



Title	大規模線形ダイナミカルシステムの分散制御に関する研究
Author(s)	安田, 一則
Citation	大阪大学, 1985, 博士論文
Version Type	VoR
URL	<a href="https://hdl.handle.net/11094/319">https://hdl.handle.net/11094/319</a>
rights	
Note	

*The University of Osaka Institutional Knowledge Archive : OUKA*

<https://ir.library.osaka-u.ac.jp/>

The University of Osaka

大規模線形ダイナミカルシステムの  
分散制御に関する研究

1984年10月

安田一則

# 序 文

本論文は、著者が神戸大学工学部システム工学科において行なった大規模線形ダイナミカルシステムの分散制御に関する研究をまとめたもので、七つの章から成っている。各章の内容はつぎのとおりである。

第1章は序論で、大規模線形ダイナミカルシステムの分散制御に関する研究の趣旨と現状を、そして本研究の動機と目的および意義を述べている。

第2章では、最適レギュレータを分散制御によって実現する問題を考えている。与えられた二次評価関数を最小にする制御則は、一般に、分散制御とはならないが、ここでは、分散最適レギュレータというものをロバスト安定性の観点から定義し、それが構成できるための条件と構成法を導いている。

第3章では、サーボ機構を、サブシステムごとに施したフィードバック制御によって構成する問題を考え、追従性にも安定性にもロバストなサーボ機構の構成法を与えている。

第4章では、サブシステムにむだ時間システムを含み、結合系にもむだ時間のあるような大規模システムを対象として、安定化問題を考えている。そして、サブシステムごとの内部変数フィードバックによって全体システムが安定化できるための条件とフィードバック則を与えている。

第5章では、システムパラメータが時変であるようなシステムの分散制御について考え、分散最適レギュレータの構成法と、閉ループシステムの零入力応答が指定された上界と下界を満たすような安定化法を示している。さらに、むだ時間を含む場合についても考察し、分散型の内部変数フィードバックによる安定化法を導いている。

第6章では、分散制御が要請されている二つの実システムに対して、本研究で得られた分散制御法を適用して制御系を設計し、その実用的有効性を確かめている。

第7章は結論で、本研究で得られた成果と意義を総括している。

## 関 連 発 表 論 文

### 第 2 章 関 して

- (1) 安田, 日方, 平井 : 線形大規模系の局所フィードバックによる最適レギュレータの構成, 第 22 回自動制御連合講演会前刷, 1077 (昭 54 - 10)
- (2) 安田, 日方, 平井 : 線形大規模系の局所フィードバックによる最適レギュレータの構成 - II, 第 2 回 Dynamical System Theory シンポジウム資料, pp. 95 - 98 (昭 54 - 12)
- (3) 安田, 池田, 平井 : 線形大規模システムの分散最適制御 - 最適化可能条件の拡張 -, 第 19 回計測自動制御学会学術講演会予稿集, 1108 (昭 55 - 8)
- (4) K. Yasuda and K. Hirai : Optimization of Large-Scale Systems by means of Decentralized State Feedback, Conference Record of the 14th Asilomar Conference on Circuits, Systems, and Computers, Pacific Grove, pp. 516-520 (Nov. 1980)
- (5) K. Yasuda, T. Hikata, and K. Hirai : On Decentrally Optimizable Interconnected Systems, Proceedings of the 19th IEEE Conference on Decision and Control, Albuquerque, pp. 536-537 (Dec. 1980)
- (6) 安田, 平井 : 線形大規模システムの安定化, 計測自動制御学会論文集, 第 16 巻, 第 4 号, pp. 504 - 510 (昭 55 - 8)
- (7) M. Ikeda, D. D. Šiljak, and K. Yasuda : Optimality and Reliability of Decentralized Control, Preprints of the 8th IFAC Triennial World Congress, Kyoto, vol. XII, pp. 123-128 (Aug. 1981)
- (8) M. Ikeda, D. D. Šiljak, and K. Yasuda : Optimality of Decentralized Control for Large-Scale Systems, Automatica, vol. 19, no. 3, pp. 309-316 (May 1983)

- (9) K. Yasuda : "Decentralized Optimal Control for Large-Scale Interconnected Systems" in Control and Dynamic Systems : Advances in Theory and Applications, vol. XXIII, C. T. Leondes ed., Academic Press (in press)

### 第 3 章に関して

- (1) 安田, 平井, 日方 : 線形大規模システムの最適サーボ補償器の設計, 第 9 回制御理論シンポジウム資料, pp. 29 - 32 (昭 55 - 5)

### 第 4 章に関して

- (1) 安田, 平井 : 線形むだ時間システムの安定化, 計測自動制御学会論文集, 第 17 巻, 第 4 号, pp. 473 - 478 (昭 56 - 7)
- (2) 安田, 平井 : むだ時間のある線形大規模システムの安定化, 計測自動制御学会論文集, 第 17 巻, 第 8 号, pp. 806 - 812 (昭 56 - 11)
- (3) 安田, 平井 : 線形むだ時間システムの安定化と観測器の構成 — 安定化可能条件と構成可能条件の緩和 — , 第 4 回 Dynamical System Theory シンポジウム資料, pp. 71 - 74 (昭 56 - 12)
- (4) 安田, 平井 : 線形むだ時間システムに対する観測器の構成, 計測自動制御学会論文集, 第 18 巻, 第 2 号, pp. 102 - 103 (昭 57 - 2)

### 第 5 章に関して

- (1) 安田, 池田, 平井 : 線形時変むだ時間大規模システムの安定化, 第 19 回計測自動制御学会学術講演会予稿集, 2105 (昭 55 - 8)
- (2) 野村, 安田, 平井 : 線形時変大規模システムの安定化, 第 23 回自動制御連合講演会前刷, 1001 (昭 55 - 11)
- (3) 安田, 平井 : 線形時変大規模システムの分散最適制御, 第 25 回システムと制御研究発表講演会講演論文集, L4 (昭 56 - 5)
- (4) K. Yasuda, M. Maekawa, and K. Hirai : On the Stabilization and

Observation of Linear Systems with Time-Varying Delay, Preprints  
of the 8th IFAC Triennial World Congress, Kyoto, vol. II, pp.  
36-40 (Aug. 1981)

# 目 次

第1章 序 論 .....	1
第2章 分散制御による最適レギュレータ .....	7
2.1 緒 言 .....	7
2.2 対象システムの記述 .....	8
2.3 分散制御による最適レギュレータ問題の記述 .....	9
2.4 分散最適レギュレータの構成 .....	12
2.4.1 サブシステムが一入力である場合 .....	12
2.4.2 サブシステムが多入力である場合への拡張 .....	23
2.4.3 数 値 例 .....	27
2.5 結 言 .....	31
第3章 分散制御によるサーボ機構 .....	33
3.1 緒 言 .....	33
3.2 対象システムの記述 .....	34
3.3 分散制御による最適サーボ問題の記述 .....	35
3.4 サブシステムに対する最適サーボ機構の構成 .....	36
3.4.1 最適サーボ機構の構成法 .....	36
3.4.2 最適サーボシステムの追従性と最適性 .....	39
3.5 全体システムに対する分散最適サーボ機構の構成 .....	48
3.6 結 言 .....	51
第4章 むだ時間を含む場合の分散安定化 .....	53
4.1 緒 言 .....	53
4.2 対象システムの記述 .....	54

4.3	分散制御による安定化問題の記述 .....	55
4.4	サブシステムに対する安定化可能条件 .....	57
4.5	全体システムの分散制御による安定化 .....	60
4.6	結 言 .....	66
<b>第5章</b>	<b>時変要素をもつシステムへの拡張 .....</b>	<b>69</b>
5.1	結 言 .....	69
5.2	分散制御による最適レギュレータと安定化 .....	70
5.2.1	対象システムの記述 .....	70
5.2.2	分散最適レギュレータの構成 .....	73
5.2.3	安定度を考慮した分散安定化 .....	79
5.3	時変むだ時間を含む場合の分散安定化 .....	89
5.3.1	対象システムの記述 .....	89
5.3.2	安定化問題の記述 .....	90
5.3.3	分散制御による安定化 .....	91
5.4	結 言 .....	99
<b>第6章</b>	<b>実システムに対する分散制御系の構成 .....</b>	<b>101</b>
6.1	結 言 .....	101
6.2	磁気浮上車両の案内制御 .....	102
6.2.1	磁気浮上車両とそのモデル .....	102
6.2.2	分散制御系の構成 .....	106
6.2.3	シミュレーションの結果 .....	108
6.3	電力システムの負荷周波数制御 .....	110
6.3.1	電力システムのモデル .....	110
6.3.2	分散制御系の構成 .....	112
6.3.3	シミュレーションの結果 .....	116
6.4	結 言 .....	124

第7章 結 論	.....	127
謝 辞	.....	131
参 考 文 献	.....	133

# 第 1 章 序 論

科学技術の進歩に伴ない，制御すべきシステムは複雑化し，また制御の質も高度なものが要求されるようになった。そのため，状態空間法を中心とした多変数制御系の設計理論が展開，そして整備され，線形制御系については，基本的な体系化がなされたと言える。この結果，制御対象が線形システムであれば，それがいかに複雑で大規模であっても，制御系を構成することが可能となった。しかしながら，大規模なシステムに対して，この理論を直接に適用して制御系を構成しようとする，実際にはさまざまな不都合や難点が生じる<sup>1)</sup>。このことを，電力システムにおける負荷周波数制御を例にとってみてみよう<sup>2) 3)</sup>。

実際の電力システムは，図 1.1 のように，地域ごとに独立した運用体系をもつ発電機群と負荷群とからなるシステムが，互いに連系線によって結合されているものと見なすことができる。負荷周波数制御は，負荷変動に対して，電気エネルギーの品質表示の一つであるシステムの周波数が規定値内に収まるよう，各地域の発電機出力を制御するものである。この場合，多変数制御系の理論を直接に適用すると，

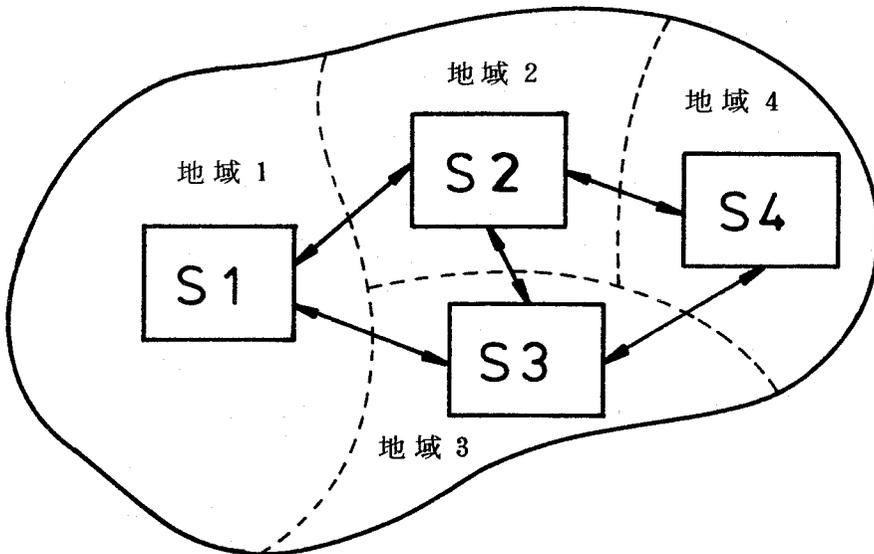


図 1.1 大規模電力系統

制御対象はこの電力系統全体であり、得られる制御則は、一般に全状態変数のフィードバック制御となる。このような制御を実現するためには、制御に必要なデータすべてを一ヶ所に集め、処理し、操作量を返送しなければならない。したがって、大規模でかつ地理的に広がりのある電力系統のようなシステムでは、伝送や処理すべきデータが膨大なものになり、またそのための信号経路も長大で錯綜したものとなって、経済性や信頼性の低下をまぬがれ得ない。

このような不都合は、大規模なシステム全体を一つのまとまった制御対象として取り扱って制御系を構成するところに要因がある。そこで、大規模システムの構成要素である個々のサブシステム — 先の電力系統に関して言えば各地域のシステム — について局所的な制御系を構成し、それらによってシステム全体をうまく制御しようとする分散型の制御方式が考えられた。分散型の制御方式によれば、

- (1) 制御系設計の際、サブシステム固有の機能や特性を考慮することができる。
- (2) 制御対象の変数の数が少なくなり、設計や制御に要するデータ処理が容易である。
- (3) 制御系がサブシステムごとに構成され、制御に必要なデータは各サブシステムの局所的データを用いればよく、構造も簡単である。

など、制御を一ヶ所で集中的に管理する集中型の制御方式に比べて多くの優れた特色を有している。さらに、分散型の制御系では、電力系統の例では連系線にあたる結合系が切れたり、結合の強さが変わったりしても、システム全体の安定性を損なわない安全性の高い制御が容易に実現できることが知られている<sup>4)</sup>。このため、大規模システムの分散制御に関して多くの研究がなされ、安定化をはじめとしてさまざまな分散制御の方法が開発されてきた<sup>1)4)5)</sup>。そして、今や、分散制御は、大規模システムに対する制御系設計の基本的な方策として定着したものとなっている。

ところで、こうした多くの優れた特徴をもっている分散制御法は、一方で、制御系をサブシステムごとに構成するという本質的な構造上の制約があり、それゆえ、集中型の制御方式でなら可能であっても分散型では制御できないことがある。

たとえば、対象システムが時間不変で完全可制御であるとき、適当な状態フィードバックを施して閉ループシステムの極を任意に配置することができるが、分散型の状態フィードバック制御では、たとえすべてのサブシステムについて完全可制御性が成り立っていても、全体システムを安定にすらできない場合がある<sup>6)</sup>。これは、分散型の制御方式によって全体システムを制御できるかどうかは、個々のサブシステムの特性に加えて、サブシステム間のつながり具合が大きく影響してくるからである。それゆえ、これまでの分散制御に関する研究でも、制御系の構成法とともに、分散型で制御できるための条件が検討され、安定化可能条件については、固定モードという概念を用いて<sup>7)</sup>、あるいはサブシステムを可制御標準形で表わしたときの結合系の構造に注目して<sup>8)</sup>条件が示されている。

分散制御についての研究は、このように着々と成果を挙げつつあるが、実際の設計問題への適用を考えるとまだ十分なものでないというのが現状である。その理由として、多変数制御系の設計理論で中心的な役割を果たしている最適レギュレータやオブザーバ、サーボ機構などを、分散型の制御方式の枠組の中で構成する方法が確立されていないことや、大規模システムではしばしば発生するむだ時間の考慮が不十分であることがある。本研究は、このような認識から、線形連続時間システムをサブシステムとする複合構造の大規模システムを対象として、分散型の状態（内部変数）フィードバックによる制御によって、「どのような制御が、どの程度まで、そしてどんな条件の下で実現され得るのか」を解明し、かつ分散制御系の新しい構成法を開発することを目的としている。この目的を果たすために、本研究では、大規模線形時間不変システムを対象に最適レギュレータ問題と最適サーボ問題を、またむだ時間を含んでいる場合について安定化問題を考察し、それぞれが分散型のフィードバック制御によって実現できるための条件を、サブシステムごとには制御できるものとして、サブシステム間の結合がどのような構造をしていけばよいかという観点から示し、同時に分散制御系の構成法を案出する。さらに、パラメータが時間的に変動する大規模システムに対して同様の問題を考察し、分散型で実現可能な制御について検討する。

以下の第2章から第7章までは、これらの考察の結果をまとめたもので、各章

で述べる内容はつぎのとおりである。

第2章と第3章では，サブシステムがすべて線形時間不変であるような大規模システムを対象に，最適レギュレータとサーボ機構を，分散制御によって実現する問題を考察している。最適レギュレータというのは，状態変数と入力変数に関して二次の評価関数を最小とする最適制御則の一つで，状態フィードバックの形で実現できること，さらに最適レギュレータを施して得られる閉ループシステムは安定性に関してロバストである<sup>9)</sup>ことが知られている。このため，多変数制御系の設計理論において，フィードバック制御の中心的な位置を占めており，大規模システムに対する最適レギュレータが分散制御によって実現されれば，これまでに提案されてきた多くの（単なる）分散制御による安定化法<sup>4)5)</sup>に比べて，優れて有用な制御法となり得る。しかしながら，二次評価関数を随意に与えたのでは，導かれる最適レギュレータは，一般に，集中型の状態フィードバック制御となる。そこで，この章では，二次評価関数の選び方に制限を加えることによって，大規模な全体システムの最適レギュレータをサブシステムごとの状態フィードバック制御で実現することを考え，このような分散最適レギュレータが構成できるための条件を導き，またその構成法を示している。ところで，ここで定式化された最適レギュレータ問題の場合，評価関数を望みどおりには設定することができないので，最適制御の側面からは難があるが，得られた分散最適レギュレータを施されたシステムのロバスト安定性は必ず保証されており，信頼性や安全性が一層要求される大規模システムの制御という立場からは大きな意義をもっている。

一方，第3章で考えている分散型のサーボ機構というのは，対象システムの制御量を，目標信号として与えられた線形システムの自由応答に対して，定常偏差が生じないように追従させる分散制御のことである。このような分散制御によるサーボ機構の構成に関しては，Davison<sup>10)</sup>が，多変数システムに対する構成法を援用してすでに報告を出している。そこでは，追従性に関するロバスト性については考慮されているが，サブシステムや結合系におけるパラメータ変動に対するロバスト安定性について何ら配慮されておらず，分散制御系としての特長すら生かされていない。この章で開発するのは，追従性のみならず安定性に関してもロ

バスタな分散型のサーボ機構である。このために、まずサブシステムに対する最適サーボ機構の構成法とその特長について論じ、その後、前章の結果を利用した分散最適サーボ機構の構成法を示している。

第4章では、むだ時間要素を含む大規模システム、すなわち、サブシステムが差分微分方程式で表現されたむだ時間システムで、さらに結合系にもむだ時間のあるようなシステムを対象に、安定化問題を考察している。ところで、線形むだ時間システムを安定化する方法として、状態変数をフィードバックするものや、状態変数の一部の情報をフィードバックするものなどいろいろ提案されているが、制御則を構成しやすく、むだ時間の変動に強いという点で、その時刻における内部変数をフィードバックする方法が最も実用的である<sup>11)</sup>。このため、ここでも、内部変数フィードバックを各サブシステムに施すことによってシステム全体を安定化する問題を考え、このような分散制御で安定化できるための条件を導き、安定化法を与えている。ここで示される安定化可能条件は、同じ問題に対してすでに与えられている Ikeda-Siljak<sup>12)</sup>のものよりも、適用範囲が広いものとなっている。

第5章は、対象システムが時変である場合について考察している。まず、むだ時間を含まない大規模時変システムに対して、最適レギュレータ問題と安定化問題を取り扱っている。時変システムの場合、最適レギュレータを施されたシステムのロバスト安定性は時間不変システムの場合ほどは明確でないが、少なくともゲイン成分の変動に対するロバスト安定性については同様のことが成立する。そこで、最適レギュレータ問題を第2章と同じ立場から定式化し、分散最適レギュレータが構成できるための条件と、その構成法を示している。一方、安定化問題では、閉ループシステムの零入力応答のふるまいを、分散制御によってどの程度まで指定することができるのかという点に注目して考察し、そのふるまいの上界と下界とが指定された指数関数の減衰度を満たすような安定化法を示している。つぎに、むだ時間を含む大規模システムを、内部変数フィードバックをサブシステムごとに施すことによって全体システムを安定化する問題を考察している。この場合、むだ時間自体も時間的に変動するものを考えている。そして、安定度を

指定した安定化ができることを示している。ところで、この章で得られた結果は、分散制御の可能性が時変システムの場合に拡張されているという理論上の成果であるばかりでなく、実際上でも有用である。たとえば、下水処理システムの有機物濃度制御では、対象システムは線形時変であると見なすことができ、しかも曝気槽側と最終沈殿池側とで分散制御する試みがなされており<sup>13)</sup>、その適用は制御系設計に多くの示唆を与え得ると考えられる。

第6章では、前章までに得られた理論的な成果を実システムに適用することによって、その有効性を示している。取り上げるのは、磁気浮上車両の案内制御<sup>14)</sup>と先に挙げた電力系統の負荷周波数制御の2つの問題である。ここで考える磁気浮上車両は、現在国鉄で開発中の、電磁力で浮上し、リニアサイリスタモータで推進するタイプのものである。この車両は、案内用レールに接触しないように走行させるために、案内制御（横方向の位置制御）を行なう必要があり、一車両を支持する二つの台車それぞれに案内用電磁石が設置されている。そして、案内制御系の設計には、個々の電磁石を独立に制御すること、すなわち分散型の制御系であること、さらに、車両重量は乗客数によって変動し、また列車編成されると一種の結合の仕方の変動が起こることからロバスト安定であることが要求される。そこで、一車両についての分散制御系を、第2章で開発した分散最適レギュレータの理論を適用して設計を行ない、計算機シミュレーションによって、乗客数の変動に強い分散制御系となっていることを確かめている。一方、電力系統の負荷周波数制御では、系統間の連系線にむだ時間があるものとして、集中制御に比べて性能劣化の少ない、しかもむだ時間の変動の影響を受けにくい分散制御系を構成するために、第4章で得られた方法を適用している。そして、計算機シミュレーションによって、その有効性を確かめている。

最後の第7章は結論であり、本研究で得られた成果とその意義について述べている。

## 第 2 章 分散制御による

### 最適レギュレータ

#### 2.1 緒 言

制御系が備えていなければならない特性のうち、信頼性は最も重要なものの一つである。ましてや、制御系が複雑にまた大規模になればなる程、その重要性は増してくる。このため、多入力多出力システムに対するロバストな制御系の設計に関する研究が、近年盛んに行なわれている<sup>1) 2)</sup>。ロバストな制御系というのは、制御系の構成している要素の特性が、設計に用いられた数式モデルのものとは異なっていたり、経年変化のために変化したりしても、その制御性能が質的には変わらないような“頑健な”制御系のことで、古典制御理論では、たとえばゲイン余有や位相余有という形で安定性についてのロバスト性が配慮されていた。多変数制御系についても、ロバスト安定となるような設計法がいろいろ提案されているが、中でも最適レギュレータシステムが優れたロバスト安定性を有していることはよく知られているところである<sup>3) 4)</sup>。

さて、大規模システムについては、分散制御を用いることによって、サブシステム間の結合系における結合の強さの変動に対してロバスト安定な制御系を構成する方法が多く報告されている<sup>5) - 11)</sup>。しかしながら、これらの分散制御法では、サブシステム自体に起こるパラメータ変動に対するロバスト性に関しては何ら考慮されていない。そこで、本章では、大規模線形時間不変システムを対象に、最適レギュレータを分散制御で実現することによって、サブシステムに生じるパラメータ変動に対しても、またサブシステム間の結合系におけるパラメータ変動に対してもロバスト安定であるような分散制御系を構成することを目的として、このような制御系が構成できるための条件およびその構成法について考える。

ところで、対象とする大規模システムに対して前もって設定された二次評価関数を最小とする最適レギュレータは、一般に、分散制御で実現することはできない<sup>12)</sup>。しかし、評価関数の選ばれ方によっては分散制御で実現できる場合のあることが知られている<sup>13) - 15)</sup>。この場合、評価関数を任意に設定することができない

ので、最適制御の本来の目的からすると必ずしも満足のゆくものではないが、たとえどんな評価関数に対してであれ、最適レギュレータが分散制御で実現できれば、安定性に関して十分なロバスト性をもった制御系を構成できるという点において大きな意義がある。

この章で考える分散制御による最適レギュレータの構成問題は、このような観点に立って考察がなされている。まず 2.2 で、対象とする大規模線形時間不変システムを記述し、2.3 で、分散制御による最適レギュレータの構成問題を述べたあと、分散最適化可能性の概念を定義する。そして、2.4 で、分散最適化可能であるための条件を求め、分散最適レギュレータの構成法を述べる。最後に、この構成法の手順を、数値例を用いて具体的に示す。

## 2.2 対象システムの記述

本章では、図 2.1 のような、N 個の線形時間不変システム

$$S_i : \dot{x}_i(t) = A_i x_i(t) + B_i u_i(t) \quad (i = 1, 2, \dots, N) \quad (2.1)$$

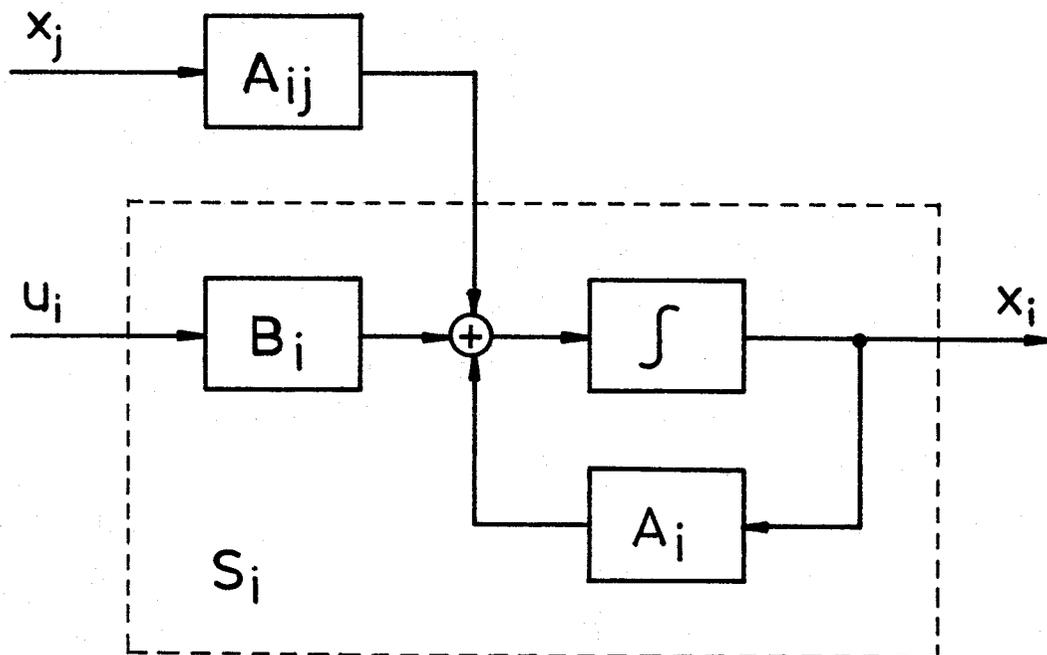


図 2.1 大規模線形時間不変システム

が相互に結合しあって構成された大規模システム S

$$S : \dot{x}_i(t) = A_i x_i(t) + B_i u_i(t) + \sum_{j=1}^N A_{ij} x_j(t) \quad (i = 1, 2, \dots, N) \quad (2.2)$$

を対象とする。ここに、 $x_i(t)$  は  $S_i$  の状態を表わす  $n_i$  次元ベクトル、 $u_i(t)$  は入力を表わす  $r_i$  次元ベクトル、また、 $A_i$ 、 $B_i$  はそれぞれ  $n_i \times n_i$ 、 $n_i \times r_i$  の実マトリクスで、 $n_i \times n_j$  実マトリクス  $A_{ij}$  は  $S_j$  から  $S_i$  への結合関係を表わしている。以下では、混乱のおそれがないので、 $x_i(t)$  や  $u_i(t)$  を、 $x_i$ 、 $u_i$  のように時間変数  $t$  を除いて書くことにする。

(2.2) をまとめると、全体システムはつぎの形で表現できる。

$$S : \dot{x} = (A_D + A_C) x + Bu \quad (2.3)$$

ここに、 $x \triangleq [x_1^T, x_2^T, \dots, x_N^T]^T$  は全体システムの状態を表わす  $n$  次元ベクトル、 $u \triangleq [u_1^T, u_2^T, \dots, u_N^T]^T$  は入力を表わす  $r$  次元ベクトルで、 $n = n_1 + n_2 + \dots + n_N$ 、 $r = r_1 + r_2 + \dots + r_N$  である。また、マトリクス

$$A_D \triangleq \text{block diag.} [A_1, A_2, \dots, A_N]$$

$$A_C \triangleq \text{block matrix} [A_{ij}]_{N \times N}$$

$$B \triangleq \text{block diag.} [B_1, B_2, \dots, B_N]$$

はそれぞれ、 $n \times n$ 、 $n \times n$ 、 $n \times r$  の実マトリクスである。

### 2.3 分散制御による最適レギュレータ問題の記述

いま、全体システム S に対して二次形式の評価関数

$$J = \int_0^{\infty} (x^T Q x + u^T R u) dt \quad (2.4)$$

を考える。ここに、 $Q$  と  $R$  は、それぞれ  $n$  次、 $r$  次の正定な実対称マトリクスと

する。この評価関数を最小とする制御入力  $u$  を求める問題は最適レギュレータ問題と呼ばれ、周知のように対  $[A_D + A_C, B]$  が安定化可能ならば解をもち、最適制御入力  $u$  は状態フィードバック則

$$u = -K^T x \quad (2.5)$$

の形で与えられる<sup>16)</sup>。ただし、フィードバックゲイン  $K^T$  は、

$$K^T = R^{-1} B^T P \quad (2.6)$$

であり、 $P$  は Riccati 方程式

$$(A_D + A_C)^T P + P(A_D + A_C) - P B R^{-1} B^T P + Q = 0 \quad (2.7)$$

の一意に定まる正定対称解である。この最適フィードバック制御 (2.5) は、最適レギュレータと呼ばれている。

ところで、最適レギュレータを実際に施そうとすると、各サブシステムの入力  $u_i$  を発生させるのに、一般に、そのサブシステムの状態  $x_i$  のみでは不可能で、状態の全体  $x$  が必要になる。すなわち、集中制御の形でしか実現できない。しかし、場合によっては分散制御

$$u_i = -K_i^T x_i \quad (i = 1, 2, \dots, N) \quad (2.8)$$

の形で実現できることがある。このことを示すために、まず、結合を無視して個々のサブシステム  $S_i$  についての最適レギュレータを構成しよう。そのために、各サブシステムに対する評価関数を

$$\hat{J}_i = \int_0^\infty (x_i^T \hat{Q}_i x_i + u_i^T \hat{R}_i u_i) dt \quad (2.9)$$

と与える。ここに、 $\hat{Q}_i, \hat{R}_i$  はともに正定対称マトリクスである。このとき、対  $[A_i, B_i]$  が安定化可能であれば、最適レギュレータは、つぎのように求められる。

$$u_i = -\hat{K}_i^T x_i, \quad \hat{K}_i^T = \hat{R}_i^{-1} B_i^T \hat{P}_i \quad (2.10)$$

ここに、 $\hat{P}_i$  は Riccati 方程式

$$A_i^T \hat{P}_i + \hat{P}_i A_i - \hat{P}_i B_i \hat{R}_i^{-1} B_i^T \hat{P}_i + \hat{Q}_i = 0 \quad (2.11)$$

の正定対称解である。このとき、(2.10) で与えられたサブシステムごとのフィードバックを集めたもの

$$u = -\hat{K}_D^T x, \quad \hat{K}_D \triangleq \text{block diag.} [\hat{K}_1, \hat{K}_2, \dots, \hat{K}_N] \quad (2.12)$$

は明らかに分散制御である。これは、全体システムにおいて、結合マトリクス  $A_{1j}$  がすべて 0 のとき、サブシステムの評価関数の総和

$$\hat{J} \triangleq \sum_{i=1}^N \hat{J}_i$$

を最小にする最適レギュレータである。しかし、 $A_{1j} \neq 0$  であるときには、一般にその最適性は失われる。ところが、

$$\tilde{Q} \triangleq \hat{Q}_D - A_C^T \hat{P}_D - \hat{P}_D A_C > 0 \quad (2.13)$$

$$\hat{Q}_D \triangleq \text{block diag.} [\hat{Q}_1, \hat{Q}_2, \dots, \hat{Q}_N]$$

$$\hat{P}_D \triangleq \text{block diag.} [\hat{P}_1, \hat{P}_2, \dots, \hat{P}_N]$$

が成り立つとき、つぎの評価関数

$$\tilde{J} = \int_0^\infty (x^T \tilde{Q} x + u^T \hat{R}_D u) dt \quad (2.14)$$

に対して最適性が復活する<sup>13)-15)</sup>。すなわち、分散状態フィードバック (2.12) は、評価関数 (2.14) に対する最適レギュレータになっているのである。

そこで、分散制御による最適制御について、つぎの定義を与える。

〔定義 2.1〕 全体システム  $S$  に対する評価関数  $J$  を適当に選んだとき，その最適レギュレータを分散状態フィードバックの形で実現できるならば，全体システム  $S$  は分散最適化可能であるという。■

以下の節では，分散制御によって最適レギュレータを構成する問題を考え，分散最適化可能な大規模システムのクラスを明らかにするとともに，その意義について述べる。

(注 2.1) Özgüner<sup>13)</sup> や Šiljak<sup>15)</sup> は，条件式 (2.13) が成り立てば分散制御で最適レギュレータが構成できることを示唆したが，それ以上の議論は行っていない。

## 2.4 分散最適レギュレータの構成

### 2.4.1 サブシステムが 1 入力である場合

本項では，(2.1) で表わされたサブシステム  $S_i$  ( $i = 1, 2, \dots, N$ ) はすべて 1 入力で，かつ完全可制御であるとする。そして，対  $(A_i, B_i)$  は可制御標準形で表現されているものと仮定する。すなわち，

$$A_i = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \\ a_{n_i}^i & a_{n_i-1}^i & \cdots & a_1^i \end{bmatrix}, \quad B_i = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \cdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (2.15)$$

このとき，結合関係を表わすマトリクス  $A_{ij} = [a_{pq}^{ij}]$  は，

$$A_{ij} = \hat{A}_{ij} + B_i F_{ij}^T \quad (2.16)$$

なる形で書き表わすことができる。ここに， $\hat{A}_{ij} \triangleq [\hat{a}_{pq}^{ij}]$  は， $A_{ij}$  の最下行を 0 で置きかえたマトリクス， $F_{ij}^T$  は  $A_{ij}$  の最下行である。すなわち，

$$\hat{a}_{pq}^{ij} = \begin{cases} a_{pq}^{ij} & (p = 1, 2, \dots, n_i-1) \\ 0 & (p = n_i) \end{cases} \quad (2.17)$$

$$F_{ij}^T = [a_{n_i n_j}^{ij}, a_{n_i n_j-1}^{ij}, \dots, a_{n_i 1}^{ij}] \quad (2.18)$$

これは、サブシステム間の結合を、サブシステムの操作入力と同一の入口を通る部分とそうでない部分とに分けたと見なすことができる。そして、マトリクス  $\hat{A}_{ij}$  の構造を特徴づけるための数  $\mu_{pq}^{ij}$  をつぎのように定義しておく。

$$\mu_{pq}^{ij} \triangleq -\frac{p + \theta_i + \frac{1}{2}}{\nu_i} + \frac{q + \theta_j - \frac{1}{2}}{\nu_j} \quad (2.19)$$

$$i, j = 1, 2, \dots, N ; p = 1, 2, \dots, n_i-1 ;$$

$$q = 1, 2, \dots, n_j$$

ここに、 $\nu_i$  は正数、 $\theta_i$  は実数である。

このとき、分散最適化可能性について、つぎの定理が成立する。

**【定理 2.1】** 適当な実数  $\nu_i (> 0)$ 、 $\theta_i (i = 1, 2, \dots, N)$  が存在して、 $\mu_{pq}^{ij} \geq 0$  となるすべての  $(i, j ; p, q)$  に対して

$$\hat{a}_{pq}^{ij} = 0 \quad (2.20)$$

が成立するとき、大規模システム S はつねに分散最適化可能である。■

この定理は、分散最適化可能な大規模システムのクラスを示している。しかもそのクラスは、サブシステム間の結合の強さに関係なく、言い換えれば、サブシステム間の結合の構造のみによって与えられている。ここで注意すべきことは、サブシステム間の結合のうち、サブシステムの入力と同一の入口を通っていると見なせる部分には全く関係しない点である。このことは、定理の条件にマトリクス  $F_{ij}$  が関与していないことからわかる。

(注 2.2) すべての  $i, j$  について  $\hat{A}_{ij} = 0$  の場合には、対  $(A_i, B_i)$  が安定化可能であれば分散最適化可能であることを示すことができる<sup>17)</sup>。

[例 2.1] つぎのような結合構造をもつ大規模システム S は、つねに分散最適化可能である。ただし、サブシステムの大きさについては、 $n_i \geq n_j$ ,  $i < j$  と仮定してある。なお、 $l_i$  は自然数、\* は 0 とは限らない数である。

(I)

$$A_{ij} = \left[ \begin{array}{c} \overbrace{\left[ \begin{array}{cc} * & O \\ * & * \end{array} \right]}^{n_j} \\ \left. \begin{array}{c} \left[ \begin{array}{cc} * & * \\ * & * \end{array} \right] \\ \left[ \begin{array}{cc} * & * \end{array} \right] \end{array} \right\} \begin{array}{l} n_j \\ n_i - n_j - 1 \\ 1 \end{array} \end{array} \right] \quad (i < j)$$

$$A_{ij} = \left[ \begin{array}{c} \left[ \begin{array}{cc} * & O \\ * & * \end{array} \right] \end{array} \right] \quad \left. \begin{array}{l} \\ \\ \end{array} \right\} \begin{array}{l} n_i (= n_j) \\ \\ 1 \end{array} \quad (i = j)$$

$$A_{ij} = \left[ \begin{array}{c} \left[ \begin{array}{ccc} * & * & \\ * & * & O \end{array} \right] \\ \left[ \begin{array}{ccc} * & * & * \end{array} \right] \\ \left[ \begin{array}{ccc} * & * & * \end{array} \right] \end{array} \right] \quad \left. \begin{array}{l} \\ \\ \\ \end{array} \right\} \begin{array}{l} n_i - 1 \\ n_i - 1 \\ 1 \end{array} \quad (i > j)$$

$\underbrace{\hspace{10em}}_{n_i - 1} \quad \underbrace{\hspace{2em}}_1 \quad \underbrace{\hspace{10em}}_{n_j - n_i}$

このような結合構造は、 $\nu_i = 1$ ,  $\theta_i = (n_1 + n_2 + \dots + n_i) / n$  と選ぶことによって得られる。

(II)

$$A_{ij} = \left[ \begin{array}{c} \overbrace{\left[ \begin{array}{c} \mathbf{O} \\ \vdots \\ \mathbf{O} \end{array} \right]}^{n_j} \\ \left[ \begin{array}{c} * \text{---} * \\ * \text{---} * \\ * \text{---} * \end{array} \right] \\ \vdots \\ * \text{---} * \end{array} \right] \left. \begin{array}{l} \left. \left. \right\} \ell_i - 1 \\ \left. \left. \right\} n_i - \ell_i \\ \right\} 1 \end{array} \right\} (i < j)$$

$$A_{ij} = \left[ \begin{array}{c} * \text{---} * \\ \vdots \\ * \text{---} * \end{array} \right] \left[ \begin{array}{c} \mathbf{O} \\ \vdots \\ \mathbf{O} \end{array} \right] \left. \right\} n_i (= n_j) \quad (i = j)$$

$$A_{ij} = \left[ \begin{array}{c} \left[ \begin{array}{c} * \text{---} * \\ * \text{---} * \\ * \text{---} * \end{array} \right] \\ \vdots \\ * \text{---} * \end{array} \right] \left[ \begin{array}{c} \mathbf{O} \\ \vdots \\ \mathbf{O} \end{array} \right] \left. \begin{array}{l} \left. \left. \right\} n_i - 1 \\ \right\} 1 \end{array} \right\} (i > j)$$

$\underbrace{\hspace{10em}}_{\ell_j} \quad \underbrace{\hspace{10em}}_{n_j - \ell_j}$

このような結合構造は、 $\nu_i = (2n_1) \times (2n_2) \times \cdots \times (2n_i)$ ,  $\theta^i = -\ell_i$  と選ぶことによって得られる。

それでは、この定理の証明を与えつつ、分散最適レギュレータの構成法を述べよう。

(定理 2.1 の証明) まず、マトリクス  $A_i$  をつぎのように分解しておく。

$$A_i = \hat{A}_i + B_i F_i^T \quad (2.21)$$

ここに、 $\hat{A}_i$  は  $A_i$  の最下行を  $\mathbf{O}$  で置き換えたもの、 $F_i^T$  は  $A_i$  の最下行である。すなわち、

$$\hat{A}_i = \begin{bmatrix} 0 & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \quad (2.22)$$

$$F_i^T = [a_{n_i}^i \quad a_{n_i-1}^i \quad \cdots \quad a_1^i] \quad (2.23)$$

ここで、 $F_i^T$  と  $F_{ij}^T$  をひとまとめにしたマトリクスを

$$\hat{F}_{ij}^T \triangleq \begin{cases} F_i^T + F_{ij}^T, & i = j \\ F_{ij}^T, & i \neq j \end{cases} \quad (2.24)$$

と定義すると、(2.3) はつぎの形に書き直せる。

$$S : \dot{x} = (\hat{A}_D + \hat{A}_0 + B\hat{F}^T) x + Bu \quad (2.25)$$

ここに、

$$\hat{A}_D \triangleq \text{block diag. } [\hat{A}_1, \hat{A}_2, \dots, \hat{A}_N]$$

$$\hat{A}_0 \triangleq \text{block matrix } [\hat{A}_{ij}]_{N \times N}$$

$$\hat{F}^T \triangleq \text{block matrix } [\hat{F}_{ij}^T]_{N \times N}$$

である。ところで、本来の分離システムは、(2.1) からわかるように、

$$S_D : \dot{x} = A_D x + Bu \quad (2.26)$$

で記述されるが、ここでは、(2.25) の  $\hat{A}_0 + B\hat{F}^T$  の項を結合系とみなし、仮想的に

$$\hat{S}_D : \dot{x} = \hat{A}_D x + Bu \quad (2.27)$$

を  $S$  の分離システムと考えることにする。そして、まず、この  $\hat{S}_D$  についての最

適レギュレータ問題を考えよう。そのために必要となるマトリクスをここで定義しておく。

$$T_D \triangleq \text{block diag. } [T_1, T_2, \dots, T_N] \quad (2.28)$$

$$T_i \triangleq \text{diag. } [r_i^{-\theta_i-1}, r_i^{-\theta_i-2}, \dots, r_i^{-\theta_i-n_i}] \quad (i=1, 2, \dots, N) \quad (2.29)$$

$$T \triangleq \text{diag. } [r_1^{-\theta_1-n_1}, r_2^{-\theta_2-n_2}, \dots, r_N^{-\theta_N-n_N}] \quad (2.30)$$

$$\Gamma_D \triangleq \text{block diag. } [r_1 I_{n_1}, r_2 I_{n_2}, \dots, r_N I_{n_N}] \quad (2.31)$$

$$\Gamma \triangleq \text{diag. } [r_1, r_2, \dots, r_N] \quad (2.32)$$

ここに、 $\nu_i$  と  $\theta_i$  は定理 2.1 の条件を満たす実数、また  $r_i \triangleq r^{1/\nu_i}$  で、 $r$  はのちに決定され、現段階では未定の実数である。さらに、 $\hat{P}$  を Riccati 方程式

$$\hat{A}_D^T \hat{P} + \hat{P} \hat{A}_D - \hat{P} B \hat{R}^{-1} B^T \hat{P} + \hat{Q} = 0 \quad (2.33)$$

を満たす正定な実対称マトリクスとする。ただし、 $\hat{Q} \triangleq \text{block diag. } [\hat{Q}_1, \hat{Q}_2, \dots, \hat{Q}_N]$ 、 $\hat{R} \triangleq \text{diag. } [\hat{r}_1, \hat{r}_2, \dots, \hat{r}_N]$  で、 $\hat{Q}_i$  は  $n_i \times n_i$  正定対称マトリクス、 $\hat{r}_i$  は正数である。このとき、(2.33) における各マトリクスの形から、 $\hat{P}$  が  $n_i \times n_i$  正定対称マトリクス  $\hat{P}_i$  を対角ブロックとするブロック対角マトリクスであることがわかる。

さて、 $\hat{S}_D$  に対する評価関数をつぎのように与えよう。

$$\hat{J}_D = \int_0^\infty (x^T Q_D x + u^T R_D u) dt \quad (2.34)$$

ここに、

$$Q_D \triangleq \Gamma_D^{\frac{1}{2}} (T_D \hat{Q} T_D) \Gamma_D^{\frac{1}{2}} + (\beta - 1) \Gamma_D^{\frac{1}{2}} (T_D \hat{P} B \hat{R}^{-1} B^T \hat{P} T_D) \Gamma_D^{\frac{1}{2}}$$

$$R_D \triangleq \beta^{-1} \Gamma^{-\frac{1}{2}} T \hat{R} T \Gamma^{-\frac{1}{2}}$$

で、 $\beta$  は、 $r$  と同様、のちに決定される 1 以上の正数である。ここで定義された  $Q_D$  と  $R_D$  がともに正定なブロック対角マトリクスであることは、各マトリク

スの形から明らかである。この最適化問題は、 $\hat{S}_D$  における対  $(\hat{A}_D, B)$  が完全可制御であるので解をもち、最適制御は、

$$u = -K_D^T x, \quad K_D^T \triangleq R_D^{-1} B^T P_D \quad (2.35)$$

と計算される。ここに、 $P_D$  は Riccati 方程式

$$\hat{A}_D^T P_D + P_D \hat{A}_D - P_D B R_D^{-1} B^T P_D + Q_D = 0 \quad (2.36)$$

の正定対称解で、任意の  $\beta (\geq 1)$  について

$$P_D = T_D \hat{P} T_D \quad (2.37)$$

で与えられる。このことは、(2.37) を (2.36) の左辺に代入し、関係式

$$T_D \hat{A}_D T_D^{-1} = \Gamma_D^{\frac{1}{2}} \hat{A}_D \Gamma_D^{\frac{1}{2}}, \quad B \Gamma_D^{\frac{1}{2}} = \Gamma_D^{\frac{1}{2}} B, \quad B T_D^{-1} = T_D^{-1} B \quad (2.38)$$

および (2.33) を用いて計算することによって、容易に確かめることができる。得られた状態フィードバック (2.35) が分散制御になっていることは明らかである。

さて、以上の結果をもとに、結合を含んだシステム  $S$  について分散最適レギュレータ問題を考えよう。そのために、全体システム  $S$  に対する評価関数を、つぎのように与える。

$$J = \int_0^{\infty} (x^T Q x + u^T R u) dt \quad (2.39)$$

ここに、

$$Q \triangleq Q_D - Q_C \quad (2.40)$$

$$Q_C \triangleq (\hat{A}_C + B \hat{F}^T)^T P_D + P_D (\hat{A}_C + B \hat{F}^T) \quad (2.41)$$

$$R \triangleq R_D \quad (2.42)$$

である。このとき、(2.36)、(2.40) ~ (2.42) から

$$\begin{aligned}
& (\hat{A}_D + \hat{A}_C + B \hat{F}^T)^T P_D + P_D (\hat{A}_D + \hat{A}_C + B \hat{F}^T) \\
& - P_D B R^{-1} B^T P_D + Q = 0
\end{aligned} \tag{2.43}$$

なる関係式が成り立つことがわかる。(2.43)は、システム S と評価関数 J に対応する Riccati 方程式であり、 $P_D$  はその正定解<sup>18)</sup>である。したがって、(2.40) ~ (2.42) で定義された Q と R がともに正定であれば、システム S の評価関数 J に対する最適レギュレータが求まり、それは、

$$u = -K^T x, \quad K^T \triangleq R^{-1} B^T P_D \tag{2.44}$$

で与えられる。これは、さきに  $\hat{S}_D$  について得た最適レギュレータ (2.35) と全く同じものであり、分散制御である。ところで、(2.38) で定義した R が正定であることは明らかである。したがって、定理の条件が満たされているとき、未定のパラメータ  $\beta$  と  $\gamma$  を適当に選ぶことによって Q を正定にすることができることを示せば、証明は完了する。

このことを示すために、Q をつぎのように書き換える。

$$\begin{aligned}
Q = & T_D \Gamma_D^{-\frac{1}{2}} \left[ \hat{Q} - \Gamma_D^{-\frac{1}{2}} (T_D \hat{A}_C T_D^{-1}) \hat{P} \Gamma_D^{-\frac{1}{2}} - \Gamma_D^{-\frac{1}{2}} \hat{P} (T_D \hat{A}_C T_D^{-1}) \right. \\
& \left. \Gamma_D^{-\frac{1}{2}} \right] \Gamma_D^{-\frac{1}{2}} T_D + (\beta - 1) \left[ T_D \hat{P} B \Gamma_D^{-\frac{1}{2}} - (\beta - 1)^{-1} \hat{F} T B^T \Gamma_D^{-\frac{1}{2}} \right. \\
& \left. \hat{R} \right] \hat{R}^{-1} \left[ \Gamma_D^{-\frac{1}{2}} B^T \hat{P} T_D - (\beta - 1)^{-1} \hat{R} \Gamma_D^{-\frac{1}{2}} B T \hat{F}^T \right] - (\beta - 1)^{-1} \\
& \hat{F} T B^T \Gamma_D^{-\frac{1}{2}} \hat{R} \Gamma_D^{-\frac{1}{2}} B T \hat{F}^T
\end{aligned} \tag{2.45}$$

この式の変形には、(2.37) と  $T_D B = B T$  なる関係を用いている。(2.45) において、右辺の第 2 項は半正定であり、第 3 項は半負定であるが  $\beta$  を大きくすることによっていくらでも小さくすることができるので、第 1 項を正定にすることができれば、そのとき Q は正定である。第 1 項の正定性を示すために、つ

---

注) Q の正定性を仮定したとき、正定解  $P_D$  の一意性が成立する。このことは、 $\hat{A}_D + \hat{A}_C + B \hat{F}^T - B R^{-1} B^T P_D$  が漸近安定であり、したがって対  $(\hat{A}_D + \hat{A}_C + B \hat{F}^T, B)$  が安定化可能であることより立証することができる<sup>18)</sup>。

ぎの不等式を用いる。

$$\begin{aligned} \widehat{Q} - \Gamma_D^{-\frac{1}{2}} (T_D \widehat{A}_0 T_D^{-1})^T \widehat{P} \Gamma_D^{-\frac{1}{2}} - \Gamma_D^{-\frac{1}{2}} \widehat{P} (T_D \widehat{A}_0 T_D^{-1}) \Gamma_D^{-\frac{1}{2}} \\ \geq \widehat{Q} - 2 \|\widehat{P}\| \|\widetilde{A}_0\| I \end{aligned} \quad (2.46)$$

ここに,

$$\widetilde{A}_0 \triangleq \Gamma_D^{-\frac{1}{2}} T_D \widehat{A}_0 T_D^{-1} \Gamma_D^{-\frac{1}{2}}$$

であり,  $\|\cdot\|$  は  $\ell_2$  ノルムから導かれたマトリクスノルムである。ところで,

$$\widetilde{A}_0 = \text{block matrix} \left[ (r_i r_j)^{-\frac{1}{2}} T_i \widehat{A}_{ij} T_j^{-1} \right]_{N \times N} \quad (2.47)$$

であるから,  $\widetilde{A}_0$  の  $(i, j)$  ブロック  $\widetilde{A}_{ij}$  の  $(p, q)$  要素を  $\widetilde{a}_{pq}^{ij}$  と書くことにすれば,

$$\begin{aligned} \widetilde{a}_{pq}^{ij} &= (r_i r_j)^{-\frac{1}{2}} r_i^{-\theta_i - p} r_j^{\theta_j + q} \widehat{a}_{pq}^{ij} \\ &= r^{\mu_{pq}^{ij}} \widehat{a}_{pq}^{ij} \end{aligned} \quad (2.48)$$

となる。したがって, 定理の条件が満たされているときには, すべての  $\widetilde{a}_{pq}^{ij}$  について, つぎのいずれかが成立する。

$$\begin{cases} \widetilde{a}_{pq}^{ij} = 0 & (\widehat{a}_{pq}^{ij} = 0 \text{ のとき}) \\ \lim_{r \rightarrow \infty} \widetilde{a}_{pq}^{ij} = 0 & (\widehat{a}_{pq}^{ij} \neq 0 \text{ のとき}) \end{cases} \quad (2.49)$$

すなわち,  $r$  を十分に大きく選んでやれば,  $\|\widetilde{A}_0\|$  の値をいくらでも小さくすることができるのである。こうして, 適当な  $r$  に対して (2.46) の左辺のマトリクスが正定となることがわかった。

以上で定理は証明された。■

ところで, (2.44) のフィードバックゲインは,

$$K^r = \beta \Gamma T^{-1} \widehat{R}^{-1} B^T \widehat{P} T_D \quad (2.50)$$

と変形できるから, 各サブシステムに施す状態フィードバックは,

$$u_i = -k_i^T x_i, \quad k_i^T = \beta \hat{r}_i^{-1} B_i^T \hat{P}_i \hat{T}_i \quad (2.51)$$

で与えられる。ただし、

$$\hat{T}_i \triangleq \text{diag.} [r_i^{n_i}, r_i^{n_i-1}, \dots, r_i]$$

である。ここで、 $r_i = 1$  ( $i = 1, 2, \dots, N$ ) とおいてみよう。そうすると、状態フィードバック (2.51) は、適当な  $\beta$  に対して、評価関数  $\hat{J}_D$  を最小にするような (仮想の分離システム  $\hat{S}_D$  でなく) システム  $S_D$  の最適レギュレータになっているのである。このことは、各分離サブシステム  $S_i$  に対して計算した最適レギュレータゲインを調整することによって、全体システムに対する最適レギュレータゲインが得られることを意味している。

さて、こうして得られた分散最適レギュレータを施したとき、その閉ループシステムは次式で与えられる。

$$S_0: \quad \dot{x} = (A_D + A_0 - B K^T) x \quad (2.52)$$

そして、このシステムは2つの意味でのロバスト性が保証されている。一つは、最適レギュレータシステムであることによるもので、制御対象やフィードバックループにおけるパラメータ変動に対するロバスト安定性である<sup>3)4)</sup>。具体的に言えば、閉ループシステム  $S_0$  の伝達特性のパラメータ変動に対する感度は、開ループシステム  $S$  のそれに比べて低くなっており、また、 $S_0$  の各入力チャネルにおいて  $\frac{1}{2}$  から無限大までのゲインの増減があっても、あるいは  $\pm 60^\circ$  の範囲の位相の変化があっても、安定性がくずれないことが保証されているのである。もう一つは、分散制御系であることによるもので、結合系におけるパラメータ変動に対するロバスト安定性である。このことは、定理の証明の過程から確かめることができる。すなわち、分散状態フィードバック (2.44) は、結合関係を表わすマトリクス  $\hat{A}_0$  が変化しても、(2.40) で定義されたマトリクス  $Q$  が正定である限り、適当な評価関数に対する最適レギュレータとなっており、これは、サブシステム間の結合が断線したり再結線されても、また結合の強さに変化があっても、

全体システムが何らかの評価関数に対する最適レギュレータシステムであることを意味している。

さて、これまで  $\beta$  や  $\gamma$  はマトリクス  $Q$  の正定性を保証するように選ばばよいとしか述べなかったが、閉ループシステム  $S_0$  の零入力応答には  $\gamma$  の方がより関係していると考えられる。たとえば、 $V(t) = x^T(t) P_D x(t)$  なるスカラ関数を考えると、これは明らかに  $S_0$  に対するリアプノフ関数である。したがって、

$$\|x(t)\|^2 \leq \lambda_m^{-1}(P_D) \lambda_M(P_D) \|x(0)\|^2$$

が成り立ち、しかも  $P_D$  は  $\hat{P}$  と  $\gamma$  によって定まり、 $\beta$  には独立である。このように、実際に  $\beta$  と  $\gamma$  を決定するにあたっては、閉ループシステムのふるまいを考慮に入れることが必要となろう。

ところで、定理 2.1 で与えられる分散最適化可能な大規模システムのクラスは、あとで示すように、分散状態フィードバックによって任意の安定度で安定化できるシステムのクラスでもある。このような安定化ができるシステムのクラスについてはこれまで多くの報告がある。そしてこのうち、Sezer-Siljak<sup>11)</sup> の示したクラスが最も広いものだと考えられるが、本章で与えた分散最適化可能なシステムのクラスはそれよりも広いものである。それでは、定理 2.1 の条件が成立していれば、その安定度を任意に指定して安定化できることを示そう。

いま、指定する安定度を  $\alpha$  ( $\geq 0$ ) とし、(2.25) で示された全体システム  $S$  における  $\hat{A}_0$  が定理の条件を満たしているものとする。このとき、任意の  $\alpha$  について  $\hat{A}_0 + \alpha I$  もまたその条件を満たすことは容易にわかる。したがって、

$$\tilde{S} : \dot{\tilde{x}} = (\hat{A}_D + \hat{A}_0 + B \hat{F}^T + \alpha I) \tilde{x} + B \tilde{u} \quad (2.53)$$

なるシステムも分散最適化可能であり、ゆえに  $\tilde{S}$  を漸近安定にする分散状態フィードバックが存在する。それを  $\tilde{u} = -\tilde{K}^T \tilde{x}$  と書くことにすると、 $S$  に状態フィードバック  $u = -\tilde{K}^T x$  を施した閉ループシステム

$$S_0 : \dot{x} = (\hat{A}_D + \hat{A}_0 + B \hat{F}^T - B \tilde{K}^T) x \quad (2.54)$$

は，明らかに安定度  $\alpha$  で漸近安定，すなわち，適当な正数  $c$  が存在して，

$$\|x(t)\| \leq c \|x(0)\| e^{-\alpha t} \quad (2.55)$$

となっている<sup>16)</sup>。これで，安定度を任意に指定できることが確かめられた。

#### 2.4.2 サブシステムが多入力である場合への拡張

ここでは，2.4.1で得た結果が，サブシステムが多入力システムである場合に一般化できることを示す。そのためここでも，すべてのサブシステム  $S_1$  は完全可制御であると仮定し，対  $(A_1, B_1)$  はつぎのような可制御標準形で表現されているものとしておく。

$$A_1 = \begin{bmatrix} A_{111} & A_{112} & \cdots & A_{11r_1} \\ A_{121} & A_{122} & \cdots & A_{12r_1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ A_{1r_11} & A_{1r_12} & \cdots & A_{1r_1r_1} \end{bmatrix} \quad (2.56)$$

$$A_{ikk} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \\ * & * & \cdots & * \end{bmatrix}$$

$$A_{ik\ell} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ * & * & \cdots & * \end{bmatrix} \quad (k \neq \ell)$$

$$B_1 = \begin{bmatrix} b_{111} & b_{112} & \cdots & b_{11r_1} \\ b_{121} & b_{122} & \cdots & b_{12r_1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{1r_11} & b_{1r_12} & \cdots & b_{1r_1r_1} \end{bmatrix} \quad (2.57)$$

$$b_{1kk} = [0 \ 0 \ \cdots \ 0 \ 1]^T$$

$$b_{1k\ell} = [0 \ 0 \ \cdots \ 0 \ *]^T \quad (k < \ell)$$

$$b_{1k\ell} = [0 \ 0 \ \cdots \ 0 \ 0]^T \quad (k > \ell)$$

ここに、 $A_{1k\ell}$  は  $\sigma_{1k} \times \sigma_{1\ell}$  マトリクス、 $b_{1k\ell}$  は  $\sigma_{1k}$  次元ベクトルで、 $\sigma_{1k}$  は  $\sigma_{11} + \sigma_{12} + \cdots + \sigma_{1r_1} = n_1$  を満たす正の整数である。また、\* は必ずしも 0 とは限らない要素であることを示している。 $A_1$ 、 $B_1$  のこのような形に対応させて、 $A_{ij}$  も

$$A_{ij} = \begin{bmatrix} A_{ij11} & A_{ij12} & \cdots & A_{ij1r_j} \\ A_{ij21} & A_{ij22} & \cdots & A_{ij2r_j} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ A_{ijr_i1} & A_{ijr_i2} & \cdots & A_{ijr_i r_j} \end{bmatrix} \quad (2.58)$$

と分割表現しておこう。ここに、 $A_{ijk\ell} \triangleq [a_{pq}^{ijk\ell}]$  は  $\sigma_{1k} \times \sigma_{1\ell}$  マトリクスである。

さて、この全体システム  $S$  を、サブシステムが 1 入力である場合に用いた (2.25) の形に変換するために、いくつかのマトリクスを定義しておこう。

$$\hat{S}_{A_1} \triangleq \text{block diag.} [\hat{A}_{11}, \hat{A}_{12}, \cdots, \hat{A}_{1r_1}]$$

$$\hat{B}_1 \triangleq \text{block diag.} [\hat{b}_{11}, \hat{b}_{12}, \cdots, \hat{b}_{1r_1}]$$

$$\hat{A}_{ij} \triangleq \text{block matrix} [\hat{A}_{ijk\ell}]_{r_i \times r_j}$$

ここに、 $\hat{A}_{1k}$  は、

$$\widehat{A}_{ik} \triangleq \begin{bmatrix} 0 & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$$

なる形をした  $\sigma_{ik} \times \sigma_{ik}$  マトリクス,  $\widehat{b}_{ik}$  は (2.57) で与えた  $b_{ikk}$  と同じベクトル, また  $\widehat{A}_{ijk\ell} \triangleq [\widehat{a}_{pq}^{ijk\ell}]$  は  $\sigma_{ik} \times \sigma_{j\ell}$  マトリクスで, その  $(p, q)$  要素は,

$$\widehat{a}_{pq}^{ijk\ell} \triangleq \begin{cases} a_{pq}^{ijk\ell} & (p \neq \sigma_{ik}) \\ 0 & (p = \sigma_{ik}) \end{cases}$$

で与えられている。これらのマトリクスを用いると, (2.56) ~ (2.58) の各マトリクスは, つぎのように表現することができる。

$$A_i = \widehat{A}_i + \widehat{B}_i F_i^T \quad (2.59)$$

$$B_i = \widehat{B}_i H_i \quad (2.60)$$

$$A_{ij} = \widehat{A}_{ij} + \widehat{B}_i F_{ij}^T \quad (2.61)$$

ここに,  $F_i^T, F_{ij}^T$  は適当な大きさのマトリクス,  $H_i$  は  $r_i \times r_i$  の正則なマトリクスである。さらに,

$$\widehat{F}_{ij}^T \triangleq F_i^T + F_{ij}^T$$

$$\widehat{u}_i(t) \triangleq H_i u_i(t)$$

と定義すると, (2.2) で記述された全体システムは,

$$S : \dot{x}_i = \widehat{A}_i x_i + \widehat{B}_i \widehat{u}_i + \sum_{j=1}^N (\widehat{A}_{ij} + \widehat{B}_i \widehat{F}_{ij}^T) x_j \quad (i = 1, 2, \dots, N) \quad (2.62)$$

と書き直せる。そして, これらをまとめることによって, (2.25) に対応する  $S$  の表現が, つぎのように得られる。

$$S : \dot{x} = (\hat{A}_D + \hat{A}_C + \hat{B} \hat{F}^T) x + \hat{B} \hat{u} \quad (2.63)$$

ただし、

$$\hat{A}_D \triangleq \text{block diag. } [\hat{A}_1, \hat{A}_2, \dots, \hat{A}_N]$$

$$\hat{A}_C \triangleq \text{block matrix } [\hat{A}_{ij}]_{N \times N}$$

$$\hat{B} \triangleq \text{block diag. } [\hat{B}_1, \hat{B}_2, \dots, \hat{B}_N]$$

$$\hat{F}^T \triangleq \text{block matrix } [\hat{F}_{ij}^T]_{N \times N}$$

$$\hat{u} \triangleq [\hat{u}_1^T, \hat{u}_2^T, \dots, \hat{u}_N^T]^T$$

(2.63)において $\hat{u}$ を $S$ の操作入力を見なしたとき、全体システムは、 $(\sum_{i=1}^N r_i)$ 個の1入力のサブシステムで構成されたものと考えることができる。実際、 $x_i \triangleq [x_{i1}^T, x_{i2}^T, \dots, x_{ir_i}^T]^T$ ,  $x_{ik} \in \mathbb{R}^{r_{ik}}$ ,  $\hat{u}_{ik} \triangleq [\hat{u}_{i1}, \hat{u}_{i2}, \dots, \hat{u}_{ir_i}]^T$ ,  $\hat{u}_{ik} \in \mathbb{R}$ とにおいて、(2.62)を書き下すと、

$$\dot{x}_{ik} = \hat{A}_{ik} x_{ik} + \hat{b}_{ik} \hat{u}_{ik} + \sum_{j=1}^N \sum_{\ell=1}^{r_j} (\hat{A}_{ijk\ell} + \hat{b}_{ik} \hat{F}_{ijk\ell}^T) x_{j\ell} \quad (i=1, 2, \dots, N; k=1, 2, \dots, r_i) \quad (2.64)$$

となる。しかも、 $\hat{A}_{ik}$ と $\hat{b}_{ik}$ は1入力の場合に用いた標準形の形をしている。このように、サブシステムが多入力である場合にも、全体システムを(2.63)の形に変形することによって、定理2.1を直接適用して分散最適化可能な大規模システムのクラスを得ることができる。

ところで、(2.63)の形をもとにして分散最適レギュレータを構成する場合、その評価関数はつぎのような形となる。

$$J = \int_0^{\infty} (x^T Q x + \hat{u}^T R \hat{u}) dt \quad (2.65)$$

これは、書き直すと、

$$J = \int_0^{\infty} (x^T Q x + u^T H^T R H u) dt \quad (2.66)$$

$$H \triangleq \text{block diag. } [H_1, H_2, \dots, H_N]$$

であり，マトリクス  $H^T R H$  が必ずしも対角とはならないために，仮想的な入力  $\hat{u}$  についてなら各入力チャンネルごとにゲイン余有無限大，ゲイン減少余有  $\frac{1}{2}$ ，位相余有  $\pm 60^\circ$  が保証できても，真の入力  $u$  については保証されない。しかし，サブシステム  $S_i$  の入力  $\hat{u}_i$  に関する評価関数の重みを若干修正することにより，入力  $u$  についての上のような十分な安定余有を実現する分散状態フィードバックを構成することができる<sup>19)</sup>。

さて，評価関数 (2.65) に対する分散最適レギュレータが，

$$\hat{u}_i = -K_i^T x_i \quad (i = 1, 2, \dots, N) \quad (2.67)$$

で得られたとき，全体システムに施すべき状態フィードバックは，

$$u_i = -H_i^{-1} K_i^T x_i \quad (i = 1, 2, \dots, N) \quad (2.68)$$

となる。これは評価関数 (2.66) に対する分散最適レギュレータであり，サブシステムごとの状態フィードバックになっていることは明らかである。

### 2.4.3 数 値 例

本節で述べた分散最適レギュレータの構成手順を，ここでは改めて数値例を用いて示すことにしよう。

つぎの2つのサブシステムから成るシステムを考える。

$$S_1 : \begin{bmatrix} \dot{x}_{11} \\ \dot{x}_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{11} \\ x_{12} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u_1 \quad (2.69)$$

$$S_2 : \begin{bmatrix} \dot{x}_{21} \\ \dot{x}_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{21} \\ x_{22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u_2 \quad (2.70)$$

いずれも明らかに完全可制御である。これらが相互結合して構成された全体シス

テムとして、つぎのものを考える。

$$S : \begin{bmatrix} \dot{x}_{11} \\ \dot{x}_{12} \\ \dots \\ \dot{x}_{21} \\ \dot{x}_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & \vdots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \vdots & 1 & 0 \\ \dots & \dots & \vdots & \dots & \dots \\ 0 & 1 & \vdots & 0 & 1 \\ 1 & 0 & \vdots & -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{11} \\ x_{12} \\ \dots \\ x_{21} \\ x_{22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & \vdots & 0 \\ 1 & \vdots & 0 \\ \dots & \vdots & \dots \\ 0 & \vdots & 0 \\ 0 & \vdots & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ \dots \\ u_2 \end{bmatrix} \quad (2.71)$$

これを、(2.25)の形に表わしたとき、

$$\hat{A}_0 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & \vdots & 0 \\ 0 & 0 & \vdots & 0 \\ \dots & \dots & \vdots & \dots \\ 0 & \vdots & \vdots & 0 & 1 \\ 0 & \vdots & \vdots & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 & \vdots & 0 \\ 1 & \vdots & 0 \\ \dots & \vdots & \dots \\ 0 & \vdots & 0 \\ 0 & \vdots & 1 \end{bmatrix}$$

$$\hat{A}_c = \begin{bmatrix} 0 & \vdots & 1 & 0 \\ 0 & \vdots & 0 & 0 \\ \dots & \vdots & \dots & \dots \\ 0 & 1 & \vdots & 0 \\ 0 & 0 & \vdots & 0 \end{bmatrix}, \quad \hat{F}^T = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \vdots & 1 & 0 \\ \dots & \vdots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 0 & \vdots & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

となることがわかる。この $\hat{A}_c$ について定理2.1を適用する。たとえば、 $\nu_1 = \nu_2 = 1$ ,  $\theta_1 = \frac{1}{2}$ ,  $\theta_2 = 1$ と選ぶと、条件を満たすので、(2.71)で与えられた $S$ は分散最適化可能である。したがって、 $S$ に対する分散最適レギュレータを構成することができる。

まず、Riccati方程式(2.33)における $\hat{Q}$ と $\hat{R}$ をそれぞれ、

$$\hat{Q} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \vdots & & 0 \\ 0 & 2 & \vdots & & \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ & & & 1 & 0 \\ 0 & & \vdots & 0 & 2 \end{bmatrix}, \quad \hat{R} = \begin{bmatrix} 1 & \vdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \vdots & 1 \end{bmatrix}$$

と与えよう。このとき、(2.33)の正定解は、

$$\hat{P} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & \vdots & & 0 \\ 1 & 2 & \vdots & & \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ & & & 2 & 1 \\ 0 & & \vdots & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

である。これらを用いて、評価関数(2.34)のなかの $Q_D$ と $R_D$ を計算すると、つぎのようになる。

$$Q_D = \begin{bmatrix} \beta r^{-2} & 2(\beta-1)r^{-3} & \vdots & & 0 \\ 2(\beta-1)r^{-3} & 2(2\beta-1)r^{-4} & \vdots & & \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ & & & 0 & \\ & & & \vdots & \beta r^{-3} & 2(\beta-1)r^{-4} \\ & & & \vdots & 2(\beta-1)r^{-4} & 2(2\beta-1)r^{-5} \end{bmatrix}$$

$$R_D = \begin{bmatrix} \beta^{-1} r^{-6} & \vdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \vdots & \beta^{-1} r^{-7} \end{bmatrix}$$

ここでは、 $T_D, \Gamma_D, T, \Gamma$ を定義するのに、 $\nu_1$ や $\theta_1$ として先程選んだ値を用いている。すなわち、 $\nu_1 = \nu_2 = 1, \theta_1 = \frac{1}{2}, \theta_2 = 1$ である。このとき、Riccati方程式(2.36)の正定解は、

$$P_D = \left[ \begin{array}{cc|cc} 2r^{-3} & r^{-4} & \vdots & \\ r^{-4} & 2r^{-5} & \vdots & 0 \\ \hline & & \vdots & \\ 0 & & 2r^{-4} & r^{-5} \\ & & \vdots & r^{-5} & 2r^{-6} \end{array} \right]$$

で与えられる。この結果、 $Q_0$ は、

$$Q_0 = \left[ \begin{array}{cc|cc} & & \vdots & 2r^{-3}+r^{-4}+r^{-5} & 2r^{-6} \\ & 0 & \vdots & 3r^{-4}+2r^{-5} & r^{-5} \\ \hline 2r^{-3}+r^{-4}+r^{-5} & 3r^{-4}+2r^{-5} & \vdots & -2r^{-5} & -r^{-5}-2r^{-6} \\ & 2r^{-6} & \vdots & -r^{-5}-2r^{-6} & -4r^{-6} \end{array} \right]$$

と計算される。これで、全体システムに対する評価関数(2.39)を与える準備ができた。

(2.40)における $Q$ は、つぎのようになる。

$$Q \triangleq Q_D - Q_0 = \left[ \begin{array}{cc|cc} \beta r^{-2} & 2(\beta-1)r^{-3} & \vdots & \\ 2(\beta-1)r^{-3} & 2(2\beta-1)r^{-4} & \vdots & \\ \hline -2r^{-3}-r^{-4}-r^{-5} & -3r^{-4}-2r^{-5} & \vdots & \\ -2r^{-6} & -r^{-5} & \vdots & \\ & & \vdots & -2r^{-3}-r^{-4}-r^{-5} & -2r^{-6} \\ & & \vdots & -3r^{-4}-2r^{-5} & -r^{-5} \\ \hline & & \vdots & \beta r^{-3}+2r^{-5} & 2(\beta-1)r^{-4}+r^{-5}+2r^{-6} \\ & & \vdots & 2(\beta-1)r^{-4}+r^{-5}+2r^{-6} & 2(2\beta-1)r^{-5}+4r^{-6} \end{array} \right]$$

したがって、この  $Q$  が正定となるような正数  $\beta (> 1)$  と  $r$  について、(2.71) で表わされた全体システム  $S$  に対する分散最適レギュレータが得られ、それはつぎのようになる。

$$\begin{bmatrix} u_1 \\ \dots \\ u_2 \end{bmatrix} = -\beta \begin{bmatrix} r^2 & 2r & \vdots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \vdots & r^2 & 2r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{11} \\ x_{12} \\ \dots \\ x_{21} \\ x_{22} \end{bmatrix} \quad (2.72)$$

マトリクス  $Q$  を正定とする  $\beta, r$  の値としては、たとえば、 $r = 1, \beta \geq 6.5$  と選ぶことができる。

## 2.5 結 言

本章では、大規模線形時間不変システムに対する最適レギュレータを、分散状態フィードバックによって構成する問題を考えた。その目的は、分散制御を用いることによってもたらされるサブシステム間の結合系のパラメータ変動に対するロバスト安定性と、最適レギュレータを用いることによってもたらされるサブシステム内部のパラメータ変動に対するロバスト安定性の両方をともに有する信頼性の高いフィードバック制御系を構成することであった。そして、最適レギュレータのもたらすロバスト安定性が評価関数の選び方に依存しないことに注目して、分散最適化可能性の概念を定義し、大規模線形時間不変システムがつねに分散最適化可能であるための条件を導いた。得られた条件はサブシステム間の結合系が満たすべき構造として与えられ、この結果、分散最適化が可能であるシステムのクラスが明らかとなった。また、分散最適レギュレータの構成手順についても詳しく述べた。

ところで、この章では、本研究の主旨に基づき、できる限りゆるくて明確な条件を導くために、各サブシステムは可制御標準形で表現されているものとして議論を展開した。それゆえ、ここでの結果の適用にあたっては、一般に、サブシス

テムごとに状態の変数変換をし、可制御標準形に直す必要がある。しかし、このような変換を行なうと、得られた標準形表現におけるパラメータが構造としての本質的な意味を失なってしまう、これまで述べてきた分散最適レギュレータシステムのロバスト安定性に問題が生じてくる。このため、より実際的な立場からは、サブシステムの標準形表現を前提としない考察をすることが今後必要となろう。なお、これに関して、 $\hat{A}_0 = 0$  の場合については、筆者らが文献17)で報告していること、また $\hat{A}_0 \neq 0$  の場合については、第5章における取り扱いが参考になることを付記しておく。

## 第 3 章 分散制御による

### サーボ機構

#### 3.1 緒 言

前章で述べた分散最適レギュレータの構成問題では，制御量に対する目標値はつねにゼロであり，外乱はインパルス状であることを想定していた。しかし，実際の制御系の設計においては，目標値が時間的に変化したり，外乱が持続的に加わることを考慮しなければならない場合が多い。この場合，制御系には，制御量が目標信号に追従し，定常状態ではその偏差がゼロになっていること，しかも定常外乱が加わってもこの追従性が失なわれないことが要求される。そこで，本章では，大規模線形時間不変システムを対象に，このような追従性に対する要求をも満たすサーボ機構を構成することを考える。この際に重要なことは，分散制御する立場から，全体システムに対するサーボ機構は，サブシステムごとに構成されたサーボ機構によって実現されなければならない点と，得られたサーボ機構を施したシステムが，分散最適レギュレータと同様にロバスト安定であることが保証されていなければならない点である。

ところで，線形システムに対するサーボ機構の構成問題は，Wonham<sup>1)-4)</sup>，Davison<sup>5)-8)</sup>ら多くの研究者によってさまざまな角度から研究され，内部モデル原理<sup>2)-4)</sup>をはじめ多くの成果が得られている<sup>9)-16)</sup>。そして，最適レギュレータ理論を応用した構成法もいろいろ提案されている。しかし，それらの構成法においては，最適レギュレータを主に制御系の安定性や追従性をはかるための手段として利用しており，最適レギュレータのもたらすロバスト安定性を積極的に生かそうとしたものは見あたらない。このために，目標値が変更されると定常偏差を生じるもの<sup>10)-12)</sup>や，制御対象にパラメータ変動があると定常偏差を生じるもの<sup>13)14)</sup>など，ロバスト性の観点からは問題のあるものも多い。

このような理由から，本章では，大規模システムに対するサーボ機構についての議論に先立って，まず単一システムに対するロバストなサーボ機構についての考察を行ない，その構成法を示す。この構成法によって得られるサーボシステム

は、安定性に関しても、また追従性に関してもロバストであるという特長をもっている。そして、このようなサーボ機構の構成法を基に、大規模システムに対するロバストな分散サーボ機構の構成法を開発し、構成が可能であるための条件を示す。

### 3.2 対象システムの記述

この章で対象とする大規模システムは、前章と同じく線形時間不変とする。すなわち、 $N$ 個の線形時間不変システム、

$$S_i : \begin{cases} \dot{x}_i = A_i x_i + B_i u_i, & x_i(0) = x_{0i} \\ y_i = C_i^T x_i \end{cases} \quad (i = 1, 2, \dots, N) \quad (3.1)$$

が相互に結合しあって構成された大規模システムで、

$$S : \begin{cases} \dot{x}_i = A_i x_i + B_i u_i + \sum_{j=1}^N A_{ij} x_j \\ y_i = C_i^T x_i \end{cases} \quad (i = 1, 2, \dots, N) \quad (3.3)$$

で記述されているものとする。ここに、 $x_i$  は  $S_i$  の状態で  $n_i$  次元ベクトル、 $u_i$  は操作入力で  $r_i$  次元ベクトル、また  $y_i$  は  $S_i$  の制御量を表わす  $m_i$  次元ベクトルである。そして、 $A_i, B_i, C_i^T, A_{ij}$  はそれぞれ適当な大きさの実マトリクス、対  $(A_i, B_i)$  は完全可制御であるとする。

さて、表現の簡単化のために、上式をまとめてつぎのように書くことにする。

$$S : \begin{cases} \dot{x} = (A_D + A_C) x + B u, & x(0) = x_0 \\ y = C^T x \end{cases} \quad (3.5)$$

ここに、 $x \triangleq [x_1^T, x_2^T, \dots, x_N^T]^T$  は全体システム  $S$  の状態で  $n (= n_1 + n_2 + \dots + n_N)$  次元ベクトル、 $u \triangleq [u_1^T, u_2^T, \dots, u_N^T]^T$  は  $S$  の操作入力で  $r (= r_1 + r_2 + \dots + r_N)$  次元ベクトル、 $y \triangleq [y_1^T, y_2^T, \dots, y_N^T]^T$  は  $S$  の制御量で  $m (= m_1 + m_2 + \dots + m_N)$  次元ベクトルである。また、実マトリクス  $A_D, A_C, B, C^T$  は次式で与えられる適当な大きさのマトリクスである。

$$A_D \triangleq \text{block diag. } [A_1, A_2, \dots, A_N]$$

$$A_C \triangleq \text{block matrix } [A_{ij}]_{N \times N}$$

$$B \triangleq \text{block diag. } [B_1, B_2, \dots, B_N]$$

$$C^T \triangleq \text{block diag. } [C_1^T, C_2^T, \dots, C_N^T]$$

### 3.3 分散制御による最適サーボ問題の記述

いま、サブシステム  $S_i$  の制御量  $y_i(\bullet)$  に対する目標信号を  $y_i^*(\bullet)$ 、 $S_i$  に加わる観測不可能な定常外乱を  $v_i(\bullet)$  と書くことにする。そして、 $y_i^*(\bullet)$  の  $m_i$  個の要素、 $v_i(\bullet)$  の  $n_i$  個の要素はすべて、(3.7) で定義される半連続関数の集合  $\Omega_\ell$  に属しているものとし、このことを以下では単に、 $y_i^*(\bullet) \in \Omega_\ell^{m_i}$ 、 $v_i(\bullet) \in \Omega_\ell^{n_i}$  と記すことにする。

$$\Omega_\ell \triangleq \{h(\bullet) \mid h^{(\ell)}(t) + g_1 h^{(\ell-1)}(t) + \dots + g_{\ell-1} h^{(1)}(t) + g_\ell h(t) = 0, \\ h(0) \in \mathbb{R}, \forall t \geq 0\} \quad (3.7)$$

ここに、 $h^{(k)}(\bullet)$  は  $h(\bullet)$  の第  $k$  階導関数である。定常外乱が加わったときの全体システムは、次式で記述される。

$$S_v : \begin{cases} \dot{x}_i = A_i x_i + B_i u_i + \sum_{j=1}^N A_{ij} x_j + v_i & (3.8) \\ y_i = C_i^T x_i & (i = 1, 2, \dots, N) \end{cases} \quad (3.9)$$

さて、本章で考察する問題は、全体システム  $S_v$  がつぎの諸要求を満足するように、分散制御を構成することである。

- (1) どんな  $y_i^*(\bullet) \in \Omega_\ell^{m_i}$  と  $v_i(\bullet) \in \Omega_\ell^{n_i}$  に対しても

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|y_i^*(t) - y_i(t)\| = 0 \quad (3.10)$$

- (2) 得られた分散制御を施したフィードバックシステムは、ある二次評価関数に対して最適レギュレータシステムである。

(1)の要求は、制御量が目標信号に追従することを保証するものであり、(2)の要求は、構成されたフィードバックシステムがロバスト安定であることを保証する

ものである。以下では，この二つの要求を満たす制御系を，最適サーボシステムと呼ぶことにする。

### 3.4 サブシステムに対する最適サーボ機構の構成

本節では，大規模システムに対する最適サーボ機構を構成するための準備として，一つのサブシステム  $S_i$  に対する最適サーボ機構の構成について考える。まず 3.4.1 でその構成法を示し，3.4.2 で，構成されたフィードバックシステムの追従性，定常外乱の抑制作用，最適性について述べることにする。なお，ここでの議論はすべてサブシステム  $S_i$  を対象にしているので，以下では，変数や係数マトリクスの添字  $i$  を省いて記述する。したがって，サブシステム  $S_i$  はつぎのように書かれる。

$$S_i : \begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu, & x(0) = x_0 \\ y = C^T x \end{cases} \quad (3.11)$$

$$(3.12)$$

ここに， $x \in R^n$ ， $u \in R^r$ ， $y \in R^m$  である。

#### 3.4.1 最適サーボ機構の構成法

システム  $S_i$  に対するサーボ機構として，つぎのようなフィードバック制御を考える。

$$u = K_1^T x + K_2^T w \quad (3.13)$$

ここに， $w \triangleq [w_1^T, w_2^T, \dots, w_m^T]^T$  はサーボ補償器

$$C_i : \dot{w} = \hat{G}w + \hat{H}e, \quad w(0) = w_0 \quad (3.14)$$

の状態で， $w_j$  ( $j = 1, 2, \dots, m$ ) はすべて  $\ell$  次元ベクトルである。なお，(3.14)において， $e$  は制御量  $y$  と目標信号  $y^*$  との偏差を表わす  $m$  次元ベクトルで， $e \triangleq y^* - y$ ，また

$$\hat{G} \triangleq \text{block diag. } \underbrace{[G, G, \dots, G]}_{m \text{ 個}}$$

$$G \triangleq \begin{bmatrix} 0 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \\ -g_\ell & -g_{\ell-1} & \dots & -g_1 \end{bmatrix}$$

$$\hat{H} \triangleq \text{block diag. } \underbrace{[h, h, \dots, h]}_{m \text{ 個}}$$

$$h \triangleq [0, 0, \dots, 1]^T$$

である。このような制御則を設定したのは、制御系が追従性をもつためには、目標信号や定常外乱が含んでいるのと同じモードを発生する機構が制御系内部に必要なからである<sup>4)6)</sup>。ここでは、一般的な構成法を示すことを目的としているので、同じ効果をより低次元のサーボ補償器で実現できる可能性については考慮していない。

さて、未定の設計パラメータ  $K_1^T, K_2^T$  を定めるために、 $S_1$  と  $C_1$  をひとまとめにしたシステム  $IS_1$  を考えよう。このシステムは (3.11), (3.12), (3.14) より、次式のように与えられる。

$$IS_1 : \begin{cases} \dot{\xi} = A_1 \xi + B_1 u + H_1 y^* & (3.15) \\ y = C_1^T \xi & (3.16) \end{cases}$$

ここに、 $\xi \triangleq [x^T, w^T]^T$  であり、各係数マトリクスはつぎのように定義されたものである。

$$A_1 \triangleq \begin{bmatrix} A & O \\ -\hat{H}C^T & \hat{G} \end{bmatrix}$$

$$B_1 \triangleq \begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$H_1 \triangleq \begin{bmatrix} 0 \\ \hat{H} \end{bmatrix}$$

$$C_1^T \triangleq [C^T \quad 0]$$

この表記法を用いると、フィードバック則 (3.13) は、

$$u = K_1^T \xi, \quad K_1^T \triangleq [K_1^T, K_2^T] \quad (3.17)$$

と書くことができる。

ここで、システム  $IS_1$  に対して、つぎの評価関数を設ける。

$$J = \int_0^{\infty} (\xi^T Q \xi + u^T R u) dt \quad (3.18)$$

ここに、 $Q$  と  $R$  は、ともに適当な大きさの正定対称マトリクスである。そして、(3.17) のフィードバックゲイン  $K_1^T$  を、この評価関数に関する  $IS_1$  の最適レギュレータゲインとして定めることにしよう。このために、目標信号を一担  $y^* = 0$  としておく。

さて、この最適レギュレータ問題が解けるためには、対  $(A_1, B_1)$  の安定化可能性が要求される。

[補題 3.1]<sup>6)</sup> 対  $(A, B)$  が安定化可能 (完全可制御) であるとき、対  $(A_1, B_1)$  が安定化可能 (完全可制御) であるための必要十分条件は、すべての  $\lambda \in \mathcal{A}_0$  について、

$$\text{rank} \begin{bmatrix} A - \lambda I & B \\ C^T & 0 \end{bmatrix} = n + m \quad (3.19)$$

が成り立つことである。ただし、 $\mathcal{A}_0$  は (3.14) で定義されたマトリクス  $G$  の固有値すべてからなる集合である。■

さて，対  $(A_1, B_1)$  の安定化可能性がいえるとき，評価関数 (3.18) を最小とする  $IS_1$  の最適レギュレータは求まり，次式で与えられる。

$$u = -K^T \xi, \quad K^T = R^{-1} B_1^T P \quad (3.20)$$

ただし， $P$  は Riccati 方程式

$$A_1^T P + P A_1 - P B_1 R^{-1} B_1^T P + Q = 0 \quad (3.21)$$

を満たす正定対称マトリクスである。そこで，(3.17) のフィードバックゲイン  $K_1^T$  を， $K_1^T = -R^{-1} B_1^T P$  のように定める。ここで， $P$  を

$$P = \left[ \begin{array}{cc} P_{11} & P_{12} \\ \underbrace{P_{12}^T}_n & \underbrace{P_{22}}_{\ell \times m} \end{array} \right] \left. \begin{array}{l} \} n \\ \} \ell \times m \end{array} \right\} \quad (3.22)$$

と分割すると，(3.13) における  $K_1^T, K_2^T$  はそれぞれ，

$$K_1^T = -R^{-1} B^T P_{11}, \quad K_2^T = -R^{-1} B^T P_{12} \quad (3.23)$$

と書き下すことができる。このように，ここで示したフィードバック制御の構成法では，制御対象が安定化可能であり，かつ(3.19)を満足していれば構成することができ，それは(3.13)，(3.14)，(3.23)で与えられる。そして，この制御は，つぎの3.4.2で示されるように，サブシステム  $S_1$  の最適サーボ機構となっているのである。

なお，ここでのサーボ機構の構成手順は，Davison<sup>7)</sup>やYoung-Willems<sup>17)</sup>らの提案したものと基本的には同じである。しかし，彼らは最適レギュレータを安定化の便法として用いているだけで，次項で述べるような最適性やロバスト安定性について全く考慮していない。

### 3.4.2 最適サーボシステムの追従性と最適性

前項で構成されたフィードバック制御(3.13)を施して得られるサーボシス

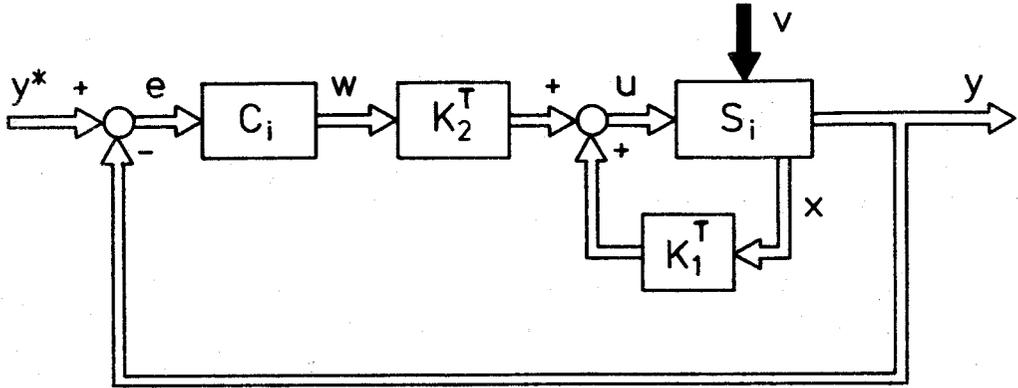


図 3.1 最適サーボシステムのブロック線図

システムのブロック線図は，図 3.1 のようになる。図中， $v$  はサブシステム  $S_1$  に加わる定常外乱を示している。定常外乱が加わったとき，このサーボシステムは次式のように表わされる。

$$OS_1 : \begin{cases} \dot{\xi} = \tilde{A}_1 \xi + \eta & (3.24) \\ y = C_1^T \xi & (3.25) \end{cases}$$

ここに， $\eta \triangleq [v^T, (\hat{H} y^*)^T]^T$ ， $v \in \mathcal{Q}_l^n$ ， $y^* \in \mathcal{Q}_l^m$  で，

$$\tilde{A}_1 \triangleq A_1 - B_1 R^{-1} B_1^T P$$

$$= \begin{bmatrix} A + BK_1^T & BK_2^T \\ -\hat{H}C^T & \hat{G} \end{bmatrix}$$

である。 $\tilde{A}_1$  が漸近安定であることは， $K_1^T$  の導出過程より明らかである。以下では，この  $OS_1$  が，定常外乱の印加にも拘らず制御量  $y$  が目標信号  $y^*$  に定常偏差なく追従すること，またその追従特性がある評価関数のもとに最適であることを明らかにする。

まず，この項で重要な役割を果たす補題を与えておこう。

[補題 3.2] システム  $OS_1$  において，すべての  $\lambda \in \mathcal{A}_0$  に対して，

$$\det(\tilde{A}_1 - \lambda I) \neq 0 \quad (3.26)$$

が成り立つとき,

$$\dot{\xi}^* = \tilde{A}_1 \xi^* + \eta \quad (3.27)$$

$$y^* = C_1^T \xi^* \quad (3.28)$$

の二式を同時に満足する関数  $\xi^*(\bullet) \in \Omega_{\ell}^{n+m\ell}$  が存在し, それは一意に定まる。■

補題 3.2 の意味するところは,  $OS_1$  の初期値  $\xi(0)$  を適当に定めてやると, その制御量  $y$  が目標信号  $y^*$  と全く同一のふるまいをするということである。

さて, この補題の証明はあとで行なうことにして, 以下, (3.26) が成立しているものと仮定して議論を進めよう。このとき, (3.27), (3.28) を満たす関数  $\xi^*$  について,

$$\hat{\xi}(t) = \xi^*(t) - \xi(t) \quad (3.29)$$

$$\hat{u}(t) = u^*(t) - u(t) \quad (3.30)$$

$$u^*(t) \triangleq -R^{-1} B_1^T P \xi^*(t)$$

と変数変換すると, (3.24) は,

$$\dot{\hat{\xi}} = \tilde{A}_1 \hat{\xi} \quad (3.31)$$

と書きかえられる。 $\tilde{A}_1$  が漸近安定であることより, (3.31) のすべての解について,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|\hat{\xi}(t)\| = 0 \quad (3.32)$$

が成立する。したがって,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \xi(t) = \xi^*(t) \quad (3.33)$$

となり, 両辺の左側から  $C_1^T$  を掛けることによって,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = y^*(t) \quad (3.34)$$

を得る。これは、制御量  $y$  が目標信号  $y^*$  に定常偏差なく、しかも定常外乱  $v$  に影響されず追従することを意味している。しかもこの追従性は、補題 3.2 の条件と  $\tilde{A}_1$  の漸近安定性が成立している範囲で対象システムのパラメータ  $A, B, C$  に変動があっても保存されることが、以上の追従性の議論の過程よりわかる。

つぎに、最適性について調べよう。そのために、定常外乱は加わっていないものとして考える。このとき、(3.31)を変形すると次式を得る。

$$\dot{\hat{\xi}} = A_1 \hat{\xi} + B_1 \hat{u} \quad (3.35)$$

$$\hat{u} = -R^{-1} B_1^T P \hat{\xi} \quad (3.36)$$

(3.35) は、開ループシステム  $IS_1$  を、(3.29)、(3.30) によって変数変換したものに一致する。また、フィードバック制御 (3.36) は、明らかに、評価関数

$$\hat{J} = \int_0^{\infty} (\hat{\xi}^T Q \hat{\xi} + \hat{u}^T R \hat{u}) dt \quad (3.37)$$

に対する最適レギュレータである。このことより、(3.17) で定められたフィードバック制御

$$u = K_1^T \xi, \quad K_1^T = -R^{-1} B_1^T P \quad (3.17)$$

は、システム  $IS_1$  に対して、評価関数

$$J_1 = \int_0^{\infty} [(\xi - \xi^*)^T Q (\xi - \xi^*) + (u - u^*)^T R (u - u^*)] dt \quad (3.38)$$

を最小とする最適レギュレータであることがわかる。ここで構成したシステム  $OS_1$  は、この意味で、最適なサーボシステムとなっているのである。

以上の議論をまとめると、つぎの定理を得る。

【定理 3.1】 (3.11), (3.12) で与えられたシステム  $S_1$  の制御量に対する目標信号を  $y^*(\bullet) \in \mathcal{Q}_2^m$ , 観測できない定常外乱を  $v(\bullet) \in \mathcal{Q}_2^q$  とする。また,  $S_1$  は完全可制御であり, またすべての  $\lambda \in \mathcal{A}_0$  について (3.19) を満たすものとする。このとき, すべての  $\lambda \in \mathcal{A}_0$  について (3.26) を満足しているならば, 3.4.1. で構成されたフィードバックシステム  $OS_1$  は最適サーボシステムとなっている。■

(注 3.1) 大規模システムへの応用を考慮したために,  $S_1$  を完全可制御であるとしたが, 安定化可能とおきかえてもこの定理は成立する。

(注 3.2) 最適性の基準となる評価関数 (3.38) に含まれている変数は, 状態や操作入力の平衡状態からのズレであり, 評価関数の設定としては, 操作入力の微分値や状態の積分値を用いたもの<sup>15)16)</sup> に比べて, 妥当なものだと考えられる。なお, 評価関数としては, (3.38) の形以外にも, たとえば, ゲイン  $K_1$  を決定するとき用いた評価関数 (3.18) のかわりに, つぎの形のものを採用することができる。

$$J = \int_0^{\infty} (x^T C Q_1 C^T x + w^T D Q_2 D^T w + u^T R u) dt \quad (3.39)$$

ただし,  $Q_1, Q_2$  は正定対称マトリクス, また  $C, D$  はそれぞれ, 対  $(C^T, A)$ , 対  $(D^T, \hat{G})$  が完全可観測であるようなマトリクスである。この評価関数では,  $y = C^T x$  であることより, 状態  $x$  ではなく, 制御量  $y$  のふるまいを直接に評価の基準として用いることができる。

(注 3.3) 追従の最適性を考慮する立場から, ここでは目標信号に漸近安定なモードが含まれている場合も想定している。条件 (3.26) が必要なのはこのためである。しかし, (3.26) はほとんどいつでも満たされていると考えられる。そして, 漸近安定なモードが全く含まれていない場合には, つねに満たされている条件である。

ここで, 最適サーボシステムのロバスト安定性について述べておこう。ロバスト安定性は制御系固有の性質であり, 目標信号や外乱の種類や有無には関係しないから, ここで構成された最適サーボシステムは,  $\eta \equiv 0$  とおいたときのシス

テム  $OS_i$  と同様，最適レギュレータシステムとしてのロバスト安定性を有しているのである。このことは，フィードバックシステムが安定である限り追従性が保存されるという事実を考えあわせると，ロバスト性に関して重要な性質だと言える。

さて，最後に，補題 3.2 の証明を与えておこう。

(補題 3.2 の証明) いま， $h(\bullet)$  を  $\Omega_\ell$  に属する関数とする。このとき， $h(\bullet)$  はつぎの形で表現することができる<sup>18)</sup>。

$$h(t) = \sum_{i=1}^{\rho} \left( \sum_{j=0}^{\sigma_i-1} h_{ij} \frac{t^j}{j!} \right) e^{\lambda_i t} \quad (3.40)$$

ここに， $\lambda_i$  はマトリクス  $G$  の固有値， $\sigma_i$  はその重複度， $\rho$  はその固有値のうち異なるものの数で， $h_{ij}$  は一意的に定まる定数である。このことを利用して， $y^*(\bullet) \in \Omega_\ell^m$  と  $v(\bullet) \in \Omega_\ell^n$  をそれぞれ

$$y^*(t) = \sum_{i=1}^{\rho} \left( \sum_{j=0}^{\sigma_i-1} y_{ij} \frac{t^j}{j!} \right) e^{\lambda_i t} \quad (3.41)$$

$$v(t) = \sum_{i=1}^{\rho} \left( \sum_{j=0}^{\sigma_i-1} v_{ij} \frac{t^j}{j!} \right) e^{\lambda_i t} \quad (3.42)$$

なる形で表現しておく，ここに， $y_{ij}$ ， $v_{ij}$  はそれぞれ， $m$  次元， $n$  次元の定数ベクトルである。また， $x^*(\bullet)$ ， $w^*(\bullet)$  をつぎの形で与えておこう。

$$x^*(t) = \sum_{i=1}^{\rho} \left( \sum_{j=0}^{\sigma_i-1} x_{ij} \frac{t^j}{j!} \right) e^{\lambda_i t} \quad (3.43)$$

$$w^*(t) = \sum_{i=1}^{\rho} \left( \sum_{j=0}^{\sigma_i-1} w_{ij} \frac{t^j}{j!} \right) e^{\lambda_i t} \quad (3.44)$$

ここに， $x_{ij}$ ， $w_{ij}$  はそれぞれ， $n$  次元， $m\ell$  次元の未定の定数ベクトルである。ここで， $x_{ij}$ ， $w_{ij}$  に関する連立方程式

$$\begin{bmatrix} x_{i,j+1} \\ w_{i,j+1} \end{bmatrix} + \lambda_i \begin{bmatrix} x_{ij} \\ w_{ij} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A + BK_1^T & BK_2^T \\ -\hat{H}C^T & \hat{G} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{ij} \\ w_{ij} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} v_{ij} \\ \hat{H}y_{ij} \end{bmatrix} \quad (i = 1, 2, \dots, \rho; j = 0, 1, \dots, \sigma_i - 1) \quad (3.45)$$

を考える。ただし、 $x_{1\sigma_1} = 0$ 、 $w_{1\sigma_1} = 0$ である。この連立方程式が解をもったとすると、関数  $t^j e^{\lambda_1 t}$  ( $i = 1, 2, \dots, \rho$ ;  $j = 0, 1, \dots, \sigma_1 - 1$ ) が互いに独立であることから、すべての  $t$  ( $\geq 0$ ) で、

$$\dot{\xi}^*(t) = \tilde{A}_1 \xi^*(t) + \eta(t) \quad (3.27)$$

が成り立つことがわかる。そこで、以下では、(3.45)の解について調べることにする。

まず、 $\xi_{1j} \triangleq [x_{1j}^T, w_{1j}^T]^T$ 、 $\eta_{1j} \triangleq [v_{1j}^T, (\hat{H}y_{1j})^T]^T$  とおいて (3.45) を書き直すと、

$$\begin{aligned} (\tilde{A}_1 - \lambda_1 I) \xi_{1j} &= \xi_{1j+1} - \eta_{1j} \\ (i = 1, 2, \dots, \rho; j = 0, 1, \dots, \sigma_1 - 1) \end{aligned} \quad (3.46)$$

となる。ところで、 $j = \sigma_1 - 1$  の場合、

$$(\tilde{A}_1 - \lambda_1 I) \xi_{1\sigma_1-1} = -\eta_{1\sigma_1-1} \quad (3.47)$$

であるから、補題の条件を満足しているとき、(3.47)は一意解をもち、次式で与えられる。

$$\xi_{1\sigma_1-1} = -(\tilde{A}_1 - \lambda_1 I)^{-1} \eta_{1\sigma_1-1} \quad (3.48)$$

つぎに、 $j = \sigma_1 - 2$  の場合を考えると、

$$(\tilde{A}_1 - \lambda_1 I) \xi_{1\sigma_1-2} = \xi_{1\sigma_1-1} - \eta_{1\sigma_1-2} \quad (3.49)$$

であり、 $\xi_{1\sigma_1-1}$  はすでに (3.48) で定められているから、この方程式も一意解をもつことがわかる。この手順を繰り返せば、すべての  $i$  と  $j$  について、 $\xi_{1j}$  を求めることができ、しかもそれらはすべて一意的である。こうして、(3.27) が成り立つことが示された。

さて、以上で定まった関数  $\xi^{*(\bullet)}$  について、(3.28) が成立する。すなわち、

$$y^*(t) = C_1^T \xi^*(t) \quad (3.28)$$

となることを確かめるために、再び (3.45) に注目しよう。(3.45) の両辺に左側から正則マトリクス block diag.  $[I, T]$  を掛けると、

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} I & O \\ O & T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A + BK_1^T - \lambda_1 I & BK_2^T \\ -\hat{H}C^T & \hat{G} - \lambda_1 I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{1j} \\ w_{1j} \end{bmatrix} \\ = \begin{bmatrix} I & O \\ O & T \end{bmatrix} \left( \begin{bmatrix} x_{1j+1} \\ w_{1j+1} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} v_{1j} \\ \hat{H}y_{1j} \end{bmatrix} \right) \end{aligned} \quad (3.50)$$

となり、これより、

$$T(\hat{G} - \lambda_1 I)T^{-1} Tw_{1j} - T\hat{H}C^T x_{1j} = Tw_{1j+1} - T\hat{H}y_{1j} \quad (3.51)$$

なる関係を得る。ここに、 $T$ は

$$T\hat{G}T^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & I & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & I \\ -g_\ell I & -g_{\ell-1}I & \cdots & -g_1 I \end{bmatrix}$$

$$T\hat{H} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ I \end{bmatrix}$$

となるような順列マトリクスである。ここで、 $\hat{G}^* \triangleq T\hat{G}T^{-1}$ ,  $\hat{H}^* \triangleq T\hat{H}$  とおきさらに、

$$X_1 \triangleq [ x_{1\rho_1-1} \quad x_{1\rho_1-2} \quad \cdots \quad x_{10} ]$$

$$W_1 \triangleq [ T w_{1\rho_1-1} \quad T w_{1\rho_1-2} \quad \cdots \quad T w_{10} ]$$

$$Y_1 \triangleq [ y_{1\rho_1-1} \quad y_{1\rho_1-2} \quad \cdots \quad y_{10} ]$$

$$E_1 \triangleq \left[ \begin{array}{cccc} 0 & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{array} \right] \sigma_1$$

と定義すると、(3.51)は、

$$(\hat{G}^* - \lambda_1 I) W_1 - \hat{H}^* C^T X_1 = W_1 E_1 - \hat{H}^* Y_1 \quad (3.52)$$

とまとめて記述することができる。そして、改めて、

$$W_1 \triangleq \left[ \begin{array}{l} W_{11}^T \\ W_{12}^T \\ \vdots \\ W_{1\ell}^T \end{array} \right] \left. \begin{array}{l} \} \sigma_1 \\ \} \sigma_1 \\ \vdots \\ \} \sigma_1 \end{array} \right\}$$

とおくと、(3.52)はつぎのように書き下すことができる。

$$\left. \begin{array}{l} W_{12}^T - \lambda_1 W_{11}^T = W_{11}^T E_1 \\ W_{13}^T - \lambda_1 W_{12}^T = W_{12}^T E_1 \\ \vdots \\ W_{1\ell}^T - \lambda_1 W_{1\ell-1}^T = W_{1\ell-1}^T E_1 \end{array} \right\} \quad (3.53)$$

$$-(g_\ell W_{11}^T + g_{\ell-1} W_{12}^T + \cdots + g_1 W_{1\ell}^T) - \lambda_1 W_{1\ell}^T - C^T X_1 = W_{1\ell}^T E_1 - Y_1 \quad (3.54)$$

(3.53) から,

$$W_{1, k+1}^T = W_{11} (E_1 + \lambda_1 I)^k \quad (3.55)$$

なる関係が導かれ, これを (3.54) に代入することによって,

$$Y_1 - C^T X_1 = W_{11}^T [g_\ell I + g_{\ell-1} (E_1 + \lambda_1 I) + \dots + (E_1 + \lambda_1 I)^\ell] \quad (3.56)$$

を得る。ここに,  $E_1 + \lambda_1 I$  は明らかにマトリクス  $G$  のジョルダンブロックの一つであるから, Cayley-Hamilton の定理<sup>19)</sup> より (3.56) の右辺はすべての  $i$  について 0 である。したがって,

$$Y_1 = C^T X_1 \quad (3.57)$$

となり, これは,

$$y^*(t) = C^T x^*(t) = C_1^T \xi^*(t)$$

であることを意味する。これで, (3.28) の成立も証明された。■

### 3.5 全体システムに対する分散最適サーボ機構の構成

全体システムが最適サーボシステムとなるようなサーボ機構を分散制御によって実現するために, まず, 各サブシステムに対して (3.14) の形のサーボ補償器, すなわち,

$$C_1 : \dot{w}_1 = \hat{G}_1 w_1 + \hat{H}_1 e_1 \quad (i = 1, 2, \dots, N) \quad (3.58)$$

を考えよう。ここに,  $w_1$  は  $m_1 \ell$  次元ベクトル,  $e_1$  は  $e_1 \triangleq y_1^* - y_1$  で定義された  $m_1$  次元ベクトル, また,

$$\hat{G}_1 \triangleq \text{block diag. } \left[ \underbrace{G \quad G \quad \dots \quad G}_{m_1 \text{ 個}} \right]$$

$$\hat{H}_1 \triangleq \text{block diag. } \left[ \underbrace{h \quad h \quad \dots \quad h}_{m_1 \text{ 個}} \right]$$

である。このとき、 $\xi_1^T \triangleq [x_1^T, w_1^T]^T$  とおくと、 $C_1$  を結合した全体システムは、  
 (3.8), (3.9), (3.58) より、

$$IS_v : \begin{cases} \dot{\xi}_i = A_{i1} \xi_i + B_{i1} u_i + \sum_{j=1}^N A_{i1j} \xi_j + H_{i1} \eta_i & (3.59) \\ y_i = C_{i1}^T \xi_i & (i = 1, 2, \dots, N) \quad (3.60) \end{cases}$$

と記述される。ここに、

$$\eta_i \triangleq \begin{bmatrix} v_i \\ \hat{H}_i y_i^* \end{bmatrix}$$

$$A_{i1} \triangleq \begin{bmatrix} A_i & O \\ -\hat{H}_i C_i^T & \hat{G}_i \end{bmatrix}, \quad A_{i1j} \triangleq \begin{bmatrix} A_{ij} & O \\ O & O \end{bmatrix}$$

$$B_{i1} \triangleq \begin{bmatrix} B_i \\ O \end{bmatrix}, \quad H_{i1} \triangleq \begin{bmatrix} O \\ \hat{H}_i \end{bmatrix}, \quad C_{i1}^T \triangleq [C_i^T \quad O]$$

である。(3.59), (3.60) をまとめて書くと、

$$IS_v : \begin{cases} \dot{\xi} = (A_{ID} + A_{IC}) \xi + B_I u + H_I \eta & (3.61) \\ y = C_I^T \xi & (3.62) \end{cases}$$

となる。ここに、

$$\xi \triangleq [\xi_1^T \quad \xi_2^T \quad \dots \quad \xi_N^T]^T$$

$$\eta \triangleq [\eta_1^T \quad \eta_2^T \quad \dots \quad \eta_N^T]^T$$

$$A_{ID} \triangleq \text{block diag. } [A_{i1} \quad A_{i2} \quad \dots \quad A_{iN}]$$

$$A_{IC} \triangleq \text{block matrix } [A_{i1j}]_{N \times N}$$

$$B_I \triangleq \text{block diag. } [B_{i1} \quad B_{i2} \quad \dots \quad B_{iN}]$$

$$H_I \triangleq \text{block diag. } [H_{i1} \quad H_{i2} \quad \dots \quad H_{iN}]$$

$$C_I^T \triangleq \text{block diag. } [C_{i1}^T \quad C_{i2}^T \quad \dots \quad C_{iN}^T]$$

である。

さて、前節での考察からわかるように、 $\eta(t) \equiv 0$  とおいたとき、システム IS に対して分散最適レギュレータを構成することができれば、その結果得られるフィードバックシステムは分散制御による最適サーボシステムである。このことを、もっと具体的に述べておこう。

$\eta(t) \equiv 0$  とおくと、IS<sub>v</sub> は、

$$\text{IS} : \begin{cases} \dot{\xi} = (A_{1D} + A_{1C}) \xi + B_1 u & (3.63) \\ y = C_1^T \xi & (3.64) \end{cases}$$

となる。この IS が分散最適化可能であれば、適当な正定対称マトリクス  $Q_1$  と  $R_1$  が存在して、評価関数

$$J_1 = \int_0^{\infty} (\xi^T Q_1 \xi + u^T R_1 u) dt \quad (3.65)$$

を最小とする最適レギュレータが、

$$u_i = K_{i1}^T \xi_1 \quad (i = 1, 2, \dots, N) \quad (3.66)$$

なる形の分散制御で与えられる。この分散最適レギュレータを施したとき、IS は、

$$\text{OS} : \begin{cases} \dot{\xi} = \tilde{A}_1^T \xi & (3.67) \\ y = C_1^T \xi & (3.64) \end{cases}$$

と記述される。ここに、

$$\begin{aligned} \tilde{A}_1 &\triangleq A_{1D} + A_{1C} + B_1 K_1^T \\ K_1^T &\triangleq \text{block diag. } [K_{11}^T \ K_{12}^T \ \dots \ K_{1N}^T] \end{aligned}$$

である。そして、もし、すべての  $\lambda \in A_0$  について、

$$\det(\tilde{A}_1 - \lambda I) \neq 0 \quad (3.68)$$

が成立するならば，OS は最適サーボシステムとなっており，しかも，(3.58)，(3.66) の形からわかるように，サブシステムごとのサーボ機構によって実現されているのである。以上をまとめて，定理として与えておく。

**【定理 3.2】** 大規模線形時間不変システム  $S$  の各サブシステムにサーボ補償器  $C_i$  を結合したシステム  $IS$  が分散最適化可能であり，かつ，分散最適レギュレータを施したときの閉ループシステム  $OS$  について，すべての  $\lambda \in A_0$  に対して (3.68) が満たされていれば， $OS$  は  $S$  に対する最適サーボシステムである。

システム  $IS$  が分散最適化可能であるかどうかは，定理 2.1 を適用して判定する必要があるが，結合マトリクスが  $A_{ij} = B_i F_{ij}$  の形で表現できる場合には，各サブシステムが安定化可能であれば  $IS$  はつねに分散最適化可能である。したがって，注 3.3 で述べたことを加味すれば，つぎの結果を得る。

**【系 3.3】** システム  $S$  における  $A_{ij}$  が，すべての  $i, j$  について  $A_{ij} = B_i F_{ij}$  と表わせるものとする。このとき，すべての  $\lambda \in A_0$  に対して，

$$\text{rank} \begin{bmatrix} A_i - \lambda I & B_i \\ C_i^T & 0 \end{bmatrix} = n_i + m_i \quad (3.69)$$

が成り立つならば，ほとんどいつでも，サブシステムごとのサーボ機構によって最適サーボシステムを構成することができる。■

ところで，大規模線形時間不変システムに対するロバストな分散サーボ機構の構成法に関しては，Davison<sup>20)21)</sup> による研究がある。しかしそのロバスト性は，3.4.2 で述べたような追従性に関するロバスト性のみであり，ここで考えた安定性に関するロバスト性については全く考慮されていない。

### 3.6 結 言

前章で述べた分散最適レギュレータシステムでは，目標値がゼロでなくなったり，定常外乱が加わったりすると，制御量と目標値との間に定常偏差が生じる。

この章では、このような場合にも、制御量が目標信号に定常偏差なく追従するサーボシステムを、サブシステムごとに施したサーボ機構によって構成することを考えた。このためにまず、サブシステムに対する最適サーボシステムの構成法を与え、その追従性や最適性、ロバスト性について明らかにした。そして、この結果を援用して、大規模線形時間不変システムに対する分散最適サーボシステムの構成法を導き、それが構成できるための条件を示した。この条件を一言で言えば、各サブシステムに対して最適サーボ機構が構成でき、かつサーボ補償器を含めた全体システムが分散最適化可能であれば、分散最適サーボ機構が構成できるということである。最後に、ここでの構成法によって得られた分散最適サーボシステムのロバスト性をまとめておく。

- (1) サブシステムにおけるパラメータ変動に対してロバスト安定である。
- (2) サブシステム間の結合系におけるパラメータ変動に対してロバスト安定である。
- (3) サブシステムやサブシステム間の結合においてパラメータ変動があっても、全体システムの漸近安定性がくずれない限り、その制御量は目標信号に定常偏差なく追従し、しかも未知の定常外乱が加わってもこのような追従性は保存されている。

## 第 4 章 　むだ時間を含む場合の 分散安定化

### 4.1 緒　　言

サブシステムとして化学プロセスを含んでいたり、サブシステム間に物質の輸送があるような大規模システムの設計では、むだ時間を無視することができない場合が多い。本章では、このようなむだ時間を含む大規模システムを対象とし、おのおののサブシステムに施したフィードバック制御によって全体システムを安定化する問題を考察する。

ところで、差分微分方程式で記述された線形むだ時間システムを、フィードバック制御によって安定化する問題に関しては、すでに多くの研究があり、安定化のためにフィードバックする信号として、(1) (関数空間に属する) 状態変数を用いる方法<sup>1)~3)</sup>、(2) 現時刻およびむだ時間分だけ過去の内部変数を用いる方法<sup>4)5)</sup>、(3) 現時刻の内部変数の値のみを用いる方法<sup>6)~10)</sup>などが提案されている。これらのうち、(1)の方法は、その時刻におけるシステムの内部情報をすべて利用している点で最も有効な方法であると考えられるが、そのようなフィードバックを実現するためには、むだ時間の分だけ過去にわたる情報を収集せねばならず、実際に構成することは難しいと思われる。また(2)の方法でも、適用にあたっては、むだ時間の正確な値が必要となる。これらに対して、(3)の安定化法は、フィードバック則の構成が容易であるばかりでなく、むだ時間の正確な値を必要としない実際的な方法である。このような理由から、ここでも、大規模システムを安定化する分散制御として内部変数フィードバックを採用する。

さて、内部変数フィードバックによって線形むだ時間システムを安定化する方法は、Nazaroff-Hewer<sup>6)</sup>、Kwon-Pearson<sup>9)</sup>、池田他<sup>7)8)10)</sup>らが与えている。しかし、これらの結果では、安定度が考慮されていないとか、安定化できるための条件が厳しいという点で、分散安定化の基礎となる各サブシステムの安定化の方法としては、十分に満足のゆくものではない。

そこで、本章では、まず 4.4 で、線形むだ時間システムの内部変数フィードバ

ックによる安定化問題を取り扱い、これまでのものに比べてより緩い安定化可能条件を示す。この結果は、大規模システムの集中制御による安定化可能条件に相当し、本章で考えている分散制御による場合との対比においても興味深いものである。4.5では、4.4での知見をもとにして、大規模線形時間不変むだ時間システムを、サブシステムごとに施した内部変数フィードバックによって安定化できるための条件を明らかにするとともに、フィードバック則の構成法を示す。

#### 4.2 対象システムの記述

本章では、図4.1のように、サブシステムが差分微分方程式

$$S_i : \dot{x}_i(t) = A_i x_i(t) + D_{ij} x_j(t - h_{ij}) + b_i u_i(t) \quad (i = 1, 2, \dots, N) \quad (4.1)$$

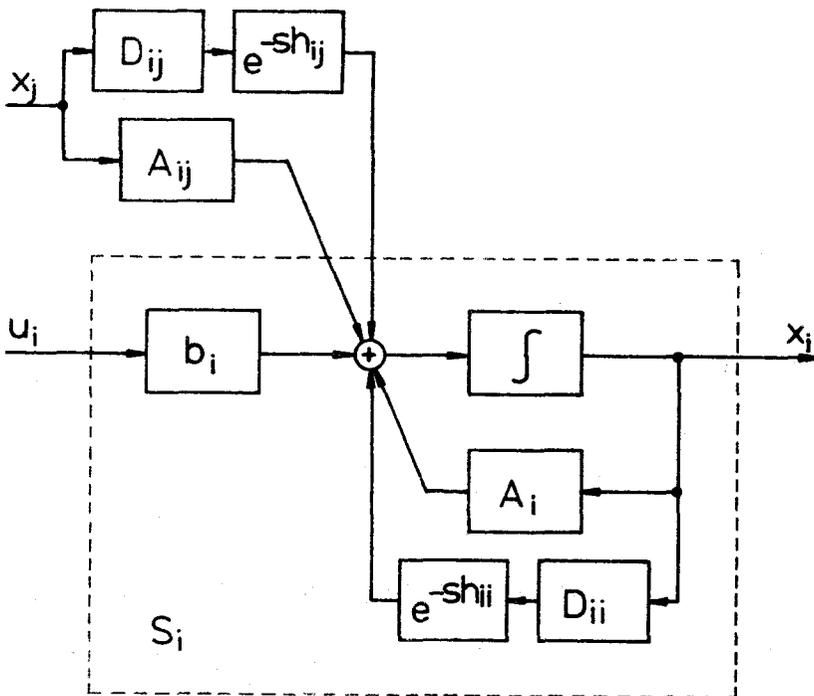


図4.1 大規模線形時間不変むだ時間システム

で記述された 1 入力の線形むだ時間システムで、これらが相互に干渉しあって構成された全体システムが、

$$S : \dot{x}_i(t) = A_i x_i(t) + b_i u_i(t) + \sum_{j=1}^N A_{ij} x_j(t) + \sum_{j=1}^N D_{ij} x_j(t - h_{ij})$$

$$(i = 1, 2, \dots, N) \quad (4.2)$$

で表現される大規模システムを対象とする。ここに、 $n_i$  次元ベクトル  $x_i(t)$  は  $S_i$  の内部変数、 $u_i(t)$  は  $S_i$  の操作入力である。また、 $A_i, b_i, A_{ij}, D_{ij}$  は適当な大きさの実マトリクスあるいは実ベクトルで、 $h_{ij}$  はむだ時間を表わす正数である。とくに、 $i \neq j$  場合、 $h_{ij}$  はサブシステム  $S_j$  からサブシステム  $S_i$  への伝達のおくれを示すむだ時間である。ここでサブシステムをすべて 1 入力であるとしているのは議論の簡単化のためにであって、本質的なものではなく、したがって、以下の議論を多入力の場合に拡張することは難しくない。

ここでは、すべてのサブシステムについて、対  $(A_i, b_i)$  は完全可制御であると仮定し、 $A_i, b_i$  はつぎのような可制御標準形で表わされているものとする。

$$A_i = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \\ a_{n_i}^i & a_{n_i-1}^i & \cdots & a_1^i \end{bmatrix}, \quad b_i = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} \quad (4.3)$$

### 4.3 分散制御による安定化問題の記述

ここで考える問題は、全体システム  $S$  を、サブシステムごとの内部変数フィードバック

$$u_i(t) = k_i^T x_i(t) \quad (i = 1, 2, \dots, N) \quad (4.4)$$

によって安定化できるための条件と安定化法を求めることである。このフィードバック制御 (4.4) を全体システムに施したときの閉ループシステムは、

$$S_0 : \dot{x}_i(t) = \tilde{A}_i x_i(t) + \sum_{j=1}^N A_{i,j} x_j(t) + \sum_{j=1}^N D_{i,j} x_j(t - h_{i,j})$$

$$(i = 1, 2, \dots, N) \quad (4.5)$$

で与えられる。ただし、

$$\tilde{A}_i \triangleq A_i + b_i k_i^T$$

である。以下では、 $S_0$  において初期時刻は  $t = 0$ 、その初期関数

$$x_i(t) = \phi_i(t), \quad -h \leq t < 0 \quad (i = 1, 2, \dots, N) \quad (4.6)$$

は区分的に連続な関数とする。ただし、 $h = \max_j h_{i,j}$  である。このとき、差分微分方程式 (4.5) の解は  $t \geq 0$  で一意的存在し、かつ連続であることが知られている<sup>11)12)</sup>。

さて、閉ループシステム  $S_0$  が安定であるということ、つぎのように定義しよう。なお、 $x(t) \triangleq [x_1^T(t), x_2^T(t), \dots, x_N^T(t)]^T$ 、 $\phi(t) \triangleq [\phi_1^T(t), \phi_2^T(t), \dots, \phi_N^T(t)]^T$ 、 $\|x(t)\|_n \triangleq \sup [x(s)] \quad (t - h \leq s \leq t)$  である。

〔定義 4.1〕 ある非負数  $\alpha$  に対して、 $S_0$  のすべての解が

$$\|x(t)\|_n \leq c \|\phi(0)\|_n e^{-\alpha t}, \quad t \geq 0 \quad (4.7)$$

を満足するような正数  $c$  が存在するとき、 $S_0$  は安定度  $\alpha$  で漸近安定であるという。■

システム  $S_0$  が安定度  $\alpha$  で漸近安定であるための十分条件は、リアプノフの方法を用いると、つぎのように与えられる。

〔補題 4.1〕<sup>13)14)</sup> システム  $S_0$  が安定度  $\alpha$  で漸近安定であるための十分条件は、 $0 \leq t < \infty$  で定義された連続な汎関数  $V(x_i)$  が存在して、つぎの 2 条件を満たすことである。

$$(i) \quad a \|x(t)\| e^{\alpha t} \leq V(x_i) \leq b \|x(t)\|_n e^{\alpha t} \quad (4.8)$$

$$(ii) \quad D^+ V(x_t) \leq -c(\|x(t)\|) \quad (4.9)$$

ここに、 $a, b$  は正の定数で、 $c(\cdot)$  は連続な正定値増加関数である。また、 $x_t$  は、

$$x_t(s) \triangleq x(t+s), \quad -h \leq s \leq 0$$

で定義された連続関数、 $D^+ V(x_t)$  は  $S_0$  の解に沿った  $V(x_t)$  の導関数で、次式で定義されたものである。

$$D^+ V(x_t) \triangleq \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \sup \frac{1}{\varepsilon} [V(x_{t+\varepsilon}) - V(x_t)] \quad \blacksquare$$

#### 4.4 サブシステムに対する安定化可能条件

本節では、線形むだ時間システムを対象として、内部変数フィードバックによる安定化について述べる。この節での議論は、大規模システムの分散安定化のための準備となるばかりでなく、大規模システム  $S$  の集中制御による安定化可能性に対応するものとして、分散制御によるものとの比較において興味深いものである。なお、本論文の主旨から、定理の証明や詳細な議論については省いている。

ここでは、差分微分方程式

$$\hat{S} : \begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Dx(t-h) + Bu(t), & t \geq 0 \\ x(t) = \phi(t), & -h \leq t < 0 \end{cases} \quad (4.10)$$

$$(4.11)$$

で記述される線形時間不変むだ時間システムを対象とする。ここに、 $x(t)$  は内部変数を表わす  $n$  次元ベクトル、 $u(t)$  は入力を表わす  $r$  次元ベクトルで、 $\phi(t)$  は  $\hat{S}$  の初期関数を表わす区分的に連続な関数である。また、 $A, D, B$  はそれぞれ、 $n \times n, r \times r, n \times r$  の実マトリクスで、 $B$  は最大階数 ( $= r$ ) をもつものとする。  $h$  はむだ時間を表わす正数である。ここで多入力システムを考えるのは、前述のような、大規模システムの集中制御による安定化としての意味をもたせるためである。

さて、 $\hat{S}$  において対  $(A, B)$  は完全可制御であるものとし、 $A$  と  $B$  は、つ

ぎのような可制御標準形で表わされているものとする。

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & \cdots & A_{1r} \\ \vdots & & \vdots \\ A_{r1} & \cdots & A_{rr} \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1r} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{r1} & \cdots & b_{rr} \end{bmatrix} \quad (4.12)$$

ただし,  $A_{ij}$  は  $\sigma_i \times \sigma_j$  実マトリクス,  $b_{ij}$  は  $\sigma_i$  次元ベクトルで,

$$A_{11} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \\ * & * & \cdots & * \end{bmatrix}$$

$$A_{ij} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ * & * & \cdots & * \end{bmatrix} \quad (i \neq j)$$

$$b_{11} = [0 \ 0 \ \cdots \ 1]^T$$

$$b_{ij} = [0 \ 0 \ \cdots \ *]^T \quad (i < j)$$

$$b_{ij} = [0 \ 0 \ \cdots \ 0]^T \quad (i > j)$$

である。ここに,  $*$  は 0 や 1 とは限らない数で,  $\sigma_i$  ( $i = 1, 2, \dots, r$ ) は,  $\sigma_1 + \sigma_2 + \cdots + \sigma_r = n$  を満たす適当な正の整数である。A と B のこのような分割に対応させて, D もつぎのように分割しておく。

$$D = \begin{bmatrix} D_{11} & \cdots & D_{1r} \\ \vdots & & \vdots \\ D_{r1} & \cdots & D_{rr} \end{bmatrix} \quad (4.13)$$

もちろん,  $D_{ij} \triangleq [d_{pq}^{ij}]$  の大きさは  $\sigma_i \times \sigma_j$  である。このとき, 線形むだ時間システム  $\hat{S}$  が内部変数フィードバック

$$u(t) = K^T x(t) \quad (4.14)$$

によって安定化できるための条件は, つぎのようになる。

【定理 4.1】 適当な実数  $\nu_i (> 0)$  と  $\theta_i (i = 1, 2, \dots, r)$  が存在して,

$$\mu_{pq}^{ij} \triangleq -\frac{p+1+\theta_i}{\nu_i} + \frac{q+\theta_j}{\nu_j} \geq 0 \quad (4.15)$$

となるすべての  $(i, j; p, q)$  に対して,

$$d_{pq}^{ij} = 0 \quad (4.16)$$

が成立するとき, システム  $\hat{S}$  を, (4.14) の形のフィードバック制御によって任意の安定度で漸近安定化することができる。■

(注 4.1) この結果を (4.1) のサブシステム  $S_1$  に適用すると,  $A_1, b_1$  が (4.3) の形をしているとき,  $D_{11}$  が下三角マトリクスであれば任意の安定度で漸近安定化できることがわかる。

(注 4.2) フィードバック制御に必要な内部変数をシステム外部に取り出せない場合, その推定値を利用することが考えられる。線形むだ時間システム  $\hat{S}$  の内部変数を, 観測可能な出力  $y = C^T x$  と入力  $u$  とから推定する推定器として, つぎのような構造のものが提案されている<sup>16)-17)</sup>。そして,  $\hat{E}$  が推定器となるための条件は, 定理 4.1 を直接に適用して求めることができる<sup>18)</sup>。 $\hat{x}(t)$  が  $x(t)$  の推定値である。

$$\hat{\mathbf{E}} : \begin{cases} \dot{\hat{\mathbf{z}}}(t) = \hat{\mathbf{A}} \hat{\mathbf{z}}(t) + \hat{\mathbf{D}} \mathbf{z}(t-h) + \hat{\mathbf{F}} \mathbf{y}(t) + \hat{\mathbf{B}} \mathbf{u}(t) & (4.17) \\ \hat{\mathbf{x}}(t) = \hat{\mathbf{C}}^T \hat{\mathbf{z}}(t) + \hat{\mathbf{H}} \mathbf{y}(t) & (4.18) \end{cases}$$

そして、 $\hat{\mathbf{S}}$  が内部変数フィードバックによって安定化可能なとき、この推定器によって得られた内部変数の推定値を、真の内部変数のかわりにフィードバックしても安定化できることが知られている<sup>17)</sup>。

#### 4.5 全体システムの分散制御による安定化

では、(4.2) で記述された大規模システム  $S$  が、いかなる条件のもとで、サブシステムごとの内部変数フィードバック (4.4) によって安定化され得るかを考えよう。

いま、分散フィードバックのゲイン  $\mathbf{k}_i^T \triangleq [k_{n_i}^i, k_{n_i-1}^i, \dots, k_1^i]$  を、サブシステム  $S_i$  の非むだ時間項の係数マトリクスの固有値が、

$$A_i \triangleq \{r_1 \lambda_1^i, r_1 \lambda_2^i, \dots, r_1 \lambda_{n_i}^i\} \quad (i = 1, 2, \dots, N)$$

となるように定めておく。ここに、 $\lambda_j^i$  ( $j = 1, 2, \dots, n_i$ ) は、実部が負の任意の複素数である。ただし、 $\lambda_j^i$  が実数でない場合はその共役複素数も指定されているものとする。このような極配置は、対  $(A_i, b_i)$  が完全可制御であることより可能である。このとき、 $k_j^i$  は、

$$k_j^i = -a_j^i - \hat{a}_j^i (r_1)^j \quad (j = 1, 2, \dots, n_i) \quad (4.19)$$

で与えられる。ここに、 $\hat{a}_j^i (r_1)^j$  は  $A_i$  を零点とする  $n_i$  次モニック多項式の係数で、 $\hat{a}_j^i$  は正数、 $r_1$  は全体システムが安定になるようにあとで決定される正数である。なお、 $(r_1)^j$  は  $r_1$  の  $j$  乗である。この結果、(4.5) の閉ループシステム  $S_0$  における  $\tilde{A}_1$  は、

$$\tilde{A}_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -\hat{a}_{n_1}^1 (r_1)^{n_1} & -\hat{a}_{n_1-1}^1 (r_1)^{n_1-1} & \cdots & -\hat{a}_1^1 r_1 \end{bmatrix} \quad (4.20)$$

となる。ここで、正則マトリクス

$$T_1 \triangleq \text{diag.} [r_1^{-\theta_1-1}, r_1^{-\theta_1-2}, \dots, r_1^{-\theta_1-n_1}]$$

を用いて、 $S_0$  の状態変数をつぎのように正則変換する。

$$\xi_1(t) = T_1 x_1(t) \quad (4.21)$$

マトリクス  $T_1$  に含まれる  $\theta_1$  は適当な実数で、その値はあとで与えられる。この変換によって、 $S_0$  はつぎのように変形される。

$$\hat{S}_0: \dot{\xi}_i(t) = r_1 \hat{A}_1 \xi_i(t) + \sum_{j=1}^N \hat{A}_{1j} \xi_j(t) + \sum_{j=1}^N \hat{D}_{1j} \xi_j(t - h_{1j}) \quad (i = 1, 2, \dots, N) \quad (4.22)$$

ここに、

$$\hat{A}_1 \triangleq r_1^{-1} T_1 \tilde{A}_1 T_1^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -\hat{a}_{n_1}^1 & -\hat{a}_{n_1-1}^1 & \cdots & -\hat{a}_1^1 \end{bmatrix}$$

$$\hat{A}_{1j} \triangleq T_1 A_{1j} T_j^{-1}$$

$$\hat{D}_{1j} \triangleq T_1 D_{1j} T_j^{-1}$$

である。この  $\hat{S}_0$  は、どんな  $r_1$  についても、正則変換 (4.21) のもとで安定性に関して  $S_0$  と同じ性質をもつ。そこで以下では、 $\hat{S}_0$  の安定性について調べるこ

とにする。

$\hat{S}_0$  におけるマトリクス  $\hat{A}_1$  は, その固有値として  $\lambda_1^1, \lambda_2^1, \dots, \lambda_{n_1}^1$  をもつから漸近安定である。したがって, 任意の正定対称マトリクス  $Q_1$  に対して, リアプノフ方程式

$$\hat{A}_1^T P_1 + P_1 \hat{A}_1 = -2Q_1 \quad (4.23)$$

は正定対称解  $P_1$  をもつ。この  $P_1$  を用いて, 汎関数  $\hat{V}_1(\xi_1)$  をつぎのように定義しよう。

$$\hat{V}_1(\xi_1) \triangleq [\xi_1^T(t) P_1 \xi_1(t)]^{\frac{1}{2}} e^{\alpha t} + \sum_{j=1}^N \int_{t-h_{1j}}^t \sigma_{1j} [\xi_j^T(\tau) P_j \xi_j(\tau)]^{\frac{1}{2}} e^{\alpha \tau} d\tau$$

ここに,

$$\sigma_{1j} \triangleq \|P_1^{\frac{1}{2}} \hat{D}_{1j} P_j^{-\frac{1}{2}}\| e^{\alpha h_{1j}}$$

である。この汎関数を  $\hat{S}_0$  の解に沿って時間微分すると,

$$\begin{aligned} D^+ \hat{V}_1(\xi_1) &= \frac{e^{\alpha t}}{2(\xi_1^T P_1 \xi_1)^{\frac{1}{2}}} [2\xi_1^T P_1 (\alpha \xi_1 + r_1 \hat{A}_1 \xi_1 + \sum_{j=1}^N \hat{A}_{1j} \xi_j \\ &\quad + \sum_{j=1}^N \hat{D}_{1j} \xi_j(t-h_{1j}))] + \sum_{j=1}^N \sigma_{1j} (\xi_j^T P_j \xi_j)^{\frac{1}{2}} e^{\alpha t} \\ &\quad - \sum_{j=1}^N \sigma_{1j} e^{-\alpha h_{1j}} (\xi_j^T(t-h_{1j}) P_j \xi_j(t-h_{1j}))^{\frac{1}{2}} \sigma \alpha t \\ &\leq e^{\alpha t} [(\alpha - r_1 \pi_1) \varphi_1(t) + \sum_{j=1}^N \rho_{1j} (\|\hat{A}_{1j}\| + e^{\alpha h_{1j}} \|\hat{D}_{1j}\|) \\ &\quad \varphi_j(t)] \end{aligned} \quad (4.24)$$

と計算される。ただし,  $\xi_1(t)$  については  $\xi_1$  と略記してあり, また

$$\varphi_1(t) \triangleq \|P_1^{\frac{1}{2}} \xi_1(t)\|$$

$$\pi_1 \triangleq \lambda_m(Q_1 P_1^{-1}) \quad (\lambda_m: \text{最小固有値})$$

$$\rho_{1j} \triangleq \|P_1^{\frac{1}{2}}\| \|P_j^{-\frac{1}{2}}\|$$

である。ここで,

$$\widehat{V}(\xi_t) \triangleq [\widehat{V}_1(\xi_t), \widehat{V}_2(\xi_t), \dots, \widehat{V}_N(\xi_t)]^T$$

$$\varphi(t) \triangleq [\varphi_1(t), \varphi_2(t), \dots, \varphi_N(t)]^T$$

$$\Gamma \triangleq \text{diag.} [\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_N]$$

とおき、マトリクス  $W$  をつぎのように定義する。

$$W \triangleq [w_{ij}]_{N \times N}$$

$$w_{ij} = \begin{cases} \pi_i - \tau_i^{-1} [\alpha + \rho_{ii} (\|\widehat{A}_{ii}\| + e^{\alpha h_{ij}} \|\widehat{D}_{ii}\|)] & (i = j) \\ -\tau_i^{-1} \rho_{ij} (\|\widehat{A}_{ij}\| + e^{\alpha h_{ij}} \|\widehat{D}_{ij}\|) & (i \neq j) \end{cases}$$

そうすると、(4.24) は次式のようにまとめて書くことができる。

$$D^+ \widehat{V}(\xi_t) \leq -e^{\alpha t} \Gamma W \varphi(t) \quad (4.25)$$

さて、全体システム  $\widehat{S}_c$  のリアプノフ汎関数の候補として、

$$V(\xi_t) \triangleq \sum_{i=1}^N \delta_i \widehat{V}_i(\xi_t)$$

を考えよう。ここに、 $\delta_i$  は正数である。このとき、 $\lambda_{mn} \triangleq \min(\lambda_m(P_i))$ 、 $\lambda_{MM} \triangleq \max(\lambda_M(P_i))$  とおくと、

$$\widehat{V}_i(\xi_t) \geq \lambda_{mn}^{\frac{1}{2}} \|\xi_i(t)\| e^{\alpha t} \quad (4.26)$$

$$\begin{aligned} \widehat{V}_i(\xi_t) &\leq \lambda_{MM}^{\frac{1}{2}} \|\xi(t)\| e^{\alpha t} + \lambda_{MM}^{\frac{1}{2}} \sum_{j=1}^N \sigma_{ij} \int_{t-h_{ij}}^t \|\xi(\tau)\| e^{\alpha \tau} d\tau \\ &\leq \lambda_{MM}^{\frac{1}{2}} \|\xi(t)\|_h e^{\alpha t} + \lambda_{MM}^{\frac{1}{2}} h \|\xi(t)\|_h e^{\alpha t} \sum_{j=1}^N \sigma_{ij} \end{aligned} \quad (4.27)$$

が成立することより、

$$a^* \|\xi(t)\| e^{\alpha t} \leq V(\xi_t) \leq b^* \|\xi(t)\|_h e^{\alpha t} \quad (4.28)$$

と評価できることがわかる。ここに、

$$a^* \triangleq \lambda_{mn}^{\frac{1}{2}} (\min \delta_i)$$

$$b^* \triangleq \lambda_{MM}^{\frac{1}{2}} \left[ \left( \sum_{i=1}^N \delta_i \right) + h \left( \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \delta_i \sigma_{ij} \right) \right]$$

である。そして、(4.22)の解に沿った時間微分は、(4.25)を用いると、

$$\begin{aligned} D^+ V(\xi_t) &= \delta^T D^+ \widehat{V}(\xi_t) \\ &\leq -e^{\alpha t} \delta^T \Gamma W \varphi(t) \end{aligned} \quad (4.29)$$

と計算される。ただし、 $\delta = [\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_N]^T$ 。したがって、もし  $\delta^T \Gamma W \varphi(t)$  が正定値関数ならば、補題4.1より、全体システム  $\widehat{S}_0$  の安定度  $\alpha$  の漸近安定性がいえる。ところで、 $\varphi(t)$  の各要素は非負であり、 $\varphi(t) = 0$  となるのは、 $\xi_1(t) = \xi_2(t) = \dots = \xi_N(t) = 0$  のときのみである。したがって、すべての要素が正である適当なベクトル  $\delta$  があって、 $\delta^T \Gamma W$  の要素もすべて正となれば  $\delta^T \Gamma W \varphi(t)$  の正定性がいえる。そして、このような  $\delta$  が存在するためには、マトリクス  $W$  が  $M$  マトリクスであることが必要十分条件である<sup>19)</sup>。そこで、これまで未定のままであった数  $r_i$  と  $\theta_i$  をうまく選んだとき、 $W$  が  $M$  マトリクスになるような条件について考えよう。この条件が、分散内部変数フィードバックによって大規模システム  $S$  が安定化できるための条件である。

いま、 $r_i$  を、新しいパラメータ  $r (> 0)$  を用いて、

$$r_i^{\nu_i} = r \quad (i=1, 2, \dots, N) \quad (4.30)$$

とおき、さらにマトリクス  $A_{ij}$ ,  $\widehat{A}_{ij}$ ,  $D_{ij}$ ,  $\widehat{D}_{ij}$  の  $(p, q)$  要素をそれぞれ、 $a_{pq}^{ij}$ ,  $\widehat{a}_{pq}^{ij}$ ,  $d_{pq}^{ij}$ ,  $\widehat{d}_{pq}^{ij}$  と書くと、

$$\frac{\widehat{a}_{pq}^{ij}}{r_i} = a_{pq}^{ij} r^{\mu_{pq}^{ij}} \quad (4.31)$$

$$\frac{\widehat{d}_{pq}^{ij}}{r_i} = d_{pq}^{ij} r^{\mu_{pq}^{ij}} \quad (4.32)$$

と計算される。ここに、 $\mu_{pq}^{ij}$

$$\mu_{pq}^{ij} \triangleq -\frac{p+\theta_i+1}{\nu_i} + \frac{q+\theta_j}{\nu_j} \quad (4.33)$$

と定義された実数である。したがって、 $r$  を十分大きくとることによって、 $\hat{a}_{pq}^{ij} / r_i$  と  $\hat{d}_{pq}^{ij} / r_i$  のすべてを 0 または十分に小さな値にすることができれば、 $\|\hat{A}_{ij}\| / r_i$  と  $\|\hat{D}_{ij}\| / r_i$  のすべても 0 または十分に小さな値となることを意味するので、このとき  $W$  は  $M$  マトリクスとなる。

以上の考察の結果として、つぎの定理を得る。

**【定理 4.2】** 適当な実数  $\nu_i (> 0)$  と  $\theta_i (i = 1, 2, \dots, N)$  が存在して、(4.33) で定義された  $\mu_{pq}^{ij}$  について、 $\mu_{pq}^{ij} \geq 0$  となるすべての  $(i, j; p, q)$  に対して、

$$a_{pq}^{ij} = 0, \text{ かつ } d_{pq}^{ij} = 0 \quad (4.34)$$

が成立するとき、大規模システム  $S$  はサブシステムごとの内部変数フィードバックによって、漸近安定化でき、しかも安定度は任意に指定できる。■

ところで、全体システム  $S$  を漸近安定化するためのフィードバックゲインは、(4.19)、(4.30) より、

$$k_i^T = [-a_1^i - \hat{a}_1^i r^{1/\nu_i}, \dots, -a_N^i - \hat{a}_N^i r^{N/\nu_i}] \quad (i = 1, 2, \dots, N) \quad (4.35)$$

となる。ここに、 $\hat{a}_j^i$  の値はサブシステムごとに設計できるものである。したがって、フィードバックゲイン  $k_i^T$  を得るには、ひとつだけのチューニングパラメータ  $r$  を決定するだけで済み、また、この  $r$  の調節のみによって、任意の安定度が実現できるのである。

ここで、全体システム  $S$  において、 $A_{ii}$  はすべて 0、 $A_{ij} (i \neq j)$  については、

$$A_{ij} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ * & * & \dots & * \end{bmatrix} \quad (i, j = 1, 2, \dots, N)$$

なる形をしている場合を考えよう。この場合、定理 4.1 を適用することによって、 $S$  を集中制御によって漸近安定化できるための条件が得られる。この結果、集中制御でなら  $A_{i_j}$  の中の  $*$  がどんな値であってもよいが、分散制御での場合には、(4.34) から  $*$  の一部が 0 でなければならないことがある。いわば、この分だけ分散制御の方が制限的であるといえる。

なお、定理 4.2 の条件から得られる結合系の構造は、定理 2.1 について示したもののから容易に推定できる。というのは、(2.19) で定義した  $\mu_{pq}^{1j}$  と (4.33) のそれとは本質的には等価なものだからである。

#### 4.6 結 言

この章では、線形むだ時間システムをサブシステムとし、サブシステム間の相互干渉にもむだ時間が介在するような大規模システムを対象にして、サブシステムごとの内部変数フィードバックによって安定化する問題を考えた。そして、各サブシステムが内部変数フィードバックで安定化できるという条件の下で、全体システムが任意に指定した安定度で漸近安定化できるための条件を、サブシステム間の結合系が満たすべき条件として与えた。また、安定化のための内部変数フィードバックゲインの構成法についても具体的に示した。

得られた安定化可能条件は、Ikeda-Šiljak<sup>20)</sup> の条件よりもゆるく、またむだ時間項  $D_{i_j}$  をすべて 0 とおくと、これまで(第 2 章で示した結果が得られる以前)に求められていたむだ時間のない線形時間不変システムに対する最も緩い安定化可能条件であった Sezer-Šiljak<sup>21)</sup> の結果に一致する。このように、ここで示した条件はかなり鋭いものだと言える。

なお、ここではむだ時間が一種の場合について検討したが、多種のむだ時間を含むシステムに対しても、汎関数  $\hat{V}(\xi_i)$  を若干修正することにより、同様の結果を得ることができる。

最後に、ここで提案した安定化法のもつ利点を列挙しておく。

- (1) フィードバックにむだ時間要素を必要としない。
- (2) むだ時間の正確な値がわからなくても、その上界がわかればフィードバック

クゲインを計算することができる。

- (3) 結合系における結合の強さに対してロバスト安定な制御系が構成できる。

## 第 5 章 時変要素をもつ

### システムへの拡張

#### 5.1 緒 言

この章では、制御対象が時変システムである場合に、これまでの章で検討したような分散制御が実現できるかどうかについて考察する。

まず 5.2 で、サブシステムが線形時変システムである大規模システムを対象として、分散最適レギュレータを構成する問題と、閉ループシステムが指定された安定度をもつように分散制御で安定化する問題を考える。ところで、線形時変システムに対する最適レギュレータ問題に関しては Kalman らによってすでに解決されている<sup>1)-3)</sup>が、時変システムの場合、時間不変システムに対して定義された感度や位相のずれの概念を直接には適用することができず、このため、最適レギュレータを施したときにもたらされるロバスト安定性について、今のところ余り明確にはなっていない。しかしながら、少なくともゲイン変動に関しては、ゲイン余有無限大、ゲイン減少余有 $\frac{1}{\epsilon}$ 以上が保証されており、この場合にも、最適レギュレータを構成することによってロバスト安定な制御系が実施されると考えられる。一方、閉ループシステムの安定度に注目した安定化法については Wolovich らの研究があり<sup>4)-7)</sup>、閉ループシステムの零入力応答が指数関数によって任意に指定された上界や下界を満たすような安定化法が得られている。このうち Ikeda 他<sup>6) 7)</sup>の示した方法は、上界と下界とを同時に指定することができ、極の概念が通用しない時変システムの安定化法として注目に値する。この節では、これらの安定化を分散型でどこまで実現できるのかを明らかにすることを目的として、それらが実現できるための条件と制御法とを示す。

つぎに、5.3 で、むだ時間を含む時変システムを対象に、第 4 章と同様、サブシステムごとに内部変数をフィードバックすることによって全体システムを安定化する問題を考え、安定化できるための条件と安定化法を示す。ところで、このような時変むだ時間システムの安定化については、集中制御を用いた方法ですら芦田一池田<sup>8)</sup>のものを除いてほとんど知られておらず、分散制御に関しては全く

報告がなされていないと思われる。この節で導かれる結果は、この意味で理論的に興味深いものであるが、ただそればかりでなく、実際上も有用な多くの示唆を与え得る。たとえば、下水処理システムの有機物濃度制御の場合、制御対象はむだ時間を含む双線形システムで記述され、時定数が大きいことから、これを一種の線形時変むだ時間システムとして取り扱うことができる。さらに、下水処理システムでは、曝気槽における制御量と最終沈殿池における制御量とを、それぞれの側で独立の制御系を構成する試みがなされている<sup>9)10)</sup>。この場合、線形時変むだ時間システムである制御対象を分散型で制御する問題となるのである。

最後の 5.4 は結言である。

## 5.2 分散制御による最適レギュレータと安定化

### 5.2.1 対象システムの記述

本節で対象とするシステムは、 $N$ 個の線形時変システム

$$S_i : \dot{x}_i(t) = A_i(t) x_i(t) + B_i(t) u_i(t) \quad (i = 1, 2, \dots, N) \quad (5.1)$$

から成る大規模システムで、全体システムが次式で表わされているシステムである。

$$S : \dot{x}_i(t) = A_i(t) x_i(t) + B_i(t) u_i(t) + \sum_{j=1}^N A_{ij}(t) x_j(t) \quad (i = 1, 2, \dots, N) \quad (5.2)$$

ここに、 $x_i(t)$  は  $S_i$  の状態を表わす  $n_i$  次元ベクトル、 $u_i(t)$  は  $S_i$  の操作入力を表わす  $r_i$  次元ベクトルであり、 $u_i(\cdot)$  の各要素は可測かつすべての有限時間区間で有界な関数とする。また、 $A_i(\cdot)$ 、 $B_i(\cdot)$ 、 $A_{ij}(\cdot)$  は適当な大きさのマトリクスで、それらの要素はすべて、可測かつすべての有限時間区間で有界な関数とする。以上の仮定の下では、任意の初期時刻  $t_0$  と任意の初期状態  $x_i(t_0)$  ( $i = 1, 2, \dots, N$ ) に対し、 $S$  がすべての  $t$  に関して連続な一意解をもつことが保証される<sup>11)12)</sup>。

さて、(5.2) をまとめると、全体システム  $S$  をつぎのように記述すること

ができる。

$$S : \dot{x}(t) = (A_D(t) + A_C(t)) x(t) + B(t) u(t) \quad (5.3)$$

ここに,  $x(t) \triangleq [x_1^T(t), x_2^T(t), \dots, x_N^T(t)]^T$  は全体システムの状態を表わす  $n$  次元ベクトル,  $u(t) \triangleq [u_1^T(t), u_2^T(t), \dots, u_N^T(t)]^T$  は全体システムの操作入力を表わす  $r$  次元ベクトルで,  $n = n_1 + n_2 + \dots + n_N$ ,  $r = r_1 + r_2 + \dots + r_N$  であり, また,

$$A_D(t) \triangleq \text{block diag. } [A_1(t), A_2(t), \dots, A_N(t)]$$

$$A_C(t) \triangleq \text{block matrix } [A_{ij}(t)]_{N \times N}$$

$$B(t) \triangleq \text{block diag. } [B_1(t), B_2(t), \dots, B_N(t)]$$

である。なお, 以下では混乱のおそれがない限り, 時間変数  $t$  を省略することがある。

さて, ここで, 本章で重要な役割を果たす可制御性と可観測性の定義を与えておこう。いま, 次式で記述される線形時変システムを考える。

$$\hat{S} : \begin{cases} \dot{x}(t) = A(t) x(t) + B(t) u(t) & (5.4) \\ y(t) = C^T(t) x(t) & (5.5) \end{cases}$$

ただし,  $x(t) \in R^n$ ,  $u(t) \in R^r$ ,  $y(t) \in R^m$  で,  $y(t)$  は観測可能な  $\hat{S}$  の出力である。そして,  $u(\cdot)$ ,  $A(\cdot)$ ,  $B(\cdot)$ ,  $C(\cdot)$  の各要素はすべて, 可測かつすべての有限時間区間で有界な関数とする。

いま, 同時システム  $\dot{x}(t) = A(t) x(t)$  の状態遷移マトリクスを  $\Phi(\cdot, \cdot)$  で表わすと,  $A(\cdot)$  に対する仮定より, すべての  $t, s$  について  $\Phi(t, s)$  は一意的に存在し, 連続かつ正則である。この状態遷移マトリクスを用いると,  $\hat{S}$  の状態のふるまいはつぎのように表わされる。

$$x(t) = \Phi(t, t_0) x(t_0) + \int_{t_0}^t \Phi(t, \tau) B(\tau) u(\tau) d\tau \quad (5.6)$$

さて, 可制御性の定義を与えるために, 二つの対称マトリクス  $W(\cdot, \cdot)$ ,

$Y(\cdot, \cdot)$  を導入する。

$$W(t, s) \triangleq \int_t^s \Phi(t, \tau) B(\tau) B^T(\tau) \Phi^T(t, \tau) d\tau, \quad t < s$$

$$Y(t, s) \triangleq \int_s^t \Phi(t, \tau) B(\tau) B^T(\tau) \Phi^T(t, \tau) d\tau, \quad s < t$$

この  $W(\cdot, \cdot)$ ,  $Y(\cdot, \cdot)$  はそれぞれ, 可制御性グラミアン, 可到達性グラミアンと呼ばれている。

[定義 5.1] <sup>7)13)</sup> すべての  $t$  について,

$$0 < \omega_1 I \leq W(t, t+\sigma) \leq \omega_2 I \quad (5.7)$$

$$0 < \omega_3 I \leq Y(t-\sigma, t) \leq \omega_4 I \quad (5.8)$$

が成立するような正数  $\sigma, \omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4$  が存在するとき,  $\hat{S}$  は一様完全可制御であるという。■

一方, 可観測性を定義するためには, それぞれ, 可観測性グラミアン, 可決定性グラミアンと呼ばれるつぎのような対称マトリクス  $M(\cdot, \cdot)$ ,  $N(\cdot, \cdot)$  が必要である。

$$M(t, s) \triangleq \int_t^s \Phi^T(\tau, t) C^T(\tau) C(\tau) \Phi(\tau, t) d\tau, \quad t < s$$

$$N(s, t) \triangleq \int_s^t \Phi^T(\tau, t) C^T(\tau) C(\tau) \Phi(\tau, t) d\tau, \quad s < t$$

[定義 5.2] <sup>7)13)</sup> すべての  $t$  について,

$$0 < \mu_1 I \leq M(t, t+\sigma) \leq \mu_2 I \quad (5.9)$$

$$0 < \mu_3 I \leq N(t-\sigma, t) \leq \mu_4 I \quad (5.10)$$

が成立するような正数  $\sigma, \mu_1, \mu_2, \mu_3, \mu_4$  が存在するとき,  $\hat{S}$  は一様完全可観測であるという。■

(注 5.1)  $\hat{S}$  において,  $A(\cdot)$  と  $B(\cdot)$  が時間不変ならば, 一様完全可制御であることと完全可制御であることは等価である。また,  $A(\cdot)$  と  $C(\cdot)$  が時間不変ならば, 一様完全可観測であることと完全可観測であることは等価である。

### 5.2.2 分散最適レギュレータの構成

はじめに、線形時変システムに対する最適レギュレータ問題について得られている基本的な結果を述べておこう。これらの知見は、大規模システムについての議論において必要である。このため、ひとまず、(5.4)で記述された単一の線形時変システム

$$\hat{S} : \dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t) \quad (5.4)$$

を対象とする。いま、このシステムに対する評価関数として、

$$\hat{J} = \int_{t_0}^{\infty} [x^T(t) \hat{Q}(t)x(t) + u^T(t) \hat{R}(t)u(t)] dt \quad (5.11)$$

を考える。ここに、 $\hat{Q}(t)$ と $\hat{R}(t)$ はそれぞれ、 $n \times n$ 、 $r \times r$ の対称マトリクスで、その要素は可測かつすべての有限時間区間で有界な関数とし、さらにすべての  $t$  で、

$$0 < \hat{q}_m I \leq \hat{Q}(t) \leq \hat{q}_M I \quad (5.12)$$

$$0 < \hat{r}_m I \leq \hat{R}(t) \leq \hat{r}_M I \quad (5.13)$$

を満たす正数  $\hat{q}_m$ 、 $\hat{q}_M$ 、 $\hat{r}_m$ 、 $\hat{r}_M$  が存在するものとする。

評価関数  $\hat{J}$  を最小とする操作入力を与えるには、つぎの Riccati 微分方程式の解が重要な役割を果たす。

$$\dot{\hat{P}}(t) + A^T(t) \hat{P}(t) + A(t) \hat{P}(t) - \hat{P}(t) B(t) \hat{R}^{-1}(t) B^T(t) \hat{P}(t) + \hat{Q}(t) = 0 \quad (5.14)$$

[補題 5.1]<sup>6)</sup>  $\hat{S}$  が一様完全可制御ならば、ある正数  $\hat{p}_m$ 、 $\hat{p}_M$  について、すべての  $t$  で、

$$0 < \hat{p}_m I \leq \hat{P}(t) \leq \hat{p}_M I \quad (5.15)$$

を満たすような (5.14) の解が存在する。■

この補題で保証された (5.15) を満足する (5.14) の解を用いると、 $\hat{S}$  の

$\hat{J}$  に対する最適レギュレータは、次式で与えられる<sup>1)</sup>。

$$u(t) = -K^T(t) x(t), \quad K^T(t) = \hat{R}^{-1}(t) B^T(t) \hat{P}(t) \quad (5.16)$$

最適レギュレータ (5.16) を施した閉ループシステム

$$\hat{S}_0 : \dot{x}(t) = (A(t) - B(t) K^T(t)) x(t) \quad (5.17)$$

は、もちろん漸近安定である。

さて、これらの結果をふまえて、大規模システムについての議論を行なおう。  
(5.3) で与えられた全体システム

$$S : \dot{x}(t) = (A_b(t) + A_c(t)) x(t) + B(t) u(t) \quad (5.3)$$

に対して、つぎの評価関数を考える。

$$J = \int_{t_0}^{\infty} [x^T(t) Q(t) x(t) + u^T(t) R(t) u(t)] dt \quad (5.18)$$

ここに、 $Q(t)$  と  $R(t)$  は適当な大きさの対称マトリクスで、その要素はすべて、可測かつすべての有限時間区間で有界な関数であり、適当な正数  $q_m, q_M, r_m, r_M$  について、すべての  $t$  で次式を満たしているものとする。

$$0 < q_m I \leq Q(t) \leq q_M I \quad (5.19)$$

$$0 < r_m I \leq R(t) \leq r_M I \quad (5.20)$$

このとき、さきに述べたように、対  $(A_b(t) + A_c(t), B(t))$  が一様完全可制御であれば、評価関数  $J$  を最小にする最適レギュレータが存在し、それは状態フィードバックの形で与えられる。しかしながら、それは一般に分散制御で実現することができない。そこで、ここでも、第2章と同様の観点から、つぎの定義を導入することにする。

〔定義 5.3〕 全体システム  $S$  に対する評価関数  $J$  を適当に選んだとき、その最適レギュレータが分散状態フィードバック

$$u_i(t) = -K_i^T(t) x_i(t) \quad (i = 1, 2, \dots, N) \quad (5.21)$$

で実現できるならば，全体システム  $S$  は分散最適化可能であるという。■

分散最適化可能であるための条件を導くために，ここで，サブシステム間の結合関係を表わすマトリクス  $A_{ij}(t)$  をつぎのような形に分解しておく。

$$A_{ij}(t) = B_i(t) F_{ij}^T(t) + \hat{A}_{ij}(t) \quad (i, j = 1, 2, \dots, N) \quad (5.22)$$

ここに， $F_{ij}^T(\cdot)$  も  $\hat{A}_{ij}(\cdot)$  も，その各要素は可測かつすべての  $t$  で連続な関数である。このとき，つぎの定理が成り立つ。

**【定理 5.1】** 全体システム  $S$  において，つぎの二条件が満たされているとき， $S$  はつねに分散最適化可能である。

(i) すべてのサブシステムが一様完全可制御

(ii) サブシステムを適当な順序で番号づけしたとき， $i \leq j$  について  $\hat{A}_{ij}(t) \equiv 0$ ， $i > j$  について  $\hat{A}_{ij}(t)$  は有界。■

以下に示すこの定理の証明は，分散最適化可能なシステムに対する分散最適レギュレータの構成法を含んでいる。

(証明) いま， $Q_D(\cdot)$ ， $R_D(\cdot)$  を，その要素が可測かつ有限時間区間で有界な関数である対称マトリクスとし，適当な正数  $q_{Dm}$ ， $q_{DM}$ ， $r_{Dm}$ ， $r_{DM}$  について，すべての  $t$  で次式を満たすものとする。

$$0 < q_{Dm} I \leq Q_D(t) \leq q_{DM} I \quad (5.23)$$

$$0 < r_{Dm} I \leq R_D(t) \leq r_{DM} I \quad (5.24)$$

そして，この  $Q_D(\cdot)$  と  $R_D(\cdot)$  に対してつぎの Riccati 微分方程式を考える。

$$\dot{P}_D(t) + A_D^T(t) P_D(t) + P_D(t) A_D(t) - P_D(t) B(t) R_D^{-1}(t) B^T(t) P_D(t) + Q_D(t) = 0 \quad (5.25)$$

定理の条件 (i) より，対  $(A_D(\cdot), B(\cdot))$  が一様完全可制御であることは明らかであり，したがって (5.25) は，適当な正数  $p_{Dm}$ ， $p_{DM}$  に対して，

$$0 < p_{Dm} I \leq P_D(t) \leq p_{DM} I \quad (5.26)$$

を満たす解をもつことが、補題 5.1 よりわかる。一方、条件(ii) より、 $A_c(t)$  はつぎのように表わせることがわかる。

$$A_c(t) = B(t) F^T(t) + \hat{A}_c(t) \quad (5.27)$$

ただし、

$$F^T(t) \triangleq \text{block matrix } [ F_{ij}^T(t) ]_{N \times N}$$

$$\hat{A}_c(t) \triangleq \begin{bmatrix} 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ \hat{A}_{21}(t) & & & \vdots \\ \vdots & & & \vdots \\ \hat{A}_{N1}(t) & \cdots & \cdots & \hat{A}_{NN-1}(t) & 0 \end{bmatrix}$$

さて、全体システム  $S$  に対する評価関数 (5.18) のなかの重みづけ  $Q(t)$  と  $R(t)$  をつぎのように選ぶことにしよう。

$$Q(t) = \Gamma_D [ Q_D(t) - (1 - \beta) P_D(t) B(t) R_D^{-1}(t) B^T(t) P_D(t) - \Gamma_D^{-1} A_c^T(t) \Gamma_D P_D(t) - P_D(t) \Gamma_D A_c(t) \Gamma_D^{-1} ] \Gamma_D \quad (5.28)$$

$$R(t) = \beta^{-1} \Gamma R_D(t) \Gamma \quad (5.29)$$

ここに、 $\beta$  は 1 より大きい正数、また  $\Gamma_D$  と  $\Gamma$  は、

$$\Gamma_D \triangleq \text{block diag. } [ \gamma^{-1} I_{n_1}, \gamma^{-2} I_{n_2}, \dots, \gamma^{-N} I_{n_N} ]$$

$$\Gamma \triangleq \text{block diag. } [ \gamma^{-1} I_{r_1}, \gamma^{-2} I_{r_2}, \dots, \gamma^{-N} I_{r_N} ]$$

で定義された実マトリクスで、 $\gamma$  は  $\beta$  とともにのちに定められる正数である。与えられた  $Q(t)$ 、 $R(t)$  のうち、 $R(t)$  が (5.20) を満たすことは明らかである。一方、 $Q(t)$  についても、未定のパラメータ  $\beta$  と  $\gamma$  を適当に選ぶことによって、(5.19) を満たすようにすることができる。この事実を示すために、つぎの不等式を利用する。

$$\begin{aligned}
Q_D(t) &= (1-\beta) P_D(t) B(t) R_D^{-1}(t) B^T(t) P_D(t) - \Gamma_D^{-1} A_c^T(t) \Gamma_D P_D(t) \\
&\quad - P_D(t) \Gamma_D A_c(t) \Gamma_D^{-1} \\
&\geq Q_D(t) - (\beta-1)^{-1} [(\beta-1) P_D(t) B(t) R_D^{-1}(t) - \Gamma_D F(t) \Gamma] R_D(t) \\
&\quad \times [(\beta-1) P_D(t) B(t) R_D^{-1}(t) - \Gamma_D F(t) \Gamma]^T \\
&\quad - (\beta-1)^{-1} \Gamma_D^{-1} F(t) \Gamma R_D(t) \Gamma F^T(t) \Gamma_D^{-1} \\
&\quad - 2 \| P_D(t) \| \| \Gamma_D A_c(t) \Gamma_D^{-1} \| I \tag{5.30}
\end{aligned}$$

ここに、 $\|\cdot\|$ は $\ell_2$ ノルムから導かれたマトリクスノルムである。(5.30)において、右辺の第2項は半正定であり、第3項は半負定であるが、 $\beta$ を大きくすることによっていくらでも小さくすることができ、また、第4項も、 $\Gamma_D A_c(t) \Gamma_D^{-1}$ の $(i, j)$ 要素が、

$$[\Gamma_D A_c(t) \Gamma_D^{-1}]_{ij} = \begin{cases} 0 & (i \leq j) \\ r^{-i+j} \hat{A}_{ij}(t) & (i > j) \end{cases} \tag{5.31}$$

であり、 $\hat{A}_{ij}(t)$ が有界であることより、 $r$ を大きくとることによって任意に小さくすることができる。そして、 $Q_D(t)$ が正定であることより、適当な $\beta$ と $r$ に対してほとんどすべての $t$ で $Q(t)$ の正定性が成立することがわかる。そこで、以下では、正数 $\beta$ と $r$ は $Q(t)$ が正定となるように選ばれているものとする。このとき、Riccati微分方程式

$$\begin{aligned}
\dot{P}(t) + (A_D(t) + A_c(t))^T P(t) + P(t) (A_D(t) + A_c(t)) \\
- P(t) B(t) R^{-1}(t) B^T(t) P(t) + Q(t) = 0 \tag{5.32}
\end{aligned}$$

は、適当な正数 $p_m, p_M$ に対して、

$$0 < p_m I \leq P(t) \leq p_M I \tag{5.33}$$

を満たす対称解を一意的にもち、それは、

$$P(t) = \Gamma_D P_D(t) \Gamma_D \tag{5.34}$$

で与えられる。このことは、(5.28), (5.29), (5.30) を (5.31) の左辺に代入し、(5.25) を用いることによって容易に確かめられる。したがって、最初に  $Q_D(t)$  と  $R_D(t)$  を  $A_D(t)$  と同じ形のブロック対角マトリクスに選んでおけば、 $P_D(t)$  も同じ形のブロック対角マトリクス

$$P_D(t) \triangleq \text{block diag. } [P_1(t), P_2(t), \dots, P_N(t)], \quad P_i(t) \in R^{n_i \times n_i}$$

で与えられる。このとき、全体システム  $S$  の評価関数  $J$  に対する最適レギュレータは、

$$u(t) = -K^T(t) x(t), \quad K^T(t) = R(t)^{-1} B^T(t) P(t) \quad (5.35)$$

と計算される。そして、フィードバックゲイン  $K^T(t)$  を書き直すと、

$$K^T(t) = \beta R_D^{-1}(t) B^T(t) P_D(t) \quad (5.36)$$

となるので、 $R_D(t)$ ,  $B(t)$ ,  $P_D(t)$  の形より、状態フィードバック (5.35) は分散制御で実現できることがわかる。■

証明の過程からわかるように、(5.28) で与えた  $Q(t)$  の正定性がくずれない範囲で結合関係  $A_c(t)$  に変動が生じて、フィードバック制御 (5.35) が変動後の  $Q(t)$  を重みにもつ評価関数に対する最適レギュレータになっている。このことは、ここで示した分散最適レギュレータを施した閉ループシステムのロバスト安定性が、結合系においてパラメータ変動が起こった場合にも維持されていることを意味している。なお、ここでは、 $i \leq j$  なる  $i, j$  について  $\hat{A}_{ij} = 0$  という条件を課したが、 $\|A_{ij}\|$  が十分に小さい場合にも、 $S$  が分散安定化可能となることを導出することができる<sup>14)</sup>。

ところで、状態フィードバック (5.36) において  $\beta = 1$  とおくと、これはサブシステムごとに与えられた評価関数

$$J_D = \int_{t_0}^{\infty} [x^T(t) Q_D(t) x(t) + u^T(t) R_D(t) u(t)] dt \quad (5.37)$$

に対する最適レギュレータとなる。このことは、全体システムの分散最適レギュ

レータが、各サブシステムのフィードバックゲインを定数倍することによって得られることを示している。

### 5.2.3 安定度を考慮した分散安定化

この項でも、(5.3) で与えられた大規模システム

$$S : \dot{x}(t) = (A_D(t) + A_C(t)) x(t) + B(t) u(t) \quad (5.3)$$

を対象とする。そして、この全体システムが指定された安定性をもつようなサブシステムごとの状態フィードバック

$$u_i(t) = K_i^T(t) x_i(t) \quad (i = 1, 2, \dots, N) \quad (5.38)$$

を構成する問題を考える。ここに、フィードバックゲイン  $K_i^T(\bullet)$  は  $r_i \times n_i$  マトリクスで、その要素は可測かつすべての有限時間区間で有界な関数とする。なお、ここでいう安定性の指定とは、状態フィードバック (5.38) を施して得られる閉ループシステム

$$S_C : \dot{x}(t) = (A_D(t) + A_C(t) + B(t) K^T(t)) x(t) \quad (5.39)$$

の初期値応答の減衰度を指定することである。ただし、

$$K^T(t) \triangleq \text{block diag.} [K_1^T(t), K_2^T(t), \dots, K_N^T(t)]$$

である。

ここで、指定された安定性を状態フィードバックによって実現できるという概念をはっきりさせておこう。

[定義 5.4] ある実数  $\alpha$  に対して、 $S_C$  のすべての解がすべての  $t_1, t_2 (\geq t_1)$  について、

$$\|x(t_2)\| \leq a \|x(t_1)\| \exp[-\alpha(t_2 - t_1)] \quad (5.40)$$

を満たすようなフィードバックゲイン  $K^T(\bullet)$  と正数  $a$  が存在するとき、 $S$  は安定度  $\alpha$  で分散一様安定化可能であるという。■

〔定義 5.5〕 ある実数  $\beta$  に対して、 $S_0$  のすべての解がすべての  $t_1, t_2 (\geq t_1)$  について、

$$b \|x(t_1)\| \exp[-\beta(t_2 - t_1)] \leq \|x(t_2)\| \quad (5.41)$$

を満たすようなフィードバックゲイン  $K^T(\bullet)$  と正数  $b$  が存在するとき、 $S$  は逆安定度  $\beta$  で分散一様逆安定化可能であるという。■

(注 5.2)  $S_0$  のすべての解が (5.40), (5.41) を満たすことは、その状態遷移マトリクス  $\Phi(\bullet, \bullet)$  が、

$$\|\Phi(t_2, t_1)\| \leq a \exp[-\alpha(t_2 - t_1)] \quad (5.42)$$

$$\|\Phi(t_1, t_2)\| \leq b^{-1} \exp[\beta(t_2 - t_1)] \quad (5.43)$$

を満たすことと、それぞれ等価である。

〔定義 5.6〕 ある非負数  $r$  が存在して、 $\beta - \alpha \geq r$  を満足する任意の実数  $\alpha, \beta$  に対して、 $S_0$  のすべての解がすべての  $t_1, t_2 (\geq t_1)$  について、

$$\begin{aligned} b \|x(t_1)\| \exp[-\beta(t_2 - t_1)] &\leq \|x(t_2)\| \\ &\leq a \|x(t_1)\| \exp[-\alpha(t_2 - t_1)] \end{aligned} \quad (5.44)$$

を満たすようなフィードバックゲイン  $K^T(\bullet)$  と正数  $a, b$  が存在するとき、 $S$  は減衰幅  $r$  で分散一様設計可能であるという。■

本節では、全体システム  $S$  を分散状態フィードバック (5.38) によって安定化することを考えているが、集中制御によれば、 $S$  が一様完全可制御であるとき、 $S_0$  のすべての解が任意の  $r (\geq 0)$  について (5.44) を満たすような状態フィードバック則が存在することが知られている<sup>7)</sup>。

さて、このような安定化問題に対してつぎの定理が成立する。ただし、 $A_{1j}(t)$  については (5.22) の形に分解されているものとする。

【定理 5.2】 全体システム  $S$  において、つぎの二条件が満たされているとき、 $S$  は任意に指定された安定度で分散一様安定化可能である。

- (i) すべてのサブシステムが一様完全可制御
- (ii) サブシステムを適当な順序で番号づけしたとき、 $i \leq j$  について  $\hat{A}_{ij}(t) \equiv 0$ 、 $i > j$  について  $\hat{A}_{ij}(t)$  は有界

さらに、

- (iii)  $F_{ij}(t)$  が有界

であれば、ある正数  $\gamma$  が存在して、減衰幅  $\gamma$  で分散一様設計可能である。■

この定理の証明を与えるためには、つぎの二つの補題が必要である。

〔補題 5.2〕<sup>7)</sup> 対  $(A_D(\bullet), B(\bullet))$  が一様完全可制御ならば、すべての  $t_1, t_2$  ( $\geq t_1$ ) について、

$$\int_{t_1}^{t_2} \|B(\tau)\|^2 d\tau \leq c_1 + c_2(t_2 - t_1) \quad (5.45)$$

が成立するような正数  $c_1, c_2$  が存在する。■

〔補題 5.3〕<sup>7)</sup>  $H(\bullet)$  を可測かつ有界な関数を要素とするマトリクスとする。このとき、対  $(A_D(\bullet), B(\bullet))$  が一様完全可制御ならば、対  $(A_D(\bullet) + B(\bullet)B^T(\bullet)H(\bullet), B(\bullet))$  も一様完全可制御である。■

(定理の証明) 逆安定化のためのフィードバックゲイン  $K_A^T(\bullet)$  と安定化のためのフィードバックゲイン  $K_E^T(\bullet)$  を、つぎのような手順で与えよう。対  $(A_1(\bullet), B_1(\bullet))$  がすべて一様完全可制御であるから、当然、対  $(A_D(\bullet), B(\bullet))$  も一様完全可制御である。したがって、その定義から、

$$0 < \omega_{D3} I \leq Y_D(t - \sigma_D, t) \leq \omega_{D4} I \quad (5.46)$$

$$Y_D \triangleq \int_{t-\sigma_D}^t \Phi_D(t, \tau) B(\tau) B^T(\tau) \Phi_D^T(t, \tau) d\tau$$

を満たす正数  $\sigma_D, \omega_{D3}, \omega_{D4}$  が存在する。ここに、 $\Phi_D(\bullet, \bullet)$  は、

$$\dot{x}(t) = A_D(t) x(t)$$

の状態遷移マトリクスである。ここで、

$$\begin{aligned} \tilde{Y}_D(t-\sigma_D, t) &\triangleq \int_{t-\sigma_D}^t \Phi_D(t, \tau) B(\tau) B^T(\tau) \Phi_D^T(t, \tau) \\ &\quad \times \exp[2(\alpha-\varepsilon)(t-\tau)] d\tau \end{aligned} \quad (5.47)$$

と定義すると、任意の非負数  $\alpha$  と正数  $\varepsilon$  について、 $\tilde{Y}_D(t-\sigma_D, t)$  が、

$$\begin{aligned} 0 < \omega_3 \exp[-2|\alpha-\varepsilon|\sigma_D] I &\leq \tilde{Y}_D(t-\sigma_D, t) \\ &\leq \omega_4 \exp[2|\alpha-\varepsilon|\sigma_D] I \end{aligned} \quad (5.48)$$

を満たすことがわかる。この  $\tilde{Y}_D(t-\sigma_D, t)$  を用いて、

$$K_A^T(t) \triangleq \frac{1}{2} B^T(t) \tilde{Y}^{-1}(t-\sigma_D, t)$$

と定めよう。そうすると、

$$\dot{x}(t) = (A_D(t) + B(t) K_A^T(t)) x(t) \quad (5.49)$$

なるシステムのすべての解は、ある正数  $b_A$  とすべての  $t_1, t_2 (\geq t_1)$  について、

$$b_A \|x(t_1)\| \exp[-(\alpha-\varepsilon)(t_2-t_1)] \leq \|x(t_2)\| \quad (5.50)$$

を満たす<sup>7)</sup>。ところで、 $\tilde{Y}^{-1}(t-\sigma_D, t)$  は (5.48) から明らかに有界である。

したがって、補題 5.3 より、対  $(A_D(\cdot) + B(\cdot) K_A^T(\cdot), B(\cdot))$  は一様完全可制御になり、その可制御性グラミアン

$$W_A(t, s) \triangleq \int_t^s \Phi_A(t, \tau) B(\tau) B^T(\tau) \Phi_A^T(t, \tau) d\tau$$

がすべての  $t$  で

$$0 < \omega_{A1} I \leq W_A(t, t+\sigma_A) \leq \omega_{A2} I \quad (5.51)$$

を満たすような正数  $\sigma_A, \omega_{A1}, \omega_{A2}$  が存在する。ここに、 $\Phi_A(\cdot, \cdot)$  は (5.49) の状態遷移マトリクスである。(5.49) のすべての解が (5.50) を満たすことは、注 5.2 に記したように、この状態遷移マトリクスが、

$$\| \Phi_A(t_1, t_2) \| \leq b_A^{-1} \exp [(\alpha - \varepsilon)(t_2 - t_1)] \quad (5.52)$$

を満たすことと等価である。ここで、 $\tilde{W}_A(\cdot, \cdot)$  を、

$$\begin{aligned} \tilde{W}_A(t, t + \tilde{\sigma}) \triangleq & \int_t^{t + \tilde{\sigma}} \Phi_A(t, \tau) B(\tau) B^T(\tau) \Phi_A^T(t, \tau) \\ & \times \exp [(\alpha + \delta + \nu)(t - \tau)] d\tau \end{aligned}$$

と定義しよう。ここに、 $\tilde{\sigma} \geq \sigma_A$  とする。この  $W(\cdot, \cdot)$  については、任意の正数  $\delta, \nu$  に対して、すべての  $t$  で、

$$0 < \tilde{\omega}_{A1} I \leq \tilde{W}_A(t, t + \tilde{\sigma}) \leq \tilde{W}(t, \infty) \leq \tilde{\omega}_{A2} I \quad (5.53)$$

を満たすような正数  $\tilde{\omega}_{A1}$ 、 $\tilde{\omega}_{A2}$  が存在する<sup>7)</sup>。これを用いて、フィードバックゲイン  $K_s^T(\cdot)$  をつぎのように与えよう。

$$K_s^T(t) \triangleq -\frac{1}{2} [I + \tilde{F}^T(t) \Pi \tilde{F}(t)] B^T(t) \tilde{W}_A^{-1}(t, t + \tilde{\sigma})$$

ここに、

$$\Pi \triangleq \text{block diag. } [\pi_1 I_{n_1} \quad \pi_2 I_{n_2} \quad \cdots \quad \pi_N I_{n_N}]$$

$$\tilde{F}^T(t) \triangleq \text{block diag. } [F_1^T(t) \quad F_2^T(t) \quad \cdots \quad F_N^T(t)]$$

$$F_i^T(t) \triangleq [F_{i1}^T(t) \quad F_{i2}^T(t) \quad \cdots \quad F_{iN}^T(t)]$$

であり、 $\pi_i$  はある正数で、その値はあとで定めることにする。

さて、こうして定めた  $K_A^T(\cdot)$  と  $K_s^T(\cdot)$  によって、分散状態フィードバックを、

$$u(t) = (K_A^T(t) + K_s^T(t)) x(t) \quad (5.54)$$

と構成しよう。この結果、全体システム  $S$  は、

注) 後程  $\tilde{\sigma}$  を決定するのに必要となるので具体的に与えておく。

$$\tilde{\omega}_{A1} \triangleq \omega_{A1} \exp [-2(\alpha + \delta + \nu) \sigma_A]$$

$$S_0 : \dot{x}(t) = [A_0(t) + B(t) F^T(t) + \hat{A}_c(t) + B(t) (K_A^T(t) + K_s^T(t))] x(t) \quad (5.55)$$

となる。ここで、 $n$ 次元ベクトル  $x$  と時刻  $t$  のスカラ関数  $V(x, t)$  を、

$$V(x, t) \triangleq x^T D_D \tilde{W}_A^{-1}(t, t+\tilde{\sigma}) x \quad (5.56)$$

で定義する。ここに、

$$D_D \triangleq \text{block diag. } [d_1 I_{n_1} \quad d_2 I_{n_2} \quad \cdots \quad d_N I_{n_N}]$$

で、 $d_i$  はすべて正数である。(5.53) から  $V(\cdot, \cdot)$  は  $\tilde{\sigma}$  にかかわらず、すべての  $t$  で、

$$d_m \tilde{\omega}_{A_2}^{-1} \|x\|^2 \leq V(x, t) \leq d_M \tilde{\omega}_{A_1}^{-1} \|x\|^2 \quad (5.57)$$

を満たすことがわかる。ただし、 $d_m$  は  $d_i$  の最小値、 $d_M$  は  $d_i$  の最大値である。そして、 $S_0$  の解  $x(\cdot)$  に沿った  $V(x(\cdot), \cdot)$  の時間微分は、ほとんどすべての  $t$  で、

$$\begin{aligned} \dot{V}(x(t), t) = & x^T(t) \{ -2(\alpha + \delta + \nu) D_D \tilde{W}_A^{-1}(t, t+\tilde{\sigma}) \\ & - D_D \tilde{W}_A^{-1}(t, t+\tilde{\sigma}) \Phi_A(t, t+\tilde{\sigma}) B(t+\tilde{\sigma}) B^T(t+\tilde{\sigma}) \\ & \Phi_A^T(t, t+\tilde{\sigma}) \tilde{W}_A^{-1}(t, t+\tilde{\sigma}) \exp[-2(\alpha + \delta + \nu)\tilde{\sigma}] \\ & + D_D \tilde{W}_A^{-1}(t, t+\tilde{\sigma}) B(t) F^T(t) + F(t) B^T(t) \\ & \tilde{W}_A^{-1}(t, t+\tilde{\sigma}) D_D + D_D \tilde{W}_A^{-1}(t, t+\tilde{\sigma}) \hat{A}_c(t) \\ & + \hat{A}_c^T(t) \tilde{W}_A^{-1}(t, t+\tilde{\sigma}) D_D - D_D \tilde{W}_A^{-1}(t, t+\tilde{\sigma}) B(t) \\ & \tilde{F}^T(t) // \tilde{F}(t) B^T(t) \tilde{W}_A^{-1}(t, t+\tilde{\sigma}) \} x(t) \quad (5.58) \end{aligned}$$

である。ところで、右辺の第3項と第5項については、

$$\begin{aligned} & -x^T(t) D_D \tilde{W}_A^{-1}(t, t+\tilde{\sigma}) B(t) \tilde{F}^T(t) // \tilde{F}(t) B^T(t) \tilde{W}_A^{-1}(t, t+\tilde{\sigma}) x(t) \\ & + x^T(t) [D_D \tilde{W}_A^{-1}(t, t+\tilde{\sigma}) B(t) F^T(t) + F(t) B^T(t) \tilde{W}_A^{-1}(t, t+\tilde{\sigma}) D_D] x(t) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= -\sum_{i=1}^N \{ d_i x_i^T(t) [ \pi_i \widetilde{W}_{A_i}^{-1}(t, t+\tilde{\sigma}) B_i(t) F_i^T(t) F_i(t) B_i^T(t) \\
&\quad \widetilde{W}_{A_i}^{-1}(t, t+\tilde{\sigma}) x_i(t) - 2 \widetilde{W}_{A_i}^{-1}(t, t+\tilde{\sigma}) B_i(t) F_i^T(t) x(t) ] \} \\
&= -\sum_{i=1}^N \{ d_i \| \pi_i^{\frac{1}{2}} x_i^T(t) \widetilde{W}_{A_i}^{-1}(t, t+\tilde{\sigma}) B_i(t) F_i^T(t) - \pi_i^{-\frac{1}{2}} x^T(t) \|^2 \\
&\quad - d_i \pi_i^{-1} x^T(t) x(t) \} \tag{5.59}
\end{aligned}$$

と計算される。ここに、 $\widetilde{W}_{A_i}(\cdot, \cdot)$  は  $\widetilde{W}_A(\cdot, \cdot)$  の第  $i$  番目の対角ブロックである。また、定理の条件(ii)が満たされているとき、すべての  $t$  で、

$$\| \widehat{A}_{i,j}(t) \| \leq \widehat{a}_{i,j} \quad (i > j)$$

を満たす正数  $\widehat{a}_{i,j}$  が存在することに注意すると、右辺の第4項は、

$$\begin{aligned}
&x^T(t) [ D_b \widetilde{W}_A^{-1}(t, t+\tilde{\sigma}) \widehat{A}_c(t) + \widehat{A}_c^T(t) \widetilde{W}_A^{-1}(t, t+\tilde{\sigma}) D_b ] x(t) \\
&= 2 \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N [ d_i x_i^T(t) \widetilde{W}_{A_i}^{-1}(t, t+\tilde{\sigma}) \widehat{A}_{i,j}(t) x_j(t) ] \\
&\leq 2 \widetilde{\omega}_{A_1}^{-1} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N [ d_i \widehat{a}_{i,j} \| x_i(t) \| \| x_j(t) \| ] \tag{5.60}
\end{aligned}$$

と計算される。この結果、(5.58)より、

$$\begin{aligned}
\dot{V}(x(t), t) &\leq -2(\alpha + \delta + \nu) V(x(t), t) + \left( \sum_{i=1}^N d_i \pi_i^{-1} \right) x^T(t) x(t) \\
&\quad + 2 \widetilde{\omega}_{A_1}^{-1} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N [ d_i \widehat{a}_{i,j} \| x_i(t) \| \| x_j(t) \| ] \tag{5.61}
\end{aligned}$$

と得る。ところで、

$$-2\delta V(x(t), t) \leq -2 \widetilde{\omega}_{A_2}^{-1} \delta \sum_{i=1}^N d_i \| x_i(t) \|^2 \tag{5.62}$$

が成り立つ。そこで、 $N \times N$  マトリクス  $W = [w_{i,j}]$  を、

$$w_{i,j} \triangleq \begin{cases} \widetilde{\omega}_{A_2}^{-1} \delta & (i = j) \\ 0 & (i < j) \\ -\widetilde{\omega}_{A_1}^{-1} \widehat{a}_{i,j} & (i > j) \end{cases} \tag{5.63}$$

と定義すると、 $i \leq j$  となる  $i, j$  について  $\widehat{A}_{i,j}(t) \equiv 0$  であることより、

(5.61)より次式を得る。

$$\begin{aligned} \dot{V}(x(t), t) \leq & -2(\alpha+1)V(x(t), t) + \left(\sum_{i=1}^N d_i \pi_i^{-1}\right) x^T(t) x(t) \\ & - \xi^T(t) [DW + W^T D] \xi(t) \end{aligned} \quad (5.64)$$

ここに,

$$\begin{aligned} \xi(t) & \triangleq [\|x_1(t)\| \|x_2(t)\| \cdots \|x_N(t)\|]^T \\ D & \triangleq \text{diag.} [d_1 \ d_2 \ \cdots \ d_N] \end{aligned}$$

である。(5.63)で定義した $W$ は, 任意の $\delta$ について $M$ マトリクスであるから,

$$DW + W^T D \geq 0 \quad (5.65)$$

が成立する $D$ が必ず存在する<sup>15)</sup>。そして, このような $D$ に対して,

$$\pi_i = \frac{N\tilde{\omega}_{A2} d_i}{2 d_m \nu} \quad (i=1, 2, \dots, N) \quad (5.66)$$

と定めてやると,

$$\left(\sum_{i=1}^N d_i \pi_i^{-1}\right) x^T x \leq 2\nu V(x(t), t) \quad (5.67)$$

となる。以上より, 結局,  $\dot{V}(x(t), t)$ が, ほとんどすべての $t$ で,

$$\dot{V}(x(t), t) \leq -2\alpha V(x(t), t) \quad (5.68)$$

が成り立ち, ゆえに, すべての $t_1, t_2 (\geq t_1)$ について,

$$V(x(t_2), t_2) \leq V(x(t_1), t_1) \exp[-2\alpha(t_2 - t_1)] \quad (5.69)$$

が成り立つことがわかる。(5.57)を用いると, 直ちに,

$$\|x(t_2)\| \leq \sqrt{\frac{d_m \tilde{\omega}_{A2}}{d_m \tilde{\omega}_{A1}}} \|x(t_1)\| \exp[-\alpha(t_2 - t_1)] \quad (5.70)$$

が得られる。これで, 定理の前半が証明された。

定理の後半の証明のために, 再び(5.58)を用いよう。右辺の第3項と第4

項はそれぞれ,

$$\begin{aligned}
 & 2 \mathbf{x}^T(t) D_b \widetilde{W}_A^{-1}(t, t+\tilde{\sigma}) B(t) F^T(t) \mathbf{x}(t) \\
 &= \|\mathbf{x}^T(t) D_b \widetilde{W}_A^{-1}(t, t+\tilde{\sigma}) + \mathbf{x}^T(t) F(t) B^T(t)\|^2 \\
 &\quad - \mathbf{x}^T(t) D_b \widetilde{W}_A^{-1}(t, t+\tilde{\sigma}) \widetilde{W}_A^{-1}(t, t+\tilde{\sigma}) D_b \mathbf{x}(t) \\
 &\quad - \mathbf{x}^T(t) F(t) B^T(t) B(t) F^T(t) \mathbf{x}(t) \tag{5.71}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & 2 \mathbf{x}^T(t) D_b \widetilde{W}_A^{-1}(t, t+\tilde{\sigma}) \widehat{A}_c(t) \mathbf{x}(t) \\
 &= \|\mathbf{x}^T(t) D_b \widetilde{W}_A^{-1}(t, t+\tilde{\sigma}) + \mathbf{x}^T(t) \widehat{A}_c^T(t)\|^2 \\
 &\quad - \mathbf{x}^T(t) D_b \widetilde{W}_A^{-1}(t, t+\tilde{\sigma}) \widetilde{W}_A^{-1}(t, t+\tilde{\sigma}) D_b \mathbf{x}(t) \\
 &\quad - \mathbf{x}^T(t) \widehat{A}_c^T(t) \widehat{A}_c(t) \mathbf{x}(t) \tag{5.72}
 \end{aligned}$$

と計算される。それゆえ, (5.52), (5.57) を用いると, ほとんどすべての  $t$  で,

$$\begin{aligned}
 \dot{V}(\mathbf{x}(t), t) \geq & \left[ -2(\alpha + \delta + \nu) - \frac{\exp[-2(\epsilon + \delta + \nu)\tilde{\sigma}]}{b_A^2 \widetilde{\omega}_{A1}} \right. \\
 & \times \left. \left\| B(t+\tilde{\sigma}) \right\|^2 - \frac{2d_M}{\widetilde{\omega}_{A1}} - \frac{\widetilde{\omega}_{A2}}{d_m} \left\| B(t) \right\|^2 \left\| F(t) \right\|^2 \right. \\
 & \left. - \frac{\widetilde{\omega}_{A2}}{d_m} \left\| \widehat{A}_c(t) \right\|^2 \right] V(\mathbf{x}(t), t) \tag{5.73}
 \end{aligned}$$

が成り立ち, したがって, すべての  $t_1, t_2 (\geq t_1)$  について,

$$\begin{aligned}
 V(\mathbf{x}(t_2), t_2) \geq & V(\mathbf{x}(t_1), t_1) \exp[-2(\alpha + \delta + \nu)(t_2 - t_1)] \\
 & - \frac{\exp[-2(\epsilon + \delta + \nu)\tilde{\sigma}]}{b_A^2 \widetilde{\omega}_{A1}} \int_{t_1+\tilde{\sigma}}^{t_2+\tilde{\sigma}} \left\| B(\tau) \right\|^2 d\tau \\
 & - \frac{2d_M}{\widetilde{\omega}_{A1}}(t_2 - t_1) - \frac{\widetilde{\omega}_{A2}}{d_m} \left\| F(t) \right\|^2 \int_{t_1}^{t_2} \left\| B(\tau) \right\|^2 d\tau \\
 & - \frac{\widetilde{\omega}_{A2}}{d_m} \left\| \widehat{A}_c(t) \right\|^2 (t_2 - t_1) \tag{5.74}
 \end{aligned}$$

が成り立つことがわかる。そして, 補題 5.2 により,

$$V(\mathbf{x}(t_2), t_2) \geq V(\mathbf{x}(t_1), t_1) \exp[-2(\alpha + \delta + \nu)(t_2 - t_1)]$$

$$\begin{aligned}
& - \frac{c_1 \exp [-2(\varepsilon + \delta + \nu) \tilde{\sigma}]}{b_A^2 \tilde{\omega}_{A1}} \\
& - \frac{c_2 \exp [-2(\varepsilon + \delta + \nu) \tilde{\sigma}]}{b_A^2 \tilde{\omega}_{A1}} (t_2 - t_1) \\
& - \frac{2 d_M}{\tilde{\omega}_{A1}} (t_2 - t_1) - \frac{c_1 \tilde{\omega}_{A2}}{d_m} \|F(t)\|^2 \\
& - \frac{c_2 \tilde{\omega}_{A2}}{d_m} \|F(t)\|^2 (t_2 - t_1) \\
& - \frac{\tilde{\omega}_{A2}}{d_m} \|\hat{A}_c(t)\|^2 (t_2 - t_1) \\
= & \exp \left[ - \frac{c_1 \exp [-2(\varepsilon + \delta + \nu) \tilde{\sigma}]}{b_A^2 \tilde{\omega}_{A1}} - \frac{c_1 \tilde{\omega}_{A2} f_M^2}{d_m} \right] \\
& \times V(x(t_1), t_1) \exp \left[ -2 \left( \alpha + \frac{c_2 \exp [-2(\varepsilon + \delta + \nu) \tilde{\sigma}]}{2 b_A^2 \tilde{\omega}_{A1}} \right. \right. \\
& \left. \left. + \gamma \right) (t_2 - t_1) \right] \tag{5.75}
\end{aligned}$$

が得られる。ここに、 $\gamma$  は、

$$\gamma \triangleq \delta + \nu + \frac{d_M}{\tilde{\omega}_{A1}} + \frac{\tilde{\omega}_{A2}}{2 d_m} (c_2 f_M^2 + \hat{a}_M^2) \tag{5.76}$$

であり、 $f_M, \hat{a}_M$  はそれぞれ、すべての  $t$  で  $\|F(t)\| \leq f_M$ ,  $\|\hat{A}_c(t)\| \leq \hat{a}_M$  を満たす正数である。いま、指定したい逆安定度を  $\beta$  し、 $\beta > \alpha + \gamma$  を満たしているものとして、 $\tilde{\sigma}$  を、

$$\tilde{\sigma} = \max \left\{ \sigma_A, \frac{1}{2(\varepsilon + \delta + \nu)} \log \frac{c_2 \exp [2(\alpha + \delta + \nu) \sigma_A]}{2 b_A^2 \omega_{A1} (\beta - \alpha - \gamma)} \right\} \tag{5.77}$$

と定めよう。このとき、

$$\alpha + \frac{c_2 \exp [-2(\varepsilon + \delta + \nu) \tilde{\sigma}]}{2 b_A^2 \tilde{\omega}_{A1}} + \gamma \leq \beta \tag{5.78}$$

を満たすから、(5.75) は、

$$V(x(t_2), t_2) \geq \exp \left[ - \frac{c_1 \exp [-2(\varepsilon + \delta + \nu) \tilde{\sigma}]}{b_A^2 \tilde{\omega}_{A1}} \right]$$

$$\left. - \frac{c_1 \tilde{\omega}_{A2} f_M^2}{d_m} \right] V(x(t_1), t_1) \exp[-2\beta(t_2 - t_1)] \quad (5.79)$$

が成り立つことを意味している。ゆえに、(5.57)より、

$$\|x(t_2)\| \geq \left\{ \frac{d_m \tilde{\omega}_{A1}}{d_m \tilde{\omega}_{A2}} \exp\left[-\frac{c_1 \exp[-2(\varepsilon + \delta + \nu)\tilde{\sigma}]}{b_A^2 \tilde{\omega}_{A1}}\right] - \frac{c_1 \tilde{\omega}_{A2} f_M^2}{d_m} \right\}^{\frac{1}{2}} \|x(t_1)\| \exp[-\beta(t_2 - t_1)] \quad (5.80)$$

が得られる。なお、 $\beta = \alpha + r$ である場合にも、フィードバックゲイン  $K_s^T(t)$  および、スカラ関数  $V(x, t)$  における  $\tilde{W}_A(t, t + \tilde{\sigma})$  を  $\tilde{W}_A(t, \infty)$  に置きかえることによって、実現できることが容易に確かめられる。このように、(5.76)で定義された  $r$  について、 $\beta - \alpha \geq r$  を満たす  $\alpha, \beta$  を任意に指定して、全体システムを分散状態フィードバックによって漸近安定化できることがわかった。

■

ここで与えた安定化法では、一般に減衰幅  $r$  を 0 とすることができない。これは、フィードバック則の設計に工夫が足りないのではなく、分散制御によって全体システムを安定化する場合、サブシステムを過度に安定化させる必要があるために生ずる本質的なものである。

## 5.3 時変むだ時間を含む場合の分散安定化

### 5.3.1 対象システムの記述

本節で対象とする大規模システムは、 $N$ 個の線形時変むだ時間システム

$$S_i : \dot{x}_i(t) = A_i(t) x_i(t) + \sum_{k=1}^{\ell_{i1}} D_{i1k}(t) x_i(t - h_{i1k}(t)) + B_i(t) u_i(t) \quad (i = 1, 2, \dots, N) \quad (5.81)$$

をサブシステムにもつ複合システムで、つぎの差分微分方程式で記述されているものである。

$$S : \dot{x}_i(t) = A_i(t) x_i(t) + B_i(t) u_i(t) + \sum_{j=1}^N A_{ij}(t) x_j(t) + \sum_{j=1}^N \left[ \sum_{k=1}^{\ell_{ij}} D_{ijk}(t) x_j(t - h_{ijk}(t)) \right] \quad (i = 1, 2, \dots, N) \quad (5.82)$$

ここに、 $x_i(t)$  は  $S_i$  の内部変数を表わす  $n_i$  次元ベクトル、 $u_i(t)$  は  $S_i$  の操作入力を表わす  $r_i$  次元ベクトルで、 $u_i(\bullet)$  の各要素は可測かつ有限時間区間で有界な関数とする。また、マトリクス  $A_i(\bullet)$ 、 $B_i(\bullet)$ 、 $A_{ij}(\bullet)$ 、 $D_{ijk}(\bullet)$  は適当な大きさを持ち、その各要素は可測かつすべての有限時間区間で有界な関数とする。そして、 $h_{ijk}(t)$  はむだ時間を表わし、すべての  $t$  で、

$$0 \leq h_{ijk}(t) \leq h_{ijkM} \leq h_M < \infty \quad (5.83)$$

$$\dot{h}_{ijk}(t) \leq \hat{h}_{ijk} \leq \hat{h}_M < 1 \quad (i, j = 1, 2, \dots, N ; k = 1, 2, \dots, \ell_{ij}) \quad (5.84)$$

を満たす1階連続微分可能な関数とする。S に対するこれらの仮定は、物理的なシステムのほとんどすべてが満たしているものである。

### 5.3.2 安定化問題の記述

さて、全体システム S をサブシステムごとの内部変数フィードバック

$$u_i(t) = K_i^T(t) x_i(t) \quad (i = 1, 2, \dots, N) \quad (5.85)$$

によって安定化することを考える。ただし、 $K_i^T(\bullet)$  は  $r_i \times n_i$  マトリクスで、その要素は可測かつ有限時間区間で有界な関数とする。フィードバック制御 (5.85) を施すことによって得られる閉ループシステムは、次式のように記述される。

$$S_0 : \dot{x}_i(t) = (A_i(t) + B_i(t) K_i^T(t)) x_i(t) + \sum_{j=1}^N A_{ij}(t) x_j(t) + \sum_{j=1}^N \left[ \sum_{k=1}^{\ell_{ij}} D_{ijk}(t) x_j(t - h_{ijk}(t)) \right] \quad (i = 1, 2, \dots, N) \quad (5.86)$$

この  $S_0$  に対して、初期時刻を  $t_0$ 、初期関数を

$$x_i(t) = \phi_i(t), \quad t_0 - h_M(t_0) \leq t < t_0$$

$$(i = 1, 2, \dots, N) \quad (5.87)$$

とする。ここに、 $h_M(t_0) = \max_{i,j,k} h_{i,j,k}(t_0)$  であり、 $\phi_i(\cdot)$  はその要素が可測かつ有界な関数である。このとき、(5.86) の解は  $t \geq t_0$  で一意的に存在し、かつ連続であることが知られている<sup>16)</sup>。

ここで、全体システム  $S_c$  が安定であるということをつぎのように定義しておく。ただし、

$$x(t) \triangleq [x_1^T(t), x_2^T(t), \dots, x_N^T(t)]^T$$

$$\phi(t) \triangleq [\phi_1^T(t), \phi_2^T(t), \dots, \phi_N^T(t)]^T$$

である。

〔定義 5.7〕 ある非負数  $\alpha$  に対して、 $S_c$  のすべての解がすべての  $t_1, t_2$  ( $\geq t_1$ ) について、

$$\|x(t_2)\|_{b_M} \leq c \|x(t_1)\|_{b_M} \exp[-\alpha(t_2 - t_1)] \quad (5.88)$$

を満たす正数  $c$  が存在するとき、 $S_c$  は安定度  $\alpha$  で漸近安定であるという。■

定義において、ベクトルノルムとして任意の  $\ell_p$  ノルムを適用してよいが、議論の都合上、本章では  $\ell_2$  ノルムを採用することにする。したがって、関数ノルム  $\|\cdot\|_{b_M}$  は次式で定義されたノルムとなる。

$$\|x(t)\|_{b_M} \triangleq \sup_{t-h_M \leq \tau \leq t} [x^T(\tau) x(\tau)]^{\frac{1}{2}}$$

### 5.3.3 分散制御による安定化

大規模システムの分散安定化について考える前に、そのための基礎となる線形時変むだ時間システムの安定化について、すなわち、内部変数フィードバックによって安定化できるための条件と、内部変数を直接取り出せない場合にその推定値をフィードバックして安定化する方法について述べておく。のちに考察する大

規模システムの分散安定化問題では，推定値を利用した安定化に関しては言及しないが，時変むだ時間システムの内部変数を推定する機構はこれまで知られておらず，ここでの結果を実際に適用しようとする際には，役立つものとなる。

まず，一つのサブシステムに相当する線形時変むだ時間システム

$$\hat{S} : \begin{cases} \dot{x}(t) = A(t) x(t) + D(t) x(t-h(t)) + B(t) u(t) & (5.89) \\ y(t) = C^T(t) x(t) & (5.90) \end{cases}$$

を対象とする。ここに， $x(t)$ は内部変数を表わす  $n$  次元ベクトル， $u(t)$ は入力を表わす  $r$  次元ベクトル， $y(t)$ は観測可能な出力を表わす  $m$  次元ベクトル， $A(\bullet)$ ， $D(\bullet)$ ， $C(\bullet)$ はそれぞれ適当な大きさのマトリクスで，その要素はすべて可測かつ有限時間区間で有界な関数とする。また，むだ時間を表わす  $h(t)$ は，すべての  $t$  で，

$$0 \leq h(t) \leq h_m < \infty \quad (5.91)$$

$$\dot{h}(t) \leq \hat{h}_m < 1 \quad (5.92)$$

を満たす 1 階連続微分可能な関数とし， $\hat{S}$  に対する初期関数

$$x(t) = \phi(t), \quad t_0 - h(t_0) \leq t < t_0 \quad (5.93)$$

の各要素は，可測かつ有界な関数としておく。ここでは議論の簡単化のためにむだ時間が一種類のシステムを対象としているが，多種類の場合に対しても同様の結果が成立することを付け加えておく。

さて，まず  $\hat{S}$  を内部変数フィードバック

$$u(t) = K^T(t) x(t) \quad (5.94)$$

によって安定化できるための条件を示そう。ここに，フィードバックゲイン  $K^T(\bullet)$  も，その要素は可測かつ有限時間区間で有界な関数としておく。

**【定理 5.3】**<sup>8)</sup> 線形時変むだ時間システム  $\hat{S}$  は，つぎの二条件を満たすとき，

(5.94) の形の内部変数フィードバックによって、任意に安定度を指定して漸近安定化できる。

(i) 対  $(A(\bullet), B(\bullet))$  が一様完全可制御

(ii) すべての  $t$  で,  $D(t) = B(t) L(t)$  を満たすマトリクス  $L(\bullet)$  が存在する。■

この定理によれば、安定化のために  $\hat{S}$  の内部変数が必要となるが、実際には内部変数を直接取り出せない場合が多い。そこで、内部変数を推定する機構として、4.4 で与えた時間不変の場合と同じ構造をもつものを考える。すなわち、

$$\hat{E} : \begin{cases} \dot{z}(t) = \hat{A}(t) z(t) + \hat{D}(t) z(t-h(t)) + \hat{F}(t) y(t) \\ \quad + \hat{B}(t) u(t) & (5.95) \\ \hat{x}(t) = \hat{C}^T(t) z(t) + \hat{H}(t) y(t) & (5.96) \end{cases}$$

ここに、 $z(t)$  は  $n$  次元ベクトルで、 $\hat{x}(t)$  は  $x(t)$  の推定値である。いま、

$$\begin{aligned} \hat{A}(t) &= A(t) - \hat{F}(t) C^T(t), & \hat{D}(t) &= D(t), & \hat{B}(t) &= B(t), \\ \hat{C}^T(t) &= I, & \hat{H}(t) &= 0 \end{aligned}$$

とおくと、推定値と真値の誤差  $e(t) \triangleq \hat{x}(t) - x(t)$  のふるまいを次式で記述することができる。

$$\dot{e}(t) = (A(t) - \hat{F}(t) C^T(t)) e(t) + D(t) e(t-h(t)) \quad (5.97)$$

したがって、適当な  $\hat{F}(\bullet)$  に対して (5.97) が漸近安定であれば、 $t \rightarrow \infty$  で  $\hat{x}(t) \rightarrow x(t)$  となり、 $\hat{E}$  は、 $\hat{S}$  の内部変数を入手可能な情報  $u(t)$  と  $y(t)$  とから漸近的に推定する機構であることがわかる。ここでは、(5.97) の安定度を、推定誤差の減衰度と呼ぶことにする。

**【定理 5.4】** 線形時変むだ時間システム  $\hat{S}$  がつぎの二条件を満たすとき、その内部変数を漸近的に推定する推定器を (5.95), (5.96) の形のもので構成することができ、しかも推定誤差の減衰度を任意に指定することができる。

(i) 対  $(C^T(\bullet), A(\bullet))$  が一様完全可観測

(ii) すべての  $t$  で,  $D(t) = M(t-h(t)) C^T(t-h(t))$  を満たすマトリクス  $M(\bullet)$  が存在する。■

内部変数を直接取り出せない場合には, フィードバック (5.94) を構成することができない。この場合, その推定値  $\hat{x}(t)$  で代用すること, すなわち,

$$u(t) = K^T(t) \hat{x}(t) \quad (5.98)$$

なるフィードバック制御によって  $\hat{S}$  を安定化することができるのではないかと推測される。そして, 実際, つぎのことが成立する。

**【定理 5.5】** 定理 5.3 および 5.4 における条件がすべて満足されているとき, 線形時変むだ時間システム  $\hat{S}$  は, (5.98) の形のフィードバックによって, 任意に安定度を指定して漸近安定化できる。■

ここでは, これらの結果の証明を省くが, 定理 5.3 の証明は文献 8), 17) に, 定理 5.4 の証明は文献 17), 18) に, そして定理 5.5 の証明は文献 18) に述べられている。なお, 文献 17) では, 定理 5.3 の条件(ii) が  $D(t) = B(t) L(t) + D_1(t)$  である場合について, また定理 5.4 の条件(ii) が  $D(t) = M(t-h(t)) C^T(t-h(t)) + D_2(t)$  である場合についての考察がなされている。

さて, 全体システムの分散制御による安定化についての結果を示そう。6.3 で定式化した問題に解答を与えることが本節の目的であるが, そのために, サブシステム間の結合関係を表わすマトリクス  $A_{ij}(\bullet)$ ,  $D_{ijk}(\bullet)$  を次の形に分解しておく。

$$A_{ij}(t) = B_i(t) F_{ij}^T(t) + \hat{A}_{ij}(t) \quad (5.99)$$

$$D_{ijk}(t) = B_i(t) G_{ijk}^T(t) + \hat{D}_{ijk}(t)$$

$$(i, j = 1, 2, \dots, N; k = 1, 2, \dots, \ell_{ii}) \quad (5.100)$$

ここに,  $F_{ij}(t)$ ,  $G_{ijk}(t)$ ,  $\hat{A}_{ij}(t)$ ,  $\hat{D}_{ijk}(t)$  はそれぞれ適当な大きさのマトリクスで, これらの要素はすべて可測かつ有限時間区間で有界な関数とする。このような分解は, サブシステムへの結合のうち入力と同じ経路を通過してつながっている部分とそうでない部分に分けたとみなすことができる。

このとき，つぎの結果が成立する。

**【定理 5. 6】** 全体システム  $S$  において，つぎの二条件が満たされているとき， $S$  は (5. 85) の形の分散制御によって，任意に安定度を指定して漸近安定化できる。

- (i) すべての  $i$  について，対  $(A_i(\bullet), B_i(\bullet))$  が一様完全可制御
- (ii) すべての  $i, j$  について  $\hat{A}_{ij}(t) \equiv 0$ ，かつすべての  $i, j, k$  について  $\hat{D}_{ijk}(t) \equiv 0$ 。■

この定理を， $D_{ijk}(t)$  のすべてが 0 であるとして適用すると，定理 5. 1 や定理 5. 2 と比べて，条件(ii) についても，また実現される制御の質についても制限的である。これは，理論的な展開における困難さだけでなく，むだ時間システムの本質的な制御の難しさを反映していると考えられる。

この定理の証明には，つぎの補題が必要である。

[補題 5. 4]<sup>6)</sup> 対  $(A_i(\bullet), B_i(\bullet))$  が一様完全可制御ならば，任意の実数  $\alpha$  に対して，対  $(A_i(\bullet) + \alpha I, B_i(\bullet))$  も一様完全可制御である。■

この補題と，補題 5. 1 を用いることによって，対  $(A_i(\bullet), B_i(\bullet))$  が一様完全可制御ならば，任意の実数  $\alpha$ ，正数  $\nu_i$  について，Riccati 微分方程式

$$\begin{aligned} \dot{P}_i(t) + (A_i(t) + \alpha I)^T P_i(t) + P_i(t) (A_i(t) + \alpha I) \\ - P_i(t) B_i(t) B_i^T(t) P_i(t) + \nu_i I = 0 \end{aligned} \quad (5. 101)$$

が，ある正数  $p_{mi}$ ， $p_{Mi}$  に対して，すべての  $t$  で，

$$p_{mi} I \leq P_i(t) \leq p_{Mi} I \quad (5. 102)$$

を満たす解をもつことがわかる。

さて，定理の証明を与えよう。

(証明) いま，任意の非負数  $\alpha$  に対して，分散制御 (5. 85) におけるフィードバックゲイン  $K_i^T(\bullet)$  を，(5. 102) を満たす (5. 101) の解  $P_i(\bullet)$  を用いて，

$$K_i^T(t) = -\frac{1}{2} \left[ I + \sum_{j=1}^N F_{ij}^T(t) F_{ij}(t) + \sum_{j=1}^N \sum_{k=1}^{\ell_{ij}} \frac{\rho_{ij}}{\eta_{ijk}} G_{ijk}^T(t) G_{ijk}(t) \right] B_i^T(t) P_i(t) \quad (5.103)$$

と定めよう。ただし、 $\eta_{ijk} \triangleq (1 - \hat{h}_{ijkM}) \exp[-2\alpha h_{ijkM}]$  であり、また (5.101) における  $\nu_i$  については、つぎのように選ばれているものとする。

$$\nu_i = 2N \quad (i = 1, 2, \dots, N) \quad (5.104)$$

さて、(5.103) で与えられたフィードバックゲインを採用したとき、閉ループシステム  $S_0$  が安定度  $\alpha$  で漸近安定になっていることを、リアプノフの方法によって示すことにしよう。そのために、まず、 $K_i^T(\bullet)$  を定めたときの  $P_i(\bullet)$  を用いたスカラ関数

$$V_i(t) = e^{2\alpha t} x_i^T(t) P_i(t) x_i(t) + \sum_{j=1}^N \left( \sum_{k=1}^{\ell_{ij}} \int_{t-h_{ijk}(t)}^t \frac{e^{2\alpha\tau}}{\rho_{ij}} x_j^T(\tau) x_j(\tau) d\tau \right) \quad (5.105)$$

を考える。(5.83)、(5.102) を用いると、すべての  $t$  で次式が成立することが導ける。

$$V_i(t) \leq p_{m1} \|x_i(t)\|^2 e^{2\alpha t} + \sum_{j=1}^N \left( \int_{t-b_{jm}}^t x_j^T(\tau) x_j(\tau) d\tau e^{2\alpha t} \right) \quad (5.106)$$

$$V_i(t) \geq p_{m1} \|x_i(t)\|^2 e^{2\alpha t} \quad (5.107)$$

そして、 $S_0$  の応答  $x(\bullet)$  に沿った  $V_i(\bullet)$  の時間微分を計算すると、ほとんどすべての  $t$  で、

$$\begin{aligned} \dot{V}_i(t) = & e^{2\alpha t} x_i^T(t) \left[ \dot{P}_i(t) + (A_i^T(t) + \alpha I) P_i(t) + P_i(t) (A_i(t) + \alpha I) \right. \\ & \left. - P_i(t) B_i(t) B_i^T(t) P_i(t) \right] x_i(t) \\ & + e^{2\alpha t} \sum_{j=1}^N \left\{ -x_i^T(t) P_i(t) B_i(t) F_{ij}^T(t) F_{ij}(t) B_i^T(t) P_i(t) x_i(t) \right. \\ & \left. - x_i^T(t) P_i(t) B_i(t) \left[ \sum_{k=1}^{\ell_{ij}} \frac{\rho_{ij}}{\eta_{ijk}} G_{ijk}^T(t) G_{ijk}(t) \right] B_i^T(t) P_i(t) x_i(t) \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + 2 \mathbf{x}_i^T(t) \mathbf{P}_i(t) \mathbf{B}_i(t) \mathbf{F}_{ij}^T(t) \mathbf{x}_j(t) \\
& + 2 \mathbf{x}_i(t) \mathbf{P}_i(t) \mathbf{B}_i(t) \left[ \sum_{k=1}^{\ell_{ij}} \mathbf{G}_{ijk}^T(t) \mathbf{x}_j(t - h_{ijk}(t)) \right] \\
& + \mathbf{x}_j^T(t) \mathbf{x}_j(t) \\
& - \sum_{k=1}^{\ell_{ij}} \left[ \frac{1 - \dot{h}_{ijk}(t)}{\ell_{ij}} \exp(-2\alpha h_{ijk}(t)) \mathbf{x}_j^T(t - h_{ijk}(t)) \right. \\
& \quad \left. \times \mathbf{x}_j(t - h_{ijk}(t)) \right] \} \tag{5.108}
\end{aligned}$$

となる。ここで、(5.101) および

$$\begin{aligned}
2 \mathbf{x}_i^T(t) \mathbf{P}_i(t) \mathbf{B}_i(t) \mathbf{F}_{ij}^T(t) \mathbf{x}_j(t) &= - \|\mathbf{x}_i^T(t) \mathbf{P}_i(t) \mathbf{B}_i(t) \mathbf{F}_{ij}^T(t) - \mathbf{x}_j(t)\|^2 \\
& + \mathbf{x}_i^T(t) \mathbf{P}_i(t) \mathbf{B}_i(t) \mathbf{F}_{ij}^T(t) \mathbf{F}_{ij}(t) \mathbf{B}_i^T(t) \mathbf{P}_i(t) \mathbf{x}_i(t) \\
& + \mathbf{x}_j^T(t) \mathbf{x}_j(t) \tag{5.109}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
2 \mathbf{x}_i^T(t) \mathbf{P}_i(t) \mathbf{B}_i(t) \mathbf{G}_{ijk}^T(t) \mathbf{x}_j(t - h_{ijk}(t)) & \\
- \frac{1 - \dot{h}_{ijk}(t)}{\ell_{ij}} \exp(-2\alpha h_{ijk}(t)) \mathbf{x}_j^T(t - h_{ijk}(t)) \mathbf{x}_j(t - h_{ijk}(t)) & \\
\leq 2 \mathbf{x}_i^T(t) \mathbf{P}_i(t) \mathbf{B}_i(t) \mathbf{G}_{ijk}^T(t) \mathbf{x}_j(t - h_{ijk}(t)) & \\
- \frac{\eta_{ijk}}{\ell_{ij}} \mathbf{x}_j^T(t - h_{ijk}(t)) \mathbf{x}_j(t - h_{ijk}(t)) & \\
= - \left\| \sqrt{\frac{\ell_{ij}}{\eta_{ijk}}} \mathbf{x}_i^T(t) \mathbf{P}_i(t) \mathbf{B}_i(t) \mathbf{G}_{ijk}^T(t) - \sqrt{\frac{\eta_{ijk}}{\ell_{ij}}} \mathbf{x}_j^T(t - h_{ijk}(t)) \right\|^2 & \\
+ \frac{\ell_{ij}}{\eta_{ijk}} \mathbf{x}_i^T(t) \mathbf{P}_i(t) \mathbf{B}_i(t) \mathbf{G}_{ijk}^T(t) \mathbf{G}_{ijk}(t) \mathbf{B}_i(t) \mathbf{P}_i(t) \mathbf{x}_i(t) & \tag{5.110}
\end{aligned}$$

なる関係式を用いると、(5.108) より次式を得る。

$$\dot{V}_i(t) \leq e^{2\alpha t} \left[ -\nu_1 \mathbf{x}_i^T(t) \mathbf{x}_i(t) + 2 \sum_{j=1}^N \mathbf{x}_j^T(t) \mathbf{x}_j(t) \right] \tag{5.111}$$

これらの準備のもとに、ここで改めて、(5.105) を加え合わせたスカラ関数

$$V(t) \triangleq V_1(t) + V_2(t) + \dots + V_N(t)$$

を考えよう。(5.106), (5.107) より,

$$\begin{aligned} V(t) &\leq p_M \|x(t)\|^2 e^{2\alpha t} + h_M \|x(t)\|_{h_M}^2 e^{2\alpha t} \\ &\leq (p_M + h_M) \|x(t)\|_{h_M}^2 e^{2\alpha t} \end{aligned} \quad (5.112)$$

$$V(t) \geq p_m \|x(t)\|^2 e^{2\alpha t} \quad (5.113)$$

が成立する。ただし、 $p_M \triangleq \max p_{M_i}$ 、 $p_m \triangleq \min p_{m_i}$  である。そして、 $S_0$  の応答  $x(\bullet)$  に沿った  $V(\bullet)$  の時間微分は、(5.104)、(5.111) より、

$$\dot{V}(t) \leq e^{2\alpha t} \sum_{i=1}^N [-2N x_i^T(t) x_i(t) + 2 \sum_{j=1}^N x_j^T(t) x_j(t)] = 0 \quad (5.114)$$

と計算される。したがって、すべての  $t_1$ 、 $\tau (\geq t_1)$  について、

$$V(\tau) \leq V(t_1) \quad (5.115)$$

が成立する。ゆえに、(5.112)、(5.113) より、

$$\|x(\tau)\| \leq \sqrt{\frac{p_M + h_M}{p_m}} \|x(t_1)\|_{h_M} e^{-\alpha(\tau - t_1)} \quad (5.116)$$

であることが導け、すべての  $t_1$ 、 $t_2 (\geq t_1)$  について、

$$\begin{aligned} \|x(t_2)\|_{h_M} &= \sup_{t_2 - h_M \leq \tau \leq t_2} \|x(\tau)\| \\ &\leq \sup_{t_2 - h_M \leq \tau \leq t_2} \sqrt{\frac{p_M + h_M}{p_m}} \|x(t_1)\|_{h_M} e^{-\alpha(\tau - t_1)} \\ &= e^{\alpha h_M} \sqrt{\frac{p_M + h_M}{p_m}} \|x(t_1)\|_{h_M} e^{-\alpha(t_2 - t_1)} \end{aligned}$$

が成立するのである。■

定理の証明で示されたように、 $S_0$  を指定された安定度  $\alpha$  で漸近安定であるようにするための分散フィードバックゲインは、(5.103) のように定めればよい。そして、このフィードバックゲインを構成するには、おのおののむだ時間の上界  $h_{ijkM}$  とその変化率の上界  $\hat{h}_{ijkM}$  は必要であるが、むだ時間  $h_{ijk}(\bullet)$  そのものは必要ではない。すなわち、ここで与えた安定化法によれば、 $h_{ijk}(\bullet)$  が正確にわからなくても、 $h_{ijkM}$  と  $\hat{h}_{ijkM}$  がわかれば安定化することが可能である。また、安定化された閉ループシステム  $S_0$  は、結合系の一部が断線されたり再結線されたりし

ても安定性が損なわれることがなく、少なくとも結合系のパラメータ変動に対してはロバスト安定なシステムとなっている。最後に、結合系が全くない場合を想定すると、定理 5.6 が定理 5.3 に一致することを注意しておく。

#### 5.4 結 言

本章では、パラメータが時変である大規模システムの分散制御について考察を行なった。まず、むだ時間を含まないシステムを対象に、閉ループシステムが、一つはロバスト安定となるような、もう一つはその零入力応答が指定された上界と下界をもつような安定化を考えた。そして、ロバスト安定性を実現するための制御としての分散最適レギュレータを時間不変の場合と同様に定義し、それが構成できるための条件を、サブシステム間の結合関係に着目して導き、その構成法を示した。この構成法では、分散最適レギュレータゲインを、各サブシステムについて計算された最適レギュレータゲインをそれぞれ定数倍することによって容易に得ることができる。また、指定された安定度を実現するための制御については、分散最適レギュレータの構成可能条件と同じ条件のもとで、ある範囲の減衰幅をもった上界と下界とを同時に満足するような分散状態フィードバックの構成法を示した。ここで減衰幅が一定以上なければならない点に不満が残るが、これは分散型の制御方式であるという制約からの本質的な限界であろうと考えられる。ところで、これらの安定化可能条件は、安定化可能性に結合関係のどの部分が基本的に関わっているのかを明示するために、結合系に関する条件をその構造によって表わしてあるが、結合マトリクス  $\hat{A}_{ij}(t)$  のうち、 $i \leq j$  のものが 0 でなくとも、すべての  $i, j$  について  $\|\hat{A}_{ij}(t)\|$  がある程度小さければいずれの分散制御も実現できるというより一般的な結果を、定理の証明を少し修正することによって導くことができる<sup>14)</sup>。なお、池田<sup>19)</sup> や Ikeda-Siljak<sup>20)</sup> によって得られている安定化法では、単に安定度の上界が指定できるだけである。

続いて、むだ時間を含む時変システムを対象に、分散型の内部変数フィードバックによって全体システムを安定化する問題を考えた。そして、各サブシステムが内部変数フィードバックで安定化でき、かつ他のサブシステムからの干渉がそ

のサブシステムの入力と同じ入口を通っているとみなせる場合には、全体システムを任意の安定度で漸近安定化できることを明らかにした。ここで与えた安定化のためのフィードバック則は、時変むだ時間の正確な挙動がわからなくても、その上界と変化率の上界さえわかれば構成できるという特長をもっている。なお、5.3.3で述べた内部変数を漸近的に推定する機構は、その構成にむだ時間の正確なふるまいを必要とする点に問題を残しているが、実システムでは通常、内部変数を直接には取り出せないことを考えると、今後より実際的な制御法を開発する上で重要な結果と言えよう。

## 第 6 章 実システムに対する

### 分散制御系の構成

#### 6.1 結 言

前の章まででは、分散型の制御系によってどのような制御が実現できるのか、また分散制御系をどのように構成すればよいのかについて理論的に考察を行ってきた。本章では、これらの理論を実システムの制御に適用し、工学的な立場からも有用であることを示すことにする。ここでとりあげるのは、磁気浮上車両の案内制御と電力系統の負荷周波数制御の二つの問題である。これらはいずれも、実際的な理由から分散型で制御することが要求されているものである。

最初に対象とする磁気浮上車両は、常電導電磁石で浮上し、リニアサイリスタモータで推進するタイプで、現在、国鉄で開発中のものである<sup>1)</sup>。この車両が案内用レールに接触しないよう走行させるためには案内制御（横方向の位置制御）をする必要がある<sup>2) 3)</sup>。しかも、そのための制御系は、車両の前部と後部にある二つの台車それぞれで構成することが要求されており、分散制御理論の適用が不可欠な制御問題の一つである。さらに、車両の制御では、乗客数の多少による車両重量の変化や、列車編成時の隣接車両からの影響があり、十分にロバスト安定な制御系であることが望まれる。6.2では、この案内制御系を、第2章で述べた分散最適レギュレータの理論を適用して構成し、上記の諸要求を満足する制御系となっていることを計算機シミュレーションによって確かめる。

6.3では、序論でも引用した電力系統の負荷周波数制御をとりあげる。電力系統では、負荷が変動しても系統の周波数が規定範囲内に収まっている必要があり、負荷周波数制御については古くから研究されてきている。そして、最近では、従来のPID調節計にかわる状態フィードバック制御を用いる方法<sup>4)</sup>が、さらには分散型の制御方式による方法が提案されている<sup>5) 6)</sup>。しかし、白井<sup>5) 6)</sup>の提案している方法は階層型で、完全な分散型のものとはなっていないし、地理的に隔たった地域間の情報伝送に生じるはずのむだ時間については考慮されていない。そこで、まず、むだ時間のない場合について分散制御系を設計し、分散型によっても、集

中型や階層型で設計されたものに比肩し得る周波数制御が可能であることを示す。その後、むだ時間がある場合について、第4章で与えた安定化法を適用し、満足のゆく制御が実現され得ることを計算機シミュレーションによって示す。

6.4は結言である。

## 6.2 磁気浮上車両の案内制御

ここでは、磁気浮上車両に対するロバスト安定な案内制御系を、第2章で開発した分散最適レギュレータの構成法を利用して設計し、その有効性を計算機シミュレーションによって確かめる。

### 6.2.1 磁気浮上車両とそのモデル

対象とする磁気浮上車両の概形を図6.1に示した。この車両は、電磁レールに通じている電流と、台車に取り付けられた浮上・推進用電磁石とから発生するローレンツ力で浮上し、案内用電磁石とによって発生する横方向のローレンツ力で案内制御するようになっている。案内制御系の設計にあたって、つぎのようなモデルを用いることにする。

#### (A) 磁気浮上車両のダイナミクス

磁気浮上車両の場合、前・後部に生じた軌道からのずれが車体の弾性によって互いに影響を及ぼしあう。そこで、磁気浮上車両の横方向のダイナミクスを、図6.2のようなバネダンパ系で表わすことにする。図6.2中の $F_a$ 、 $F_b$ は、車両が横方向に偏位したときにあらわれる浮上力の横方向成分で、これが車両の案内システムを不安定にしている要因である。このようなモデリングが妥当であることは、国鉄が現在、試験用台車に対して行なっている実験の結果から十分に推察できることである。ただ、より実際的なモデルとするには、台車と車体の間、案内用電磁石と台車の間のバネダンパ特性を考慮する必要があるが、ここでは、分散制御の効果に注目しているので、図6.1のモデルを採用することにする。

さて、このとき、磁気浮上台車の数式モデルはつぎのようになる。

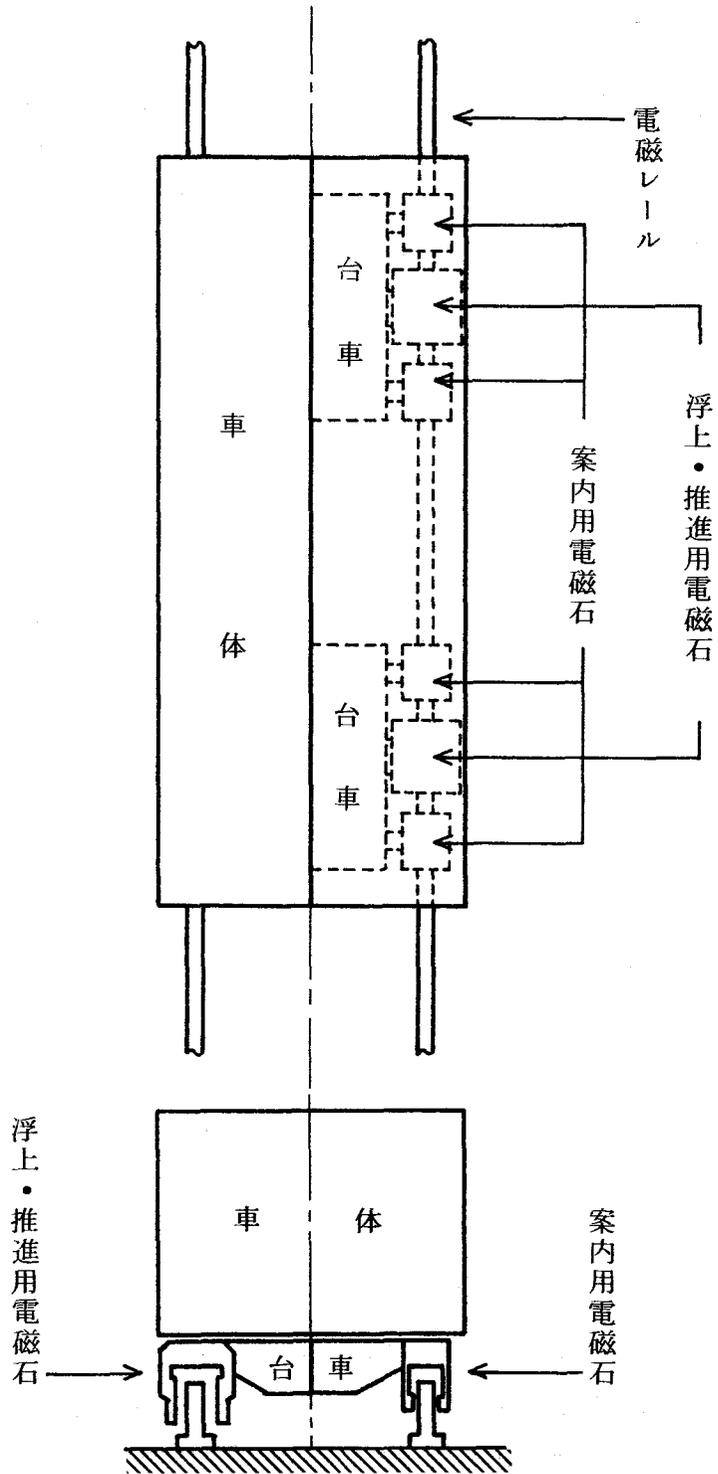
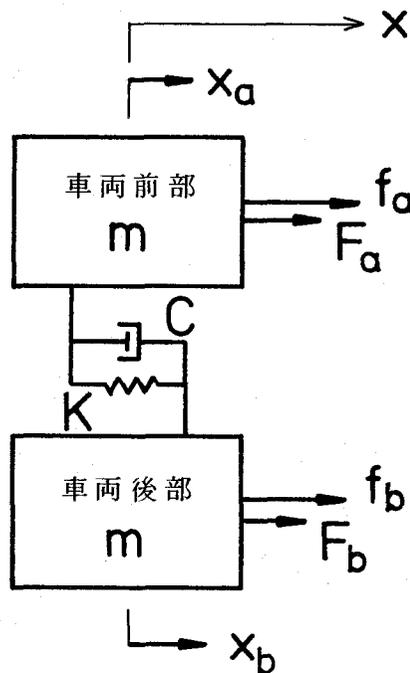


図 6.1 磁気浮上車両の概形

$$m\ddot{x}_a = f_a + F_a - C(\dot{x}_a - \dot{x}_b) - K(x_a - x_b) \quad (6.1)$$

$$m\ddot{x}_b = f_b + F_b - C(\dot{x}_b - \dot{x}_a) - K(x_b - x_a) \quad (6.2)$$

上式中、 $F_a, F_b$  はそれぞれ  $x_a, x_b$  にほぼ正比例することが実験で確かめられており、その比例定数（横方向偏位力係数）を  $K_\ell$  と書くと、次式で表わすことができる<sup>2)</sup>。



$m$  : 車両前部, 後部の質量 (=車両全質量  $\times \frac{1}{2}$ )

$K$  : バネ係数

$C$  : ダンパ係数

$x_a(x_b)$  : 車両前(後)部の偏位

$f_a(f_b)$  : 前(後)部案内用電磁石による制御力

$F_a(F_b)$  : 前(後)部浮上用電磁石による横方向偏位力

図 6.2 磁気浮上車両のバネ-ダンパ系モデル

$$F_{\sigma} = K_{\ell} x_{\sigma} \quad (\sigma = a, b) \quad (6.3)$$

(B) 案内用電磁石のダイナミクス

電磁レール電流が一定であるとき，案内用電磁石によって得られる制御力  $f_a$ ， $f_b$  は，次式で与えられる<sup>2)</sup>。

$$\begin{cases} Li_{\sigma} = -Ri_{\sigma} + v_{\sigma} \\ f_{\sigma} = K_r i_{\sigma} \end{cases} \quad (\sigma = a, b) \quad (6.4)$$

ここに， $v_{\sigma}$ ， $i_{\sigma}$ ， $L$ ， $R$  はそれぞれ，電磁石コイルの励磁電圧，電流，自己インダクタンス，抵抗で， $K_r$  は案内力ゲインと呼ばれる比例定数である。

さて，以上で得られた(6.1)～(6.5)をまとめると，制御対象の状態方程式表現として，次式を得る。

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} x_a \\ \dot{x}_a \\ i_a \\ \dots \\ x_b \\ \dot{x}_b \\ i_b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \vdots & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{K-K_{\ell}}{m} & -\frac{C}{m} & \frac{K_r}{m} & \vdots & K & C & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{R}{L} & \vdots & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \vdots & 0 & 1 & 0 \\ K & C & 0 & \vdots & -\frac{K-K_{\ell}}{m} & -\frac{C}{m} & \frac{K_r}{m} \\ 0 & 0 & 0 & \vdots & 0 & 0 & -\frac{R}{L} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_a \\ \dot{x}_a \\ i_a \\ \dots \\ x_b \\ \dot{x}_b \\ i_b \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & \vdots & 0 \\ 0 & \vdots & 0 \\ \frac{1}{L} & \vdots & 0 \\ 0 & \vdots & \frac{1}{L} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_a \\ \dots \\ v_b \end{bmatrix} \quad (6.6)$$

この場合，制御量は  $x_a$ ， $x_b$ ，操作入力は  $v_a$ ， $v_b$  であり，すべての状態変数はギャップセンサ等により測定することが可能である。

### 6.2.2 分散制御系の構成

制御対象 (6.6) に対して案内制御系を構成する場合，つぎの二つの仕様を満たすことが基本的な要求となる。

- (1) 車両設計および製造上の理由から台車の仕様は統一されていることが望ましく，制御系は各台車とも同一で，しかも台車ごとに独立したものであること。
- (2) 車両の場合，乗客数の多少によって車両重量が変わるため，そのような変動に対してロバスト安定な制御系であること。

これらの要求を満たす制御系を構成するために，第2章で示した分散最適レギュレータを適用することを考える。

まず，(6.6) を可制御標準形に直しておく。状態変数を，

$$\begin{array}{ccc}
 \begin{array}{l} (x_1) \\ (x_2) \\ (x_3) \end{array} & = & \begin{array}{l} (T) \\ (T) \\ (T) \end{array} \begin{bmatrix} \frac{K_r}{mL} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{K_r}{mL} & 0 \\ \frac{K-K\ell}{mL} & \frac{C}{mL} & \frac{1}{L} \end{bmatrix} \begin{array}{l} (x_\sigma) \\ (\dot{x}_\sigma) \\ (i_\sigma) \end{array} \\
 & & (i = 1, 2; \sigma = a, b)
 \end{array} \tag{6.7}$$

によって変換すると，次式のようになる。

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_1 & 0 \\ 0 & b_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_a \\ v_b \end{bmatrix} \tag{6.8}$$

$$A_{11} = A_{22} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -\frac{R(K-K\ell)}{mL} & -\frac{CR+L(K-K\ell)}{mL} & -\left(\frac{C}{m} + \frac{R}{L}\right) \end{bmatrix}$$

$$A_{12} = A_{21} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \frac{K}{m} & \frac{C}{m} & 0 \\ \frac{KC}{m^2} & \frac{C^2}{m^2} & 0 \end{bmatrix}$$

$$b_1 = b_2 = [0 \quad 0 \quad 1]^T$$

そして、(6.8) を (2.25) の形に変形すると、

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} &= \left( \begin{bmatrix} \hat{A}_{11} & 0 \\ 0 & \hat{A}_{22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & \hat{A}_{12} \\ \hat{A}_{21} & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_1 & 0 \\ 0 & b_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{f}_{11}^T & \hat{f}_{12}^T \\ \hat{f}_{21}^T & \hat{f}_{22}^T \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \\ \text{(x)} \quad & \quad \text{(\hat{A}_D)} \quad \quad \text{(\hat{A}_C)} \quad \quad \text{(B)} \quad \quad \text{(\hat{F}^T)} \\ & + \begin{bmatrix} b_1 & 0 \\ 0 & b_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_a \\ v_b \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (6.9)$$

$$\hat{A}_{11} = \hat{A}_{22} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\hat{A}_{12} = \hat{A}_{21} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ K & C & 0 \\ m & m & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\hat{f}_{11}^T = \hat{f}_{22}^T = \left[ -\frac{R(K-K\ell)}{mL} \quad -\frac{CR + L(K-K\ell)}{mL} \quad -\left(\frac{C}{m} + \frac{R}{L}\right) \right]$$

$$\hat{f}_{12}^T = \hat{f}_{21}^T = \left[ \frac{KC}{m^2} \quad \frac{C^2}{m^2} \quad 0 \right]$$

となる。さて、この  $\hat{A}_C$  について、定理 2.1 を適用すると、 $\nu_1 = \nu_2 = 1$ 、 $\theta_1 = \theta_2 = 0$  のとき条件を満足し、したがって分散最適レギュレータを構成できることがわかる。そこで、 $\hat{Q} = \text{block diag.}[\hat{Q}_1 \quad \hat{Q}_2]$ 、 $\hat{R} = \text{diag.}[\hat{r}_1 \quad \hat{r}_2]$  として、

$$\hat{Q}_1 = \hat{Q}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \hat{r}_1 = \hat{r}_2 = 1$$

と選ぶと、Riccati 方程式 (2.33) の解  $\hat{P} = \text{block diag.}[\hat{P}_1 \quad \hat{P}_2]$  は、

$$\hat{P}_1 = \hat{P}_2 = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

となる。したがって、前部および後部の制御入力は (2.51) より、

$$\begin{aligned} v_{\sigma} &= -\beta [r^3 \quad 2r^2 \quad 2r] x_i \\ &= -\beta [r^3 \quad 2r^2 \quad 2r] T^{-1} x_{\sigma} \end{aligned} \quad (\sigma = a, b ; i = 1, 2) \quad (6.10)$$

なる分散状態フィードバックで与えられる。ここに、 $\beta$  と  $r$  は調整パラメータであり、(2.40) で定義されたマトリクス  $Q$  が正定となる範囲で選ばれるものである。

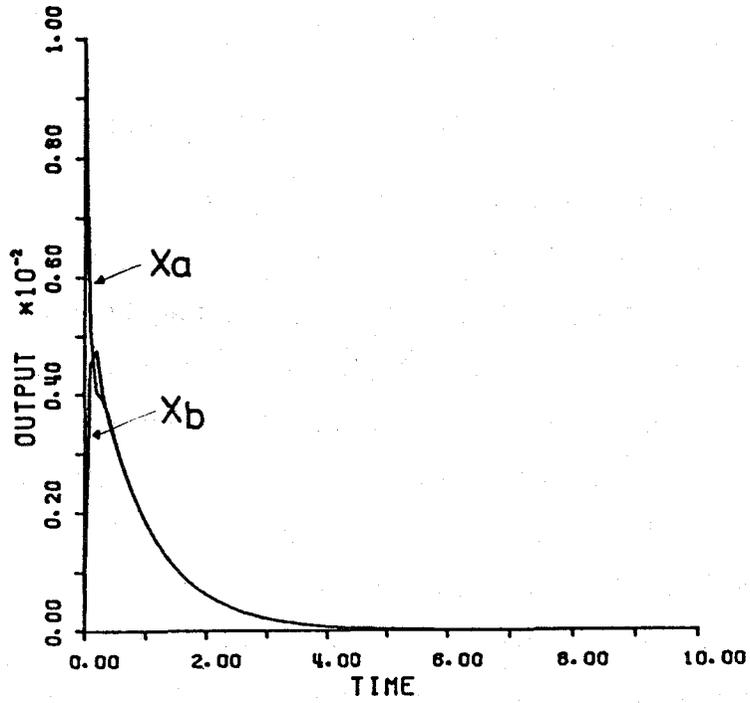
### 6.2.3 シミュレーションの結果

構成された案内制御系のロバスト安定性を検証するために、計算機シミュレーションを行なった。シミュレーションには、次の諸元を用いた。

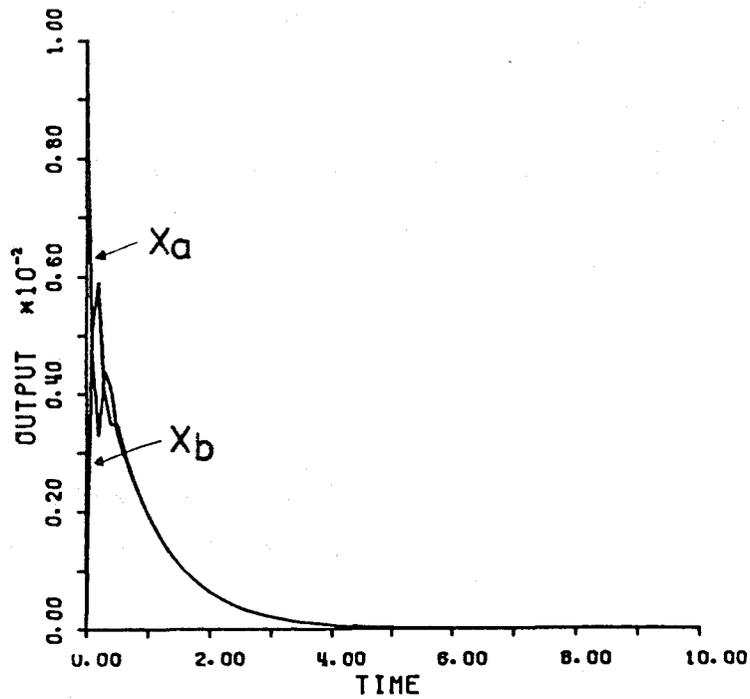
$$\begin{aligned} m &= 1 \times 10^4 \text{ [kg]} \quad (\text{乗客塔乗時は } 2 \times 10^4 \text{ [kg]}) \\ K &= 2 \times 10^8 \text{ [N/m]} \quad C = 5 \times 10^4 \text{ [N/m/s]} \\ L &= 0.2 \text{ [H]} \quad R = 3 \text{ [\Omega]} \\ K_r &= 400 \text{ [N/A]} \quad K_{\ell} = 2 \times 10^6 \text{ [N/m]} \end{aligned}$$

これらの数値は、国鉄の計画案および試験台車から得られているデータを参考にして与えたものである。なお、電磁レールと案内電磁石との間隙（案内ギャップ長）は 15 mm で、これが  $x_a$ 、 $x_b$  の最大許容偏差である。制御則 (6.10) における設計パラメータについては、 $\beta = 10.0$ 、 $r = 40.0$  と選んだ。このとき、閉ループシステムの極は、

$$\{-467, -465, -17.0, -12.7 \pm 203i, -1.05\}$$



(a) 乗客のない場合



(b) 乗客を乗せた場合

図 6.3 磁気浮上車両の案内制御

である。なお、制御対象 (6.6) の極は、

$$\{-15.0, -15.0, -14.1, -5.0 \pm 199i, 141\}$$

で、横方向偏位力のために不安定なシステムであった。

さて、初期値を、 $x_a = 0.01$  [m]、その他を 0 としたときの零入力応答をシミュレーションした結果が図 6.3(a) である。 $x_a$  の初期偏位に対して、前部、後部とも偏位がすみやかに平衡状態に収束し、行き過ぎによる接触についても余裕あるふるまいであることがわかる。一方、乗客の乗った状況を想定して  $m = 20,000$  [kg] としたとき、同じ初期値に対する零入力応答は図 6.3(b) のようになった。制御則を決定する際、乗客のない場合を基準にしたため、比較すると行き過ぎ量がやや増加しているが、収束速度もふるまいも極端には変化していない。

ここでは、磁気浮上車両のモデルとして非常に簡単な構造のものを考えたが、ここで示した結果は、実車の案内制御系を設計する場合に、分散最適レギュレータを用いた方法が極めて有効であることを示唆していると考えられる。

### 6.3 電力系統の負荷周波数制御

地理的に広がりのある大規模システムでは、物流や情報伝送に時間がかかり、いわゆる輸送おくれを生じる。このような場合、むだ時間を配慮した制御が必要となる。この節では、二地域からなる電力系統の負荷周波数制御を対象に、むだ時間を考慮した分散制御系の構成を考える。

#### 6.3.1 電力系統のモデル

ここで対象とする二地域からなる電力系統のモデルは、Fosha-Elgerd<sup>4)</sup>らによって研究されたものを基礎としている。図 6.4 がそのブロック線図である。

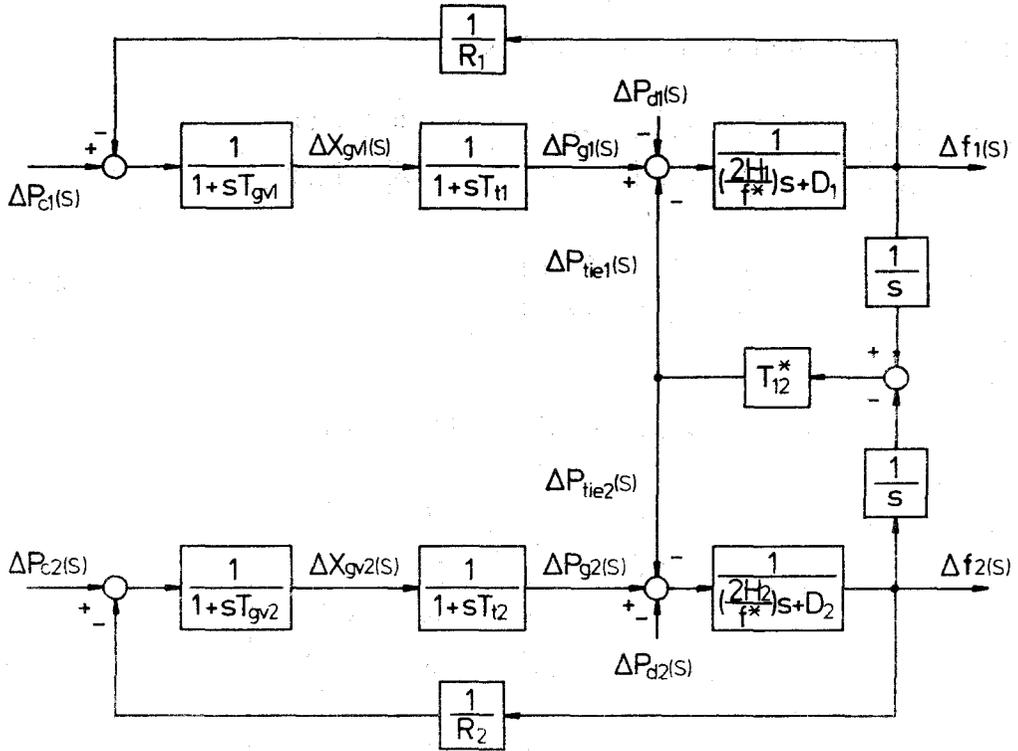


図 6.4 二地域電力系統のブロック線図

図中の変数ならびに定数は次のとおりである。

- $H_1$  : 単位慣性定数 [MW・sec/MW]
- $D_1$  : 制動係数 [MW/Hz]
- $T_{t1}$  : タービン時定数 [sec]
- $T_{gv1}$  : ガバナー時定数 [sec]
- $R_1$  : 調定率 [Hz/MW]
- $T_{12}^*$  : 地域 1 と地域 2 の同期化係数 [MW/Hz]
- $\Delta f_1$  : 基準値  $f^*$  からの周波数偏差 [Hz]
- $\Delta P_{g1}$  : タービン出力偏差 [pu MW]
- $\Delta X_{gv1}$  : ガバナーバルブ開度の偏差 [pu MW]
- $\Delta P_{c1}$  : スピードチェンジャー操作量 [pu MW]
- $\Delta P_{d1}$  : 負荷外乱の大きさ [pu MW]

そして、この電力系統は、次の状態方程式で表現される。

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \dot{\delta}_1 \\ \dot{\delta}_2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} A_{11}^O & A_{12}^O \\ A_{21}^O & A_{22}^O \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_1^O & 0 \\ 0 & b_2^O \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta P_{c1} \\ \Delta P_{c2} \end{bmatrix} \\ &+ \begin{bmatrix} d_1^O & 0 \\ 0 & d_2^O \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta P_{d1} \\ \Delta P_{d2} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (6.11)$$

$$\delta_i = \left[ \int \Delta f_i dt \quad \Delta f_i \quad \Delta P_{g1} \quad \Delta X_{gvi} \right]^T$$

$$A_{i1}^O = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{f^* T_{12}^*}{2H_1} & -\frac{f^* D_i}{2H_1} & \frac{f^*}{2H_1} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{T_{vi}} & \frac{1}{T_{vi}} \\ 0 & -\frac{1}{T_{gvi} R_i} & 0 & -\frac{1}{T_{gvi}} \end{bmatrix}$$

$$A_{ij}^O = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{f^* T_{12}^*}{2H_1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (i \neq j)$$

$$b_i^O = \left[ 0 \quad 0 \quad 0 \quad \frac{1}{T_{gvi}} \right]^T$$

$$d_i^O = \left[ 0 \quad -\frac{f^*}{2H_1} \quad 0 \quad 0 \right]^T \quad (i, j = 1, 2)$$

### 6.3.2 分散制御系の構成

#### (1) むだ時間のない場合

最初、むだ時間がないものとして、(6.11)を対象に分散最適レギュレータを利用して制御系を構成する。この場合、制御対象にはステップ状外乱によるオフセットに対処すべく積分器が備えられているので、安定性の改善のみを考えて設計すればよいのである。したがって、以下では外乱の項を無視して設計を行なうことにする。

まず，サブシステムを可制御標準形に直すために，変数変換

$$\begin{aligned}
 \begin{pmatrix} x_{11} \\ x_{12} \\ x_{13} \\ x_{14} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \frac{1}{2H_1 T_{t1} T_{gv1}} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{f^*}{2H_1 T_{t1} T_{gv1}} & 0 & 0 \\ \frac{f^* T_{12}^*}{2H_1 T_{t1} T_{gv1}} & \frac{f^* D_1}{2H_1 T_{t1} T_{gv1}} & \frac{1}{T_{t1} T_{gv1}} & 0 \\ \frac{f^* T_{12}^*}{2H_1 T_{t1} T_{gv1}} & \frac{f^*(T_{12}^* T_{t1} + D_1)}{2H_1 T_{t1} T_{gv1}} & \frac{f^* D_1 T_{t1} + 2H_1}{2H_1 T_{t1} T_{gv1}} & \frac{1}{T_{gv1}} \end{pmatrix} \delta_1 \\
 (x_1) & \quad \quad \quad (T) \\
 & \quad \quad \quad (i = 1, 2) \quad \quad \quad (6.12)
 \end{aligned}$$

を施すと，次式を得る。

$$\begin{aligned}
 \begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} &= \left( \begin{pmatrix} A_{11} & 0 \\ 0 & A_{22} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & A_{12} \\ A_{21} & 0 \end{pmatrix} \right) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 & 0 \\ 0 & b_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta P_{c1} \\ \Delta P_{c2} \end{pmatrix} \\
 & \quad \quad \quad (A_0) \quad \quad \quad (A_c) \quad \quad \quad (B) \\
 & \quad (6.13)
 \end{aligned}$$

$$A_{11} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ a_4^1 & a_3^1 & a_2^1 & a_1^1 \end{pmatrix}$$

$$a_4^1 = -\frac{f^* T_{12}^*}{2H_1 T_{t1} T_{gv1}}$$

$$a_3^1 = -\frac{f^* [T_{12} (T_{t1} + T_{gv1}) + D_1 + 1/R_1]}{2H_1 T_{t1} T_{gv1}}$$

$$a_2^1 = -\frac{f^* [T_{12} T_{t1} T_{gv1} + D_1 (T_{t1} + T_{gv1})] + 2H_1}{2H_1 T_{t1} T_{gv1}}$$

$$a_1^1 = -\frac{f^* D_1 T_{t1} T_{gv1} + 2H_1 T_{t1} + 2H_1 T_{gv1}}{2H_1 T_{t1} T_{gv1}}$$

$$A_{ij} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ a_{21}^{ij} & 0 & 0 & 0 \\ a_{31}^{ij} & 0 & 0 & 0 \\ a_{41}^{ij} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (i \neq j)$$

$$a_{21}^{ij} = \frac{f^* T_{12}^*}{2H_1}$$

$$a_{31}^{ij} = -\frac{(f^*)^2 T_{12}^* D_i}{(2H_1)^2}$$

$$a_{41}^{ij} = -\frac{2H_1 (f^* T_{12}^*)^2 - f^* T_{12}^* (f^* D_i)^2}{(2H_1)^3}$$

$$b_i = [0 \quad 0 \quad 0 \quad 1]^T \quad (i, j = 1, 2)$$

(6.13) はさらに、次の形に変形できる。

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} &= \left( \begin{bmatrix} \hat{A}_{11} & 0 \\ 0 & \hat{A}_{22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & \hat{A}_{12} \\ \hat{A}_{21} & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_1 & 0 \\ 0 & b_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{f}_{11}^T & \hat{f}_{12}^T \\ \hat{f}_{21}^T & \hat{f}_{22}^T \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \\ &\quad (\hat{A}_D) \quad (\hat{A}_C) \quad (\hat{F}^T) \\ &+ \begin{bmatrix} b_1 & 0 \\ 0 & b_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta P_{c1} \\ \Delta P_{c2} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (6.14)$$

$$\hat{A}_{11} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\hat{A}_{ij} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ a_{21}^{ij} & 0 & 0 & 0 \\ a_{31}^{ij} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (i \neq j)$$

$$\hat{f}_{ii}^T = [a_4^i \quad a_3^i \quad a_2^i \quad a_1^i]$$

$$\hat{f}_{ij}^T = [ a_{41}^{ij} \quad 0 \quad 0 \quad 0 ] \quad (i \neq j)$$

$$(i, j = 1, 2)$$

ここで、この  $\hat{A}_0$  に対して定理 2.1 を適用すると、 $\nu_1 = \nu_2 = 1$ 、 $\theta_1 = \theta_2 = 0$  と選べば条件を満たすことがわかる。いま、 $\hat{Q} = \text{block diag.} [\hat{Q}_1 \quad \hat{Q}_2]$ 、 $\hat{R} = \text{diag.} [\hat{r}_1 \quad \hat{r}_2]$  として、

$$\hat{Q}_1 = \hat{Q}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \hat{r}_1 = \hat{r}_2 = 1$$

と選ぶと、Riccati 方程式 (2.33) の解  $\hat{P} = \text{block diag.} [\hat{P}_1 \quad \hat{P}_2]$  は、

$$\hat{P}_1 = \hat{P}_2 = \begin{bmatrix} \sqrt{2m} & m & \sqrt{2m} & 1 \\ m & \sqrt{2m}(m-1) & 2m-1 & \sqrt{2m} \\ \sqrt{2m} & 2m-1 & \sqrt{2m}(m-1) & m \\ 1 & \sqrt{2m} & m & \sqrt{2m} \end{bmatrix}$$

$$\text{ただし、} m = 2 + \sqrt{2}$$

となる。したがって、地域 1、地域 2 の制御入力は (2.51) よりそれぞれ、

$$\begin{aligned} \Delta P_{e_i} &= -\beta [ r^4 \quad \sqrt{2(2+\sqrt{2})} r^3 \quad (2+\sqrt{2}) r^2 \\ &\quad \sqrt{2(2+\sqrt{2})} r ] x_i \\ &= -\beta [ r^4 \quad \sqrt{2(2+\sqrt{2})} r^3 \quad (2+\sqrt{2}) r^2 \\ &\quad \sqrt{2(2+\sqrt{2})} r ] T^{-1} \delta_i \end{aligned}$$

$$(i = 1, 2) \quad (6.15)$$

なる分散状態フィードバックで与えられる。 $\beta$ 、 $r$  は調整パラメータである。

## (2) むだ時間のある場合

ここでは、地域 1 と地域 2 の間の信号伝送に時間おくれ  $h$  があるものとして

分散制御系を構成する。このとき、制御対象の状態方程式は、(6.11)の表記を利用すると、次のようになる。

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \dot{\delta}_1 \\ \dot{\delta}_2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} A_{11}^O & 0 \\ 0 & A_{22}^O \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & A_{12}^O \\ A_{21}^O & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta_1(t-h) \\ \delta_2(t-h) \end{bmatrix} \\ &+ \begin{bmatrix} b_1^O & 0 \\ 0 & b_2^O \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta P_{c1} \\ \Delta P_{c2} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} d_1^O & 0 \\ 0 & d_2^O \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta P_{a1} \\ \Delta P_{a2} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (6.16)$$

これを(6.12)を用いて変数変換し、外乱の項を無視すると、(6.13)に対応した形の次式を得る。

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} A_{11} & 0 \\ 0 & A_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & A_{12} \\ A_{21} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t-h) \\ x_2(t-h) \end{bmatrix} \\ &+ \begin{bmatrix} b_1 & 0 \\ 0 & b_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta P_{c1} \\ \Delta P_{c2} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (6.17)$$

このシステムが分散型の内部変数フィードバックで漸近安定化可能であることは、定理4.2の条件が $\nu_1 = \nu_2 = 1$ ,  $\theta_1 = \theta_2 = 0$ に対して成立することより確かめられる。そこで、(4.19)に相当する分散制御則として、

$$\begin{aligned} \Delta P_{c1} &= -[a_4^i + r^4 \quad a_3^i + \sqrt{2(2+\sqrt{2})}r^3 \quad a_2^i + (2+\sqrt{2})r^2 \\ &\quad a_1^i + \sqrt{2(2+\sqrt{2})}r] x_1 \\ &= -[a_4^i + r^4 \quad a_3^i + \sqrt{2(2+\sqrt{2})}r^3 \quad a_2^i + (2+\sqrt{2})r^2 \\ &\quad a_1^i + \sqrt{2(2+\sqrt{2})}r] T^{-1} \delta_1 \end{aligned} \quad (i=1, 2) \quad (6.18)$$

を考える。この制御則が第4章で述べた分散制御則の与え方に則ったものであることは明らかであろう。

### 6.3.3 シミュレーション結果

シミュレーションには、Fosha-Elgerd<sup>4)</sup>や白井一庫本<sup>5)</sup>が採用している諸元

を用いた。すなわち、

$$f^* = 60$$

$$H_1 = H_2 = 5, \quad D_1 = D_2 = 8.33 \times 10^{-3}$$

$$T_{t1} = T_{t2} = 0.3, \quad T_{gv1} = T_{gv2} = 0.08$$

$$R_1 = R_2 = 2.4, \quad T_{12}^* = 0.545$$

である。このとき、むだ時間のない場合の制御対象の極は、

$$\{-13.3, -13.3, -1.62, -1.30 \pm 2.51i, -0.497 \pm 3.52i, 0\}$$

で、漸近安定ではないことがわかる。

(1) むだ時間のない場合

制御則 (6.18) における設計パラメータを  $\gamma = 1.2$  と選んだとき、閉ループシステムの極は、

$$\{-23.9, -23.9, -1.69 \pm 2.78i, -2.75, -1.05, -0.847 \pm 3.89i\}$$

となる。そして、初期状態として  $\delta_1 = \delta_2 = 0$ 、負荷外乱として  $\Delta P_{a1} = 0.01$ 、 $\Delta P_{a2} = 0$  なるステップ関数を考えたときの零入力応答を計算機シミュレーションすると、図 6.5 のようになった。

ところで、白井らは  $\checkmark$  Siljak-Sundareshan<sup>7)</sup> が与えた階層型の制御法を利用した負荷周波数制御を提案している<sup>5)6)</sup>。それによれば、制御則は局所制御とグローバル制御とから構成され、局所制御はサブシステムの最適制御として与えられ、グローバル制御は相互干渉の影響を小さくするように選ばれる。図 6.6(a) は、サブシステム  $i$ 、すなわち、

$$\dot{\delta}_i = A_{i1}^0 \delta_i + b_i^0 \Delta P_{ci}$$

に対して、評価関数を、

$$J_i = \int_0^{\infty} [(\mathbf{T}^{-1} \delta_i)^T \mathbf{Q} (\mathbf{T}^{-1} \delta_i) + (\Delta P_{o,i})^2] dt \quad (i = 1, 2)$$

$$\mathbf{Q} = \text{diag.} [1 \quad 0 \quad 0 \quad 0]$$

と選んで得られた階層型制御を施したときの零入力応答である。また、図 6. 6(b) は、システム (6. 11) に対して、評価関数を、

$$J = J_1 + J_2$$

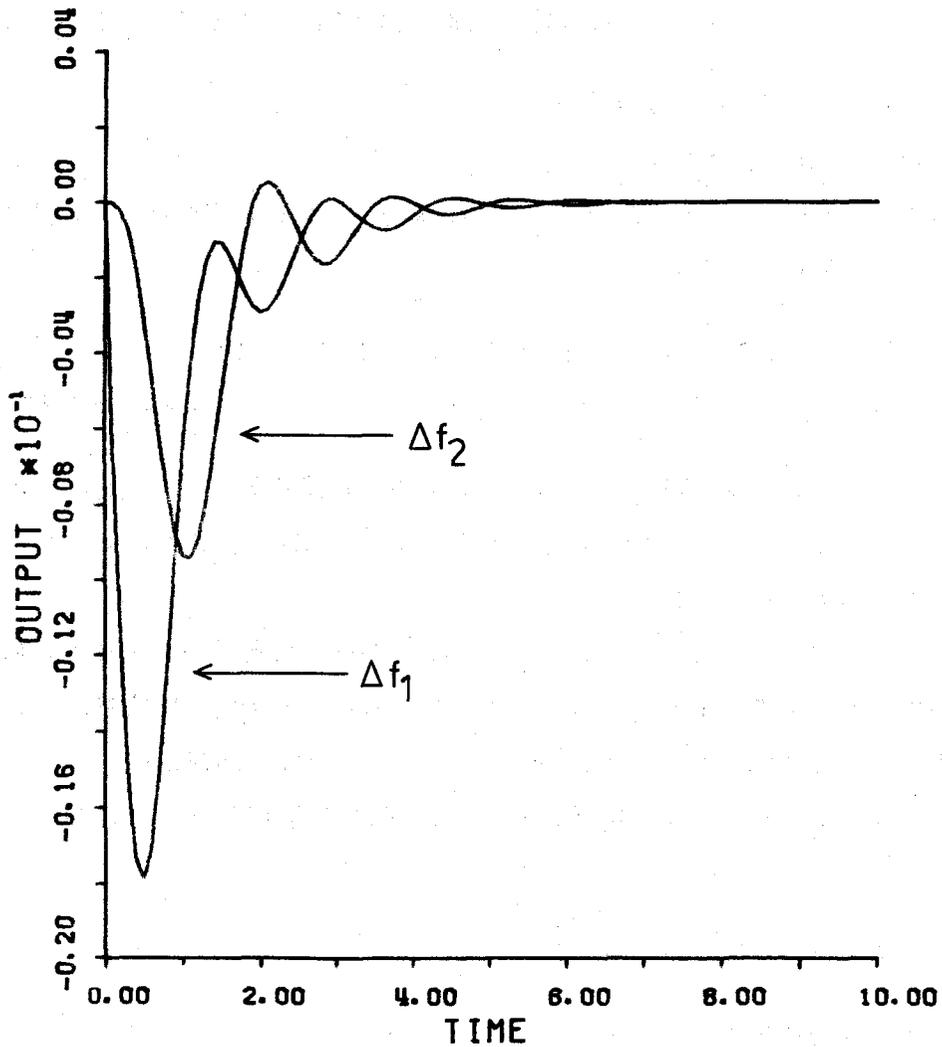
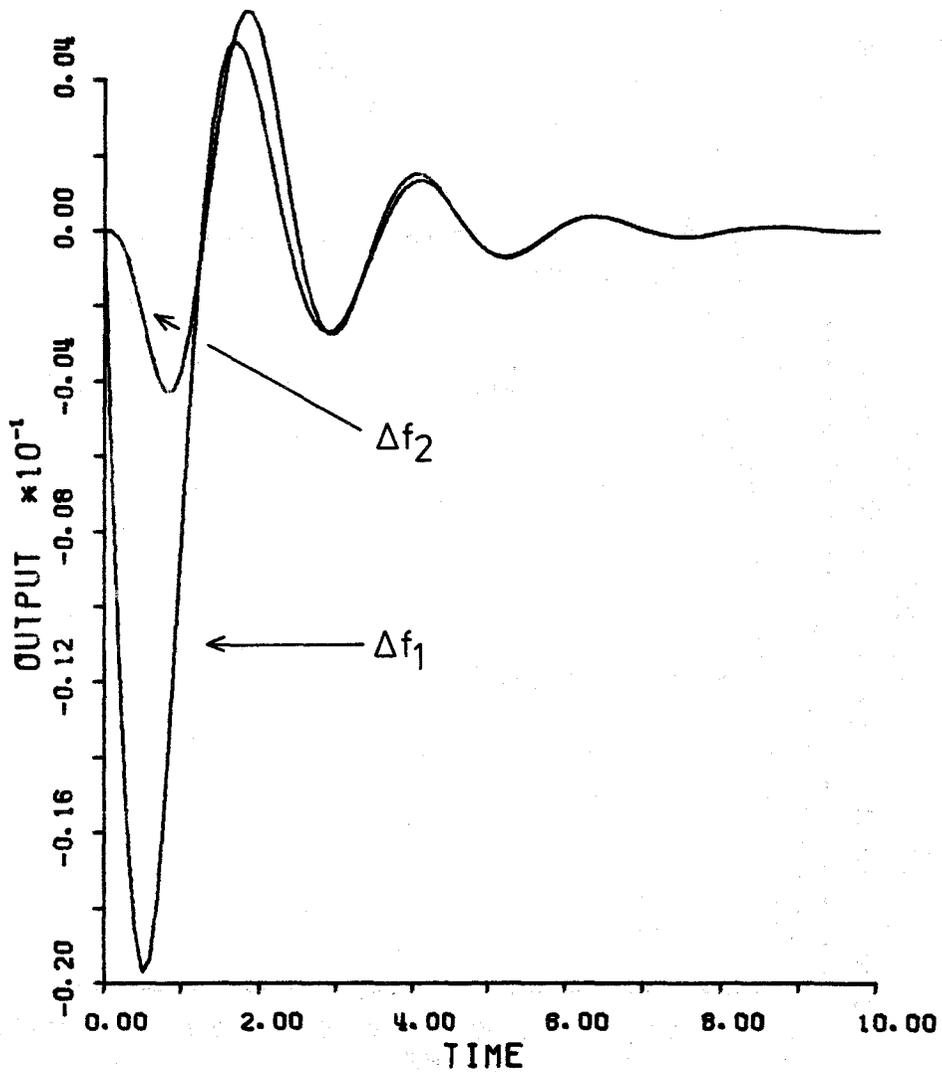


図 6. 5 電力系統の分散型負荷周波数制御

と選んで得られた集中型制御を施したときの零入力応答である。これらの評価関数における重みは、階層型については白井ら<sup>5)6)</sup>のものと同じに、集中型については Fosha-Elgerd<sup>4)</sup>のものとほぼ同じにしてある。

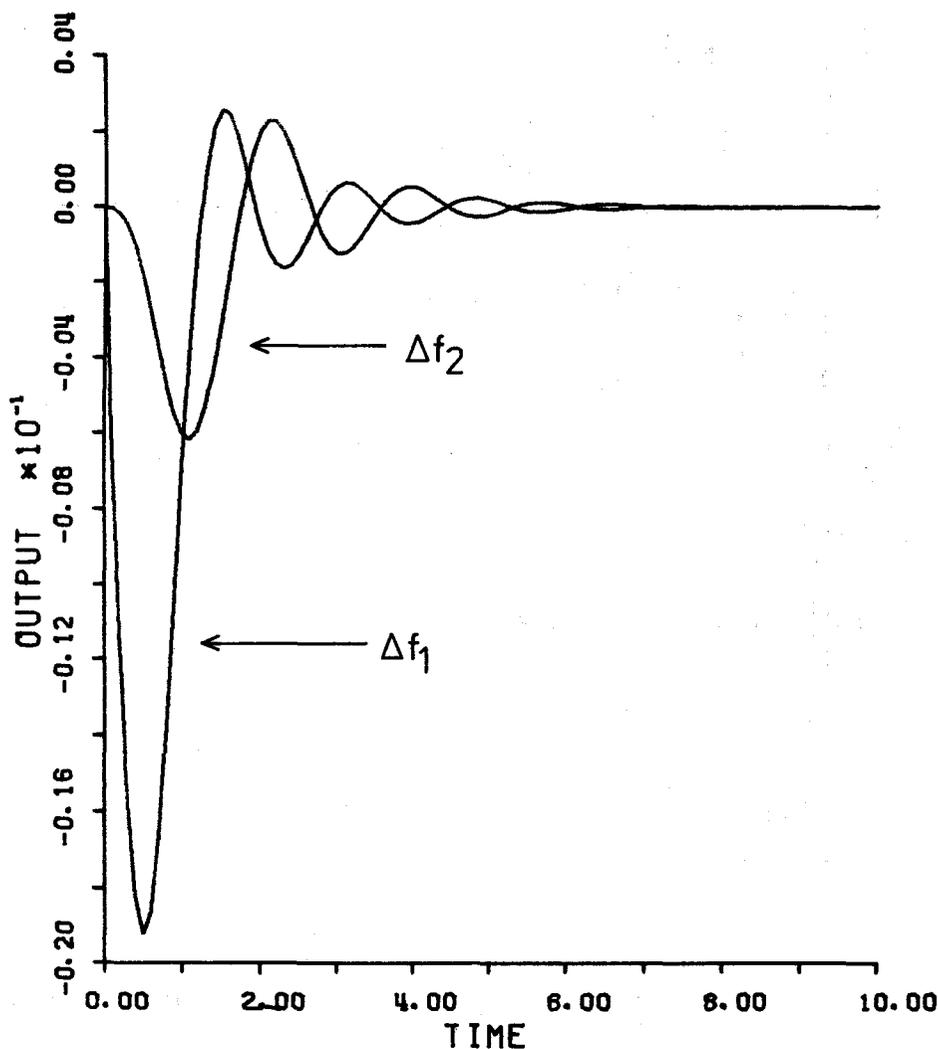
さて、これらの応答を比較すると、地域1に生じた負荷外乱の地域2への影響は、階層型が最も小さく、分散型が大きくなっている。そのかわり、地域1での



(a) 階層型制御の場合

図 6. 6 電力系統の負荷周波数制御

周波数変動は逆に分散型が最も小さくなっており、これらの結果を見る限りでは、分散型によっても満足のゆく負荷周波数制御が実現できるといえよう。もちろん、それぞれの応答は評価関数の選び方に依存し、よりよい応答となるよう重みを調整すれば異なった結果となる。少なくとも集中型でなら分散型で可能な制御は必ず実現できるのであるから、ここで示した応答を比較しただけで、分散制御の良



(b) 集中型制御の場合

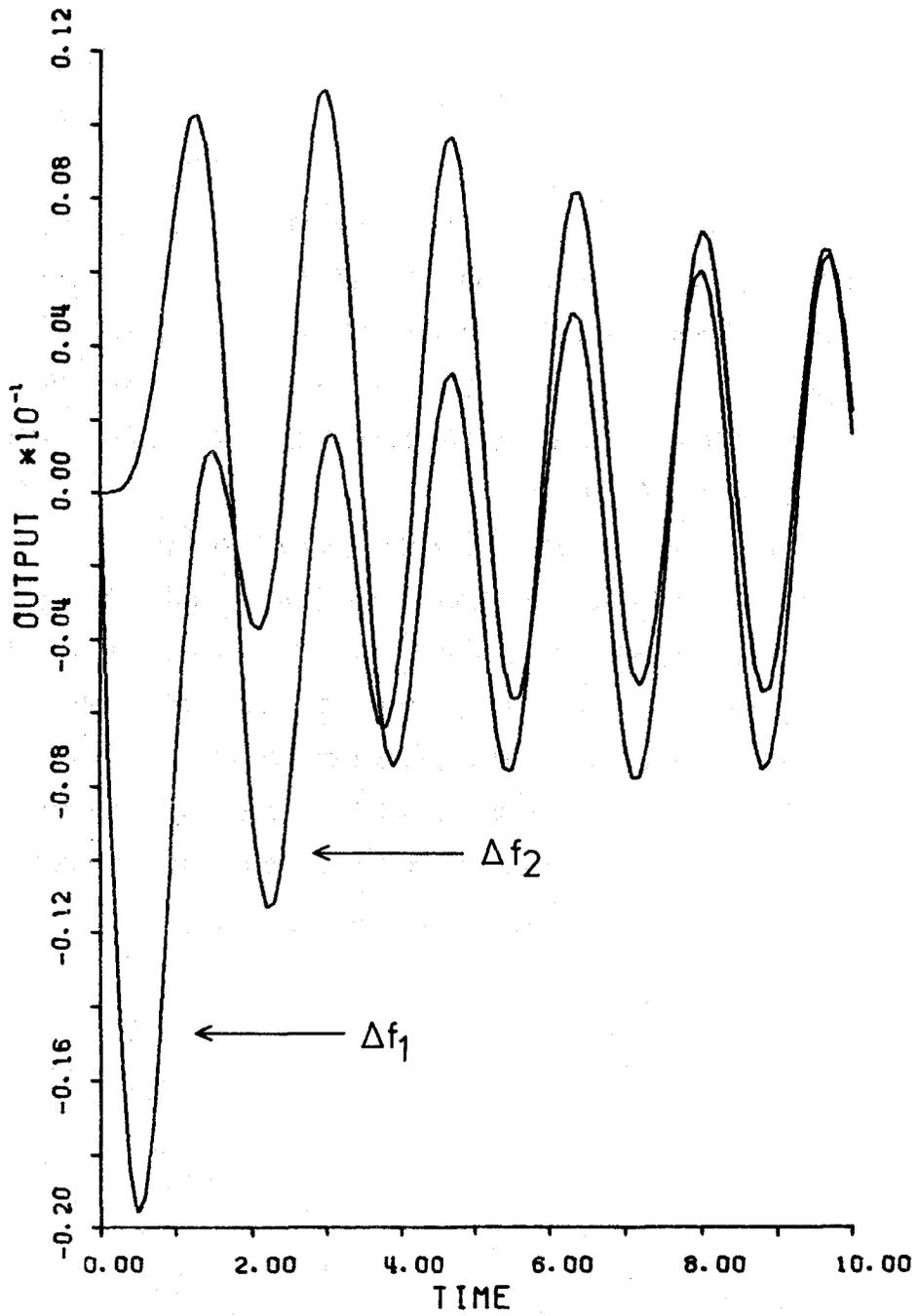
図 6.6 電力系統の負荷周波数制御

否を判断できるものではない。しかしながら、集中型では序論で挙げたような難点があり、階層型では連系線のパラメータ変動に過敏であるのに対し、分散型では十分なロバスト安定性が保証されている点を考慮に加えると、分散型が優位にあると言えよう。

## (2) むだ時間のある場合

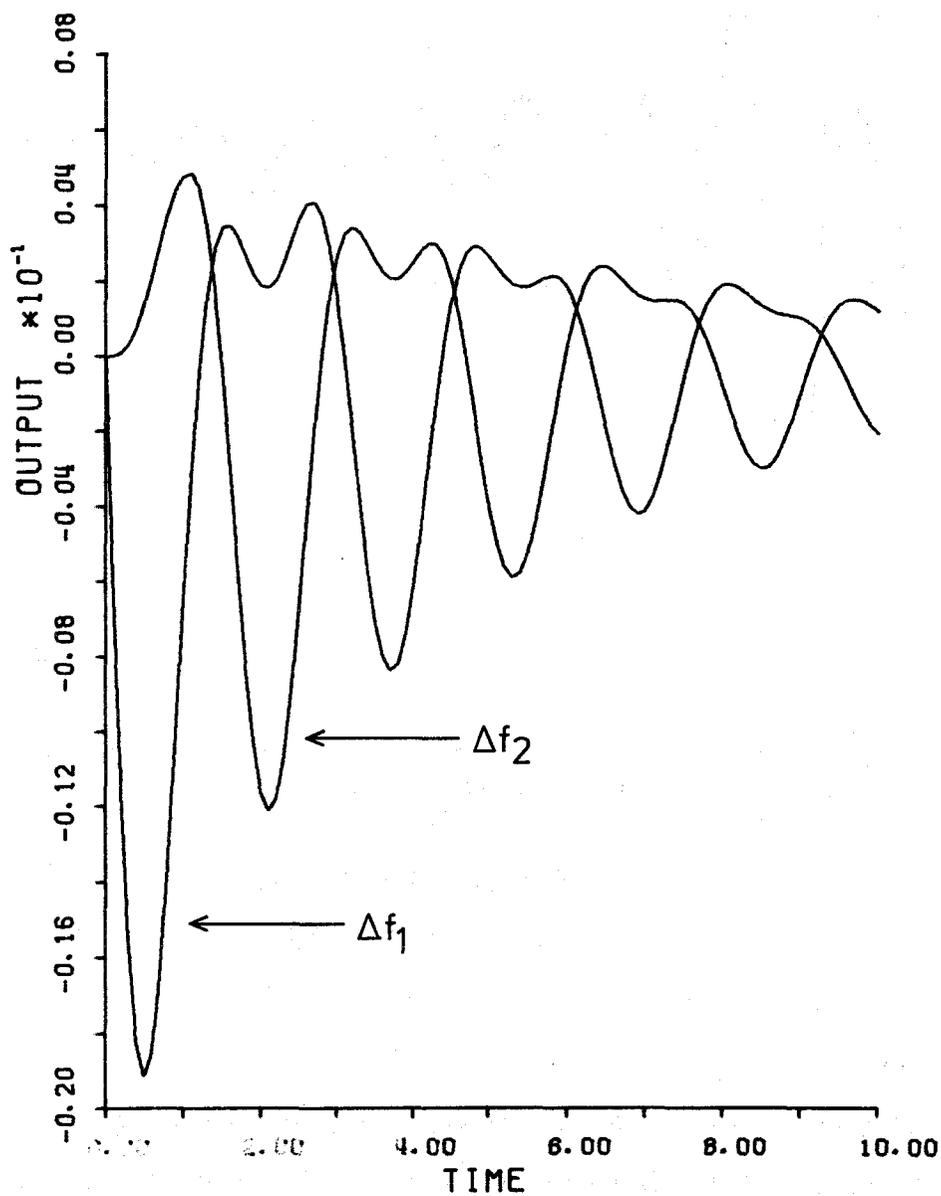
構成された分散制御系についてみる前に、むだ時間がないものとして設計された制御系がむだ時間の介在によってどのくらい影響を受けるかをみるために、(1)で設計された階層型と集中型の制御系の連系部分にむだ時間があるものとしてシミュレーションした。  $h = 1$  [sec] としたときのふるまいは、図 6.7(a), (b) のようになり、むだ時間によって安定性が損なわれることがわかる。とくに階層型では、安定限界近くまで劣化している。

さて、むだ時間を考慮して構成された制御則 (6.18) の設計パラメータを  $r = 1.2$  として、先程と同様、むだ時間  $h = 1$  [sec]、初期関数  $\delta(t) = 0$  ( $-h \leq t < 0$ )、負荷外乱  $\Delta P_{d1}(t) = 0.01$  ( $t \geq 0$ )、 $\Delta P_{d2} = 0$  のときのふるまいをシミュレーションすると、図 6.8 のようになった。むだ時間のない場合の図 6.5 と比べると、安定性、速応性ともに多小悪くなっているが、応答としては満足のゆくものであると考えられる。このように、大規模システムではしばしばむだ時間の効果を配慮に入れた設計が必要であり、そのために第 4 章で述べた分散安定化は有効な方法となろう。



(a) 階層型の場合

図 6.7 むだ時間があるときの応答



(b) 集中型制御の場合

図 6.7 むだ時間があるときの応答

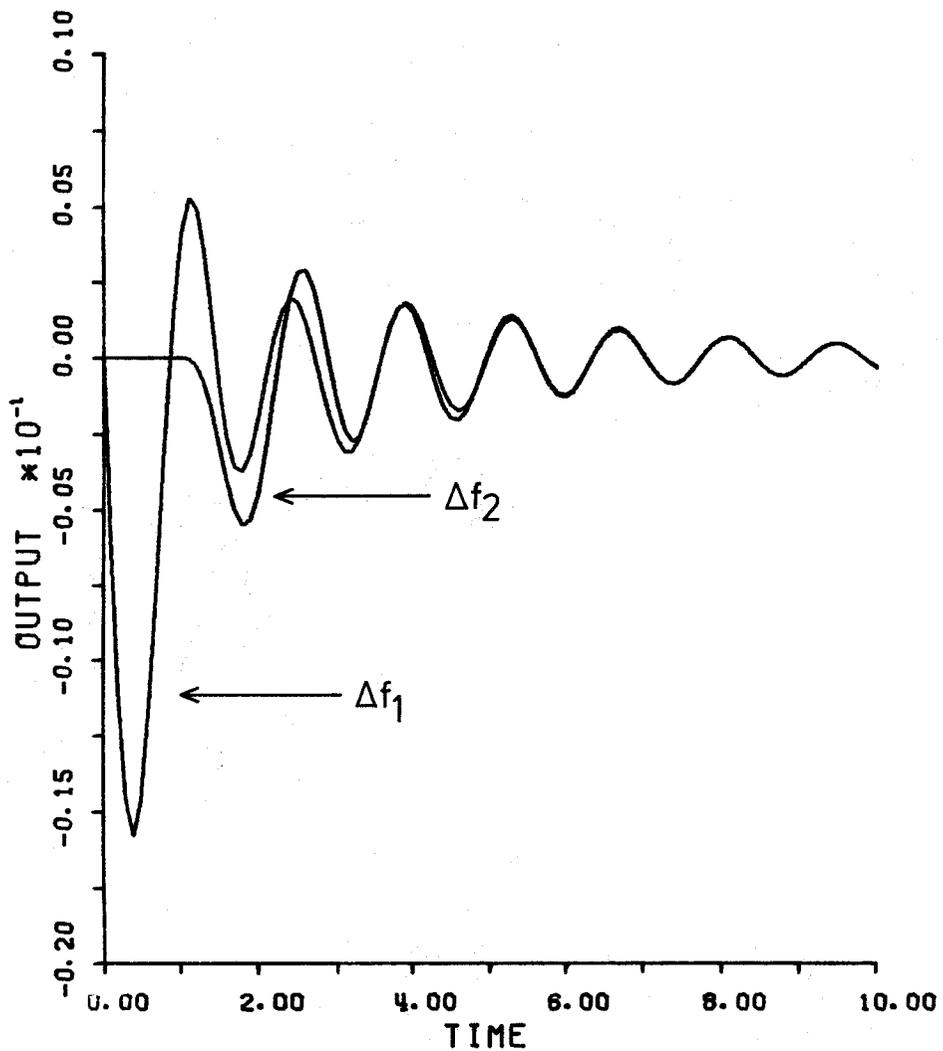


図 6.8 むだ時間のある電力系統の  
分散型負荷周波数制御

#### 6.4 結 言

この章では、本研究で開発した分散制御法が理論的に興味深いものであるだけでなく、工学的にも有意義なものであることを、分散型の制御が要望されている実システムに適用し、その結果を計算機シミュレーションすることによって確かめた。

まず，ロバスト安定性が鍵となる磁気浮上車両の案内制御に対し，分散最適レギュレータを利用して制御系を設計し，零入力応答をシミュレーションした。そして，乗客数に変動した場合にでも，安定性が損なわれただけでなく，そのふるまいがほとんど変化しないことが確かめられ，分散最適レギュレータがロバスト安定な分散制御系の構成に有力であることがわかった。ここで対象とした磁気浮上車両そのものは実在しないし，また用いた数式モデルも単純化されたものであるが，構造や特性それに数値などは現段階で得られているデータから十分に想定し得るものであり，将来，実車あるいは実験車両に分散制御を施す上で，これらの結果は役に立つ資料となろう。

もう一つの例として取り上げた二地域からなる電力系統の負荷周波数制御に対しては，とくにむだ時間の影響を考慮して分散制御系を設計した。最初，むだ時間を含まないものとして分散制御系を構成し，これまでに試みられた集中型や階層型の制御法に比べて遜色のない制御が実現できることをシミュレーションによって確かめた。そして，むだ時間の存在を想定して設計した場合も，これらの制御に見劣りしないものであることを，やはりシミュレーションを行なって示した。電力系統のような地理的に広がりをもつ大規模システムでは，むだ時間の介在を避けることができず，このように分散型でも制御ができるという（原理的な）目度があったことは，今後，負荷周波数制御を考えていく上での重要な示唆となろう。

以上のように，実システムに応用することによって，本研究で与えた分散制御法が，工学的にも実利のあることを示した。もちろん，実際の制御系では多くの設計上の制約があり，これらの方法をそのまま適用できるとは限らないが，その場合でも設計の際の基本方策となるであろう。

## 第 7 章 結 論

いくつかのサブシステムが互いに絡みあって構成されている大規模システムに対しては、序論でも述べたように、分散型の制御方式が極めて有効な場合が少なくない。しかしながら、制御系の構造に制約があり、集中型でなら可能な制御であっても分散型では実現できないことがある。このため、分散型の制御方式で、どのような制御がどの程度まで実現できるのかを明らかにしておくことは、大規模システムに対する制御系の設計技術を形成していく上で、基本でありまた重要なことである。本研究では、この点を明らかにすることを目的として、線形制御系の設計において基礎だとされているいくつかの制御を分散型の制御方式で実現する問題を考察し、そのような制御が実現できるための条件と、分散制御系の構成法を示した。また、これらの構成法が実用上も有効なものであることを確かめるために、二つの実システムモデルに対して適用し、計算機シミュレーションを行なった。具体的には、以下のような考察を行ない、結果を得た。

まず第 2 章では、大規模システムに対する最適レギュレータを、サブシステムごとの状態フィードバックによって構成する問題を考察し、構成できるための条件と構成法を示した。この分散制御法によれば、サブシステム間の結合における変動のみならず、サブシステム自体に生じるパラメータ変動に対しても極めてロバスト安定な制御系が構成でき、信頼性や安全性がとくに要求される大規模システムの制御法として非常に優れたものであるといえる。また、ここで与えられた分散最適化可能条件は、サブシステム間の結合の構造に着目した分散安定化可能条件として、これまでに得られているどの条件よりも緩く、必要十分条件にかなり近いものだと考えられる。安定化がフィードバック制御の要であることを考えると、この条件は、大規模システムの分散制御の可能性を見きわめる一つの目安となる。

第 3 章では、レギュレーションに加えて、制御量が目標信号に定常偏差なく追従するという特性をも備えた制御系を分散型で実現することを考え、そのようなサーボ機構が構成できるための条件と構成法を与えた。この構成法によって得ら

れるサーボシステムは、分散最適レギュレータの場合と同様のロバスト安定性を有し、また追従性に関してもロバストである。こうしたロバスト性をもつサーボ機構の構成法は、これまでには知られていなかったものである。

第4章では、むだ時間をもつ大規模システムについて、分散フィードバックによる安定化問題を考察し、サブシステムごとに施した内部変数フィードバックによって全体システムを安定化できるための条件を導き、安定化法を与えた。この安定化法では、フィードバックとしてその時刻における内部変数の値のみを用いており、実施が容易であるばかりでなく、むだ時間の正確な値がわからなくても適用できるといった実用上の利点をもっている。

第5章では、システムのパラメータが時変である場合について検討した。まず、むだ時間を含まない大規模システムに対し、最適レギュレータを構成する問題と、フィードバックシステムの零入力応答が指定された上界と下界をもつように安定化する問題を考察した。そして、それぞれについて、分散型の制御で実現できるための条件と構成法を導いた。つぎに、むだ時間を含む大規模システムに対し、サブシステムごとの内部変数フィードバックによって全体システムを安定化する問題を考え、任意の安定度で安定化できるための条件と安定化法とを示した。以上の結果、システムのパラメータが時間的に変動する場合でも、分散制御によってロバスト安定な制御系の構成が可能であること、時間不変な場合と同様な制御がかなりまで実現できることがわかった。

第6章では、これまでの章で開発した分散制御系の構成法の実効性を確かめるために、分散制御が望まれている二つの実システムを取り上げて、これらの構成法を適用し、分散制御系の設計を試みた。まず、磁気浮上台車の案内制御に対して、乗客数に変動があっても安定性への影響が小さい制御系を実現するために、分散最適レギュレータの構成法を適用して設計を行なった。つぎに、二地域からなる電力システムの負荷周波数制御を取り上げ、地理的な広がりのために生ずるむだ時間を考慮した安定化制御則を、第4章で得た構成法に従って設計を行なった。そして、計算機シミュレーションした結果、設計された制御系が要求を満足するものとなっていることが確かめられた。

さて、以上の考察を総括して言えることは、集中型で実現できる制御ならば、適当な条件の下で、定性的に同等な制御が分散型でも実現可能であること、そして、実現できるための条件には、個々のサブシステムの特性に加えて、サブシステム間の結合の構造が本質的に関与しているということである。このような知見は、大規模システムに対する分散制御系の設計理論を構築していく上での見通しを与えるものであり、一方、各章で示した各種の分散制御系の構成法は、このための基礎技法となり得るばかりでなく、実際的にも有効な手法である。このように、大規模ダイナミカルシステムの分散制御の可能性を明らかにし、工学的にも優れた新しい分散制御系の構成法を与えた本研究の意義は大きいと言える。

## 謝

## 辞

本研究の全過程を通じて、直接、理解あるご指導、ご鞭撻を賜った神戸大学工学部 平井一正教授に心から感謝の意を表す。また、終始、懇切なご指導、ご助言を戴いた神戸大学工学部 池田雅夫助教授に深く感謝する。

本論文をまとめるにあたってご指導、ご教示を賜った大阪大学工学部 児玉慎三教授をはじめ、同工学部 藤井克彦教授、鈴木 胖教授、寺田浩詔教授、増淵正美教授に厚く御礼申し上げます。

筆者が、神戸大学大学院工学研究科在学の折より今日にいたるまで、つねに暖かいご指導ならびに激励を頂戴している神戸大学 米持政忠名誉教授、神戸大学工学部 黒田一之教授、北村新三助教授に心より御礼申し上げます。また、日頃神戸大学工学部でご指導いただいている 前川禎男教授、瀬口靖幸教授、藤井進教授、金田悠紀夫助教授に感謝する。

本研究を行なうにあたって有益なご助言、ご協力をいただいた Prof. D. D. Šiljak (University of Santa Clara, U.S.A.), Prof. M. E. Sezer (University of Petroleum and Minerals, Saudi Arabia), 日方俊幸氏 (三菱電機株式会社), 前川正弘氏 (三洋電機株式会社), 野村育世氏 (新日本製鐵株式会社), そして第6章での計算機シミュレーションに協力していただいた 藤井 渉氏 (神戸大学大学院工学研究科) に御礼申し上げます。また、種々の面でご援助をいただいた神戸大学工学部 システム工学教室、計測工学教室の諸氏に御礼申し上げます。

なお、本研究に関連して、サンタクララ大学で研修する機会を得た。この間、研究の面についてはもとより、その他の面についても得るところが多く、このような貴重な機会を与えていただいた Prof. D. D. Šiljak, 平井一正教授、池田雅夫助教授に、あらためて御礼申し上げます。

## 参 考 文 献

### 第 1 章

- 1) N. R. Sandel, Jr., P. Varaiya, M. Athans, and M. G. Safonov : Survey of Decentralized Control Methods for Large Scale Systems, IEEE Trans. Automatic Control, vol. AC-23, no. 2, pp. 108-128 (1978)
- 2) C. E. Fosha, Jr. and O. I. Elgerd : The Megawatt-Frequency Control Problem : A New Approach Via Optimal Control Theory, IEEE Trans. Power Apparatus and Systems, vol. PAS-89, no. 4, pp. 563-571 (1970)
- 3) 白井, 庫本 : 系統分割による分散型の負荷周波数制御, 電気学会情報処理研究会資料, IP-79-10 (昭 54)
- 4) D. D. Šiljak : Large-Scale Dynamic Systems : Stability and Structure, North-Holland (1978)
- 5) M. G. Singh : Decentralised Control, North-Holland (1981)
- 6) S.-H. Wang : An Example in Decentralized Control Systems, IEEE Trans. Automatic Control, vol. AC-23, no. 5, p. 938 (1978)
- 7) S.-H. Wang and E. J. Davison : On the Stabilization of Decentralized Control Systems, IEEE Trans. Automatic Control, vol. AC-18, no. 5, pp. 473-478 (1973)
- 8) D. D. Šiljak and M. B. Vukčević : Decentrally Stabilizable Linear and Bilinear Large-Scale Systems, Int. J. Control, vol. 26, no. 2, pp. 289-305 (1977)
- 9) M. G. Safonov : Stability and Robustness of Multivariable Feedback Systems, The MIT Press (1980)
- 10) E. J. Davison : The Robust Decentralized Control of a General Servomechanism Problem, IEEE Trans. Automatic Control, vol. AC-21, no. 1, pp. 14-24 (1976)
- 11) 池田, 太田 : むだ時間のある線形システムの安定化, 計測自動制御学会論

文集, 第 12 卷, 第 6 号, pp. 637-641 (昭 51)

- 12) M. Ikeda and D. D. Šiljak: Decentralized Stabilization of Large Scale Systems with Delay, Large Scale Systems, vol. 1, no. 4, pp. 273-279 (1980)
- 13) 前田, 長田, 中堀 : 汚泥総量管理の下での新 MLSS 制御法, 第 23 回自動制御連合講演会前刷, pp. 379-380 (1980)
- 14) 川島, 井原, 竹中, 嶋田, 磯嶋 : 電磁ガイド制御について, 住友電気, 第 115 号, pp. 231-238 (1979)

## 第 2 章

- 1) Special Issue on Linear Multivariable Control Systems, IEEE Trans. Automatic Control, vol. AC-26, no. 1 (1981)
- 2) Proc. 8th IFAC Triennial World Congress, vol VIII および vol IX (1981)
- 3) E. Kreindler: Closed-Loop Sensitivity Reduction of Optimal Control Systems, IEEE Trans. Automatic Control, vol. AC-13, no. 3, pp. 254-262 (1968)
- 4) M. G. Safonov and M. Athans: Gain and Phase Margin for Multi-loop LQG Regulators, IEEE Trans. Automatic Control, vol. AC-22, no. 2, pp. 173-179 (1977)
- 5) D. D. Šiljak: Large-Scale Dynamic Systems: Stability and Structure, North-Holland (1978)
- 6) E. J. Davison: The Decentralized Stabilization and Control of a Class of Unknown Non-Linear Time-Varying Systems, Automatica, vol. 10, pp. 309-316 (1974)
- 7) 池田, 梅藤, 児玉 : 線形大規模システムの安定化, 電子通信学会論文誌 (D), vol. J59-D, no. 5, pp. 355-362 (昭 51)
- 8) D. D. Šiljak and M. K. Sundareshan: A Multilevel Optimization of Large-Scale Dynamic Systems, IEEE Trans. Automatic Control, vol.

- AC-21, no. 1, pp. 79-84 (1976)
- 9) D. D. Šiljak and M. B. Vukčević: Decentrally Stabilizable Linear and Bilinear Large-Scale Systems, *Int. J. Control*, vol. 26, no. 2, pp. 289-305 (1977)
  - 10) M. Ikeda and D. D. Šiljak: On Decentrally Stabilizable Large-Scale Systems, *Automatica*, vol. 16, pp. 331-334 (1980)
  - 11) M. E. Sezer and D. D. Šiljak: On Decentralized Stabilization and Structure of Linear Large Scale Systems, *Automatica*, vol. 17, no. 4, pp. 641-644 (1981)
  - 12) R. L. Kosut: Suboptimal Control of Linear Time-Invariant Systems Subject to Control Structure Constraints, *IEEE Trans. Automatic Control*, vol. AC-15, no. 5, pp. 557-563 (1970)
  - 13) Ü. Özgüner: Local Optimization in Large Scale Composite Dynamic Systems, *Proc. 9th Asilomar Conf. on Circuits and Systems*, pp. 87-91 (1975)
  - 14) M. K. Sundareshan: Generation of Multivariable Control and Estimation Scheme for Large-Scale Systems: A Perturbational Approach, *IEEE Trans. Systems, Man, and Cybernetics*, vol. SMC-7, no. 3, pp. 144-152 (1977)
  - 15) D. D. Šiljak: Reliable Control using Multiple Control Systems, *Int. J. Control*, vol. 31, no. 2, pp. 303-329 (1980)
  - 16) H. Kwakernaak and R. Sivan: *Linear Optimal Control Systems*, John-Wiley and Sons (1972)
  - 17) K. Yasuda, T. Hikata, and K. Hirai: On Decentrally Optimizable Interconnected Systems, *Proc. 19th IEEE Conf. on Decision and Control*, pp. 536-537 (1980)
  - 18) W. M. Wonham: On a Matrix Riccati Equation of Stochastic Control, *SIAM J. Control*, vol. 6, no. 4, pp. 681-697 (1968)

- 19) M. Ikeda, D. D. Šiljak, and K. Yasuda : Optimality of Decentralized Control for Large-Scale Systems, *Automatica*, vol. 19, no. 3, pp. 309-316 (1983)

### 第 3 章

- 1) W. M. Wonham : Tracking and Regulation in Linear Multivariable Systems, *SIAM J. Control*, vol. 11, no. 3, pp. 424-437 (1973)
- 2) B. Francis and W. M. Wonham : The Internal Model Principle of Control Theory, *Automatica*, vol. 12, pp. 457-465 (1976)
- 3) O. A. Sebakhy and W. M. Wonham : A Design Procedure for Multivariable Regulators, *Automatica*, vol. 12, pp. 467-478 (1976)
- 4) W. M. Wonham : Linear Multivariable Control : A Geometric Approach, Springer-Verlag (1979)
- 5) E. J. Davison : The Output Control of Linear Time-Invariant Multivariable Systems with Unmeasurable Arbitrary Disturbances, *IEEE Trans. Automatic Control*, vol. AC-17, no. 5, pp. 621-630 (1972)
- 6) E. J. Davison and A. Goldenberg : Robust Control of a General Servomechanism Problem : The Servo Compensator, *Automatica*, vol. 11, pp. 461-471 (1975)
- 7) E. J. Davison : A Generalization of the Output Control of Linear Time-Invariant Multivariable Systems with Unmeasurable Arbitrary Disturbances, *IEEE Trans. Automatic Control*, vol. AC-20, no. 6, pp. 788-792 (1975)
- 8) E. J. Davison : The Robust Control of a Servomechanism Problem for Linear Time-Invariant Multivariable Systems, *IEEE Trans. Automatic Control*, vol. AC-21, no. 1, pp. 25-34 (1976)
- 9) 古田, 原 : サーボ技術と現代制御論, 計測と制御, 第 19 卷, 第 10 号,

- pp. 33-41 (昭 55)
- 10) C. D. Johnson : Optimal Control of Linear Regulator with Constant Disturbance, IEEE Trans. Automatic Control, vol.AC-13, no.4, pp.416-421 (1968)
  - 11) B. Porter : Optimal Control of Multivariable Linear Systems Incorporating Integral Feedback, Electronic Lett., vol.7, no.8, pp.170-172 (1971)
  - 12) B. D. O. Anderson and J. B. Moore : Linear Optimal Control, Prentice-Hall (1971)
  - 13) M. Athans and P. L. Falb : Optimal Control : An Introduction to the Theory and its Applications, McGraw-Hill (1966)
  - 14) S. P. Bhattacharyya and J. B. Pearson : On the Linear Servomechanism Problem, Int. J. Control, vol.12, no.5, pp.759-806 (1970)
  - 15) 朴, 鈴木, 藤井 : 積分型コントローラをもつ多変数線形最適追従系の設計, 計測自動制御学会論文集, 第 10 巻, 第 1 号, pp.1-5 (昭 49)
  - 16) 武田, 北森 : 線形多入出力最適追従制御系の一設計法, 計測自動制御学会論文集, 第 14 巻, 第 4 号, pp.359-364 (昭 53)
  - 17) P. C. Young and J. C. Willems : An Approach to the Linear Multivariable Servomechanism Problem, Int. J. Control, vol.15, no.5, pp.961-979 (1972)
  - 18) コディントン, レヴィンソン (吉田節三・訳) : 常微分方程式論 (上), pp.109-113, 吉岡書店 (昭 43)
  - 19) 児玉, 須田 : システム制御のためのマトリクス理論, p.168, 計測自動制御学会 (昭 53)
  - 20) E. J. Davison : The Robust Decentralized Control of a General Servomechanism Problem, IEEE Trans. Automatic Control, vol. AC-21, no.1, pp.14-24 (1976)
  - 21) E. J. Davison : The Robust Decentralized Control of a Servomechan-

ism Problem for Composite Systems with Input-Output Interconnections, IEEE Trans. Automatic Control, vol. AC-24, no.2, pp.325-327 (1979)

#### 第 4 章

- 1) N. N. Krasovskii : On the Stabilization of Dynamic Systems by Supplementary Forces, Differential Equations, vol.1, no.1, pp.1-9 (1965)
- 2) Y. S. Osipov : Stabilization of Controlled Systems with Delays, Differential Equations, vol.1, no.5, pp.463-473 (1965)
- 3) A. Z. Manitius and A. W. Olbrot : Finite Spectrum Assignment Problem for Systems with Delay, IEEE Trans. Automatic Control, vol. AC-24, no.4, pp.541-553 (1979)
- 4) G. J. Nazarov : Stability and Stabilization of Linear Differential Delay Systems, IEEE Trans. Automatic Control, vol.AC-18, no.3, pp.317-318 (1973)
- 5) 前田, 山田 : むだ時間を含む線形システムの安定化, 計測自動制御学会論文集, 第 11 巻, 第 4 号, pp.444-450 (昭 50)
- 6) G. J. Nazarov and G. A. Hewer : Stabilization of Linear Autonomous Differential Delay Systems, IEEE Trans. Automatic Control, vol. AC-18, no.6, pp.673-674 (1973)
- 7) 池田, 太田 : むだ時間のある線形システムの安定化, 計測自動制御学会論文集, 第 12 巻, 第 6 号, pp.637-640 (昭 51)
- 8) 廖, 池田, 北村 : むだ時間のある線形システムの安定化 — 安定化可能条件の拡張 — , 計測自動制御学会論文集, 第 13 巻, 第 3 号, pp.221-226 (昭 52)
- 9) W. H. Kwon and A. E. Pearson : A Note on Feedback Stabilization of a Differential-Difference System, IEEE Trans. Automatic Control, vol. AC-22, no.3, pp.468-470 (1977)

- 10) 味口, 池田, 安田, 平井 : むだ時間のある線形システムの安定化とサーボ問題 — Retarded type の場合 — , 第 8 回計測自動制御学会制御理論シンポジウム資料, pp.305—310(昭 54)
- 11) R. Bellman and K. L. Cooke : Differential Difference Equations, Academic Press (1963)
- 12) R. D. Driver : Ordinary and Delay Differential Equations, Springer-Verlag (1977)
- 13) T. Yoshizawa : Stability Theory by Liapunov's Second Method, The Mathematical Society of Japan (1966)
- 14) 安田, 平井 : むだ時間のある線形大規模システムの安定化, 計測自動制御学会論文集, 第 17 巻, 第 8 号, pp.806—812(昭 56)
- 15) G. A. Hewer and G. J. Nazarov : Observer Theory for Delayed Differential Equations, Int. J. Control, vol.18, no.1, pp.1—7 (1973)
- 16) 池田, 村上, 羽田 : 線形むだ時間システムに対する観測器, 計測自動制御学会論文集, 第 14 巻, 第 3 号, pp.217—222(昭 53)
- 17) 味口 : 時間おくれを含む線形システムの設計と制御に関する研究, 神戸大学大学院工学研究科修士論文 (昭 54)
- 18) 安田, 平井 : 線形むだ時間システムに対する観測器の構成, 計測自動制御学会論文集, 第 18 巻, 第 2 号, pp.102—103(昭 57)
- 19) 荒木 : M 行列とその応用—I, システムと制御, 第 20 巻, 第 12 号, pp.675—680(昭 51)
- 20) M. Ikeda and D. D. Šiljak : Decentralized Stabilization of Large Scale Systems with Delay, Large Scale Systems, vol.1, no.4, pp.273—279(1980)
- 21) M. E. Sezer and D. D. Šiljak : Decentralized Stabilization and Structure of Linear Large-Scale Systems, Automatica, vol.17, no.4, pp.641—644 (1981)

## 第 5 章

- 1) R. E. Kalman : Contributions to the Theory of Optimal Control, Boletin de la Sociedad Matematica Mexicana, vol.5, pp.102-119 (1960)
- 2) R. W. Brockett : Finite Dimensional Linear Systems, John Wiley and Sons (1970)
- 3) H. Kwakernaak and R. Sivan : Linear Optimal Control Systems, John Wiley and Sons (1972)
- 4) W. A. Wolovich : On the Stabilization of Controllable Systems, IEEE Trans. Automatic Control, vol. AC-13, no.5, pp.569-572 (1968)
- 5) G. W. Johnson : A Deterministic Theory of Estimation and Control, IEEE Trans. Automatic Control, vol. AC-14, no.4, pp.380-384 (1969)
- 6) M. Ikeda, H. Maeda, and S. Kodama : Stabilization of Linear Systems, SIAM J. Control, vol.10, no.4, pp.716-729 (1972)
- 7) M. Ikeda, H. Maeda, and S. Kodama : Estimation and Feedback in Linear Time-Varying Systems : A Deterministic Theory, SIAM J. Control, vol. 13, no.2, pp.304-326 (1975)
- 8) 芦田, 池田 : 時変むだ時間をもつ線形システムの安定化. 計測自動制御学会論文集, 第 14 巻, 第 2 号, pp.208-209 (昭 53)
- 9) 加藤, 田沼, 野北, 塩谷, 筒井 : 下水処理プロセスの総合水質制御システム, 日立評論, 第 59 巻, 第 8 号, pp.649-654 (昭 52)
- 10) 前田, 長田, 中堀 : 汚泥総量管理の下での新 MLSS 制御法, 第 23 回自動制御連合講演会前刷, pp.379-380 (1980)
- 11) L. A. Zadeh and C. A. Desoer : Linear System Theory : The State Space Approach, McGraw-Hill (1966)
- 12) コディントン, レヴィンソン (吉田節三・訳) : 常微分方程式論 (上), 吉岡書店 (昭 53)
- 13) 池田 : ダイナミカルシステムの構造と安定化に関する研究, 大阪大学博士論文 (昭 50)

- 14) 野村 : 線形時変大規模システムの分散制御に関する研究, 神戸大学大学院工学研究科修士論文 (昭 56)
- 15) 荒木 : M行列とその応用 - II, システムと制御, 第 21 巻, 第 2 号, pp. 114-121 (昭 52)
- 16) N. N. Oğuztöreli : Time-Lag Control Systems, Academic Press (1966)
- 17) K. Yasuda, M. Maekawa, and K. Hirai : On the Stabilization and Observation of Linear Systems with Time-Varying Delay, Proc. 8th IFAC Triennial World Congress, vol. II, pp. 36-40 (1981)
- 18) 前川 : 線形時変むだ時間システムの設計と制御に関する研究, 神戸大学大学院工学研究科修士論文 (昭 55)
- 19) 池田 : 大規模線形時変システムの安定化, 計測自動制御学会論文集, 第 14 巻, 第 4 号, pp. 365-369 (昭 53)
- 20) M. Ikeda and D. D. Šiljak : Decentralized Stabilization of Linear Time-Varying Systems, IEEE Trans. Automatic Control, vol. AC-25, no. 1, pp. 106-107 (1980)

## 第 6 章

- 1) 梅森 : 直流リニアモータとその制御技術, システムと制御, 第 24 巻, 第 12 号, pp. 780-786 (昭 55)
- 2) 川島, 井原, 竹中, 嶋田, 磯嶋 : 電磁ガイド制御について, 住友電気, 第 115 号, pp. 231-238 (昭 54)
- 3) 梅森, 高浪, 竹中, 嶋田, 平井, 北村, 安田, 高垣 : L. T. M. システムの電磁ガイド制御 : 第 18 回計測自動制御学会学術講演会予稿集, pp. 675-676 (昭 54)
- 4) C. E. Fosha, Jr. and O. I. Elgerd : The Megawatt-Frequency Control Problem : A New Approach Via Optimal Control Theory, IEEE Trans. Power Apparatus and Systems, vol. PAS-89, no. 4, pp. 563-571 (1970)

- 5) 白井, 庫本 : 系統分割による分散型の負荷周波数制御, 電気学会情報処理研究会資料, IP-79-10(昭54)
- 6) G. Shirai : Load Frequency Control Using a Governor and Voltage Controls Via a New Approach, Proc. IEEE, vol.66, no.10, pp.1293-1294(1978)
- 7) D. D. Šiljak and S. K. Sundareshan : Large-Scale Systems : Optimality vs. Reliability (in "Large-Scale Systems"), Plenum Press (1976)