.M. : Stability Theory, System Theory, ed. by Zadeh and Polack, Tata McGraw-Hill, New Delhi, PP347-384 (1969)
(21) Oziraner, A.S. and Rumiantsev, V.V. : The Method of Liapunov Functions in the Stability Problem for Motion with Respect to Part of the Variables, PMM Vol. 36-2, PP364-384 (1972)
(22) 占部，非線形問題，共立出版（1968）
(23) 竹垣，有本：多自由度リンク系の制御系設計，第22回自動制御連合講演会前刷 PP315-316 (1979)
(24) 杉山，最適問題，共立出版（1967）
(25) Desore, C.A. : Slowly Varying System $\dot{x}=A(t)x$, IEEE Trans. on A.C., Vol. AC-14, PP 780-781 (1969)
(26) 有本，線形システム理論，産業図書（1974）
(27) 木村，動的システムの理論，産業図書（1974）
(28) 伊藤，木村，細江，線形制御系の設計理論，計測自動制御学会（1978）
(29) Bellman, R., Introduction to Matrix Analysis, Tata McGraw-Hill, New Delhi (1974)
(30) Narendra, K.S. and Kudva, P. : Stable Adaptive Scheme for System Identification and Control - Part I, IEEE Trans. of Sys., Man and Cyb., Vol. SMC-4-6, PP542-551 (1974)
(31) Dressler, R.M. : An Approach to Model Referenced Adaptive Control Systems, IEEE Trans. on A.C., Vol. AC-12, PP212-213 (1967)

(32) 竹垣，有本：多自由度リンク機構の制御について，SICE第8回制御理論シンポジウム資料集，PP 195-200（1979）
(33) 井上，竹垣，有本：人間型マニピュレータの運動制御，日本機械学会関西支部第55期定時総会講演会論文集，PP 79-81（1980）
(34) モータ選定ガイドブック－機械設計，Vol. 23-7（1979）

付録A．マニピュレータの運動方程式の記述

試作したマニピュレータの運動方程式を具体的に記述する．各関節の相対角 $(x_1,\cdots,x_6)^T=\mathbb{x}$ を一般化座標にとる．リンクの長さや質量等のパラメータの値は Table.7-1に示す．Fig.1-1 のように，各リンクに座標系 C_i を設定する．C_i の3軸方向の単位ベクトルを $\mathbb{e}_1^i$, $\mathbb{e}_2^i$, $\mathbb{e}_3^i$ で表す．C_{i-1} から見た C_i の位置姿勢を表現する座標変換行列 A_i は以下のようになる．

$$A_i=\begin{pmatrix}\cos x_i & -\sin x_i & 0\\ \sin x_i & \cos x_i & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\quad(i=3,5)$$

$$\begin{pmatrix}\cos x_i & 0 & \sin x_i\\ 0 & 1 & \\ -\sin x_i & 0 & \cos x_i\end{pmatrix}\quad(i=2)$$

$$\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & \cos x_i & -\sin x_i\\ 0 & \sin x_i & \cos x_i\end{pmatrix}\quad(i=1,4,6)\qquad(A-1)$$

これらの行列を用いて第 i 座標系は

$$(\mathbb{e}_1^i,\mathbb{e}_2^i,\mathbb{e}_3^i)=A_1\cdots A_i\quad(i=1,\cdots,6)\qquad(A-2)$$

となる．また各関節の回転方向ベクトルを $\mathbb{P}_i\,(i=1\sim6)$ とすると

$$\mathbb{P}_i = A_1 \cdots A_i \boldsymbol{p}_i \quad (i = 1 \sim 6) \tag{A-3}$$

となる。ただし、$\boldsymbol{p}_i = (1, 0, 0)^T \ (i = 1, 4, 6)$,
$(0, 1, 0)^T \ (i = 2)$, $(0, 0, 1)^T \ (i = 3, 5)$
関節jからリンクiの重心への位置ベクトルを$\boldsymbol{r}_{ji}$
とすると

$$\boldsymbol{r}_{ji} = -\sum_{k=j}^{i-1} l_k \boldsymbol{e}_3^k - S_i \boldsymbol{e}_3^i \tag{A-4}$$

となる。ここで、S_iは関節iからリンクiの重心までの距離である。また、行列B_iを

$$B_i = A_1 \cdots A_i \quad (i = 1 \sim 6) \tag{A-5}$$

で定義しておく。詳しい計算は省略するが、これらの定義式を用いると運動エネルギーが以下のように記述される。

$$T = \sum_{i=1}^{6} (T_i^1 + T_i^2), \quad T_i^j = \frac{1}{2} \dot{\boldsymbol{x}}^T R_i^j \dot{\boldsymbol{x}} \quad (j = 1, 2) \tag{A-6}$$

行列R_i^j $(i = 1 \sim 6, j = 1, 2)$ のk, l要素をR_{ikl}^jとすると

$$R_{ikl}^1 = \begin{cases} m_i (\mathbb{P}_k \times \boldsymbol{r}_{ki})^T \cdot (\mathbb{P}_l \times \boldsymbol{r}_{li}) & (k, l \leqq i) \\ 0 & (k, l > i) \end{cases}$$

$$R_{ikl}^2 = \begin{cases} \mathbb{P}_k^T B_i I_i B_i^T \mathbb{P}_l & (k, l \leqq i) \\ 0 & (k, l > i) \end{cases} \tag{A-7}$$

となる。ここで行列I_iはリンクiの慣性テンソルで

本論文では対角行列としている．T_i^1はリンクiの並進の運動エネルギー，T_i^2は回転の運動エネルギーである．重力ポテンシャルVは次式で与えられる．

$$V = \sum_{i=1}^{6} V_i, \quad V_i = m_i \mathbb{r}_i^T \cdot \mathbb{g} \quad (\mathbb{g} = (0, 0, g)^T ; g\text{は重力加速度}) \qquad (A-8)$$

これらより，運動方程式は次式のように記述される．

$$\dot{x} = R^{-1} \mathbb{P} \qquad (A-9)$$

$$\dot{P}_i = \frac{1}{2} \dot{x}^T \left(\frac{\partial R}{\partial x_i}\right) \dot{x} - \frac{\partial V}{\partial x_i} + u_i \quad (i = 1 \sim 6) \qquad (A-10)$$

ここで行列Rは$R = \sum_{i=1}^{6} (R_i^1 + R_i^2)$であり，行列$\left(\frac{\partial R}{\partial x_i}\right)$は$(\partial R/\partial x_i) = \sum_{j=1}^{6} (\partial R_j^1/\partial x_i) + (\partial R_j^2/\partial x_i)$となる．$(\partial R_j^1/\partial x_i)$，$(\partial R_j^2/\partial x_i)$の各要素は（A−7）式より次のようになる．

$$\frac{\partial R_{jkl}^1}{\partial x_i} = m_i (\mathbb{q}_{ijk}^1)^T \cdot (\mathbb{P}_l \times \mathbb{r}_{li}) + m_i (\mathbb{P}_k \times \mathbb{P}_{ki})^T \cdot \mathbb{q}_{ijl}^1$$

$$\mathbb{q}_{ijm}^1 = \begin{cases} \mathbb{P}_j \times (\mathbb{P}_m \times \mathbb{r}_{mi}) & (j \leq m) \\ \mathbb{P}_m \times (\mathbb{P}_j \times \mathbb{r}_{ji}) & (j > m) \end{cases}$$

$$(i = j, \cdots 6, \ j = 1 \sim 6) \qquad (A-11)$$

$$\frac{\partial R_{jkl}^2}{\partial x_i} = (\mathbb{q}_{ijk}^2)^T I_i B_i^T \mathbb{P}_l + \mathbb{P}_k^T B_i I_i \mathbb{q}_{ijl}^2$$

$$(\mathbb{q}_{ijm}^2)^T = \begin{cases} (\mathbb{P}_j \times \mathbb{P}_m)^T B_i + \mathbb{P}_m B_i^j & (j \leq m) \\ \mathbb{P}_m^T B_i^j & (j > m) \end{cases}$$

$$B_i^j = \frac{\partial B_i}{\partial x_j} \qquad (i = j \sim 6, \ j = 1 \sim 6) \ (A-12)$$

また重力項 $\partial V/\partial x_i$ は次のようになる。

$$\frac{\partial V}{\partial x_j} = \sum_{i=j}^{6} \frac{\partial V^i}{\partial x_j} \qquad (j = 1 \sim 6) \qquad (A-13)$$

ここで

$$\frac{\partial V^i}{\partial x_j} = \begin{cases} m_i\{(\mathbb{P}_j \times \mathbb{r}_{ji})^T \cdot g)\} & (j \leq i) \\ 0 & (j > i) \end{cases}$$

以上がマニピュレータのダイナミクスの具体的な記述である。記法は，文献[6]を参考にした。

最後に，ポテンシャル関数Vのヘッセ行列，$\left(\frac{\partial^2 V}{\partial x_i \partial x_j}\right)$，を具体的に記述しておく。

$$\left(\frac{\partial^2 V}{\partial x_j \partial x_k}\right) = \sum_{i=s}^{6}\left(\frac{\partial^2 V^i}{\partial x_j \partial x_k}\right) \quad ; \; s = \min(j,k) \quad (A-14)$$

ここで

$$\frac{\partial^2 V^i}{\partial x_j \partial x_k} = m_i \left[\left\{\frac{\partial}{\partial x_k}(\mathbb{P}_j \times \mathbb{r}_{ji})^T \cdot g\right]\right.$$

$$= \begin{cases} m_i\{\mathbb{P}_k \times (\mathbb{P}_j \times \mathbb{r}_{ji})\}^T g & (k \leq j) \\ m_i\{\mathbb{P}_j \times (\mathbb{P}_k \times \mathbb{r}_{ki})\}^T g & (k > j) \end{cases} \qquad (A-15)$$

$$(i = s \sim 6)$$

明らかに，$\left(\frac{\partial^2 V}{\partial x_i \partial x_j}\right)$ は有界である。

付録B．作業座標およびヤコビアンの計算

ここでは，実験に用いた作業座標とそのヤコビアンの具体的な算出式を具体的に記述する．

(1) ハンド部の空間位置とその姿勢

ハンドの位置ベクトル $\mathbb{h}_p=(x, y, z)^T$ は，付録Aの記法に従えば次のように書ける．

$$\mathbb{h}_p = -\sum_{i=1}^{5} l_i \mathbb{e}_3^i - \sum_{j=1}^{3} h_j \mathbb{e}_j^6 \qquad (B-1)$$

ただし，$(h_1, h_2, h_3)^T$ は C_6 座標系でみた才6関節からハンドの基準点の位置ベクトルとする．本実験では，$(h_1, h_2, h_3) = (0, 0, l_6)$ と選んでいるので次のようになる．

$$\mathbb{h}_p = -\sum_{i=1}^{6} l_i \mathbb{e}_3^i = \mathbb{r}_{16} \qquad (B-2)$$

ハンドの姿勢を表す変数として，本実験では，実行させたい作業の内容を考慮して次の3つを選んでいる．

$$\mathbb{h}_o = \left((\mathbb{e}_2^6)_x,\ (\mathbb{e}_2^6)_y,\ (\mathbb{e}_3^6)_x \right)^T \qquad (B-3)$$

ただし，$(\mathbb{e}_2^6)_x$ は，ベクトル $\mathbb{e}_2^6$ の x 成分を表す（他も同様）．これらよりヤコビアン J（6×6）は次のようになる．

$$
\mathbb{J} = \left[\begin{array}{c} \dfrac{\partial \mathbb{h}_p}{\partial \mathbb{x}} \\ \hdashline \dfrac{\partial \mathbb{h}_o}{\partial \mathbb{x}} \end{array}\right] = \overbrace{\left[\begin{array}{c} \mathbb{J}_p \\ \hdashline \mathbb{J}_o \end{array}\right]}^{6} \begin{array}{l} \}3 \\ \}3 \end{array} \tag{B-4}
$$

$$
\mathbb{J}_p = \left[\mathbb{P}_1 \times \mathbb{k}_{16},\ \mathbb{P}_2 \times \mathbb{k}_{26},\ \cdots,\ \mathbb{P}_6 \times \mathbb{k}_{66}\right] \tag{B-5}
$$

$$
\mathbb{J}_o = \begin{bmatrix} (\mathbb{P}_1 \times \mathbb{e}_2^6)_x, & (\mathbb{P}_2 \times \mathbb{e}_2^6)_x, & \cdots, & (\mathbb{P}_6 \times \mathbb{e}_2^6)_x \\ (\mathbb{P}_1 \times \mathbb{e}_2^6)_y, & (\mathbb{P}_2 \times \mathbb{e}_2^6)_y, & \cdots, & (\mathbb{P}_6 \times \mathbb{e}_2^6)_y \\ (\mathbb{P}_1 \times \mathbb{e}_3^6)_x, & (\mathbb{P}_2 \times \mathbb{e}_3^6)_x, & \cdots, & (\mathbb{P}_6 \times \mathbb{e}_3^6)_x \end{bmatrix} \tag{B-6}
$$

(2) 円柱座標

これは，クランクを回転させるために導入してきた作業座標であり，3.3節で述べたように，Fig.1-2のようにクランクの回転角ϕが新に作業座標として選ばれてくるが，実験では，ϕを直接ポテンショメータで計測しているので，その算出の必要はない．ヤコビアン$\mathbb{J}$は，5×6 の行列となるが，新に必要となる計算は $(\partial\phi/\partial \mathbb{x})$ で，これも3.3節で求めているが具体的には次のように書ける．

$$
\left(\frac{\partial\phi}{\partial \mathbb{x}}\right) = \left(\frac{1}{r}\cos\phi,\ -\frac{1}{r}\sin\phi\right) \left[\begin{array}{c} \dfrac{\partial(\mathbb{h}_p)_x}{\partial \mathbb{x}} \\ \hdashline \dfrac{\partial(\mathbb{h}_p)_y}{\partial \mathbb{x}} \end{array}\right]
$$

$$
= \frac{1}{r}(\cos\phi,\ -\sin\phi,\ 0)\cdot \mathbb{J}_p \tag{B-7}
$$

なお，ヤコビアンの算出には，文献〔14〕を参考にした．