【28】

氏名・(本籍)	宮脇伊佐夫（みやわき いさお）
学位の種類	理学博士
学位記番号	第 3766 号
学位授与の日付	昭和51年12月15日
学位授与の要件	学位規則第5条第2項該当
学位論文題目	**領域 $0<x<n$, $0<y\leqq \alpha x^k/n$ における格子点の個数について**
論文審査委員	(主査) 教授 永尾　汎 (副査) 教授 中井　喜和　助教授 宮西　正宜　講師 山本　芳彦

論文内容の要旨

自然数kを固定し，自然数$n>1$とそれと素な自然数aに対して，領域$o<x<n$, $o<y\leqq ax^k$に於ける格子点の個数を$S_a^{(k)}(n)$とする。このとき，$S_a^{(k)}(n)$はGaussの記号を用いて

$$S_a^{(k)}(n)=\sum_{x=1}^{n-1}[ax^k/n]$$

で与えられるが，今$ax^k/n=[ax^k/n]+\overline{\{ax^k/n\}}$とおいて

$$S_a^{(k)}(n)=\sum_{x=1}^{n-1}ax^k/n-\frac{n-1}{2}+c_a^{(k)}(n),\quad c_a^{(k)}(n)=\frac{n-1}{2}-\sum_{x=1}^{n-1}\overline{\{ax^k/n\}}$$

と書きかえる。そうすると，$c_a^{(k)}(n)$は$S_a^{(k)}(n)$を$\sum_{x=1}^{n-1}ax^k/n-\frac{n-1}{2}$と見積ったときの誤差項と考えることが出来る。この$c_a^{(k)}(n)$に関して本田平氏は次のことを予想した。

予想1　任意の正数εに対して，$c_a^{(k)}(n)=O(n^{\frac{k-1}{k}+\varepsilon})$が$k=2$, $a=1$に対して成り立つ。

予想2　$c_1^{(2)}(n)\geqq 0$で$c_1^{(2)}(n)=0$となるための必要十分条件は，$n=p_1\cdots\cdots p_j$又は$n=2p_1\cdots\cdots p_j$の形の数となることである。ここで，$p_1,\cdots\cdots,p_j$は相異る素数で$p_i\equiv 1 \mod 4$ $(i=1,\cdots,j)$となるものである。

この論文では，予想1，2が成り立つことばかりでなく，予想1が任意のkとaに対しても成り立つことを次の様にして証明した。

一般に，mod f_χの原始指標χに対して

$$H_\chi=-\frac{1}{f_\chi}\sum_{x=1}^{n-1}\chi_{(x)}\,x$$

とおく。まず定理1に於いて，$c_a^{(k)}(n)$ が$f_\chi|n$で$\chi^k=1$となる様なχに対する H_χ 全体で書き表 されることを証明する。特に$k=2$のときは，零ではいH_χはχに対応する虚二次体の類数かその$\frac{1}{2}$か又は$\frac{1}{3}$であることを用いて，予想2の正しいことが証明される。次に $L(1,\chi)=\sum_{m=1}^{\infty}\chi(m)m^{-1}$の評 価を用いて$H_\chi$の評価をし，更に解析的整数論でよく知られている二，三の補題を用いることにより予想1も証明される。ここで，$c_a^{(k)}(n)$ がnの大きさに連続的に依存するのではなく，n の数論的性質に強く関係しているのは注目すべきことである。最後に，$k=4$のときに$p\equiv 5 \bmod 8$なる素数に対して，円分体$\mathbf{Q}(\sqrt[p]{1})$の四次の総虚な部分体とその二次の部分体との間の相対類数が$c_1^{(4)}(p)$と$c_2^{(4)}(p)$の二次形式で与えられることを示して，$p<500$に対する数値計算の実例を示す。

参考論文に於いては，有理数体$\mathbf{Q}$上定義された楕円曲線で導手が素数巾で3個以上の有限位数$\mathbf{Q}$有理点を持つものが完全に分類されている。その様な曲線は$\mathbf{Q}$上の同型を除いて有限個しかない。その応用として，その様な曲線の素数分点の体のガロワ群を完全に決定することが出来た。これは，それまでは出来ていなかったことである。

論文の審査結果の要旨

n, k, aは自然数とし，$n>1$, nとaとは互いに素とする。このとき，平面上の領域$\{(x,y)\mid o<x<n,\ o<y\leqq ax^k/n\}$における格子点の個数$S_a^{(k)}(n)$を$\sum_{x=1}^{n-1}ax^k/n-(n-1)/2$で評価したときの補正項を$c_a^{(k)}(n)$で表わす。

$$c_a^{(k)}(n)=S_a^{(k)}(n)-\{\sum_{x=1}^{n-1}ax^k/n-(n-1)/2\}$$

本論文は，この補正項に関する本田平氏の次の二つの予想を肯定的に解決したものである。

(1) kを与えたとき，任意の正の実数εに対して

$$c_a^{(k)}(n)=O(n^{\frac{k-1}{k}+\varepsilon})$$

(2) $c_1^{(2)}(n)\geqq o$で，$c_1^{(2)}(n)=o$となるのは，nが次の形の自然数であるとき，かつそのときに限る。

$$n=p_1\cdots\cdots p_r \text{ または } n=2p_1\cdots\cdots p_r$$

ここで，$p_1,\cdots,p_r$は異なる素数で，$p_1\equiv 1 \pmod 4$とする。

(本田氏は，(1)において，$k=2$，$a=1$のときこのことを予想した)

証明には解析的数論における手法が援用されるが，この補正項$c_a^{(k)}(n)$自身は，解析的な面丈でなく，代数的数論の面からも興味ある量で，nの数論的性質に強く依存し，また，例えば$k=4$のとき，$p\equiv 5 \pmod 8$なる素数pに対して，円分体$\mathbf{Q}(\sqrt[p]{1})$の4次の総虚な部分体と，その2次の総実な部分体の間の相対類数が，$c_1^{(4)}(p)$と$c_2^{(4)}(p)$との2次式で表わされる等，ある種の類数と深い関係にあることが示されている。

尚参考論文においては，有理数体上定義された，導手が素数べきである楕円曲線の中で，3個以上の有限位数の$\mathbf{Q}$-有理点をもつものを完全に分類し，特にそれらが有限個しかないという結果は，多く

の人の注目を集めた。

以上のように，本論文ならびに参考論文は，整数論における独創的な結果を含み，理学博士の学位論文として十分価値あるものと認める。