The University of Osaka
Institutional Knowledge Archive

Title	滑らかでない表象を持つ擬微分作用素のLP-有界性
Author(s)	長瀬, 道弘
Citation	大阪大学, 1978, 博士論文
Version Type	
URL	https://hdl.handle.net/11094/32031
rights	
Note	著者からインターネット公開の許諾が得られていないため、論文の要旨のみを公開しています。全文のご利用をご希望の場合は、大阪大学の博士論文についてをご参照ください。

The University of Osaka Institutional Knowledge Archive : OUKA

https://ir.library.osaka-u.ac.jp/

The University of Osaka

【20】

氏名・(本籍)	長瀬道弘（ながせ みちひろ）
学位の種類	理学博士
学位記番号	第 4175 号
学位授与の日付	昭和53年3月18日
学位授与の要件	学位規則第5条第2項該当
学位論文題目	**滑らかでない表象を持つ擬微分作用素のL^p-有界性**
論文審査委員	(主査) 教授 熊ノ郷 準
	(副査) 教授 田辺 広城　教授 池田 信行　助教授 井川 満

論文内容の要旨

有界連続な表象を持つ擬微分作用素のL^p-有界性，とくにL^2-有界性は，これまで多くの人々によって研究され，いろいろな結果が得られている。しかし今までに得られた結界では，そのほとんどが，L^p-有界性又はL^2-有界性が成り立つための十分条件として，表象がC^∞級であるか又は空間変数の次元nに関係した微分可能性を持つことが要求されている。

一方，L. Nirenbergが“表象$p(x,\xi)$が任意のαに対して$|\partial_\xi^\alpha p(x,\xi)|\leqq C_\alpha<\xi>^{-|\alpha|}$（$<\xi>=(1+|\xi|^2)^{1/2}$）をみたせば，擬微分作用素$p(X,D_x)$は$L^2$-有界であるか？”という問題を提起した。これに対して，Kumano-go [9]，Hörmander [6]，Chin-Hung Ching [2]等によってL^2-有界でない擬微分作用素の例が与えられ，特にChin-Hung Ching [2]は$S^0_{1,1}$に属する表象，従ってNirenbergの条件をみたす表象を持つが，L^2-有界とはならない擬微分作用素の例を構成した。

本論文の主定理は，次の定理である。

定理，表象$p(x,\xi)$が$|\alpha|\leqq n+1$に対して，

(＊)　$|\partial_\xi^\alpha p(x,\xi)|\leqq C_\alpha<\xi>^{-|\alpha|}$,

(＊＊)　$|\partial_\xi^\alpha\{p(x,\xi)-p(y,\xi)\}|\leqq C_\alpha|x-y|^\sigma<\xi>^{-|\alpha|+\sigma\tau}$,

$(0<\sigma\leqq 1,\ \tau<1)$をみたすならば，$p(X,D_x)$は$L^2$-有界である。更に，$|\alpha|\leqq n+2$に対して(＊)(＊＊)が成り立つならば，$p(X,D_x)$は$1<p<\infty$に対して$L^p$-有界である。

この定理では，作用素がL^p-有界であるための十分条件として，表象$p(x,\xi)$のxについての滑らかさは，Hölder連続性しか要求していない。この意味で，Nirenbergの問題はほぼ完全に解けたといえる。

主定理を証明するために表象に関する近似定理を用いた。与えられた表象$p(x,\xi)$を，$q(x,\xi)=\int\psi(y)p(x-<\xi>^{-\delta}y,\xi)dy$ $(\tau<\delta<1)$ で近似して，$r(x,\xi)=p(x,\xi)-q(x,\xi)$ とおく。このとき$q(X,D_x)$ に対するL^2-有界性は，今までの結果でよく知られており，更に$1<p<\infty$のときのL^p-有界性もKato［8］のL^2-有界性定理と，Kagan［7］の方法を用いて示される。また$r(X,D_x)$ に対するL^p-有界性は，次の定理からただちに示される。

定理，$r(x,\xi)$ が$|\alpha|\leqq n+1$に対し

$$(***)\quad |\partial_\xi^\alpha r(x,\xi)|\leqq C_\alpha<\xi>^{-|\alpha|-\rho}\quad(\rho>0),$$

をみたすとする。このとき$|K(x,z)|\leqq C_{\rho'}(1+|z|)^{-1}\cdot|z|^{-n+\rho'}$ $(0<\rho'<\min\{1,\rho\})$ をみたす積分核$K(x,z)$ が存在して$r(X,D_x)u(x)=\int K(x,x-y)u(y)dy$ $(u\in S)$ が成り立つ。

与えられた表象$p(x,\xi)$ に対して，上の方法で表象$q(x,\xi)$ を作ることは，滑らかでない表象を持つ擬微分作用素を扱う一つの方法を与えるものであり，主定理はその応用の一つとして得られたことになる。

論文の審査結果の要旨

$P=p(X,D_x)$ を表象$p(x,\xi)$ を持ちR^n上の急減少関数族Sに作用するm次の擬微分作用素とする。このとき，作用素Pを関数空間$L^p(R^n)$ $(1<p<\infty)$ 上の作用素に拡張して，関数解析学の理論が適用されるようにするには，次数零の擬微分作用素が$L^p(R^n)$ 上の有界な作用素に拡張されることが基本的な問題となる。

長瀬君はこの問題について，表象$p(x,\xi)$ がある$\tau(0\leqq\tau<1)$とσ $(0<\sigma\leqq1)$ に対して，条件:

$$(C)\begin{cases}(1)\quad |D_\xi^\alpha p(x,\xi)|\leqq A(1+|\xi|)^{-|\alpha|},\\ (2)\quad |D_\xi^\alpha p(x,\xi)-D_\xi^\alpha p(y,\xi)|\leqq B|x-y|^\sigma(1+|\xi|)^{-|\alpha|+\sigma\tau}\end{cases}$$

を，$|\alpha|\leqq n+1$ についてみたせば$P=p(X,D_x)$ はL^2-有界となり，$|\alpha|\leqq n+2$ についてみたせばさらにL^p-有界となることを証明した。

“条件(C)—(1)のもとで，$P=p(X,D_x)$ に対してL^2-有界性が成り立つか”というのがNirenbergによって提出された問題であるが，これに対しては反例が構成されて一般にはL^2-有界性が成り立たないことがわかっている。長瀬君の結果は，Nirenbergの問題に条件(C)—(2)を加えて，表象$p(x,\xi)$ が空間変数xについてHölder連続ならPがL^p-有界となることを主張するもので，滑らかでない表象を持つ擬微分作用素の理論の出発点となることが期待される。また，この結果を証明するために，滑らかでない表象を従来扱われて来た滑らかな表象で近似する方法がとられているが，この近似理論そのものも非常に興味深いものがあり，すでに他の問題への応用もいくつかなされている。

以上のように本論文は，得られた結果とその方法共に擬微分作用素の理論の発展に寄与するところ大きく，理学博士の学位論文として十分価値あるものと認められる。