Title	ランダムなポテンシャルを持つシュレーディンガー作用素のスペクトル分布について
Author(s)	中尾, 愼太郎
Citation	大阪大学, 1977, 博士論文
Version Type	
URL	https://hdl.handle.net/11094/31961
rights	
Note	著者からインターネット公開の許諾が得られていないため、論文の要旨のみを公開しています。全文のご利用をご希望の場合は、大阪大学の博士論文についてをご参照ください。

【22】

氏名・(本籍)	中尾 愼太郎（なかお しんたろう）
学位の種類	理学博士
学位記番号	第 4078 号
学位授与の日付	昭和52年10月5日
学位授与の要件	学位規則第5条第2項該当
学位論文題目	**ランダムなポテンシャルを持つシュレーディンガー作用素のスペクトル分布について**
論文審査委員	(主査) 教授 福島 正俊 (副査) 教授 池田 信行　教授 渡辺 毅

論文内容の要旨

確率空間$(\Omega,\ B,\ P)$で定義された連続な道を持つエルゴード的定常確率場$\{q(x,\ w)\}_{x\in R^d}$を考える。d次元のラプラシアンをΔで示し，直方体$V=\prod_{i=1}^{d}(-x_i,\ y_i)\ (x_i,\ y_i>0,\ i=1,\ 2,\ \cdots,\ d)$を考える。各$w\in\Omega$について，Vにおけるディリクレ境界条件の上でのシュレーディンガー作用素$-\frac{1}{2}\Delta+q(x,\ w)$の固有値の全体を重複度をこめて$\{\lambda^{w}_{V,i}\}$と記す。$\lambda\in R^1$に対して，$\lambda$以下の$\{\lambda^{w}_{V,i}\}$の個数をVの体積で割った量を$\rho^{w}_{V}(\lambda)$と記す。$(x(s),\ P_o)$は原点から出発するd次元ブラウン運動とする。このとき，$r>2$になる正定数rが存在して，$exp\{r\int_0^t q^-(x(s),\ w)\,ds\}$がすべての$t>0$について直積測度$P\times P_o$に関して可積分ならば（但し$q^-(x,\ w)=\max(-q(x,\ w),\ 0)$），$R^1$上の右連続非減少関数$\rho(\lambda)$が存在して，ほとんどすべての$w\in\Omega$に対して，

(1)　$\lim_{V\to\infty}\rho^{w}_{V}(\lambda)=\rho(\lambda)$　　λ：$\rho(\lambda)$の連続点

が成り立つことをこの論文でまず示した。但し$V\to\infty$は$x_i,\ y_i\to\infty\ (i=1,\ 2,\ \cdots,\ d)$を意味する。この$\rho(\lambda)$を$\{-\frac{1}{2}\Delta+q(x,\ w)：w\in\Omega\}$のスペクトル分布関数と呼ぶ。

この論文で更にスペクトル分布関数$\rho(\lambda)$の$\inf\{\mu:\rho(\mu)>0\}\in[-\infty,\ \infty)$における漸近的性質を，$\{q(x,\ w)\}_{x\in R^d}$がガウス型の場合とポアソンランダム測度から決まる場合を考察し，次の結果を得た。

$q(x,\ w)\}_{x\in R^d}$が連続な道を持つエルゴード的ガウス型定常確率場ならば，$\{-\frac{1}{2}\Delta+q(x,\ w)：w\in\Omega\}$のスペクトル分布関数$\rho(\lambda)$が存在して，

$$\lim_{\lambda\to-\infty}\frac{1}{\lambda^2}\log\rho(\lambda)=-\frac{1}{2E[(q(o,w)-E[q(o,w)])^2]}$$

をみたす。ここでEは確率測度Pに関する平均を示す。

今後確率空間（Ω, B, P）はd次元ルベーグ測度に関するポアソンランダム測度とする。R^dで定義された恒等的には 0でない非負値連続関数$\varphi(x)$を考える。

$$q(x, w)=\int_{R^d} \varphi(x-y)\, w(dy) \qquad x\in R^d$$

とおく。 $(x)=0(|x|^{-\beta})(|x|\to\infty)(\beta>d)$ ならば，$\{q(x, w)\}_{x\ R^d}$ は連続な道を持つエルゴード的定常率場となり，$q(x, w)\geqq 0$なので，対応するスペクトル分布関数$\rho(\lambda)$ が存在する。$\rho(\lambda)$ は次の漸近的性質を持つことを証明した。(i) $\varphi(x)=0(|x|^{-(d+2)})(|x|\to\infty)$ ならば，対応するスペクトル分布関数$\rho(\lambda)$は

$$\lim_{\lambda\downarrow 0} \lambda^{d/2} \log \rho(\lambda) =-\delta^{d/2}$$

をみたす。但しδはR^dの単位球におけるディィリクレ境界条件の下での$-\frac{1}{2}\Delta$の最小固有値である。
( ) d＝1，αは2以下の正定数とする。正定数K_1, K_2, Lが存在して，$|x|\geqq$Lとなる意の$x\in$ R^{1}について，$K_1\leqq\varphi(x)|x|^{1+\alpha}\leqq K_2$ ならば，対応するスペクトル分布関教$\rho(\lambda)$は

$$-\infty<\underline{\lim}_{\lambda\downarrow 0}\lambda^{1/2} \log \rho(\lambda)\leqq\overline{\lim}_{\lambda\downarrow 0} \lambda^{1/2} \log \rho(\lambda)<0$$

をみたす。

(i)と(ii)により，ポテンシャルがランダムでない連続な周期関数の場合とは異なる挙動を示すことがわかる。しかし(i)のスペクトル分布関数$\rho(\lambda)$は$\lambda\to\infty$のとき，ポテンシャルが連続な周期関数の場合と同様な漸近的な性質，$\rho(\lambda)=\frac{1}{\Gamma(\frac{d}{2}+1)}(\frac{\lambda}{2\pi})^{d/2}+0(\lambda^{d/2})(\lambda\to\infty)$ をみたす。

論文の審査結果の要旨

本論文はd次元空間R^d上のポテンシャル関数$q(x)$がエルゴード的な定常ランダム場であるときのシュレーディンガー作用素$-\frac{1}{2}\Delta+q$のスペクトル理論を扱い，特にそのスペクトル分布関数$\rho(\lambda)$の存在及び$\rho(\lambda)$のλに関する漸近的挙動の2つの基本的問題に対しほぼ最終的な解答を与えている。

すなわち長方形集合Vの境界で0であるという条件の下での$-\frac{1}{2}\Delta+q$の固有値分布関数（λを越えない固有値の個数をVの容積で割ったもの）を$\rho_V(\lambda)$とすると$\lim_{V\uparrow R^d}\rho_V(\lambda)=\rho(\lambda)$が確率1で成立する。$\rho_V(\lambda)$はランダムであるが，$\rho(\lambda)$はもはやランダムでない量であってスペクトル分布関数と呼ばれる。このようなエルゴード型極根定理の最初の厳密な証明は1972年L. A. Pastur によって与えられたが，本論文ではqに対する制限を著しく弱めることによって定理の適用範囲を後述のガウス過程の場合も含むように広げることに成功している。

中尾君は更に進んでq(x) がポアソン型ランダム測度ρの移動平均として$q(x)=\int_{-\infty}^{\infty} P(x-y)\rho(dy)$

と表わされる場合及び$q(x)$がガウス過程の場合に各々 $\lim_{\lambda \downarrow 0} \lambda^{d/2} \log \rho(\lambda) = -C_1$, $\lim_{\lambda \to -\infty} \lambda^{-2} \log \rho(\lambda) = -C_2$ なる$\rho(\lambda)$の漸近的性質を導いた。但しC_1, C_2はある正の定数，これらの性質は$\rho(\lambda)$のラプラス変換に関するFeynman − Kacの公式に対する確率論的評価とタウバー型定理とを結合して得られるものである。

従来微分作用素のスペクトル理論は数学解析の立場から詳しく研究されてきた。一方係数をランダムにしたときスペクトルの構造にどのような変化が起るかを見極める問題は不規則系の研究に動機をもつが，それへの数学的確率論的接近は緒についたばかりである。本論文はこの方面での進歩をもたらす重要な段階をなすものであり，理学博士の学位論文として充分価値のあるものと認める。