The University of Osaka
Institutional Knowledge Archive

Title	加工層におけるX線残留応力解析に関する研究
Author(s)	英, 崇夫
Citation	大阪大学, 1982, 博士論文
Version Type	VoR
URL	https://hdl.handle.net/11094/327
rights	
Note	

The University of Osaka Institutional Knowledge Archive : OUKA

https://ir.library.osaka-u.ac.jp/

The University of Osaka

加工層におけるX線残留応力解析に関する研究

1982年 7 月

英　　崇　夫

目　　次

第 1 章　序　論

第 2 章　急激な応力こう配を有するときの重み付き平均解析法

2.1　緒　言 …… 11

2.2　回折強度分布曲線の解析 …… 11

2.3　重み付き平均解析法 …… 15

2.3.1　重み付き平均ひずみ …… 15

2.3.2　重み付き平均解析法の意味 …… 15

2.4　回折強度分布曲線の計算と $\sin^2\psi$ 線図 …… 17

2.4.1　ひずみこう配のないときの回折強度分布曲線 …… 18

2.4.2　ひずみこう配を有するときの回折強度分布曲線 …… 19

2.5　正規分布曲線の重ね合わせによる合成プロフィル …… 20

2.5.1　重心位置の簡単な求め方 …… 20

2.5.2　$\mathrm{Sin}^2\psi$ 線図と応力因子の評価 …… 24

2.6　結　言 …… 25

第 3 章　重み付き平均解析法の実験的検討

3.1　緒　言 …… 27

3.2　残留応力の解析法 …… 27

3.3　実験方法 …… 29

3.4　実験結果 …… 30

3.4.1　焼なまし状態における格子定数 …… 30

3.4.2　ラッピングによる無方位残留応力系の形成 …… 31

3.4.3　ラッピング加工表面下の残留応力分布 …… 32

3.5　考　察 …… 35

3.5.1　$\mathrm{Sin}^2\psi$ 線図に及ぼす σ_3 の影響 …… 35

3.5.2　重み付き平均解析法と $\sin^2\psi$ 法の関係 …… 36

3.5 3　応力こう配，回折線位置，$\sin^2\psi$ 線図の湾曲の間の関係 …… 37

3.5.4　指数関数形の残留応力分布（$\sin^2\psi$ 法と重み付き平均解析法の比較）…… 37

3.6　結　言 …… 39

第 4 章　二軸、三軸応力解析のクライテリオン

4.1　緒　言 …… 41

4.2　ポテンシャルによる弾性問題の解法 …… 41

4.3　表面力による応力場 …… 44

4.3.1　正弦状の垂直力が表面に作用する場合 …… 45

4.3.2　x方向に正弦状の接線力が作用する場合 …… 47

4.3.3　y方向に正弦状の接線力が作用する場合 …… 50

4.3.4　三種類の表面力の重ね合わせ …… 52

4.4　二軸，三軸解析のクライテリオン …… 53

4.5　結　言 …… 57

第 5 章　球状介在物の熱残留応力と三軸応力解析の相関性

5.1　緒　言 …… 59

5.2　球状介在物中の熱残留応力 …… 60

5.2.1　球状介在物を含む無限体の熱残留応力 …… 60

5.2.2　表面近傍における球状介在物中の熱残留応力の緩和 …… 62

5.3　介在物の熱残留応力に基づく $\sin^2\psi$ 線図の評価 …… 64

5.4　実験結果および考察 …… 67

5.4.1　二相材の準備 …… 67

5.4.2　Si粒子およびM_6C 炭化物粒子の熱残留ひずみの測定 …… 68

5.4.3　考　察 …… 69

5.5　結　言 …… 70

第 6 章　X線応力測定における三軸応力解析の基礎

6.1　緒　言 …… 73

6.2　三軸応力状態における応力と格子ひずみの関係 …… 73

6.3　平均応力成分の計算 …… 81

6.4　三軸応力解析における無応力状態の格子面間隔の必要性 …… 84

6.5　σ_{31} の分布形と $\sin^2\psi$ 線図 …… 87

6.6　結　言 …… 92

第 7 章　有向性加工層の残留ひずみ測定

7.1　緒　言 …… 93

7.2　全方位ひずみ測定 …… 94

7.2.1　実験方法 …… 94

7.2.2　実験結果および考察 …… 95
7.3　ψスプリット挙動と微視的残留せん断応力 …… 98
7.3.1　実験目的と実験方法 …… 98
7.3.2　無ひずみ状態の格子面間隔の決定 …… 100
7.3.3　有向性加工層における d − $\sin^2\psi$ 曲線 …… 101
7.3.4　残留応力の計算 …… 105
7.4　考　　察 …… 107
7.5　結　　言 …… 109
第 8 章　有向性加工層内部の微視的残留せん断応力の平衡
8.1　緒　　言 …… 111
8.2　試料および実験方法 …… 111
8.3　実験結果 …… 112
8.3.1　SKH 2 材のX線的弾性定数 …… 112
8.3.2　純鉄フライス加工材のψスプリット挙動 …… 113
8.3.3　SKH 2 研削加工層の残留応力分布 …… 114
8.3.4　SKH 2 フライス加工層の残留応力分布 …… 115
8.4　考　　察 …… 116
8.4.1　微視的残留せん断応力の平衡 …… 116
8.4.2　機械的作用と熱的作用が残留応力分布に及ぼす効果 …… 119
8.5　結　　言 …… 120
第 9 章　総　　括

参考文献 …… 129
謝　　辞 …… 138

第1章　序　　論

X線応力測定法は多結晶金属材料表面層に存在する結晶のうちBraggの回折条件を満足する特定の結晶面からの回折線の移動量より格子ひずみをとらえ，弾性理論に基づいてそこに作用する応力を求めるものである〔1～7〕。この方法はX線回折の特性により，ごく浅い表面層の局部的残留応力を非破壊的に測定できるという特長を有しており，工業および材料強度学の分野への応用は現在ますます拡大しつつある〔8～15〕。

X線応力測定の先駆的な研究は，Lester and Aborn〔16〕によると言われる。そして，1930年に Sachs and Weert〔17〕が背面反射法を導入して表面の主応力の和を求めたのに続いて，Barrett and Gensamer〔18〕が二つの主応力の分離に成功し，Glocker〔19〕や Schaal〔20〕らによってその基礎が固められた。我が国では1937年に西原，小島〔21〕が最初にX線応力測定法を導入して．測定精度の検討〔22〕や工業用X線応力測定装置の開発〔23〕，さらにX線的に測定される応力の物理的意味の検討〔24，25〕がなされた。また石井〔26～28〕はすでに1940年代において，本論文の主題である加工層の応力測定に取り組み，その結果に基づき，三次元応力解析（本論文では三軸応力解析と称する）の必要性を説いて，写真法での応力測定における精度を詳細に検討した。しかし，残念ながらこの貴重なそしてX線応力測定法の基本にふれる尊い研究は，測定技術上の写真法から現在のディフラクトメータ法への変遷過程の中で，また応力解析技術上の0°～45°法，45°単一入射法から1950年代後半～1960年代初めの間の Hauk〔29〕，Macherauch〔30,31〕らによって確立された $\sin^2\psi$ 法への移り変りの時代の流れの中で，かえりみられることなく今日まで埋れたままとなった。ともかくも，ディフラクトメータ法による測定精度の向上とともに，X線応力測定法の基礎ともなっている $\sin^2\psi$ 法は，我が国でも辛島，藤原，小島〔25〕によっていちはやく導入され，今日のX線応力測定法の著しい発展を基礎づけたと言えよう。

以後X線応力測定法の研究の発展は目ざましく，測定技術的には，1962年に従来の集中ビーム法に代って我が国独自に平行ビーム法〔32，33〕が開発，確立された。この方法は試料設定に厳密さを要しない特長を有しており，X線応力測定法を実験室的研究手段から一気に現場的に製品管理や事故解析の手段としての利用を可能とさせるようになった。しかし，平行ビーム法もそれが唯一無比のものではなく，粗粒材や集合組織を有する材料の測定においては，測定原理上厳密性を保持する集中ビーム法に及ぶものではない。また，これらの問題に呼応して，試料固定法（ψ_0 一定法）と θ-2θ 法（ψ 一定法）の検討〔34，35〕もなされ，θ-2θ 法の有

利さが認識されてはいたが，機構上の複雑さから永年現場用測定装置には採用されるに至らず，最近ようやくその装置が開発され，また測定の自動化の確立とともに応用範囲は急速に増大のきざしを見せ始めている。

一方，X線応力測定法は基本的には材料表面層の微視的な格子ひずみを測定するものであるから，X線的に測定されるひずみ，あるいは応力の意味についての基本的な検討が詳細になされてきた。X線的に得られる格子ひずみは，多結晶材料を構成している結晶群のうち特定結晶，特定格子面のひずみであるから，結晶の弾性異方性に帰因する回折面依存性〔36～39〕，結晶塑性の方位依存性によるHeyn の応力〔40〕，また異相間の力学的挙動の差に基づく相応力〔38, 41～49〕などの問題に大きな関心が寄せられた。材料強度学への基本的な研究にも古くから関心が集り，引張変形との関連において巨視的降伏以前の微視的降伏挙動〔25, 50〕の存在，また塑性変形後の残留応力に関する研究では，表面効果〔40, 51～74〕および相応力〔43～49〕の存在を明らかにした。さらに疲労変形と残留応力の変化挙動についても多くの研究から様々な知見を生み出し，材料の変形挙動と残留応力の関連が明らかにされてきた〔14, 75～77〕。

また，X線応力測定法の大きな目的の一つは，結晶格子のひずみを測定して，材料表面に作用する巨視的な応力を知り，あるいは加工を受けた材料内部の応力分布を知ろうとするものであるから，当然，機械的応力とX線的応力との対応についても多数の研究がなされてきた。それは弾性負荷応力とX線的応力との対応関係に関する実験的検討であり，換言すれば格子ひずみから応力値への換算に不可欠なX線弾性定数の決定に関する問題である。この方面に関する日本材料学会X線材料強度部門委員会の官民一体の共同研究による努力の結果〔39〕は、フェライト系およびオーステナイト系鉄鋼材料のX線応力測定法標準〔78, 79〕として著され，工業上へのX線応力測定の普及発展に大きな寄与をもたらした。

ここで，現在のX線応力測定法の基本となり，また上記標準にもうたわれている $\sin^2\psi$ 法による応力解析の原理を簡単に述べることにする。

いまFig.1.1 において主応力をσ_1，σ_2，σ_3，主ひずみをε_1，ε_2，ε_3として，σ_1，σ_2およびε_1，ε_2を試料表面上にとる。 X線侵入深さは表面下数μm～数10 μm程度であり，X線反射は実質上，ごく表面近傍の浅い層に限定されるから$\sigma_3 = 0$ と考えると，応力とひずみの関係は次式で与えられる。

$$\left.\begin{aligned} \varepsilon_1 &= \frac{1}{E}(\sigma_1 - \nu\sigma_2) \\ \varepsilon_2 &= \frac{1}{E}(\sigma_2 - \nu\sigma_1) \\ \varepsilon_3 &= -\frac{\nu}{E}(\sigma_1 + \sigma_2) \end{aligned}\right\} \qquad (1.1)$$

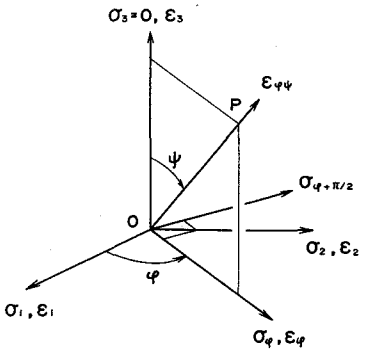


Fig. 1.1. Direction of stresses and strains.

ここではEはヤング率，ν はポアソン比である。

試料表面法線のまわりにϕだけ回転して得られる互いに直交した二方向の応力およびひずみをσ_ϕ，$\sigma_{\phi+\pi/2}$，ε_ϕ，$\varepsilon_{\phi+\pi/2}$とすると，これらの間には式（1.1）と同様な関係が成立する。

$$\left.\begin{aligned}\varepsilon_\phi &= \frac{1}{E}\left(\sigma_\phi - \nu\sigma_{\phi+\pi/2}\right)\\ \varepsilon_{\phi+\pi/2} &= \frac{1}{E}\left(\sigma_{\phi+\pi/2} - \nu\sigma_\phi\right)\\ \varepsilon_3 &= -\frac{\nu}{E}\left(\sigma_\phi + \sigma_{\phi+\pi/2}\right) = -\frac{\nu}{E}\left(\sigma_1 + \sigma_2\right)\end{aligned}\right\} \tag{1.2}$$

ここで，試料面法線方向（σ_3方向）と測定したい応力の方向（σ_ϕ方向）とで作られる面内に試料面法線方向からψだけ傾いた方向をＯＰとする。Ｘ線回折を利用するとＯＰ方向に垂直な格子面の垂直ひずみ$\varepsilon_{\phi\psi}$が測定され，この$\varepsilon_{\phi\psi}$は主ひずみを用いてつぎのように表わすことができる。

$$\begin{aligned}\varepsilon_{\phi\psi} &= \varepsilon_1\cos^2\phi\sin^2\psi + \varepsilon_2\sin^2\phi\sin^2\psi + \varepsilon_3\cos^2\psi\\ &= \left(\varepsilon_1\cos^2\phi + \varepsilon_2\sin^2\phi\right)\sin^2\psi + \varepsilon_3\left(1 - \sin^2\psi\right)\end{aligned} \tag{1.3}$$

ここで，

$$\varepsilon_\phi = \varepsilon_1\cos^2\phi + \varepsilon_2\sin^2\phi \tag{1.4}$$

の関係を用いると，

$$\varepsilon_{\phi\psi} = \varepsilon_\phi\sin^2\psi + \varepsilon_3\left(1 - \sin^2\psi\right) \tag{1.5}$$

が得られる。この式に式（1.2）で表わされたε_ϕおよびε_3を代入すると

$$\varepsilon_{\phi\psi} = \frac{1+\nu}{E}\sigma_\phi\sin^2\psi - \frac{\nu}{E}\left(\sigma_1 + \sigma_2\right) \tag{1.6}$$

の関係が得られる。この式がＸ線応力測定法における$\sin^2\psi$法の基本式であり，方位角ϕを一定に保つと Fig.1.2のように$\varepsilon_{\phi\psi}$が$\sin^2\psi$に対して直線関係にあることを意味している。そして，この直線のこう配は

$$M = \frac{\partial\varepsilon_{\phi\psi}}{\partial\sin^2\psi} = \frac{1+\nu}{E}\sigma_\phi \tag{1.7}$$

で与えられ，E およびνの値を知ることによってσ_ϕが決定される。

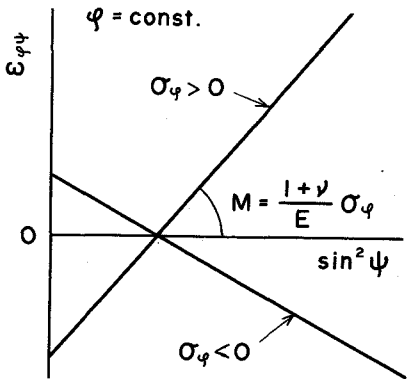


Fig. 1.2. $\varepsilon_{\phi\psi}$-$\sin^2\psi$ diagram.

Ｘ線応力測定では，ひずみを格子面間隔 d（あるいは格子定数 a ）の変化から求めるので，式(1.6)

および（1.7）を格子面間隔で表わしておくと都合がよい。ＯＰ方向に垂直な格子面間隔を $d_{\phi\psi}$，無応力状態のそれを d_0 とすると，ひずみの定義から

$$\varepsilon_{\phi\psi} = \frac{d_{\phi\psi} - d_0}{d_0} \tag{1.8}$$

で表わされるので式（1.6）は

$$d_{\phi\psi} = \frac{1+\nu}{E} d_0\sigma_\phi \sin^2\psi + \{ 1 - \frac{\nu}{E} (\sigma_1 + \sigma_2)\} d_0 \tag{1.9}$$

と書ける。すなわち式（1.6）と同様 $d_{\phi\psi}$ は $\sin^2\psi$ に対して直線関係にあり，そのこう配

$$M' = \frac{\partial d_{\phi\psi}}{\partial \sin^2\psi} = \frac{1+\nu}{E} d_0\sigma_\phi \tag{1.10}$$

より σ_ϕ が求まることになる。ただし，式（1.10）には一般的に未知である無応力時の格子面間隔 d_0 が含まれているが，Ｘ線回折線の移動から測定できる応力は弾性ひずみに対応する応力であり，一般に d の変化は 10^{-3} 以下のオーダーであるから，d_0 の値を $\psi = 0$ すなわち試料面法線方向に測られる格子面間隔 $d_\perp$ で代用しても，実質的に誤差は出ない。

ところで，Ｘ線応力測定法は冒頭でもふれたように Bragg の回折条件にしたがって多結晶体の特定 $(h\ k\ \ell)$ 面の格子ひずみを測定するものであるから，結晶の弾性異方性により，その格子面のもつ弾性定数は機械的に測定される巨視的な弾性定数とは一般的に異なる値になる〔36，37〕。弾性異方性を考慮に入れて多結晶体を構成する各結晶が等しい応力の下で変形する Reuss モデル〔80〕，等しいひずみの下で変形する Voigt モデル〔81〕により特定の $(h\ k\ \ell)$ 面の弾性定数の上下限を与える理論解析，およびその混合則とも言える Kröner モデル〔82〕による理論解析が存在する。しかし，実際には多結晶体の弾性変形は応力一定モデルに近い挙動をとるという実験結果〔38，83～89〕や，結晶粒度に依存するという実験結果〔35，37，90〕も得られており，未だ定説には至っていない。また材料組成，熱処理条件などによっても変化することが考えられるので，現在では以下の方法〔30〕により，あらかじめ同一材料に対して実測によりＸ線的弾性定数を求めておくことが推奨されている〔78，79〕。

いま，一軸引張変形を考えると式（1.6）において $\sigma_\phi = \sigma_1$，$\sigma_2 = 0$，$\phi = 0$ であるから $\varepsilon_{\phi\psi}$ を ε_ψ と書くと次式が得られる。

$$\varepsilon_\psi = \frac{1+\nu}{E} \sigma_1 \sin^2\psi - \frac{\nu}{E} \sigma_1 \tag{1.11}$$

この式をまず $\sin^2\psi$ について，続いて σ_1 について偏微分すると次式が求まる。

$$\frac{\partial}{\partial\sigma_1} \left[\frac{\partial\varepsilon_\psi}{\partial \sin^2\psi} \right] = \frac{\partial M}{\partial\sigma_1} = \frac{1+\nu}{E} = \frac{s_2}{2} \tag{1.12}$$

ここでＭは式（1.7）で示したように，負荷応力 σ_1 の下での $\varepsilon_\psi - \sin^2\psi$ 線図の直線のこ

う配である。

また，式（1.11）において $\psi = 0$ として σ_1 で偏微分すると

$$\frac{\partial \varepsilon_{\psi=0}}{\partial \sigma_1} = -\frac{\nu}{E} = s_1 \qquad (1.13)$$

となる。すなわち，Fig.1.3 のように M および $\varepsilon_{\psi=0}$ をそれぞれ σ_1 に対してプロットすると直線関係が得られ，それらのこう配から $(1+\nu)/E$ および $-\nu/E$ が得られる。このようにして求められた E, ν あるいは $s_2/2$, s_1 を機械的な弾性定数に対して，とくにX線的弾性定数と呼んでおり，これらの値を式（1.7）あるいは（1.10）に適用することによって σ_ϕ が計算される。以上が実際に $\sin^2\psi$ 法を用いて応力解析するときの方法であり，現に我が国のX線応力測定法標準〔78，79〕にも，この主旨が基本的に取り入れられている。

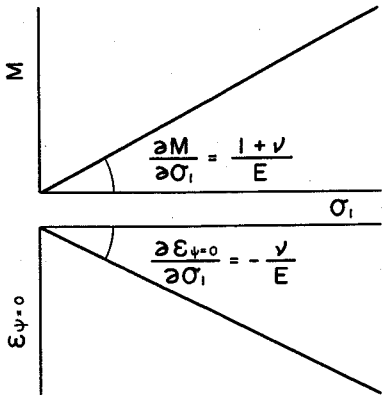


Fig. 1.3. Determining method of X-ray elastic constants.

ともかく，式（1.6）は $\varepsilon_{\phi\psi}$ が $\sin^2\psi$ に対して直線関係になることを予言した式であり，事実多くの場合について実験的にも確認されている。たとえば，試験片に単純な弾性引張負荷を与えた場合〔30，38，91〕や，軽く引張塑性変形させた後の残留応力〔92，93〕，また熱処理〔94，95〕，溶接〔96，97〕などによる残留応力の測定の際に明瞭な直線関係が得られている。

このように，X線応力測定法は $\sin^2\psi$ 法の助けにより，主として材料表面に作用する巨視的応力を推定するものであるが，X線回折の特異性，すなわち特定方位しかも特定回折面のひずみを情報としているため，実際の適用に際しては回折面依存性〔36～39〕，粗粒材への適用限界〔35，78，98～100〕，相応力〔38，41～49〕，X線侵入深さ〔101～103〕などの問題点が指適されている。しかし，これら数々の研究も一貫して $\sin^2\psi$ 法に立脚した議論がなされて現在に至っていると言っても過言ではなく，$\sin^2\psi$ 法は，それほどまでに統一された応力解析理論であるかに受け取られてきた。

測定機器およびデータ処理の目ざましい改良〔104～115〕に伴って精度良く再現し得るデータが得られるようになり，$\sin^2\psi$ 法が充分認識された結果として，最近では切削，研削，転動などの加工表面層にX線応力測定技術を応用する方向に向ってきた〔116～127〕。この方面への応用の主な目的は，とりもなおさず加工部材の最外層の残留応力値を把握し，この残留応力を材料強度因子の一つとして取り入れ，強度評価の指針とすることである。一般に各種機械部品の製造過程には機械的加工と熱的加工を伴うが，物体全体にわたって一様な変形がな

されない場合に残留応力が発生する。たとえば切削，研削，ショットピーニングなどの機械的加工は，材料表面近傍に変形が限定され，内部との変形度の差が生じる。また，焼入れなどの熱処理あるいは鋳造や切断による熱的加工は，加熱・冷却の過程に材料内部に時間的な温度変化の差をもたらし，それにより誘起される熱応力による降伏変形の場所的差，あるいは微視組織の変態などに伴う体積変化の不均一さによって，巨視的また微視的な残留応力が発生する〔128〕。

このような残留応力の存在に対する関心は，主に部材の機械的性質に対する影響〔129〕および加工された部品の寸法・形状の不安定さに対する影響〔130〕に向けられる。前者では，とくに疲労に対する影響が重要である。繰返し応力を受ける部材に圧縮残留応力が存在すれば，それが平均応力として作用してクラックの発生および伝播を遅らせ，部材の疲れ強さを向上させるが，引張残留応力は逆に疲れ強さを低下させることが知られている。転がり疲れなど特殊な負荷様式を別にすると，一般に軟質材では疲労クラックの核は材料表面から発生する〔131〕ので，とくに加工表面層の巨視的残留応力の性質は大切である。また硬質材では，介在物や炭化物粒子など微視的組織の不均一性に基づく微視的残留応力が影響を及ぼすと言われており，とくに表面近傍において，巨視的残留応力を重畳させた形で圧縮応力状態に保っておくことが必要とされる。また後者では，残留応力の存在そのものは有害ではないが，何らかの原因によって残留応力状態が変化するときに寸法，形状のくるいを生じることになる。残留応力は外力のない状態で物体内部で平衡を保っている応力であり，物体内部の各点において力のつり合いとモーメントのつり合いが成立していなければならない。したがって，残留応力状態が部分的に変化したり，あるいは物体の一部が除去されたりすると，つり合いが破れて形状の変化をもたらすことになる。最近の目ざましい機器の精密化に伴って，部品寸法のミクロン単位の変化も許されなくなってきており，将来はサブミクロンのオーダーの変化が問題にされるようになると言われている。今日，このような精密部品の性能評価において，残留応力を含めた加工変質層の諸特性の性状が大きく問題にされようとしている〔132，133〕。

このように，加工層に生じる残留応力は機械部品の強度に関して，また精密機械部品の精度に関して重要な役割を果すものであり，これら部品の性能評価あるいは管理上，残留応力状態の把握を欠かすことはできない。加工部品の残留応力をオンラインで検査測定したり，あるいは使用中の部品の残留応力の変化挙動を調べて機器の管理をするような場合，機械的方法で残留応力を測定するときのように，製品に穴をあけるなどの破壊測定が許されないので，X線応力測定法は最も有利な武器として使用される。

このX線応力測定法の基本とされている $\sin^2\psi$ 法は，単にX線侵入深さが浅いという理由で式（1.1）のように平面応力の仮定が適用されている。しかし，加工層を問題にする場合，

加工変質層は表面ごく近傍に限定され，また複雑な材料特性を有すると考えられるから，単純な平面応力状態の仮定には一抹の疑問が生じる。事実加工層にX線ひずみ測定を施した場合，$\sin^2\psi$ 線図が直線にならないような例がしばしば報告されるようになってきた〔134，135〕。これらの結果は $\sin^2\psi$ 法の予言からの逸脱現象であるので，これら加工層から得られる格子ひずみに対して $\sin^2\psi$ 線図上の非直線性を生じる物理的な原因を解明し，そのような非直線挙動を示す $\sin^2\psi$ 線図から応力値を求める新しい応力解析法を確立することが現在の課題であると考えられる。

このためには $\sin^2\psi$ 法の意味を再確認し，そこに含まれる仮定を一つずつ取り除いて検討することにより達成できると考えられる〔134〕。もともと $\sin^2\psi$ 法はつぎの三つの大きな仮定の下に組立てられた応力解析法である。すなわち，

(1) 測定対象とする材料表面の応力状態が平面応力状態であること。

(2) 対象となる材料が均質等方性体であること。

(3) X線照射域内に回折にあずかる結晶粒子が充分な数だけ存在すること。

前述のように $\sin^2\psi$ 法の基礎式は式（1.6）で表わされ，$\varepsilon_{\phi\psi}$ が $\sin^2\psi$ に関して線形になるためにはこの式を $\sin^2\psi$ で偏微分した式（1.7）の右辺が ψ 角によらず一定でなければならない。すなわち，$(1+\nu)/E$ や σ_ϕ が一定として扱えないような場合に $\sin^2\psi$ 線図は非線形になる。

仮定（2）については，一般に金属材料を構成している個々の結晶は機械的な異方性を有しているが，個々の結晶粒子が充分小さく，ランダムな方位を持っているなら巨視的には等方性としての扱いが可能である〔136〕。しかし，圧延材のように集合組織を有する場合には結晶の異方性の効果がき然として現われてくる。これは結晶群が特定方位に配向するため，弾性定数が方位に依存するからであり，このような場合 $\sin^2\psi$ 線図は直線にならずうねりを生じることが明らかにされている〔137～143〕。この方面に関しては，平面応力の仮定の下に解析的検討が進み，実験結果とも良い対応が示され，またそのようにうねりの生じた $\sin^2\psi$ 線図から作用する応力を計算する方法も考案され〔144～147〕，ほぼその全容が理解されていると言ってよい。集合組織の極端な場合はその応力測定は単結晶の応力測定に帰し，その方法もすでに提案されている〔149，150〕。

仮定（3）も元来結晶の弾性異方性の問題に帰すものである。結晶粒径が大きくなると回折にあずかる結晶粒子の数が少くなるが，このような粗大結晶粒材は組織的には等方性体として扱える微細多結晶集合体と単結晶の中間に属する。個々の結晶粒に一様な応力が作用していると仮定しても，結晶方位によってひずみは異なる。すなわち，弾性定数が方位によって異なるから $\sin^2\psi$ 線図は直線とはならない。しかし，結晶粒がランダムな方位を持っておれば，測

定されるひずみは直線のまわりの統計的な変動として現われることがわかっており〔100〕，測定場所を変えて平均をとったり，試料を揺動させたりして回折にあずかる結晶粒数を統計的に多くすることによって良好な直線関係が得られる。また測定技術上，$\theta - 2\theta$ 法の採用により精度を高められることも実験的に確認されている〔35〕。

最後に仮定（1）に述べた平面応力の記述は，さらにつぎの三つの仮定に分類することができる。

(a) 応力 σ_ϕ が表面からの深さに対して変化しないこと。

(b) 試料表面に垂直な方向の応力成分 σ_3 は0であること。

(c) 主応力軸の一つが試料表面法線方向に一致すること。

仮定（2）および（3）とともに，これら（a），（b），（c）の仮定のいずれが欠落しても $\sin^2\psi$ 法の基礎式は原理的に成立せず，したがって $\sin^2\psi$ 法による応力解析は不適当であると言わなければならない。

上述のように，結晶の異方性は本質的にX線応力測定にかかわりをもつが，本論文では一応これを無視して，等方性弾性論の範囲内で加工層のX線残留応力測定の際に生じる $\sin^2\psi$ 線図の非線形性の原因を探り，また二軸，三軸応力解析のクライテリオンを明らかにする。また，このように $\sin^2\psi$ 法のもつ平面応力状態の仮定から逸脱するような挙動に対して，正しい応力値を求めるための新しい解析法を確立することが目的である。そのために，上記(a), (b), (c)の個々の仮定について各章ごとに取り上げて検討し，実験結果と対応させながら本題の究明をはかることにする。

第2章では σ_ϕ がX線侵入深さの範囲内で急激なこう配を有する場合について述べる。まずWarren の提唱した Powder pattern power theorem と Small coherent domains and strains の理論〔151〕を応用して，応力が急こう配のときの回折強度分布曲線をX線回折理論に基づいて計算する。つぎに，重み付き平均解析法を導入して，回折線位置を表わす特性値（ピーク位置，半価幅中点位置，重心位置）と重み付き平均ひずみとの間の関係を検討する〔152，153〕。

第3章は重み付き平均解析法の実験的検討である。軸受鋼ＳＵＪ２焼なまし材のラッピング加工層に対して，加工面および逐次電解研摩面のひずみ測定を行い，$\sin^2\psi$ 法と対比させながら重み付き平均解析法の妥当性を検討する〔154〕。

第4章は仮定（b）の考察である。試料表面では二軸応力状態でなければならないが，一般に加工層内部は三軸応力状態であると考えられる。このとき試料表面近傍の層で二軸応力あるいは三軸応力を規定するクライテリオンが何によって決まるかを考察する。すなわち，自由表面近傍における試料面法線方向の応力成分の緩和を問題にする。三軸応力場にある無限体の中に

自由表面を作るには仮想表面力の概念を用いて，任意の面上における法線方向の三つの応力成分を0にすることで達成される。一般に材料内部の任意の面上での応力状態は二重フーリエ級数で示されるので，一つのフーリエ成分で表わされる表面力を与えて，それによる応力分布を計算し周期応力の波長と応力緩和のされ方の関係を調べる〔155，156〕。

第5章は第4章を受けて実験結果との対比を見たものである。Al — Si二相合金のSi粒子および高速度鋼 SKH2のM_6C炭化物粒子に形成される tessellated stress 系について自由表面近傍の粒子中の応力を計算し，実験値との対応関係を検討する。

第6章は試料表面下ごく浅い層で主応力軸が傾斜している場合の検討である。これはせん断応力成分が存在することに等しい。まず最初にX線残留応力測定における三軸解析の基本式を導き，せん断成分が存在するとき$\varepsilon_{\phi\psi}$ - $\sin^2\psi$ 線図が楕円形状（ψスプリット）になることを示し，そしてこのような分布のときの応力解析の方法について述べる。

第7章は種々の有向性加工*を施した試料についての実験結果を示し，加工方法，材料，選択する回折面と ε - $\sin^2\psi$ 曲線（ψスプリット挙動）との総体的な概要について述べる〔158，159〕。

第8章は第7章を受けて有向性加工層においてX線的に測定されるひずみと微視的残留応力との関係について論ずる。研削加工層およびフライス加工層内部の格子ひずみを測定するとともに，微視的残留応力の平衡条件式を導き，ψ スプリット現象の意味をさらに詳細に検討する〔160〕。

---

* 若林ら〔157〕によって，特定方向にせん断力成分を有する加工方法の総称として有向性加工と名付けられた。研削，切削，すべりを伴うころがり接触などはその代表的なものである。

第2章　急激な応力こう配を有するときの重み付き平均解析法

2.1　緒　　言

X線応力測定法は多結晶金属材料表面層の残留応力が非破壊的に測定できる唯一の手段であり，現在一般に $\sin^2\psi$ 法〔31〕がその解析に用いられていることは第1章に述べたとおりである。その解析法が世に出されて以来，種々の問題を含みながらも，X線残留応力はすべてこの方法によって解析されてきたと言っても過言ではない。

周知のとおり $\sin^2\psi$ 法は試料表面法線と応力測定方向を含む面内の任意方向の垂直のひずみ $\varepsilon_{\phi\psi}$ あるいは格子面間隔 $d_{\phi\psi}$ が $\sin^2\psi$ に関して線形関係を示す式（1.6）に基礎を置いている。しかし，近年加工材の表面層などにX線ひずみ測定を適用した場合，測定された $\varepsilon_{\phi\psi}$ - $\sin^2\psi$ の関係が $\sin^2\psi$ 法で指適されるような線形性を満足しない例が多く見受けられるようになってきた〔134〕。第1章において，このような現象は $\sin^2\psi$ 法に含まれている仮定を一つずつ取り除くことによって理解できることを示唆した。その中で非線形な $\sin^2\psi$ 線図の一つの原因として，X線侵入深さの範囲内で応力が急こう配になっている場合を挙げた。この場合，入射X線の方向を変えることによって有効なX線侵入深さが変化する〔161，162〕から式（1.6）の σ_ϕ が $\sin^2\psi$ の関数になると理解できる。σ_ϕ が定数として扱えないので $\varepsilon_{\phi\psi}$ - $\sin^2\psi$ の関係はもはや線形ではあり得ない。過去にもいくつかの研究がなされてこの現象が理解されてはいる〔101～103，123〕が，非線形な $\sin^2\psi$ 線図から表面における応力値および表面下の応力こう配を決定する方法は未だ確立されてはいない。

本章では，表面層に急激な応力こう配のある場合について，回折強度分布曲線の形を解析し，回折線位置を表わす特性値と測定されるひずみとの関係を詳細に検討した。そして，その関係に基づいて従来の $\sin^2\psi$ 法に代る“重み付き平均解析法”を新しく提案する。

2.2　回折強度分布曲線の解析

まず最初に，急激なひずみこう配を有する表面層からの回折強度分布曲線を Warren の Powder pattern power theorem および Small coherent domains and strains の理論〔151〕を応用して解析した。計算を容易にするため次の仮定を設けておくことにする。

(1) 表面層には小さな可干渉領域（各原子から散乱されたX線が互いに干渉し合って回折線を生ずる領域）がランダムな方位に分布存在する。

(2) それぞれの可干渉領域内のひずみは一様である。

(3) ひずみは表面から深さ方向に線形に変化する。

(4) ひずみ主軸は試料座標系に一致する。すなわち，一つの主軸は試料表面法線方向に向いている。

(5) 優先方位は存在しない。

(6) 入射X線ビームは完全に平行で単色化されている。

(7) 側傾法機構〔163〕（ψゴニオメータ法〔164〕）を採用する。

Fig. 2.1の上部に示すように，表面層を厚さΔの薄層に分割する。このΔは加工層に存在する可干渉領域の直径，すなわち塑性変形によって生じた亜結晶粒径程度にとる。

まず最初に $\psi = 0^\circ$ の場合を考え，X線の材料中での吸収効果を無視して一つの層からの反射強度を求めることにする。厚さΔの層の中には亜結晶（すなわち可干渉領域）がランダム方位であるという仮定から，紛末試料と同様な取り扱いができ，Small coherent domains and strains の理論をそのまま適用することが可能になる。この理論によると，回折リング上の単位長さ当りの強度は(0 0 ℓ)反射に対して

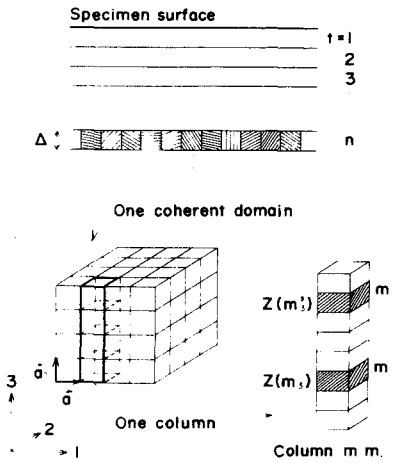


Fig. 2.1. Cross section of the deformed surface layer which is divided into thin layers containing randomly oriented coherent domains.

$$P'(2\theta) = \frac{KMF^2}{\sin^2\theta} \sum_{m_1} \sum_{m_2} \sum_{m_3} \sum_{m_3'} [e^{2\pi i \ell [Z(m_3')-Z(m_3)]} e^{2\pi i (m_3'-m_3)h_3}]_{m_1 m_2} \quad (2.1)$$

で表わされる〔151〕。ここで m_1，m_2，m_3 は格子ベクトル $\vec{a}_1$，$\vec{a}_2$，$\vec{a}_3$ に沿う座標成分，$Z(m_3)$ は m_3 番目の単位格子の $\vec{a}_3$ 方向，すなわち回折面に垂直方向の変位成分，h_3 は回折ベクトルを決定する連続変数で $h_3 = 2|\vec{a}_3|\sin\theta/\lambda$ で与えられる。F は構造因子，M は一つの層に含まれる結晶の数，K はX線の波長λや結晶の構造などによって決まる定数である。

いま，可干渉領域内でひずみは一様であるという仮定（2）を適用すれば，$\vec{a}_3$ 方向のひずみを ε_3 として $Z(m_3) = \varepsilon_3 m_3$，$Z(m_3') = \varepsilon_3 m_3'$ の関係が成立つ。また Fig. 2.1 の下部に示されるように，一つの結晶を $\vec{a}_3$ 方向に沿う単位格子を積み上げた柱の集りであると考えると，その結晶内のすべての柱についてひずみは一様であるから m_1，m_2 に関する和 $\sum_{m_1}\sum_{m_2}$ は N_1N_2 に置き換えられる。N_1，N_2 はそれぞれ一つの結晶を構成している $\vec{a}_1$，$\vec{a}_2$ 方向の柱の数である。したがって式（2.1）は

$$P'(2\theta) = \frac{KMF^2}{\sin^2\theta} N_1N_2 \sum_{m_3} \sum_{m_3'} [e^{2\pi i \ell \varepsilon_3 (m_3'-m_3)} e^{2\pi i (m_3'-m_3) h_3}]$$

$$= \frac{KMF^2}{\sin^2\theta} N_1N_2 \sum_{m_3} \sum_{m_3'} e^{2\pi i (m_3'-m_3)(h_3+\ell\varepsilon_3)} \qquad (2.2)$$

となる。つぎに $n = m_3' - m_3$ とおけば

$$\sum_{m_3} \sum_{m_3'} f(m_3'-m_3) = \sum_{n=-N_3+1}^{N_3-1} f(n) N_n$$

N_3: m_3 および m_3' の上限

N_n: 等しいnをもつ $f(n)$ の数

の関係があるから式（2.2）は

$$P'(2\theta) = \frac{KMF^2}{\sin^2\theta} N_1N_2 \sum_{n=-N_3+1}^{N_3-1} N_n(\text{column}) e^{2\pi i (h_3+\ell\varepsilon_3)n} \qquad (2.3)$$

と表わすことができる。ここで $N_n(\text{column})$ は N_3 個の単位格子から成る一つの柱の中で n 個の格子間隔をもった単位格子の対の数であり

$$N_n(\text{column}) = N_3 - |n|$$

である。したがって式（2.3）は

$$P'(2\theta) = \frac{KMF^2 N_1N_2}{\sin^2\theta} \sum_{n=-N_3+1}^{N_3-1} (N_3-|n|) e^{2\pi i (h_3+\ell\varepsilon_3)n}$$

$$= \frac{KMF^2 N_1N_2}{\sin^2\theta} \sum_{n=-N_3+1}^{N_3-1} (N_3-|n|)\{\cos 2\pi (h_3+\ell\varepsilon_3)n\} \qquad (2.4)$$

となる。これが(0 0 ℓ)反射のときのひずみ ε_3 を有する結晶から成る一つの薄層からの回折強度分布式を与える。

つぎにX線の吸収を考慮して各層からの強度の和をとると，全回折強度を与える式は次式で表わされる。

$$P_t'(2\theta) = \frac{KMF^2 N_1N_2}{\sin^2\theta} \sum_{t=1}^{\infty} e^{-2\mu t\Delta/\sin\theta} \sum_{n=-N_3+1}^{N_3-1} (N_3-|n|)\cos 2\pi (h_3+\ell\varepsilon_3)n \qquad (2.5)$$

ここで ε_3 を深さ $t\Delta$ の関数として

$$\varepsilon_3 = \varepsilon_0 + \gamma t\Delta \qquad (2.6)$$

と近似すると

$$P_t'(2\theta) = \frac{KMF^2N_1N_2}{\sin^2\theta}\sum_{n=-N_3+1}^{N_3-1}\sum_{t=1}^{\infty} e^{-2\mu t\Delta/\sin\theta}(N_3-|n|)\cos 2\pi\{h_3 n+\ell n(\varepsilon_0+\gamma t\Delta)\} \quad (2.7)$$

となるので，cosine 項を加法定理で展開し，さらに吸収項を含む無限和を積分で近似すると $\psi = 0$ の場合の全回折強度分布を与える関係として次式を得る。

$$P_t'(2\theta) = \frac{KMF^2N_1N_2}{\sin^2\theta}\sum_{n=-N_3+1}^{N_3-1}(N_3-|n|)\{(\frac{2\mu\Delta}{\sin\theta})^2+(2\pi n\ell\gamma\Delta)^2\}^{-1}$$
$$\times\{\frac{2\mu\Delta}{\sin\theta}\cos 2\pi n(h_3+\ell\varepsilon_0)-2\pi n\ell\gamma\Delta\sin 2\pi n(h_3+\ell\varepsilon_0)\} \quad (2.8)$$

任意のψにおける強度分布式を得るため，主ひずみ $\varepsilon_1(t)$，$\varepsilon_2(t)$ および $\varepsilon_3(t)$ を

$$\varepsilon_1(t) = \varepsilon_1^0 + \alpha t\Delta, \quad \varepsilon_2(t) = \varepsilon_2^0 + \beta t\Delta, \quad \varepsilon_3(t) = \varepsilon_3^0 + \gamma t\Delta \quad (2.9)$$

とおく。ここでε_1^0，ε_2^0，ε_3^0は表面におけるひずみ，α，β，γ はひずみこう配である。座標系を Fig. 2.2 のようにとると，任意方向の垂直ひずみ$\varepsilon_{\phi\psi}(t)$は

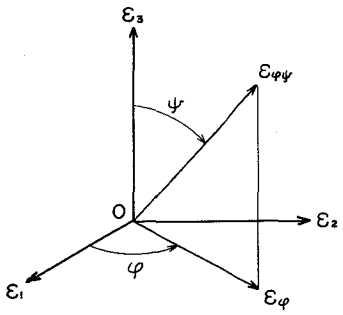


Fig. 2.2. Relation between $\varepsilon_{\phi\psi}$ and principal strains. ε_1 and ε_2 are principal strains parallel to the specimen surface and ε_3 is the strain normal to the surface.

$$\varepsilon_{\phi\psi}(t) = \varepsilon^0 + \xi t\Delta \quad (2.10)$$

ここで

$$\varepsilon^0 = \varepsilon_3^0 + (\varepsilon_1^0\cos^2\phi + \varepsilon_2^0\sin^2\phi - \varepsilon_3^0)\sin^2\psi \quad (2.10a)$$

$$\xi = \gamma + (\alpha\cos^2\phi + \beta\sin^2\phi - \gamma)\sin^2\psi \quad (2.10b)$$

側傾法における任意方向(ϕ，ψ)の強度分布式は式（2.8）のμの代りに $\mu/\cos\psi$，ε_0 およびγの代りにそれぞれ式（2.10）の ε^0 およびξを代入すればよく最終的に次式となる。

$$P_t'(2\theta,\phi,\psi) = \frac{KMF^2N_1N_2}{\sin^2\theta}\sum_{n=-N_3+1}^{N_3-1}(N_3-|n|)\{(\frac{2\mu\Delta}{\sin\theta\cos\psi})^2+(2\pi n\ell\xi\Delta)^2\}^{-1}$$

$$\times\{\frac{2\mu\Delta}{\sin\theta\cos\psi}\cos 2\pi n(h_3+\ell\varepsilon^0)-2\pi n\ell\xi\Delta\sin 2\pi n(h_3+\ell\varepsilon^0)\}$$

(2.11)

2.3 重み付き平均解析法

2.3.1 重み付き平均ひずみ

いま深さ $z = t\Delta$ を連続変数として考えると，Fig. 2.2で示される任意方向（ϕ，ψ）の垂直ひずみ $\varepsilon_{\phi\psi}$ は

$$\varepsilon_{\phi\psi}(z) = \varepsilon^0 + \xi z \tag{2.12}$$

で与えられる。側傾法の場合を考えると，X線の吸収の影響を考慮に入れた重み付き平均ひずみ $<\varepsilon_{\phi\psi}>$ は

$$<\varepsilon_{\phi\psi}> = \frac{\int_0^\infty e^{-2\mu z/\sin\theta\cos\psi}\varepsilon_{\phi\psi}(z)dz}{\int_0^\infty e^{-2\mu z/\sin\theta\cos\psi}dz} \tag{2.13}$$

であるから式（2.12）を代入して次式が得られる。

$$<\varepsilon_{\phi\psi}> = \varepsilon^0 + \xi\frac{\sin\theta\cos\psi}{2\mu} \tag{2.14}$$

式（2.10a），（2.10b）および Bragg の関係式 $\lambda = 2d\sin\theta$ を用いて具体的に表わすと次式が得られる。

$$<\varepsilon_{\phi\psi}> = \varepsilon_3{}^0+(\varepsilon_1{}^0\cos^2\phi+\varepsilon_2{}^0\sin^2\phi-\varepsilon_3{}^0)\sin^2\psi$$
$$+\{\gamma+(\alpha\cos^2\phi+\beta\sin^2\phi-\gamma)\sin^2\psi\}\frac{\lambda}{4\mu d}\sqrt{1-\sin^2\psi} \tag{2.15}$$

すなわち，ひずみこう配α，β，γの存在によって $<\varepsilon_{\phi\psi}>$ はもはや $\sin^2\psi$ に対して線形関係にないことが理解できる。また，$\alpha = \beta = \gamma = 0$ の場合には通常の $\sin^2\psi$ 法の関係式になることも容易に理解できる。式（2.15）が通常の $\sin^2\psi$ 法に代って，急激な応力こう配を有するときの重み付き平均解析法の基本式となる。

2.3.2 重み付き平均解析法の意味

2.4.2節あるいは2.5.1節で述べるように，急激なひずみこう配が存在する場合，回折線そのものに非対称性を帯びてくる。式（2.15）で表現される $<\varepsilon_{\phi\psi}>$ はひずみ $\varepsilon(z)$ に関する

重み付き平均値であるが，測定可能な量は回折線プロフィルから得られるピーク位置，半価幅中点位置，重心位置など回折角を示す特性値である。回折線が非対称になればこれら特性値はそれぞれ異なる値を持つことになるから，式（2.15）の$\langle \varepsilon_{\phi\psi} \rangle$を通じてひずみ因子($\varepsilon_1{}^0$, $\varepsilon_2{}^0$, $\varepsilon_3{}^0$, α, β, γ)と結ばれるのは実際に観測される回折線プロフィルのいかなる特性値であるかを知っておくことが必要である。

さて，一般にひずみ状態および無ひずみ状態の格子面間隔をdおよびd_0で表わし，また簡単のため(0 0 ℓ)反射を考えると$d = a_3/h_3$, $d_0 = a_3/\ell$であるから，ひずみεは

$$\varepsilon = \frac{d - d_0}{d_0} = \frac{\ell - h_3}{h_3} \tag{2.16}$$

で与えられる。ここでh_3およびℓは Bragg の関係式より

$$h_3 = \frac{2\sin\theta}{\lambda|\vec{b}_3|} = \frac{2a_3\sin\theta}{\lambda}, \qquad \ell = \frac{2\sin\theta_0}{\lambda|\vec{b}_3|} = \frac{2a_3\sin\theta_0}{\lambda} \tag{2.17}$$

で表わされる〔151〕。a_3は実空間での格子定数，$\vec{b}_3$は逆格子ベクトルを表わす。θ_0は無ひずみ状態の Bragg 角，θはその近傍の角であるから$\theta = \theta_0 + \delta$とすると$\delta$は微小量であり

$$\sin\theta \simeq \sin\theta_0 + \cos\theta_0 \cdot \delta \tag{2.18}$$

の関係が成立する。式（2.17），（2.18）およびδが微小量であることから式（2.16）は次式になる。

$$\varepsilon = \frac{\ell - h_3}{h_3} = -\frac{\cos\theta_0 \cdot \delta}{\sin\theta_0} \tag{2.19}$$

一方，式（2.18）の関係を用いると

$$\frac{\ell - h_3}{\ell} = \frac{\sin\theta_0 - \sin\theta}{\sin\theta_0} \simeq -\frac{\cos\theta_0 \cdot \delta}{\sin\theta_0} \tag{2.20}$$

すなわち，Fig. 2.3（a）の Bragg 角θ_0に比べて回折線全体をカバーする拡がりδが微小量であるという仮定により，式（2.19）と式（2.20）から

$$\varepsilon = \frac{\ell - h_3}{h_3} \simeq \frac{\ell - h_3}{\ell} \tag{2.21}$$

が証明される。

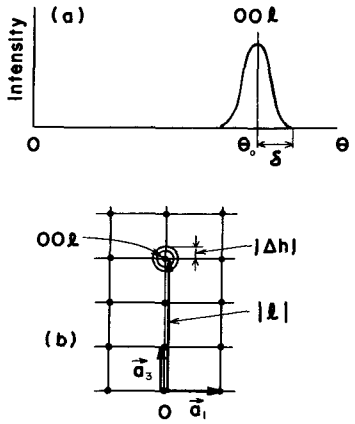


Fig. 2.3. Representation of (00ℓ) reflection in real and reciprocal spaces. (a) Illustration of (00ℓ) reflection curve and its width. (b) Illustration of extent of region for (00ℓ) reflection in reciprocal space.

あるいは別の方法で，$h_3 = \ell + \Delta h$とおくと上の結果が簡単に導かれる。

$$\varepsilon = \frac{\ell - h_3}{h_3} = \frac{-\Delta h}{\ell + \Delta h} = -\frac{\Delta h}{\ell} + \frac{(\Delta h)^2}{\ell^2} - \cdots\cdots \simeq \frac{\ell - h_3}{\ell}$$

ここでは Fig. 2.3（b）のように逆空間の原点から逆格子点00ℓまでの距離$|\ell|$に比べて，00ℓ点のまわりの回折に寄与する領域$|\Delta h|$が小さいという仮定を用いた。δおよび$|\Delta h|$がそれぞれθ_0および$|\ell|$に比べて微小量であるという仮定は，一般の結晶体の回折を考える場合常に成立する。

つぎに重み付き平均ひずみは式（2.21）を用いると

$$\langle \varepsilon \rangle = \frac{\int_0^\infty I(z)\varepsilon(z)dz}{\int_0^\infty I(z)dz} = \frac{\int_0^\infty I(z)(1-h_3/\ell)_z dz}{\int_0^\infty I(z)dz} = 1 - \frac{\langle h_3 \rangle}{\ell} \qquad (2.22)$$

で表わされる。I(z) はzの深さから回折してくる強度で式(2.13)の$\exp[-2\mu z/\sin\theta\cos\psi]$に相当する量である。一方,$h_3$に対する強度分布の重み付き平均$\langle h_3 \rangle$に対応するひずみは

$$\varepsilon^* = \frac{\ell - \langle h_3 \rangle}{\langle h_3 \rangle} \simeq \frac{\ell - \langle h_3 \rangle}{\ell} \qquad (2.23)$$

したがって，式（2.22）と式（2.23）より

$$\langle \varepsilon \rangle = \varepsilon^* \qquad (2.24)$$

すなわち，ひずみ分布の重み付き平均値$\langle \varepsilon \rangle$は実際の回折強度分布曲線の重心位置に対応するひずみε^*と一致することがわかる。換言すれば，重み付き平均解析法の基本式（2.15）の右辺のひずみ因子と対応関係にあるのは，回折線のピーク位置でも半価幅中点位置でもなく，重心位置のみが意味をもつということである。このように，表面から深さの関数としてひずみ分布が与えられたとき，ひずみに関する重み付き平均操作は実際に2θの関数として強度分布を計算することなく強度分布曲線の重心位置を与えるという巧妙な方法であると理解できる。

2.4　回折強度分布曲線の計算と$\sin^2\psi$線図

X線回折理論に基づいてひずみこう配のあるときの回折強度分布曲線が式（2.11）のように得られたので，以下の仮定の下に種々の条件を与えて強度分布曲線を計算し，それを基に$\sin^2\psi$線図を描いてみることにする。

問題を簡単にするため等二軸応力状態を考えてひずみ分布を

$$\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon_1{}^0 + \alpha t\Delta, \qquad \varepsilon_3 = \varepsilon_3{}^0 + \gamma t\Delta \qquad (t = 1,2,3,\ldots.) \qquad (2.25)$$

で与える。式（2.11）において

$$K' = \frac{KMF^2N_1N_2}{\sin^2\theta}$$

と改めておくと，この場合の全強度分布式は

$$P_t'(2\theta,\psi) = K' \sum_{n=-N_3+1}^{N_3-1} (N_3-|n|)\{(\frac{2\mu\Delta}{\sin\theta\cos\psi})^2+(2\pi n\ell\xi\Delta)^2\}^{-1}$$

$$\times\{\frac{2\mu\Delta}{\sin\theta\cos\psi}\cos 2\pi n(h_3+\ell\varepsilon^0)-2\pi n\ell\xi\Delta\sin 2\pi n(h_3+\ell\varepsilon^0)\} \qquad (2.26)$$

$$\varepsilon^0 = \varepsilon_3{}^0 + (\varepsilon_1{}^0 - \varepsilon_3{}^0)\sin^2\psi, \qquad \xi = \gamma + (\alpha - \gamma)\sin^2\psi \qquad (2.27)$$

である。この式を用いて Table 2.1 の条件の下で種々のひずみこう配を与えて回折強度分布

Table 2.1. Characteristic values on calculating diffraction profiles.

Characteristic X-ray	CrK_α (λ=0.229092 nm)
Diffraction plane	Fe(002)
Lattice constant	a = 0.28664 nm
Bragg angle	θ_0 = 53.05685°
Linear absorption coefficient	μ = 905.05 cm^{-1}
The number of unit cells along [00ℓ]	N_3 = 350
Diameter of coherent domain	D = 100 nm
Thickness of sub-divided layer	Δ = 100 nm
Young's modulus	E = 206 GPa
Poisson's ratio	ν = 0.28

曲線を描き，そのピーク位置，半価幅中点位置および重心位置を数値計算により求めた。可干渉領域の大きさを 100 nm と考えて分割層の厚さΔはそれと同じ大きさにとった。また N_3 は可干渉領域に属する [0 0 ℓ] 方向の単位格子の数で $N_3 = 100\,nm/a_3 \simeq 350$ とした。さらに h_3 に対応する変数θの変動は θ_0 の近傍で微小であるから一定とし，比例定数 K' は 1 とおいた。さらに計算を容易にするために表面でのひずみ $\varepsilon_1{}^0, \varepsilon_2{}^0, \varepsilon_3{}^0$ はすべて 0 とした。

2.4.1 ひずみこう配のないときの回折強度分布曲線

最初にひずみこう配が 0 のときの回折強度分布曲線を計算してみた。 Fig. 2.4 に見られるように回折極大 Imax は Bragg 角に正確に位置し， Bragg 角から少し離れた両脇に小さい

副極大が現われる（縦軸を対数表示してあるため副極大が拡大されている）。この図形より1／2 Imaxに相当する h_3 は2.0013 および1.9987であり，半価幅は 0.198°(2θ) となる。

一方 Scherrer の式から求まる半価幅は

$$B(2\theta) = \frac{0.9\lambda}{D\cos\theta_0} \qquad (2.28)$$

であり〔165〕，Table 2.1の値より B(2θ) = 0.197°(2θ) となってよい一致が見られるので，式（2.11）で得られる回折強度分布曲線は正確な図形を与えているものと考えられる。

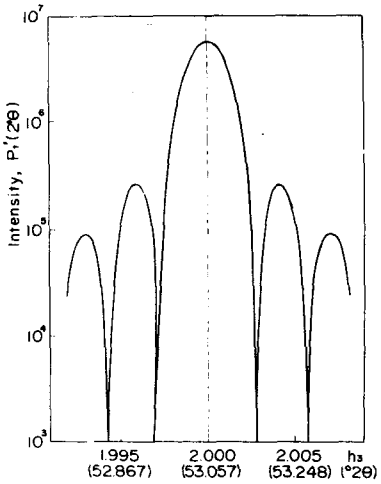


Fig. 2.4. Total power distribution curve without strain gradient.

2.4.2 ひずみこう配を有するときの回折強度分布曲線

つぎに等二軸応力状態の下で種々のひずみこう配を与えて回折強度分布曲線を計算した。Fig. 2.5は ψ = 0 に対して三つのひずみこう配を与えたもの，Fig. 2.6は α = 1.13/cm，γ = -0.9/cm について ψ角による分布曲線の相異を見た例である。表面でのひずみが0であるにもかかわらず，とくにひずみこう配の大きいとき，また ψ の小さい値に対してピーク位置が Bragg 角 θ_0 から偏り，かつ分布曲線が非対称になることが明らかである。これらの分布曲線よりピーク位置，半価幅中点位置および重心位置を計算し，それぞれの回折線位置に対

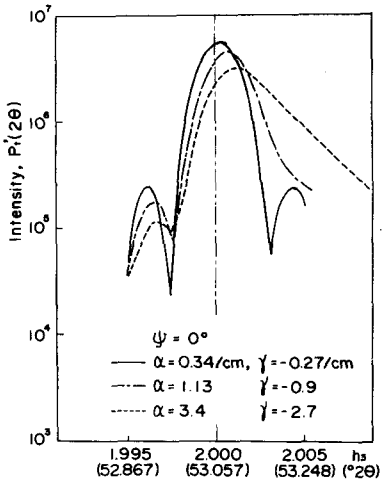


Fig. 2.5. Total power distribution curves at ψ=0° for various strain gradients.

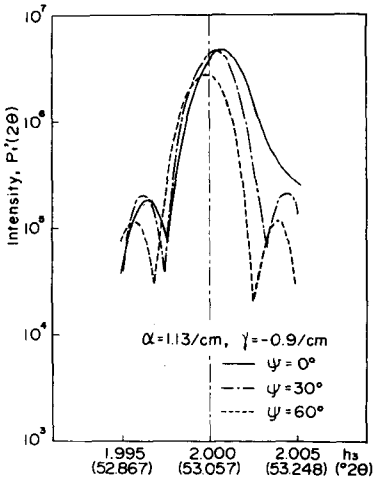


Fig. 2.6. Total power distribution curves at angles ψ=0°, 30° and 60° for a given strain gradient.

応するひずみを求めて$\sin^2\psi$線図に図示したものが Fig. 2.7 である。ひずみこう配が存在するときにはε_ψと$\sin^2\psi$の間の関係は予期されたように湾曲することが明らかになった。またひずみこう配が小さいときには三種の回折線位置決定法の間で差は見られないが，ひずみこう配が大きくなるにしたがってそれらの間の差が明瞭になってくることが注目される。とくに重心位置に対応するひずみの分布は放物線状であるが，ピーク位置，半価幅中点位置に対応するひずみ分布はS字状曲線となり分布形自体三者間で異なる。放物線分布は重み付き平均ひずみを与える式（2.15）の形からも明らかであり，事実同じ条件で式（2.15）から計算された値は Fig. 2.7 の実線に完全に一致した。この結果は 2.3.2 節で証明した結論を，実際に計算された回折強度分布曲線を用いて再確認したことになる。

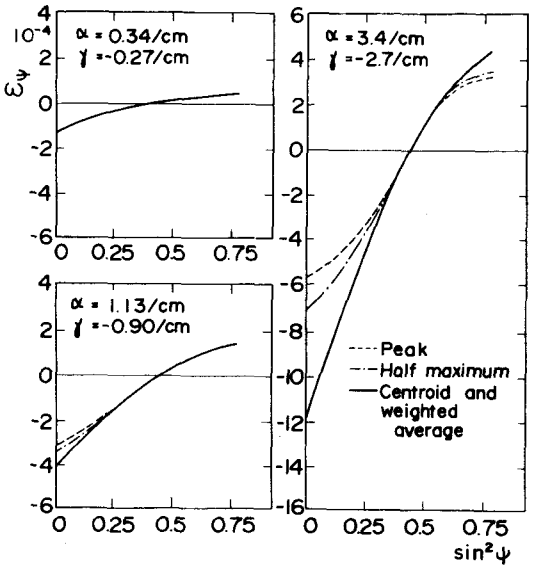


Fig. 2.7. ε_ψ-$\sin^2\psi$ diagrams for various strain gradients.

2.5 正規分布曲線の重ね合わせによる合成プロフィル

2.5.1 重心位置の簡単な求め方

2.3.2 節および 2.4.2 節で述べたように式（2.15）の右辺のひずみ因子($\varepsilon_1{}^0$, $\varepsilon_2{}^0$, $\varepsilon_3{}^0$, α, β, γ) と直接関係するのは，回折線の重心位置に対応するひずみであるから，実際に測定された回折線図形の重心位置を精度良くとらえなければならない。重心位置は測定角 2θ における強度を $I(2\theta)$ とすると

$$\langle 2\theta \rangle = \frac{\int I(2\theta)\,2\theta\, d(2\theta)}{\int I(2\theta)\, d(2\theta)} \tag{2.29}$$

で与えられる〔166〕が，この方法は実際には back ground 強度の統計変動により正確な back ground 直線を決めることが困難となり，重心位置の決定に際して誤差が大きいと言われている〔112〕。式（2.29）を用いずに図式的に重心位置を求める方法を考えるため，Fig. 2.1 のように表面から厚さΔの薄層に分割し，各層からの回折強度曲線を素プロフィルとして

与えてすべての層から得られる合成プロフィルを求めてみた。ここで，計算を容易にするためつぎの仮定を設けておく。

(1) 素プロフィルは正規分布曲線を描く。

(2) 回折強度は表面から深さ方向に指数関数的に減少する。

(3) 応力（ひずみ）分布は表面から線形に変化する。

(4) 素プロフィルの標準偏差はすべての層について等しい。

薄層に分割して合成プロフィルを作成する考え方は Warren 流の正攻法で全回折強度分布式を得たのと同一である。2.2節では各層におけるひずみは均一であるとしたが，本節の方法を用いると素プロフィルの標準偏差を適当に与えることによって各層における均一ひずみからのゆらぎ，すなわち微視的残留ひずみによる回折線の拡がりの効果も検討することが可能となる。

側傾法の場合を考慮して，仮定（1）および（2）に基づき t 番目の層から得られる素プロフィル $f_t(2\theta)$ を次式で表わす。

$$f_t(2\theta) = \exp\left[-\frac{2\mu t\Delta}{\sin\theta_0\cos\psi}\right]\exp\left[-\frac{(2\theta-2\theta_t)^2}{2s^2}\right] \tag{2.30}$$

$2\theta_t$ は素プロフィルのピーク位置で等二軸応力状態

$$\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_0 + \alpha' t\Delta \tag{2.31}$$

を仮定すると

$$2\theta_t = 2\arcsin\left\{\frac{\lambda}{2(1+\varepsilon_\psi)d_0}\right\} \tag{2.32}$$

$$\varepsilon_\psi = \frac{1}{E}\{-2\nu + (1+\nu)\sin^2\psi\}(\sigma_0 + \alpha' t\Delta) \tag{2.33}$$

で与えられる。ここで σ_0 は表面における応力値，α' は表面下の応力こう配である。式（2.32）および（2.33）を式（2.30）に代入すると素プロフィルの完全な形が得られ，これより合成プロフィル $F(2\theta)$ は次式となる。

$$F(2\theta) = \sum_{t=0}^{\infty} f_t(2\theta) \tag{2.34}$$

この式を用いて Table 2.2 の条件の下で種々の s，α，σ_0 および ψ についての合成プロフィルを得ることができる。ここで和の上限はX線の侵入深さあるいは合成プロフィルの収束性を考慮して，t_{max} = 600 までとした。Fig. 2.8 は $\sigma_0 = 0$，$\alpha' = 100$ MPa/μm，$\psi = 0$ の場

Table 2.2. Characteristic values on calculating resultant profiles.

Characteristic X-ray	CrKβ (λ=0.208480 nm)
Diffraction plane	Fe(211)
Bragg angle	θ_0 = 62.96823°
Lattice spacing	d_0 = 0.117024 nm
Linear absorption coefficient	μ = 647 cm^{-1}
Thickness of sub-divided layer	Δ = 10^{-5} cm
Young's modulus	E = 206 GPa
Poisson's ratio	ν = 0.28

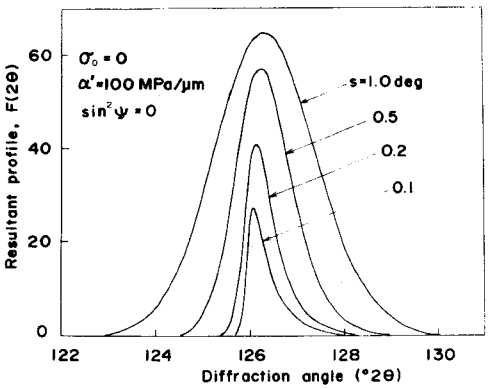


Fig. 2.8. Resultant profiles with various s for Fe(211) CrKβ line at ψ=0.

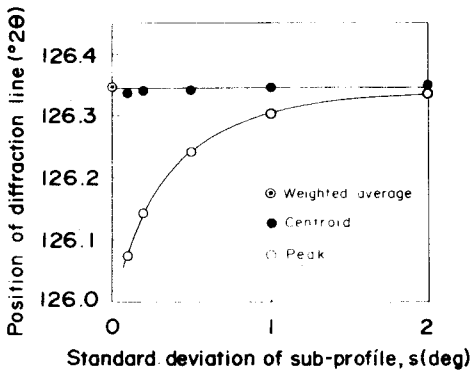


Fig. 2.9. Peak and centroid positions of the resultant profiles relating to the breadth of sub-profile. In this case σ_0 and α' are fixed at 0 MPa and 100 MPa/μm, respectively.

合について，素プロフィルの標準偏差 s を変化させたときの合成プロフィルである。s が小さいときには極端な非対称性が見られるが，s が大きくなるにしたがって合成プロフィルの幅が広がるとともに非対称性は薄れてゆく。 Fig. 2.9 は Fig. 2.8 の合成プロフィルのピーク位置と重心位置を素プロフィルの標準偏差 s に対して図示したものである。σ_0 および α' が一定値をとれば重心位置は s に依存せず一定であるが，ピーク位置は s に大きく依存する。すなわち，2.3.1 節で扱った重み付き平均操作は素プロフィルの幅を考慮に入れずに計算されるものであるが，正規分布曲線のようにその最大位置に対して対称な関数であれば，それらによる合成プロフィルの重心位置は重み付き平均位置に一致することがわかる。したがって 2.3.2 節および 2.4.2 節で示したと同様，応力因子（σ_0，α'）を一義的に決定するのは合成プロフィルの重心位置であり，ピーク位置などはそうでないことがわかる。ただし， Fig. 2.9 にも示さ

れるように素プロフィルの幅，すなわち合成プロフィルの幅が充分大きい場合には近似的にピーク位置あるいはその他の特性値を重心位置に代用することができる。 Fig. 2.10 は σ_0 = 0, α' = 100 MPa/μm, s = 0.1 deg の場合の異なる $\sin^2\psi$ の値に対して描いた合成プロフィルである。 Fig.2.6 と同様に $\alpha' > 0$ の場合には $\sin^2\psi = 0$ のとき高角度側

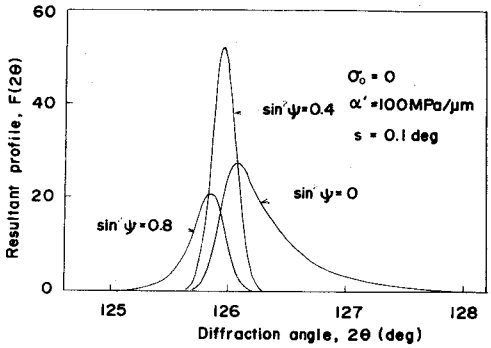


Fig. 2.10. Three typical resultant profiles at different values of $\sin^2\psi$.

へ長くすそをひき非対称であるが，$\sin^2\psi$ = 0.4 ではほぼ対称図形を描き，$\sin^2\psi$ = 0.8 では逆に低角度側へすそをひくようになる。α'を一定に保って σ_0 を変化させた場合には，各プロフィルが左右に移動するのみでプロフィル形状には何ら変化はない。

これらの合成プロフィルについて， Fig.2.11 の挿入図に示したように，2θ 軸に平行な直線を引き合成プロフィルの重心位置 $2\theta_c$ がプロフィルを二等分する高さ Ic を求めると，プロフィルのピーク高さ Imax との比 Ic／Imaxは σ_0, α', ψ の値によらず s < 0.5 の範囲では約 1／5 になり，s > 0.5 ではプロフィルの非対称性が薄れるため図式的に求まる Ic／Imax の範囲が広がることがわかった (Fig.2.11)。このことより，実測した回折線プロフィルにおいて back ground より 1／5 Imax の高さに back ground に平行な直線を引き，

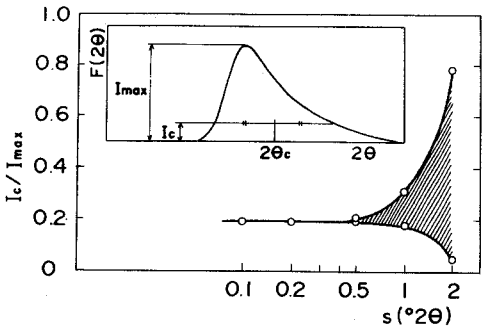


Fig. 2.11. Centroid position of the resultant profiles. The height relating to the centroid position is about one fifth of the peak height of resultant profile.

その中点位置を求めると式（2.29）に代って近似的に回折線の重心位置を与えることになる。またプロフィル幅が大きくなる程，半価幅中点位置あるいはピーク位置でもって重心位置に代用し得ることもわかる。

2.5.2 $\sin^2\psi$ 線図と応力因子の評価

前節で作成した合成プロフィルよりピーク位置と重心位置を求め，それぞれに対応する格子定数を計算して $\sin^2\psi$ 線図を描いた。Fig. 2.12 は $\sigma_0 = 0$，$s = 0.1°$ として異なる α' に対して描いたものである。Fig. 2.7 と同様に重心位置はなめらかな二次曲線であるが，ピーク位置はS字状の曲線になる。また両者の差は α' が大きい程顕著であり，α' が小くなると両者はほとんど一致し直線に近くなる。Fig. 2.13 は $\sigma_0 = 0$，$\alpha' = 100$ MPa/μm として異なる s に対して描いた $\sin^2\psi$ 線図である。重心位置は s によらず同一の二次曲線を描くが，ピーク位置は s の値とともに変化し s が小さいほど重心位置との差が大きく，s が大きくなると近似的に重心位置と一致してくることがわかる。またこの重心位置の曲線は重み付き平均ひずみの式（2.15）より求めた $\langle a_\psi \rangle$ の曲線と一致することも明らかであった。

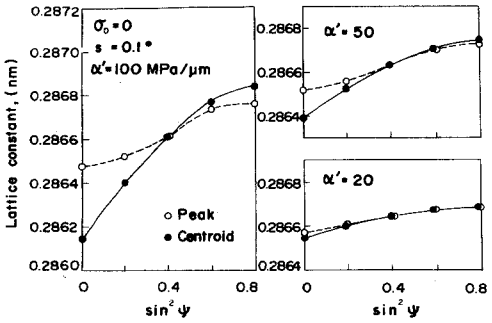


Fig. 2.12. $\sin^2\psi$ diagrams for various stress gradients.

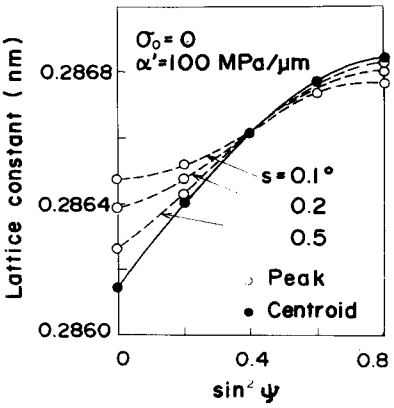


Fig. 2.13. Effect of width in subprofile on $\sin^2\psi$ diagram which is evaluated from peak and centroid positions of resultant profiles.

最後に Fig. 2.12および Fig. 2.13 に示されたデータを用いて式（2.15）により σ_0 と α' を逆算してみた。その結果は Fig. 2.14 と Fig. 2.15 に示すとおりであり，重心位置を用いると α'，s によら

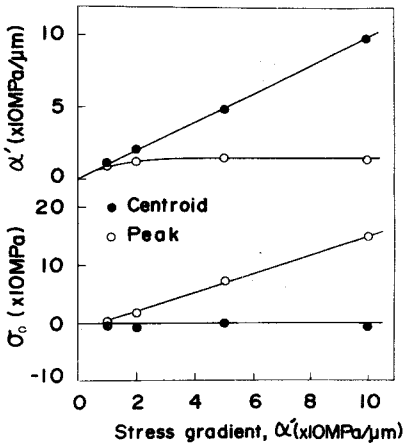


Fig. 2.14. Inverse calculation of σ_0 and α' from the data shown in Fig. 2.12.

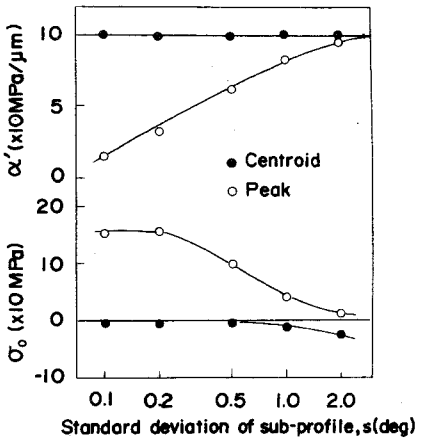


Fig. 2.15. Inverse calculation of σ_0 and α' from the data shown in Fig. 2.13.

ず仮定した σ_0 と α' が得られるが，ピーク位置を用いると α' の大きいとき，また s の小さいときに誤差が大きくなることがわかる。

2.6 結　言

Warren の回折理論にしたがった正攻法と正規分布の素プロフィルを合成する方法で，表面から線形に変化するひずみ（応力）こう配があるときの回折線プロフィルを計算し，また重み付き平均ひずみの物理的意味を注意深く検討した結果，つぎのことが明らかになった。

(1) ひずみこう配のある場合回折線プロフィルは非対称図形となり，その結果ピーク位置，半価幅中点位置，重心位置はそれぞれ異なる値になる。

(2) ピーク位置と重心位置の差はひずみ（応力）こう配が大きいほど，また素プロフィル幅が小さいほど顕著に現われる。

(3) ひずみ因子あるいは応力因子と不偏的な関係にあるのは回折線の重心位置であって，とくにひずみ（応力）こう配の大きいときや回折線幅の小さいときにはピーク位置，半価幅中点位置はひずみ（応力）因子と結びつく代表値ではない。

(4) 重み付き平均ひずみは式（2.15）で表わされ，回折線図形の重心位置に対応するひずみを求めることによってひずみ（応力）こう配のあるときの応力解析が可能になる。

(5) 回折線図形の 1／5 Imax の高さに back ground に平行な直線を引き，回折線図形を二等分する位置を求めれば，それは近似的に重心位置を与える。

第３章　重み付き平均解析法の実験的検討

3.1　緒　　言

前章で表面層に急激な応力こう配のある場合の回折強度分布曲線を解析した結果，それが非対称図形を描くことが明らかになった。そして，このような残留応力状態のとき，表面での応力（ひずみ）および表面下の応力（ひずみ）こう配をパラメータとした重み付き平均解析法の基本式

$$\langle \varepsilon_{\phi\psi} \rangle = \varepsilon_3{}^0 + (\varepsilon_1{}^0\cos^2\phi + \varepsilon_2{}^0\sin^2\phi - \varepsilon_3{}^0)\sin^2\psi + \{\gamma + (\alpha\cos^2\phi + \beta\sin^2\phi - \gamma)\sin^2\psi\}\frac{\lambda}{4\mu d}\sqrt{1 - \sin^2\psi}$$

を通して$\langle \varepsilon_{\phi\psi} \rangle$と不偏的な関係にあるのは，回折線の重心位置であることを示した。

本章はこの重み付き平均解析法の有効性を確認するための実験的検討を行った結果について述べる。本解析法を検討するのに最も簡単で，しかも現実に作成可能な供試材として市販の軸受鋼(ＳＵＪ２)焼なまし材を用い，ラッピング加工する方法を選んだ。この材料と加工方法により，ごく浅い表面層に無方位（等二軸）で急激な応力こう配を有する残留応力状態が得られると考えられる〔167〕。この供試材を用いて格子定数(a_ψ)の$\sin^2\psi$線図上の分布挙動を調べるとともに，ピーク法，半価幅中点法，重心法による回折線位置決定法の間の差の有無を調査した。また，試料表面を逐次電解研摩することによってその都度Ｘ線ひずみ測定を行い，重み付き平均解析法で深さ方向への残留応力分布を調べるとともに$\sin^2\psi$法による解析結果と比較検討した。

3.2　残留応力の解析法

Fig. 3.1 において主応力軸 σ_1，σ_2 を試料表面上に，σ_3 を表面法線方向にとる。$\sigma_3 = 0$ でσ_1，σ_2，σ_ϕ などが深さによらず一定であると仮定すると第１章で述べた$\sin^2\psi$法の基本式

$$\varepsilon_{\phi\psi} = \frac{1+\nu}{E}\sigma_\phi\sin^2\psi - \frac{\nu}{E}(\sigma_1 + \sigma_2) \tag{3.1}$$

が導かれる。しかし，σ_ϕ が深さ方向に応力こう配を有する場合には入射Ｘ線の方向を変えることによって有効侵入深さが変化し，σ_ϕ その

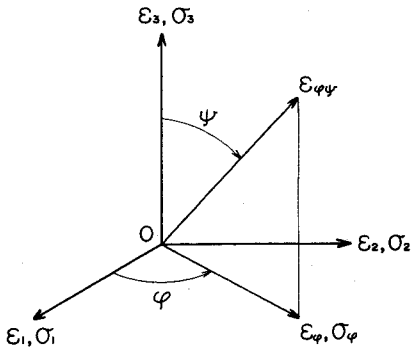


Fig. 3.1. Relation between stresses (strains) and coordinate axes.

ものが $\sin^2\psi$ の関数となるので $\varepsilon_{\phi\psi}$ と $\sin^2\psi$ の関係は線形でなくなる。このような場合には，前章で提案した重み付き平均解析法を用いなければならない。

等二軸応力で表面から直線的に変化するような状態 $(\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_\phi = \sigma_0 + \alpha' z)$ かつ $\sigma_3 = 0$ を仮定し，重み付き平均ひずみ $< \varepsilon_\psi >$ を応力成分で表わすと側傾法に対して

$$< \varepsilon_\psi > = -\frac{2\nu}{E}\sigma_0 + \frac{1+\nu}{E}\sigma_0 \sin^2\psi - \frac{1}{E}\{2\nu - (1+\nu)\sin^2\psi\}\frac{\sin\theta}{2\mu}\alpha'\sqrt{1-\sin^2\psi} \tag{3.2}$$

また後で問題になるが $\sigma_3 = \text{const.} \neq 0$ を仮定して式（3.2）を書き換えると次式を得る。

$$< \varepsilon_\psi > = \frac{1}{E}(\sigma_3 - 2\nu\sigma_0) + \frac{1+\nu}{E}(\sigma_0 - \sigma_3)\sin^2\psi - \frac{1}{E}\{2\nu - (1+\nu)\sin^2\psi\}\frac{\sin\theta}{2\mu}\alpha'\sqrt{1-\sin^2\psi} \tag{3.3}$$

ここで σ_0 は表面での応力，α' は表面下の応力こう配，θ は Bragg 角，μ は線吸収係数，E および ν はヤング率，ポアソン比である。式（3.2），（3.3）から明らかなように，応力こう配 α' が存在する場合は右辺第3項の存在により $< \varepsilon_\psi >$ は $\sin^2\psi$ に対して非線形となる。また両式の比較より σ_3 は右辺第1項および第2項のみに現われるから，$\sin^2\psi$ 線図の湾曲度には影響せず $\sin^2\psi = 0$ における切片と $\sin^2\psi$ 線図の平均こう配に影響を及ぼすことがわかる。

前章で詳述したように式（3.2），（3.3）の $< \varepsilon_\psi >$ と対応するのは回折線の重心位置に対応するひずみ ε^* である。回折線の重心位置 θ^* より Bragg の関係式を用いて格子定数 a^* を求め，無ひずみ状態の格子定数 a_0 を既知とすると

$$< \varepsilon_\psi > = \varepsilon^* = \frac{a^* - a_0}{a_0} \tag{3.4}$$

の関係が成立するから，σ_0，σ_3 および α' を未知数として最小二乗法を適用することができる。式（3.3）をこれらの三つの未知数でまとめて書き直すと

$$< \varepsilon_\psi > = \left(-\frac{2\nu}{E} + \frac{1+\nu}{E}\sin^2\psi\right)\sigma_0 + \left(\frac{1}{E} - \frac{1+\nu}{E}\sin^2\psi\right)\sigma_3 + \left(-\frac{2\nu}{E} + \frac{1+\nu}{E}\sin^2\psi\right)\frac{\alpha'}{2\mu}\sin\theta\sqrt{1-\sin^2\psi} \tag{3.5}$$

となる。ここで

$$
\left.
\begin{aligned}
Y_i &= \langle \varepsilon_\psi \rangle_i \\
A_i &= -\frac{2\nu}{E} + \frac{1+\nu}{E}\sin^2\psi_i \\
B_i &= \frac{1}{E} - \frac{1+\nu}{E}\sin^2\psi_i \\
C_i &= \left(-\frac{2\nu}{E} + \frac{1+\nu}{E}\sin^2\psi_i\right)\frac{\sin\theta}{2\mu}\sqrt{1-\sin^2\psi_i}
\end{aligned}
\right\} \qquad (3.6)
$$

とおくと σ_0, σ_3 および α' に関する線形方程式

$$
Y_i = A_i\sigma_0 + B_i\sigma_3 + C_i\alpha' \qquad (3.7)
$$

を得る。A_i, B_i, C_i は測定条件により与えられる量である。また Y_i は測定値であり，正規分布の誤差を伴ってその精度はすべて同じであると仮定する。これより最小二乗法を用いて σ_0, σ_3 および α' の最確値と信頼区間を求めることができる〔168〕。

3.3 実験方法

大きな残留応力を発生させることを目的としてＳＵＪ２を試験片に選んだ。形状は直径30㎜，厚さ10㎜の円板状であり，1123K，30分間真空中で焼なまして成形加工による残留応力を除去した。次いでこの試料の片側端面に Table 3.1 の条件でラッピング加工を施した。遊星歯車を有する平面ラップ盤を用いて，試験片端面にランダム方位の連続加工を与えた。加工の本質はと粒と表面との間にせん断力を伴うような有向性加工であるが，遊星歯車機構によってせん断力の作用は平均化され０になると考えられる。ラップ表面のあらさは 2.4 μm (R_{max})，また逐次電解研摩後のあらさは 1 μm(R_{max}) 以下であった。

Table 3.1. Lapping conditions.

Lapping method	Plane lapping
Lapping compound	GC#600
Lapping speed	0.44 m/sec
Lapping pressure	0.015 MPa
Lapping time	30 min
Lapping fluid	Machine oil

Ｘ線測定条件は Table 3.2 に示すとおりである。側傾法を採用し回折面には（211）面を用いた。また K_α 二重線分離の手続きの煩雑さを回避するために，回折線強度を多少犠牲にして

CrK_β 線を用いた。 Fixed time 法により back ground からピークを含めて回折線図形を描

Table 3.2. Conditions of X-ray measurement.

Characteristic X-ray	CrK_β
Tube voltage and current	35 kVP, 9 mA
Diffraction plane	Fe(211)
Diffraction angle	$2\theta \simeq 126°$
Measuring method	Side inclination, para-focusing
Counting method	1 min fixed time
Irradiated area	$\sim 1.5 \times 3\ mm^2$

き，測定値をローレンツかたより因子で補正した後，回折ピークの両側の back ground 強度の数点を通る直線を求めて back ground 強度を差し引いた。 Fig. 3. 2 は回折線位置決定の

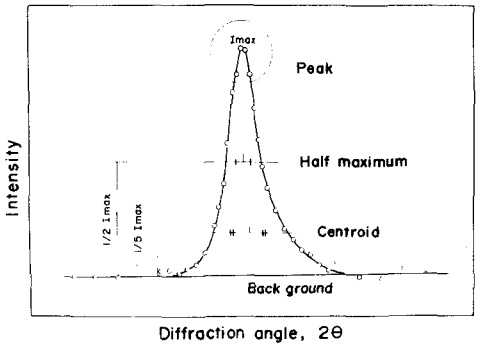


Fig. 3.2. Three methods of diffraction line location.

三種の方法を図示したものである。ピーク位置は回折線の最大ピーク付近の数点を用いて放物線近似法により決定し，重心位置は前章で述べたように 1／5 Imax における二等分点で近似した。

3. 4　実験結果

3. 4. 1　焼なまし状態における格子定数

Fig. 3. 3 は 1123 K, 30分の真空焼なまし材より得られた $\sin^2\psi$ 線図である。三種の回折線

位置決定法ともに，ほぼ直線かつ水平な関係が得られたので，それぞれの平均値をとって無ひずみ状態の格子定数 a_0 とし Table 3.3 に示した。式（3．1）の $\sin^2\psi$ 法により計算された初期残留応力値は同表に示されるとおりほぼ無応力であることがわかる。理由はよくわからないが CrK_β 線による（211）回折線は焼なまし状態においてすでに非対称図形を示し，各回折線位置決定法の間に差が認められた。しかしψ角が変化してもそれら

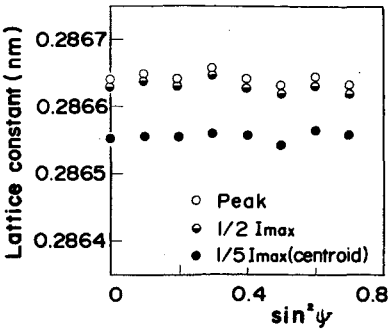


Fig. 3.3. $\sin^2\psi$ diagram obtained from annealed SUJ2.

Table 3.3. Initial lattice constants and stresses.

Determining method of diffraction line position	Mean lattice constant a_0 (nm)	Initial stress (MPa)
Peak (Parabola)	0.286642	-12 ± 12
HVB* (1/2 I_{max})	0.286629	-18 ± 15
Centroid (1/5 I_{max})	0.286557	4 ± 15

* HVB is the half-value breadth method.

の間の差はほぼ一定に保たれることから，以後系統的な差として処理した。

3.4.2 ラッピングによる無方位残留応力系の形成

Fig. 3.4 は Table 3.1 の条件でラッピング加工した表面からピーク法により得た $\sin^2\psi$ 線

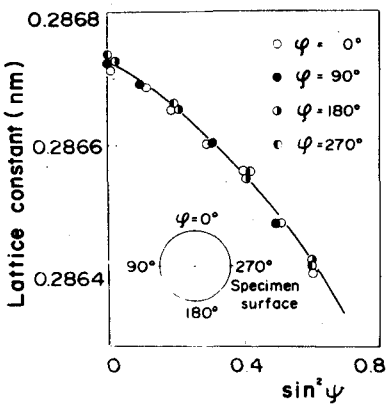


Fig. 3.4. $\sin^2\psi$ diagram obtained from lapped surface for four different orientations illustrated in the insert. Each lattice constant was converted from the peak position of diffraction line.

図である。図中に示した四つの方位に対して測定を行ったが，各 ϕ 方位に対する $\sin^2\psi$ 線図は完全に一致し，残留応力状態が無方位であることが確認された。また $\sin^2\psi$ 線図が湾曲している事実から，表面下に急激な残留応力こう配の発生していることが予想される。これらの結果より，単純化したモデルによる式（3.2）あるいは式（3.3）が適用できることがわかる。

3.4.3 ラッピング加工表面下の残留応力分布

Fig. 3.5 は同じ試料において 2 μm および 11 μm 電解研摩した面における $\sin^2\psi$ 線図の例で，回折線位置決定法による差を示したものである。位置決定法の違いにより明らかに差のあることが認められ，また表面近傍では a_ψ と $\sin^2\psi$ との間に直線関係が認められず湾曲化

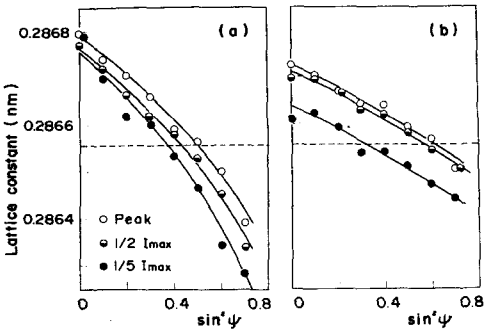


Fig. 3.5. Examples of $\sin^2\psi$ diagram obtained from electro-polished surfaces showing differences among determining methods of diffraction position. (a) 2 μm polished surface; (b) 11 μm polished surface. Dotted line is a mean lattice constant of annealed state corresponding to the centroid position.

していることが Fig. 3.4 と同様明らかである。これに対して研摩量が多くなるにつれて湾曲の度合は減少し，また平均こう配も小さくなる傾向にある。これらの事実は表面近傍のX線侵入深さの範囲内で急激な応力こう配が存在することの確かな現われであると考えられる。

ピーク位置，半価幅中点位置および重心位置より計算される応力値の差を見るため，Fig. 3.5 などのデータをもとに $\sin^2\psi$ 法によって応力解析を行った。その結果は Fig. 3.6 に示すとおりで表面下深い位置では差はないが表面近傍ではピーク法と重心法との間に約 100 MPa の差が生じている。これより，急激な応力こう配のあるときには回折線位置の決定法を吟味しな

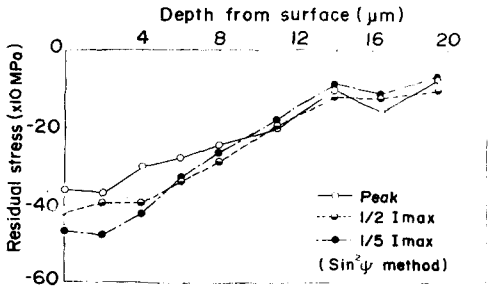


Fig. 3.6. Residual stress distributions calculated from three determining methods of diffraction position. All three sets of data were calculated by the $\sin^2\psi$ method.

くてはならないことが明白となる。

重み付き平均解析法の式（3.2）あるいは式（3.3）を適用する場合，前章でも述べたように意味のあるのは回折線の重心位置に対応するひずみであるから，以下の計算にはすべて重心法で整理した。Table 3.4 は $\sigma_3 = 0$ と仮定した重み付き平均解析法の式（3.2）により求めた σ_0 と α'，Table 3.5 は三軸応力状態の関係式（3.3）により求めた σ_0，σ_3 および α' の値で，これらの信頼区間は50%である。これらの結果をまとめて Fig. 3.7 に図示する。

Table 3.4. Values of σ_0 and α' analysed by the weighted averaging method assuming $\sigma_0 = 0$. Confidence limit is 50 per cent.

Distance from surface (μm)	σ_0 (MPa)	α' (MPa/μm)
0	-1010 ± 150	160 ± 30
2	-840 ± 160	110 ± 30
4	-820 ± 180	120 ± 30
6	-360 ± 100	20 ± 20
8	-160 ± 130	-10 ± 20
11	-420 ± 90	70 ± 20
14	-90 ± 70	0 ± 10
16.5	-150 ± 90	20 ± 20
19.5	-110 ± 50	10 ± 10

Table 3.5. Values of σ_0, σ_3 and α' analysed by the weighted averaging method in consideration of σ_3. Confidence limit is 50 per cent.

Distance from surface (μm)	σ_0 (MPa)	σ_3 (MPa)	α' (MPa/μm)
0	-850 ± 170	-40 ± 30	110 ± 30
2	-600 ± 110	-60 ± 20	40 ± 20
4	-580 ± 170	-60 ± 30	40 ± 30
6	-200 ± 70	-40 ± 10	-30 ± 10
8	-80 ± 80	-60 ± 10	-90 ± 20
11	-290 ± 80	-30 ± 10	30 ± 20
14	-150 ± 90	10 ± 10	20 ± 20
16.5	-120 ± 120	-10 ± 20	0 ± 20
19.5	-40 ± 60	-20 ± 10	-10 ± 10

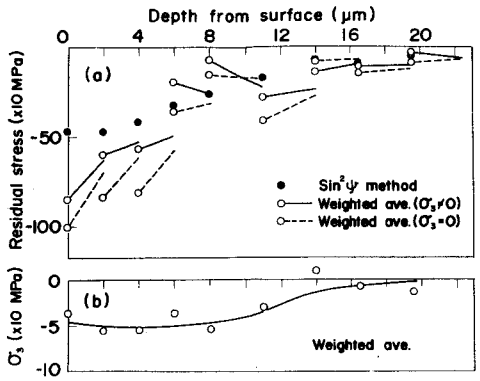


Fig. 3.7. Residual stress distributions analysed by the $\sin^2\psi$ method and the weighted averaging method.

図中 $\sin^2\psi$ 法の結果は Fig. 3.6 の重心法によるものをプロットし，三種の解析法の区別が明らかになるようにした。また Fig. 3.7 (b)は式（3.3）の解析による σ_3 の値で，表面下 10 μm 程度まで約−50MPa の応力が算出された。もちろん σ_3 は表面および逐次電解研摩した表面では 0 であるべきなので，X線侵入深さ内での平均値という意味である。

重み付き平均解析法はX線測定した表面での応力値と深さ方向への応力こう配を同時に求める方法である。式（3.2）あるいは式（3.3）で表わされた解析法は応力の線形な分布を仮定しているから，応力こう配の変化がゆるやかであれば，逐次電解研摩した表面での測定から解析した結果は連続な曲線に近似されるべきである。表面層除去による応力分布の再配列があると当然不連続になるであろうが，Fig. 3.7 で得られた結果とほぼ類似の応力分布モデルで試算の結果，再配列による応力値の変動〔169〕は10MPa 以下で全く無視できることを確認した。同図において二つの重み付き平均解析法の式を用いた結果を比較すると，$\sigma_3 = 0$ としたものは連続性が悪く，σ_3 を含めた解析法の式を用いた結果が連続性の良いことがわかる。なお，6 μm および 8 μm の深さにおける不連続性は，回折強度分布曲線の測定に誤差が入ったためと解釈している。（応力こう配が正の場合 $a - \sin^2\psi$ の分布は Fig. 3.5 のように上に凸の曲線になるが，6 μm，8 μm の深さで重心位置より求めた分布は下に凸となった。しかし同じ深さにおけるピーク位置および半価幅中点位置より求めた分布はほぼ直線あるいは上に凸であったので，回折線の 1／5 Imax 付近の測定値に誤差が含まれていたものと思われる。）なお，当然のことながら応力こう配の存在する場合，$\sin^2\psi$ 法は表面における応力値を与えるものでなく，X線侵入深さ内の応力分布のある平均値を与えるものであるから，表面近傍での値は重み付き平均解析法で求めた値より小さい値になっている。表面下約 16 μm 以上の応力こう配が認められなくなる深さでは $\sin^2\psi$ 法による結果と重み付き平均解析法による結果は一致してくる。

3.5 考　察

3.5.1 $\sin^2\psi$線図に及ぼす σ_3 の影響

Table 3.4 および Table 3.5 と Fig. 3.7 の結果より，重み付き平均解析法で σ_3 を考慮するか否かによって明らかに計算された応力値に差が生じる。そこで σ_3 が $\sin^2\psi$ 線図に及ぼす影響を詳しく調べるため，式（3.3）を用い応力因子 σ_0，σ_3 および α' を種々変化させて $\langle \varepsilon_\psi \rangle$ を計算した。CrK_β 線で Fe（211）面の測定を考慮して $\theta = 63°$，$E = 245$ GPa，$\nu = 0.26$，$\mu = 647\ cm^{-1}$ を用い，また $\sigma_1 = \sigma_2$ と仮定した。

Fig. 3.8（a），（b），（c）はそれぞれ α'，σ_0，σ_3 をパラメータにとったときの結果であり，それぞれの場合の固定値は図中に示したとおりである。この結果 $\sigma_3 = 0$ であれば α'，σ_0 の値によらず $\sin^2\psi^* \simeq 0.41$ で $\langle \varepsilon_\psi \rangle = 0$ となる。この値は式（2.1）から得られる無ひずみ方向 $\sin^2\psi = 2\nu/(1+\nu)$ の値と一致する。また Fig. 3.8（c）より σ_3 の値が変化すれば無ひずみ方向 $\sin^2\psi^*$ の値は大きく変化し，それによって $\sin^2\psi = 0.41$ におけるひずみ $\langle \varepsilon_\psi \rangle$ も大きく変動することがわかる。Fig. 3.5（a）の測定結果は $\sin^2\psi = 0.41$ における格子定数が焼なまし材の平均値から偏っており，σ_3 を考慮した解析法の式（3.3）を用いることが適切なことを意味している。また解析結果 Fig. 3.7（a）

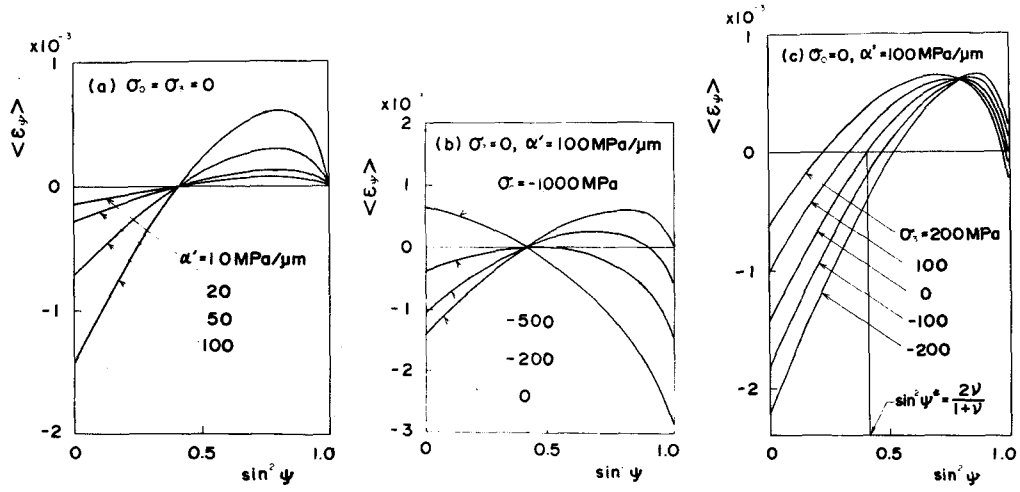


Fig. 3.8. Simulations of weighted-averaging strains when the stress gradients exist.

からも明らかなように σ_3 を考慮した解析がより連続的な折れ線になることからも，間接的に式（2.3）を使用することの適切さが指適される。

3.5.2 重み付き平均解析法と $\sin^2\psi$ 法の関係

重み付き平均解析法により求められた結果が真の応力分布に近いか否かを $\sin^2\psi$ 法の解析式（3.1）を利用して検討することができる。岩永ら〔103〕が紹介したように，表面から深さ方向に線形に変化する応力分布モデルを仮定し，式(3.2)あるいは(3.3)を用いて $\sin^2\psi$ 線図を描く。それを式（3.1）の $\sin^2\psi$ 法を用いてその平均こう配によって応力値に換算する。そして，その応力値が仮定した応力分布モデルで何 μm の深さに相当する応力値であるかを調べ，その深さ t_e を有効深さと呼ぶことにする。本実験条件に符合させて $\sin^2\psi$ の値を0から0.1おきに0.7までの8点を採用すると $\sigma_3 = 0$ としたときは表面の応力値 σ_0，また応力こう配 α' によらず有効深さは t_e = 5.6 μmであるが，$\sigma_3 \neq 0$ と仮定すると Fig. 3.9 に示されるように有効深さは σ_3 によって変化する。

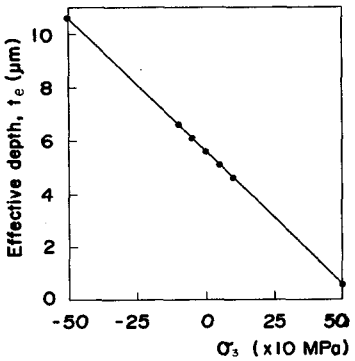


Fig. 3.9. Effect of σ_3 on the effective depth simulated by eight values of $\sin^2\psi$ (0, 0.1, 0.2,..., 0.7). This effect is also independent both of σ_0 and α'.

一方，Fig. 3.7（b）により重み付き平均解析法の式（3．3）を用いた場合，z = 0 ∿ 10 μm の深さの範囲で $\sigma_3 \simeq -50$ MPa が得られた。このときの有効深さは Fig. 3.9 によると t_e = 6.1 μm となる。Fig. 3.7（a）の実験結果を見ると，表面での $\sin^2\psi$ 法による応力値は約 - 500 MPa であり，この応力値は式（3.3）($\sigma_3 \neq 0$) から得られた応力分布に対して約 6 ∿ 7 μm の深さの応力値とほぼ一致している。また式（3.2）($\sigma_3 = 0$) の場合には約 10 μm の深さの応力値との対応が見られ，Fig. 3.9 の $t_e \simeq 5.6$ μm とは相容れない。このことおよび3.5.1節の結果より，重み付き平均解析法の式（3.3）は σ_0 と α' をより適確に与えているものと考えられる。また σ_3 を考慮すべきであるという結果は，加工層の残留応力状態をX線的に求めるに際して，三軸応力解析を導入する必要性〔26，155，156，170〕のあることを示唆している。

3.5.3　応力こう配，回折線位置，$\sin^2\psi$ 線図の湾曲の間の関係

実験結果より急激な応力こう配を有するときに上記三種の方法による回折線位置に差異のあることが確認された。これは応力こう配 α' による回折強度分布曲線の非対称性に原因するものであって，当然のことながら α' が小さくなればこの非対称性も小さくなり，三種の回折線位置決定法の差もなくなる。また $\sin^2\psi$ 線図の湾曲も α' の効果によるものであり，実験結果および解析結果を総合判断するとこう配が 20 ～ 30 MPa/μm 以上になれば，重み付き平均解析法と $\sin^2\psi$ 法との差が顕著になることが明らかとなった。

また，Fig. 3.8 より明らかであるが，Dölleら〔171〕も指適しているように σ_ϕ の応力こう配による $\sin^2\psi$ 線図の湾曲性への効果は $\sin^2\psi < 0.5$ ではわずかで，$\sin^2\psi > 0.5$ で顕著になる。したがって，重み付き平均解析法の適用のためには可能な限り ψ を広範囲にとることが必要となる。

3.5.4　指数関数形の残留応力分布（$\sin^2\psi$ 法と重み付き平均解析法の比較）

重み付き平均解析法の基本式は表面下の残留応力が深さ z に線形依存する仮定の下に与えたが，実際の加工表面層の応力は複雑な分布になっていると考えられる。そこで，残留応力分布が指数関数で表わされる場合，重み付き平均解析法と $\sin^2\psi$ 法による解析結果および真の分布形にどのような差が生じるか比較検討を行った。

応力分布形として

$$\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_0 e^{-nz}, \qquad \sigma_3 = 0$$

を仮定したとき重み付き平均ひずみは

$$< \varepsilon_\psi > = \frac{\sigma_0}{E}\{-2\nu + (1+\nu)\sin^2\psi\}\frac{2\mu}{2\mu + n\sin\theta\cos\psi}$$

で表わされる。3.5.2 節と同様に $\sin^2\psi$ の値を 0 から 0.1 毎に 0.7 まで与えて $< \varepsilon_\psi >$ を求め，これより重み付き平均解析法の式（3.2）および $\sin^2\psi$ 法の式（3.1）を用いて応力値を求めると Fig. 3.10 のようになる。

またこの結果を Table 3.6 にまとめた。指数項の n = 50, 100 mm^{-1} などはそれぞれ表面における初期こう配 $(d\sigma/dz)_{z=0}$ の -50, -100 MPa/μm などに相当する。

この結果，指数 n したがって初期こう配が大きくなるほど，重み付き平均解析法による σ_0 と α' の計算値はモデルの値からの偏差が大きいが，なお $\sin^2\psi$ 法で求められる値よりも正確であることがわかる。

重み付き平均解析法は $\sin^2\psi$ 線図の湾曲を利用して表面層除去の手段を用いずに表面の応力値と表面下の応力こう配を同時に求める方法である。ごく表面層(∿10 μm)の残留応力分布を知りたいときには本解析法が有用となるであろう。

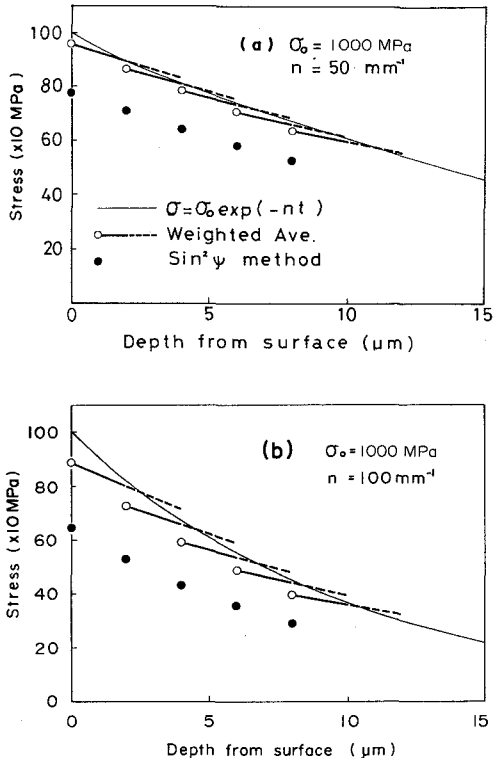


Fig. 3.10. Relations between exponential stress distributions and values evaluated from two stress analysing methods.

Table 3.6. Comparison of the weighted averaging method and the $\sin^2\psi$ method for exponential stress distributions.

n (mm^{-1})	Stress (MPa)			Stress gradient (MPa/μm)	
	Model σ_0	WAM* $(\sigma_0)_{z=0}$	$\sin^2\psi$ method $(\sigma)_{z=0}$	Model $(d\sigma/dz)_{z=0}$	WAM* $(\alpha')_{z=0}$
10	1000	995	947	- 10	- 8
50	1000	961	783	- 50	-31
100	1000	888	645	-100	-43
200	1000	748	478	-200	-47
500	1000	490	270	-500	-39

* WAM means the weighted averaging method.

3.6 結　言

重み付き平均解析法の有効性を確めるためにＳＵＪ２焼なまし材のラッピング加工材を供試材として加工表面および逐次電解研摩面をＸ線測定した結果，つぎのことが明らかになった。

(1) 平面ラッピング加工を施すと表面層に無方位急こう配の残留応力状態が得られ，重み付き平均解析法の検討に有効なことがわかった。

(2) 急激な応力こう配のある場合，$\sin^2\psi$ 線図は湾曲し，また回折強度分布曲線が非対称になってピーク法，半価幅中点法、重心法の間に差が現われた。これらの現象は応力こう配が 20 ∿ 30 MPa/μm 以上で明確になった。したがって，このような場合には重心法により回折線位置を決定し，重み付き平均解析法を適用することで表面の応力値と表面下の応力こう配をより正確に求めることが可能である。

(3) 応力こう配を問題にする場合，$\sin^2\psi$ 線図の湾曲は $\sin^2\psi > 0.5$ の領域で顕著に現われるので，可能な限り ψ 角を大きくとることが必要である。

(4) ラッピング加工層の場合，重み付き平均解析法において σ_3 を考慮に入れた方がより正しい値に近いことが示された。このことは一般に加工表面層の残留応力をＸ線的に測定する場合，三軸応力解析をすべきであることを示唆している。

第２章で提案した重み付き平均解析法は，$\sin^2\psi$ 線図の湾曲を利用して表面層を電解研摩することなく表面の応力値と表面下の応力こう配を同時に解析する方法である。非常に浅い表面層の応力状態あるいは2∿3μm のコーティングを施された母材境界層の残留応力状態を知りたいとき，この重み付き平均解析法は有益な方法になるであろう。

第４章　二軸，三軸応力解析のクライテリオン

4.1　緒　言

金属材料中へのＸ線侵入深さは高々数 10 μm であり，回折強度分布曲線に影響を及ぼすのはごく表面近傍層に限られる。自由表面ではその境界条件に垂直な方向の応力成分は０でなければならないから，10 μm 程度の浅い表面層では平面応力状態（以下二軸応力状態と呼ぶ）であると従来考えられてきた。$\mathrm{Sin}^2\psi$ 法は単にＸ線侵入深さが浅いという理由から，この二軸応力状態の仮定が基本になっているものである。

しかし，多結晶材料に機械加工あるいは熱処理などを施した場合，一般にバルク中には三軸応力状態が形成されるであろう。応力状態は表面の二軸応力から内部の三軸応力へと連続的に変化すべきものであるから，Ｘ線的に測定されるデータについて二軸あるいは三軸状態を規定するものは何であるかという疑問が生じる。とくに機械加工層などにおいては，加工変質層そのものが表面下非常に浅い層に限定され，しかも強加工を受けることから，Ｘ線侵入深さの領域においても三軸応力場の形成されている可能性がある。

事実，第３章においてラッピング加工層の残留応力解析では σ_3 を含めた三軸応力解析が適当であるという結論を得た。またÖhman ら〔172〕はＷＣ－Co 二相合金のＷＣ相のＸ線応力測定において，Ｘ線侵入深さとＷＣ粒子の大きさに依存して二つの応力状態（二軸あるいは三軸）が決まることを指摘した。さらに Vasil'ev〔173〕も結晶粒径あるいは可干渉領域がＸ線侵入深さに対して小さい場合には，表面に垂直方向の微視的応力がＸ線測定に影響を及ぼすことを示唆した。

すなわち，二軸応力状態と考えられる表面層の厚さと，Ｘ線侵入深さの相対的な関係において二軸応力解析あるいは三軸応力解析の二者選択が決定されるべきであり，一概にＸ線侵入深さが浅いというだけの理由で三軸応力解析がなされて良いというべきものではない。一般にこの問題は自由表面による応力（とくに垂直方向の応力）緩和を検討することで解決されるであろう。応力緩和によって二軸応力と考えられる表面層の厚さがＸ線侵入深さに比べて深いときには二軸応力解析が適用され得るが，そうでない場合には三軸応力解析を適用すべきであろう。

本章は二軸，三軸応力状態がいかなる要因によって決まるかを検討し，今後のＸ線応力解析の指針を与えるものである。

4.2　ポテンシャルによる弾性問題の解法〔174, 175〕

この節では境界面に表面力が作用する等方性弾性体の三次元弾性応力の解法の基礎を述べる。

これは後節で自由表面による応力緩和を検討するのに有用となる。Y.C.Fung は彼の著書〔174〕の中で，ポテンシャルを用いてこの問題を解く方法をまとめている。ここではさらにそれを簡単に解説しておく。

直交座標系 x_1，x_2，x_3 をとると，一般に変位ベクトル場 $\vec{u}(u_1, u_2, u_3)$ はスカラーポテンシャル $\phi(x_1, x_2, x_3)$ と三つのベクトルポテンシャル $\psi_i(x_1, x_2, x_3)$ $(i = 1, 2, 3)$ によってつぎのように表わすことができる。

$$2Gu_i = \phi_{,i} + e_{ijk}\psi_{k,j}, \qquad \psi_{i,i} = 0 \tag{4.1}$$

ここでGは剛性率，e_{ijk} は交代記号である。また本章では総和規約〔176〕を導入して，適宜式を簡約して表わす。すなわち，一つの項の中の指標の繰返しはその指標について取り得る範囲にわたる総和を示す。さらにコンマ記号のあとの指標 i は x_i に関する偏微分を表わす。たとえば

$$\psi_{i,i} = \frac{\partial\psi_1}{\partial x_1} + \frac{\partial\psi_2}{\partial x_2} + \frac{\partial\psi_3}{\partial x_3}$$

の意味である。コンマの後に指標が二つある場合は2階の偏微分，三つのときは3階の偏微分などを表わす。

さて，均質等方性体において静的平衡を考えるとき，線形弾性体の基礎式である Navier の方程式は物体力のない場合

$$Gu_{i,jj} + (\lambda + G)u_{j,ji} = 0 \tag{4.2}$$

で与えられる〔175，177〕。ここで λ は Lamé の定数である。この式に式（4.1）を代入すれば

$$(\lambda + G)\frac{\partial}{\partial x_i}\nabla^2\phi + G\frac{\partial}{\partial x_i}\nabla^2\phi + Ge_{ijk}\frac{\partial}{\partial x_j}\nabla^2\psi_k = 0 \tag{4.3}$$

ここで ∇^2 は Laplace の演算子

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x_1{}^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2{}^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_3{}^2} \tag{4.4}$$

である。

さて，関数 ϕ と ψ_i が

$$\nabla^2\phi = \text{const.}, \qquad \nabla^2\psi_i = \text{const.} \tag{4.5}$$

の解であれば式（4.3）が満足されることが容易に理解できる。すなわち，物体力を無視したときの静的平衡に対する線形弾性問題は式（4.5）を満足する四つの関数 ϕ，ψ_1，ψ_2，ψ_3 を決定することに帰す。しかし，式（4.3）のすべての解が式（4.5）で与えられるわけではなく，一般的な解はさらに複雑なものになる。

一般性をもつ解を求めるために Galerkin は重調和方程式を満足する変位ポテンシャル関数を導入し，Papkovich は Galerkinの関数は一つのベクトル成分であることを指適した。すなわち，ベクトルポテンシャル ψ_i 自身が別のベクトル場 $\tilde{F}_i$ により

$$\psi_k = -e_{k\ell m} c\tilde{F}_{m,\ell} \tag{4.6}$$

で表わされると考えることによって Galerkin ベクトルが導入される。ここでcは後に決定される定数である。式（4.6）を式（4.1）に代入すると

$$\begin{aligned} 2Gu_i &= \phi_{,i} - e_{ijk}e_{k\ell m}c\tilde{F}_{m,\ell j} \\ &= \phi_{,i} + c\tilde{F}_{i,jj} - c\tilde{F}_{j,ji} \end{aligned} \tag{4.7}$$

が得られる。この計算において交代記号 e_{ijk} とクロネッカーデルタ δ_{ij} の間の公式

$$e_{ijk}e_{k\ell m} = \delta_{i\ell}\delta_{jm} - \delta_{im}\delta_{j\ell}$$

を用いた。ここで H_i を任意の調和関数 $(H_{i,jj} = 0)$ とし，また $\tilde{F}_{j,j} = (\phi + H_{j,j})/(c-1)$ を満足するようにして $F_i = \tilde{F}_i + H_i$ を満たす F_i を選べば

$$2Gu_i = cF_{i,jj} - F_{j,ji} \tag{4.8}$$

は式（4.7）と同じ変位場を表わすことができる。

式（4.8）を Navier の方程式（4.2）に代入して $\lambda + G = G/(1-2\nu)$ の関係に注意すると

$$\frac{1}{2(1-2\nu)}\left[cF_{i,jji} - F_{j,jji}\right]_{,k} + \frac{1}{2}\left[cF_{k,jj} - F_{j,jk}\right]_{,mm} = 0 \tag{4.9}$$

が得られる。擬標（和をとる指標）を適当に入れ換えることによって，この式は

$$\left[\frac{c-1}{2(1-2\nu)} - \frac{1}{2}\right] F_{j,jiik} + \frac{c}{2} F_{k,jjii} = 0 \tag{4.10}$$

となる。ここで定数cを

$$c = 2(1-\nu) \tag{4.11}$$

のように選べば式（4.10）の第1項の係数は0になる。したがって

$$F_{i,jjmm} = 0 \tag{4.12}$$

を満足する F_i に対して

$$2Gu_i = 2(1-\nu)F_{i,jj} - F_{j,ji} \tag{4.13}$$

のように定義された変位場 u_i は，弾性基礎方程式を満足すると結論できる。このように定義されたベクトル F_i は物体力が0のときの Galerkin ベクトルと呼ばれる。式（4.12）は重調和方程式であり，その解 F_i は重調和関数である。したがって，物体力が無視できる場合の静的平衡の問題は適当な境界条件の下で重調和方程式を解き，三つの関数 F_1，F_2，F_3 を決定する問題になる。

式（4.13）を簡約しない記号で書けば

$$2Gu_1 = 2(1-\nu)\nabla^2 F_1 - \frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{\partial F_1}{\partial x_1} + \frac{\partial F_2}{\partial x_2} + \frac{\partial F_3}{\partial x_3}\right) \tag{4.14}$$

したがって，Galerkinベクトル F_1，F_2，F_3 が見出されれば，ひずみと変位の関係式

$$e_{ij} = \frac{1}{2}\left(u_{i,j} + u_{j,i}\right) \tag{4.15}$$

と Hooke の関係式

$$\sigma_{ij} = \lambda e_{kk}\delta_{ij} + 2Ge_{ij} \tag{4.16}$$

を用いて応力成分は

$$\sigma_{11} = 2(1-\nu)\frac{\partial}{\partial x_1}\nabla^2 F_1 + \left(\nu\nabla^2 - \frac{\partial^2}{\partial x_1{}^2}\right)\left(\frac{\partial F_1}{\partial x_1} + \frac{\partial F_2}{\partial x_2} + \frac{\partial F_3}{\partial x_3}\right) \tag{4.17}$$

$$\sigma_{12} = (1-\nu)\left(\frac{\partial}{\partial x_2}\nabla^2 F_1 + \frac{\partial}{\partial x_1}\nabla^2 F_2\right) - \frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_2}\left(\frac{\partial F_1}{\partial x_1} + \frac{\partial F_2}{\partial x_2} + \frac{\partial F_3}{\partial x_3}\right) \tag{4.18}$$

から求まる。式（4.14），（4.17），（4.18）において他の成分 u_2，u_3，σ_{22}，σ_{33} などは指標 1，2，3 の巡回置換によって得られる。

4.3　表面力による応力場

自由表面ではその外側から支える力がないため，それを通して働く垂直応力成分およびそれに沿って働くせん断応力成分の値が0になる必要がある。したがって，物体中で三軸応力場が形成されていても自由表面では完全に二軸応力（平面応力）状態であり，自由表面近傍では三軸状態から二軸状態に移行する応力緩和領域が存在する。本節はこのような自由表面による応力緩和を検討することが目的である。

いま，無限体中に直交座標軸 x，y，z をとると，x-y 面（すなわち z = 0 の面）に作用する残留応力状態は一般に二重フーリエ級数に展開でき

$$\sigma_{zz} = \sum_m \sum_n A_{mn} \cos \frac{2\pi mx}{a} \cos \frac{2\pi ny}{b} \tag{4.19a}$$

$$\sigma_{zx} = \sum_m \sum_n B_{mn} \cos \frac{2\pi mx}{a} \cos \frac{2\pi ny}{b} \tag{4.19b}$$

$$\sigma_{yz} = \sum_m \sum_n C_{mn} \cos \frac{2\pi mx}{a} \cos \frac{2\pi ny}{b} \tag{4.19c}$$

で表わされる。

さて，x-y 面を仮想的に切断してzの増加方向が深さ方向になるように半無限体（$z \geqq 0$)を作るとき，この x-y 面が自由表面であるためには $z = 0$ において

$$\sigma_{zz} = \sigma_{zx} = \sigma_{yz} = 0 \tag{4.20}$$

の条件が満足されなければならない。それには $z = 0$ において式（4.19）の逆符号の仮想表面力

$$F_z = -\sigma_{zz}, \qquad F_x = -\sigma_{zx}, \qquad F_y = -\sigma_{yz} \tag{4.21}$$

を作用させることによって達成できる。この仮想表面力の作用に伴うz方向への応力の変化が自由表面の影響を表わしている。すなわち，自由表面下の応力状態は無限体中の応力場にこの仮想表面力による応力場を重畳させることによって求まるので，以下には半無限体表面に作用する表面力の影響を調べることにする。また，この問題を解くには式（4.19）で与えられた応力成分のそれぞれのフーリエ成分について検討すれば充分であるので，簡単のため一つのフーリエ成分についてのみ考えることにする。正弦状の表面力によって与えられる応力場は4.2節で導入した Galerkin ベクトルを用いることによって解析でき，つぎの三つの場合に分けて考える。

4.3.1 正弦状の垂直力が表面に作用する場合〔174〕

この問題はY.C.Fung によってすでに解かれているので，ここではそれを簡単に説明することにする。

Fig. 4.1 に示すように，空間 $z \geqq 0$ を占める均質等方な半無限線形弾性体を考え，境界表面 $z = 0$ に正弦的に分布する垂直力が作用するものと仮定してつぎの境界条件を与える。

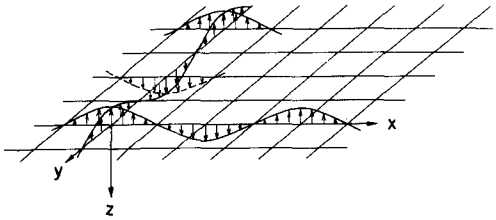


Fig. 4.1. Sinusoidally distributed load on a surface of semi-infinite body.

$z = 0$ において

$$\sigma_{zz} = P_z = A \cos \frac{2\pi x}{a} \cos \frac{2\pi y}{b} \tag{4.22a}$$

$$\sigma_{zx} = P_x = 0 \tag{4.22b}$$

$$\sigma_{yz} = P_y = 0 \tag{4.22c}$$

$z = \infty$ においてはすべての応力成分が0になる。

この問題は一成分が0でない Galerkin ベクトル

$$F_1 = F_2 = 0, \qquad F_3 \neq 0 \tag{4.23}$$

を用いて解くことができる。物体力が0の場合,式(4.12) で示されたように Galerkin ベクトルは重調和関数でなければならない。p および q を定数, ψ を調和関数として

$$F_3 = (p + qz)\psi \tag{4.24}$$

を考えると，これは重調和関数になる。境界条件式（4.22 a）の形を考慮して

$$\psi = \cos \frac{2\pi x}{a} \cos \frac{2\pi y}{b} f(z) \tag{4.25}$$

とおく。調和関数 ψ は Laplace の方程式を満足しなければならないので，式（4.25）を $\nabla^2\psi = 0$ に代入すると一つの解として

$$f(z) = e^{-kz} \tag{4.26}$$

が得られる。ここで k は次式で与えられる定数である。

$$k = \sqrt{\left(\frac{2\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{2\pi}{b}\right)^2} \tag{4.27}$$

もう一つの解 e^{kz} は無限遠の境界条件を満足しないので捨てる。したがって，Galerkin ベクトルの完全な形は

$$F_1 = F_2 = 0 \tag{4.28a}$$

$$F_3 = (p + qz) \cos \frac{2\pi x}{a} \cos \frac{2\pi y}{a} e^{-kz} \tag{4.28b}$$

で表わされる。この Galerkin ベクトルに対応する応力成分は式（4.17）および（4.18）によって簡単に求められ

$$\sigma_{zz} = \{k^2 q(1-2\nu) + k^3(p+qz)\} \cos \frac{2\pi x}{a} \cos \frac{2\pi y}{b} e^{-kz} \tag{4.29a}$$

$$\sigma_{yz} = (\frac{2\pi}{b})\{-2\nu kq + k^2(p+qz)\} \cos \frac{2\pi x}{a} \sin \frac{2\pi y}{b} e^{-kz} \tag{4.29b}$$

$$\sigma_{zx} = (\frac{2\pi}{a})\{-2\nu kq + k^2(p+qz)\} \sin \frac{2\pi x}{a} \cos \frac{2\pi y}{b} e^{-kz} \tag{4.29c}$$

などとなる。定数 p および q は境界条件式（4.22）と比較することによって

$$p = \frac{2\nu A}{k^3}, \qquad q = \frac{A}{k^2} \tag{4.30}$$

で与えられることがわかる。したがって，Fig. 4. 1 に示されたような垂直力が表面に作用したときの物体中の応力分布は次式で表わされる。

$$\left.\begin{aligned}
\sigma_{xx} &= -\frac{A}{k^2}\{-(\frac{2\pi}{a})^2 - 2\nu(\frac{2\pi}{b})^2 + (\frac{2\pi}{a})^2 kz\} \cos \frac{2\pi x}{a} \cos \frac{2\pi y}{b} e^{-kz} \\
\sigma_{yy} &= -\frac{A}{k^2}\{-(\frac{2\pi}{b})^2 - 2\nu(\frac{2\pi}{a})^2 + (\frac{2\pi}{b})^2 kz\} \cos \frac{2\pi x}{a} \cos \frac{2\pi y}{b} e^{-kz} \\
\sigma_{zz} &= A\ (1+kz) \cos \frac{2\pi x}{a} \cos \frac{2\pi y}{b} e^{-kz} \\
\sigma_{xy} &= -\frac{A}{k^2}(\frac{2\pi}{a})(\frac{2\pi}{b})(1 - 2\nu - kz) \sin \frac{2\pi x}{a} \sin \frac{2\pi y}{b} e^{-kz} \\
\sigma_{yz} &= A\ (\frac{2\pi}{b})\ z \cos \frac{2\pi x}{a} \sin \frac{2\pi y}{b} e^{-kz} \\
\sigma_{zx} &= A\ (\frac{2\pi}{a})\ z \sin \frac{2\pi x}{a} \cos \frac{2\pi y}{b} e^{-kz}
\end{aligned}\right\} \tag{4.31}$$

4. 3. 2　x 方向に正弦状の接線力が作用する場合

つぎに，Fig. 4. 2 に示すように半無限体表面上に x 方向に向く正弦状の接線力が作用する場

合について考える。もちろんのこと物体力は無視できるものと仮定し，境界条件をつぎのように与える。

$z = 0$ において

$$\sigma_{zz} = P_z = 0 \tag{4.32a}$$

$$\sigma_{zx} = P_x = B \cos \frac{2\pi x}{a} \cos \frac{2\pi y}{b} \tag{4.32b}$$

$$\sigma_{yz} = P_y = 0 \tag{4.32c}$$

$z = \infty$ においてすべての応力成分は 0 になる。

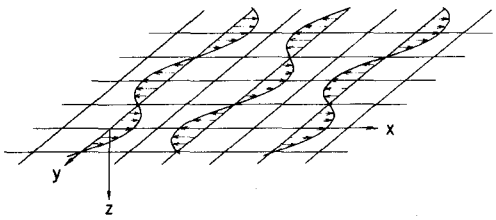


Fig. 4.2. Sinusoidally distrbuted shear force acting on a surface along x-axis.

物体力が 0 の場合には，任意の Galerkin ベクトルはそれと同じ変位場を与える第 3 成分が 0 となる別の Galerkin ベクトル（等価 Galerkin ベクトル）をもつことが証明されている〔174〕。すなわち，

$$F_1 , \quad F_2 , \quad F_3 = 0 \tag{4.33}$$

の形の Galerkin ベクトルが必ず存在するから，境界条件式（4.32）を満足するような重調和関数 F_1 および F_2 を見出せばよい。Galerkinベクトルが式（4.33）で表わされる場合，応力成分は式（4.17）および（4.18）より次のようになる。

$$\sigma_{zx} = (1 - \nu) \frac{\partial}{\partial z} \nabla^2 F_1 - \frac{\partial^2}{\partial x \partial z} \left(\frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y} \right) \tag{4.34a}$$

$$\sigma_{yz} = (1 - \nu) \frac{\partial}{\partial z} \nabla^2 F_2 - \frac{\partial^2}{\partial y \partial z} \left(\frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y} \right) \tag{4.34b}$$

$$\sigma_{zz} = \left(\nu \nabla^2 - \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \left(\frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y} \right) \tag{4.34c}$$

境界条件式（4.32）と式（4.34a）を比較することにより，F_1 は $\cos(2\pi x/a)\cos(2\pi y/b)$ を含み，F_2 は $\sin(2\pi x/a)\sin(2\pi y/b)$ を含むことが予想されるので，F_1，F_2 をつぎの形におく。

$$F_1 = (p + qz) \cos \frac{2\pi x}{a} \cos \frac{2\pi y}{b} f(z) \tag{4.35a}$$

$$F_2 = (r + sz) \sin \frac{2\pi x}{a} \sin \frac{2\pi y}{b} f(z) \tag{4.35b}$$

ここでp，q，r，sは定数であり，$\cos(2\pi x/a)\cos(2\pi y/b)f(z)$ および $\sin(2\pi x/a)\sin(2\pi y/b)f(z)$ が調和関数であれば F_1，F_2 は重調和関数となる。したがって，

$$\nabla^2 [\cos \frac{2\pi x}{a} \cos \frac{2\pi y}{b} f(z)] = 0 \tag{4.36}$$

を解いて

$$f(z) = e^{-kz} \tag{4.37}$$

を得る。別の解 e^{kz} は前節と同様 $z = \infty$ での境界条件を満足しないので捨てる。F_2 に対しても同様の結果を得る。すなわち，Galerkinベクトルは

$$F_1 = (p + qz) \cos \frac{2\pi x}{a} \cos \frac{2\pi y}{b} e^{-kz} \tag{4.38a}$$

$$F_2 = (r + sz) \sin \frac{2\pi x}{a} \sin \frac{2\pi y}{b} e^{-kz} \tag{4.38b}$$

$$F_3 = 0 \tag{4.38c}$$

となる。この Galerkin ベクトルに対する応力成分は式（4.38）を式（4.34）に代入することによってつぎのように得られる。

$$\sigma_{zx} = [-(\frac{2\pi}{a})k\{(\frac{2\pi}{a})p - (\frac{2\pi}{b})r\} + \{2(1-\nu)k^2 + (\frac{2\pi}{a})^2\}q - (\frac{2\pi}{a})(\frac{2\pi}{b})s$$
$$- (\frac{2\pi}{a})k\{(\frac{2\pi}{a})q - (\frac{2\pi}{b})s\}z] \cos \frac{2\pi x}{a} \cos \frac{2\pi y}{b} e^{-kz} \tag{4.39a}$$

$$\sigma_{yz} = [(\frac{2\pi}{b})k\{(\frac{2\pi}{a})p - (\frac{2\pi}{b})r\} - (\frac{2\pi}{a})(\frac{2\pi}{b})q + \{2(1-\nu)k^2 + (\frac{2\pi}{b})^2\}s$$
$$+ (\frac{2\pi}{b})k\{(\frac{2\pi}{a})q - (\frac{2\pi}{b})s\}z] \sin \frac{2\pi x}{a} \sin \frac{2\pi y}{b} e^{-kz} \tag{4.39b}$$

$$\sigma_{zz} = [k^2\{(\frac{2\pi}{a})p - (\frac{2\pi}{b})r\} - 2(\frac{2\pi}{a})k(1-\nu)q + 2(\frac{2\pi}{b})k(1-\nu)s$$
$$+ k^2\{(\frac{2\pi}{a})q - (\frac{2\pi}{b})s\}z] \sin \frac{2\pi x}{a} \cos \frac{2\pi y}{b} e^{-kz} \tag{4.39c}$$

式（4.39）と $z = 0$ における境界条件式（4.32）を比較することによって，定数 p，q，r，s は次式を満足することがわかる。

$$\left(\frac{2\pi}{a}\right)p + \left(\frac{2\pi}{b}\right)r = \frac{2(1-\nu)\left(\frac{2\pi}{a}\right)}{k^3} B \tag{4.40a}$$

$$q = \frac{2(1-\nu)\left(\frac{2\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{2\pi}{b}\right)^2}{2(1-\nu)k^4} B \tag{4.40b}$$

$$s = -\frac{(1-2\nu)\left(\frac{2\pi}{a}\right)\left(\frac{2\pi}{b}\right)}{2(1-\nu)k^4} B \tag{4.40c}$$

したがって，半無限体中の応力分布は次式で与えられる。

$$\left.\begin{aligned}
\sigma_{xx} &= -\frac{B}{k^3}\left(\frac{2\pi}{a}\right)\left\{-2k^2 - 2\nu\left(\frac{2\pi}{b}\right)^2 + \left(\frac{2\pi}{a}\right)^2 kz\right\} \sin\frac{2\pi x}{a}\cos\frac{2\pi y}{b}\, e^{-kz} \\
\sigma_{yy} &= -\frac{B}{k^3}\left(\frac{2\pi}{a}\right)\left\{-2\nu\left(\frac{2\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{2\pi}{b}\right)^2 kz\right\} \sin\frac{2\pi x}{a}\cos\frac{2\pi y}{b}\, e^{-kz} \\
\sigma_{zz} &= B\left(\frac{2\pi}{a}\right)z \sin\frac{2\pi x}{a}\cos\frac{2\pi y}{b}\, e^{-kz} \\
\sigma_{xy} &= -\frac{B}{k^3}\left(\frac{2\pi}{b}\right)\left\{-k^2 + 2\nu\left(\frac{2\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{2\pi}{a}\right)^2 kz\right\} \cos\frac{2\pi x}{a}\sin\frac{2\pi y}{b}\, e^{-kz} \\
\sigma_{yz} &= \frac{B}{k}\left(\frac{2\pi}{a}\right)\left(\frac{2\pi}{b}\right)z \sin\frac{2\pi x}{a}\sin\frac{2\pi y}{b}\, e^{-kz} \\
\sigma_{zx} &= -\frac{B}{k}\left\{-k + \left(\frac{2\pi}{a}\right)^2 z\right\} \cos\frac{2\pi x}{a}\cos\frac{2\pi y}{b}\, e^{-kz}
\end{aligned}\right\} \tag{4.41}$$

4.3.3　y 方向に正弦状の接線力が作用する場合

最後に Fig. 4.3 のように半無限体表面上に y 方向に向く表面力が作用する場合を考えよう。このときの境界条件はつぎのように与える。

$z = 0$ において

$$\sigma_{zz} = P_z = 0 \tag{4.42a}$$

$$\sigma_{zx} = P_x = 0 \tag{4.42b}$$

$$\sigma_{yz} = P_y = C \cos \frac{2\pi x}{a} \cos \frac{2\pi y}{b} \tag{4.42c}$$

$z = \infty$ においてすべての応力成分は0になる。

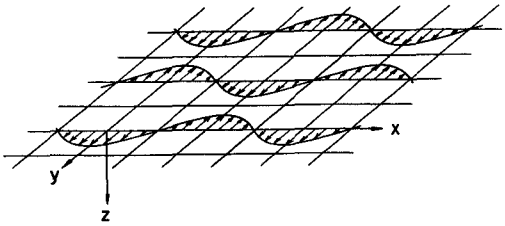


Fig. 4.3. Sinusoidally distributed shear force acting on a surface along y-axis.

この問題は前節の式（4.41）の結果と2階のテンソル変換法則を用いることによって簡単に解ける。Fig. 4.4 に示すように，Fig. 4.3 は Fig. 4.2 においてせん断力分布はそのまま固定して座標系のみをz軸（x_3 軸）のまわりに左向きに $\pi/2$ だけ回転することにより得られる。

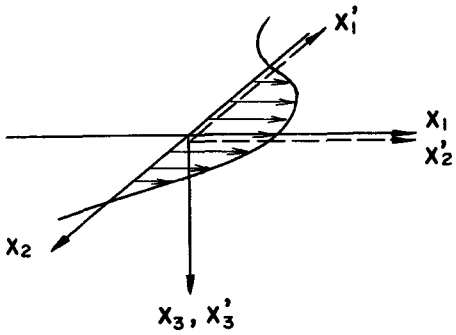


Fig. 4.4. Rotation of the coordinate system.

変換前の座標系 x_i および変換後の座標系 x_i' に関する応力テンソルをそれぞれ σ_{ij}，σ_{ij}' とすると，2階のテンソル変換法則はつぎの式で表わされる〔178〕。

$$\sigma_{ij}' = \beta_{im}\beta_{jn}\sigma_{mn} \tag{4.43}$$

ここで β_{ij} は x_i' 座標系と x_j 座標系の間の方向余弦である。Fig. 4.4 の座標変換の場合 β_{ij} はつぎのマトリクスの形で書かれる。

$$(\beta_{ij}) = \begin{pmatrix} \beta_{11} & \beta_{12} & \beta_{13} \\ \beta_{21} & \beta_{22} & \beta_{23} \\ \beta_{31} & \beta_{32} & \beta_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{4.44}$$

これらの値を式（4.43）に代入することにより x_i' 座標系の応力成分がつぎのように得られる。

$$
\left.
\begin{aligned}
\sigma_{11}' &= \beta_{1m}\beta_{1n}\sigma_{mn} = \sigma_{22} \\
\sigma_{22}' &= \beta_{2m}\beta_{2n}\sigma_{mn} = \sigma_{11} \\
\sigma_{33}' &= \beta_{3m}\beta_{3n}\sigma_{mn} = \sigma_{33} \\
\sigma_{12}' &= \beta_{1m}\beta_{2n}\sigma_{mn} = -\sigma_{21} \\
\sigma_{23}' &= \beta_{2m}\beta_{3n}\sigma_{mn} = \sigma_{13} \\
\sigma_{31}' &= \beta_{3m}\beta_{1n}\sigma_{mn} = -\sigma_{32}
\end{aligned}
\right\} \tag{4.45}
$$

式（4.41）のσ_{xx}，σ_{yy}，....を式（4.45）の右辺のσ_{11}，σ_{22}，....に代入し，左辺のσ_{11}'，σ_{22}'，.... を改めてσ_{xx}，σ_{yy}，....に書き直すと Fig. 4.3 に示す表面力が分布したときの応力状態を表わす式となる。すなわち，

$$
\left.
\begin{aligned}
\sigma_{xx} &= -\frac{C}{k^3}\left(\frac{2\pi}{a}\right)\left\{-2\nu\left(\frac{2\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{2\pi}{b}\right)^2 kz\right\} \sin\frac{2\pi x}{a}\cos\frac{2\pi y}{b}\, e^{-kz} \\
\sigma_{yy} &= -\frac{C}{k^3}\left(\frac{2\pi}{a}\right)\left\{-2k^2 - 2\nu\left(\frac{2\pi}{b}\right)^2 + \left(\frac{2\pi}{a}\right)^2 kz\right\} \sin\frac{2\pi x}{a}\cos\frac{2\pi y}{b}\, e^{-kz} \\
\sigma_{zz} &= C\left(\frac{2\pi}{a}\right) z \sin\frac{2\pi x}{a}\cos\frac{2\pi y}{b}\, e^{-kz} \\
\sigma_{xy} &= \frac{C}{k^3}\left(\frac{2\pi}{b}\right)\left\{-k^2 + 2\nu\left(\frac{2\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{2\pi}{a}\right)^2 kz\right\} \cos\frac{2\pi x}{a}\sin\frac{2\pi y}{b}\, e^{-kz} \\
\sigma_{yz} &= -\frac{C}{k}\left\{-k + \left(\frac{2\pi}{a}\right)^2 z\right\} \cos\frac{2\pi x}{a}\cos\frac{2\pi y}{b}\, e^{-kz} \\
\sigma_{zx} &= -\frac{C}{k}\left(\frac{2\pi}{a}\right)\left(\frac{2\pi}{b}\right) z \sin\frac{2\pi x}{a}\sin\frac{2\pi y}{b}\, e^{-kz}
\end{aligned}
\right\} \tag{4.46}
$$

4.3.4 三種類の表面力の重ね合わせ

前述の三種類の正弦状の分布力が半無限体表面 $z = 0$ に作用する場合の物体中の応力分布は，式（4.31），（4.41）および（4.46）を重ね合わせることによって求まる。ここで，本章の目的とする二軸，三軸のクライテリオンに関係して自由表面の影響を検討するのに必要な三つの応力成分についてまとめておく。

$$
\left.
\begin{aligned}
\sigma_{zz} &= [A \cos\frac{2\pi x}{a} \cos\frac{2\pi y}{b} + \{Ak \cos\frac{2\pi x}{a} \cos\frac{2\pi y}{b} \\
&\quad + (\frac{2\pi}{a})(B + C) \sin\frac{2\pi x}{a} \cos\frac{2\pi y}{b}\}z]\ e^{-kz} \\
\sigma_{zx} &= [B \cos\frac{2\pi x}{a} \cos\frac{2\pi y}{b} + \{A(\frac{2\pi}{a})\sin\frac{2\pi x}{a} \cos\frac{2\pi y}{b} \\
&\quad - \frac{B}{k}(\frac{2\pi}{a})^2 \cos\frac{2\pi x}{a} \cos\frac{2\pi y}{b} - \frac{C}{k}(\frac{2\pi}{a})(\frac{2\pi}{b})\sin\frac{2\pi x}{a} \sin\frac{2\pi y}{b}\}z]\ e^{-kz} \\
\sigma_{yz} &= [C \cos\frac{2\pi x}{a} \cos\frac{2\pi y}{b} + \{A(\frac{2\pi}{b})\cos\frac{2\pi x}{a} \sin\frac{2\pi y}{b} \\
&\quad + \frac{B}{k}(\frac{2\pi}{a})(\frac{2\pi}{b})\sin\frac{2\pi x}{a} \sin\frac{2\pi y}{b} - \frac{C}{k}(\frac{2\pi^2}{a}) \cos\frac{2\pi x}{a} \cos\frac{2\pi y}{b}\}z]\ e^{-kz}
\end{aligned}
\right\}
\tag{4.47}
$$

ここで

$$
k = \sqrt{(\frac{2\pi}{a})^2 + (\frac{2\pi}{b})^2}
$$

である。

以上のように半無限体の表面に周期的な表面力 P_x, P_y, P_z が作用したときの表面下の応力成分 σ_{zz}, σ_{zx}, σ_{yz} はともに表面からの距離 z の指数関数と一次関数の積の形で表現されるが，主に深さ z の増加に伴って指数関数的に減衰していくことが理解できる。さらに表面力分布の x 方向，y 方向の波長 a，b によって表わされる $k = \sqrt{(2\pi/a)^2 + (2\pi/b)^2}$ が大きいほど，換言すれば波長 a，b が短いほど減衰の程度は速くなる。また，応力の絶対値を考慮すべきときには振幅 A，B，C も影響因子になる。

4.4　二軸，三軸解析のクライテリオン

4.3 節の初めに，自由表面の影響を検討するには三軸応力状態にある無限体中に仮想表面を考え，その面に作用する垂直方向の応力成分がすべて 0 になるような仮想表面力を与え，その表面力の作用による応力場と無限体中の応力場を重畳させることで達成されることを述べた。すなわち，自由表面の効果は式（4.47）で表わされる応力分布そのものであり，応力周期の波長に依存し，深さ z とともに指数関数的に減衰することがわかった。自由表面の効果が深くまで達すると表面近傍は二軸応力状態に近似できるが，表面の効果がきわめて浅い領域に限定されるときには二軸応力状態では表わせないことになる。前述のように表面の効果は周期的な応力の波長に依存するから，この波長と X 線侵入深さの関連において二軸，三軸解析のクライテ

リオンを設けることができる。

いま，Fig. 4.5 のように自由表面の影響の及ぶ程度の違いによって深さ方向に対して三つの領域に分割する。S($0 \leqq z \leqq \delta$) は表面の影響を受けて σ_{zz}, σ_{zx}, σ_{yz} の各応力成分がほとんど完全に緩和されてしまうような領域，T($z \geqq D$) は表面の影響がもはや及ばなくなる領域，また中間のR($\delta < z < D$) は表面の影響が及んでいるものの完全に二軸応力状態ではない領域である。この三つの領域を区別する深さ δ および D を以下のようにして評価することができる。

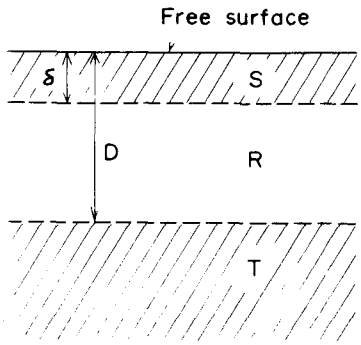


Fig. 4.5. Regions affected by the influence of free surface.

(1) 自由表面の影響でほぼ完全に応力が緩和される深さ ; δ

式 (4.47) において $z = 0$, $z = \delta$ における応力をそれぞれ $\sigma(0)$, $\sigma(\delta)$ とすると，たとえば σ_{zz} に関しては

$$\sigma_{zz}(0) = A \cos\frac{2\pi x}{a} \cos\frac{2\pi y}{b} \tag{4.48a}$$

$$\sigma_{zz}(\delta) = [A \cos\frac{2\pi x}{a} \cos\frac{2\pi y}{b} + \{Ak \cos\frac{2\pi x}{a} \cos\frac{2\pi y}{b} + \frac{2\pi}{a}(B + C)\sin\frac{2\pi x}{a} \cos\frac{2\pi y}{b}\}\delta][1 - k\delta + \frac{1}{2}(k\delta)^2 - \ldots\ldots] \tag{4.48b}$$

ここで $a \leqq b$, $\delta/a << 1$ と仮定し，また $2\pi/a < k \leqq 2\sqrt{2}\pi/a$ より δ/a と $k\delta$ が同じオーダーであることに注意して $\sigma_{zz}(0)$ と $\sigma_{zz}(\delta)$ の差を作る。σ_{zx}, σ_{yz} についても同様にして

$$\sigma_{zz}(0)-\sigma_{zz}(\delta) \simeq -2\pi(B+C)(\frac{\delta}{a})\sin\frac{2\pi x}{a}\cos\frac{2\pi y}{b} + \frac{1}{2}A(k\delta)^2\cos\frac{2\pi x}{a}\cos\frac{2\pi y}{b} \tag{4.49a}$$

$$\sigma_{zx}(0)-\sigma_{zx}(\delta) \simeq -2\pi A(\frac{\delta}{a})\sin\frac{2\pi x}{a}\cos\frac{2\pi y}{b} + B[1+(\frac{2\pi}{ak})^2](k\delta)\cos\frac{2\pi x}{a}\cos\frac{2\pi y}{b} + (2\pi)^2C(\frac{1}{abk^2})(k\delta)\sin\frac{2\pi x}{a}\sin\frac{2\pi y}{b} \tag{4.49b}$$

$$\sigma_{yz}(0)-\sigma_{yz}(\delta) \simeq -2\pi A(\frac{\delta}{a})\cos\frac{2\pi x}{a}\sin\frac{2\pi y}{b} + C[1+(\frac{2\pi}{ak})^2](k\delta)\cos\frac{2\pi x}{a}\cos\frac{2\pi y}{b} - (2\pi)^2B(\frac{1}{abk^2})(k\delta)\sin\frac{2\pi x}{a}\sin\frac{2\pi y}{b} \tag{4.49c}$$

が得られる。いま A >> B, C とすると上の三つの式の中で最も低次の項は式(4.49b)および(4.49c)の第1項であるから，$\sigma(0)-\sigma(\delta)$ を充分小ならしめるには $2\pi(\delta/a) \ll 1$ とすればよいことがわかる。たとえば $2\pi(\delta/a) = 0.001$ とすると $\delta \simeq 0.01$ aとなる。また B, C >> A のときも同様な考え方で $\delta \simeq 0.01$ a を得る。さらに $a \geqq b$ としても同じことが言えるので結論として δ はa，bのうちの短い方の波長の1／100以下になると言える。すなわち，この δ の深さまでは二軸応力の近似が成立する。しかし，実際に測定する場合に二軸解析が適当であるか否かは，X線応力測定の精度も考慮に入れて検討する必要があるので，$\sigma(0)-\sigma(\delta)$ の絶対値と測定精度の比較をしておくのが適当であろう。この意味において，δ はもちろんaとbに依存するが応力振幅A，B，Cによっても大きく変化する。X線応力測定精度を10MPaとすれば，表面での応力振幅A，B，Cが1000MPaのとき $\delta = 0.01$ a，またA，B，Cが100 MPa のとき $\delta = 0.1$ a で $\sigma(0)-\sigma(\delta)$ は精度内におさまる。すなわち，同じ応力周期の分布であってもその振幅が小さければ二軸応力状態と見なせる深さは深くなる。

(II) 自由表面の影響が及ばなくなる深さ；D

同じく $a \leqq b$ と仮定すると，$(2\pi/a) < k \leqq (2\sqrt{2}\pi/a)$ であるから式(4.47)の指数項は $z = 0.6$ a で $4.8\times10^{-3} < e^{-kz} < 2.3\times10^{-2}$ となり，その深さでの応力は表面での応力振幅のほぼ1／100のオーダーになることが予想される。しかし表面の影響が実質的に及ばなくなる深さDは式(4.47)のzについての一次関数の項のためA，B，Cの値を知る必要がある。たとえば σ_{zz} に関して表面での応力振幅とDの関係を計算すると，Aが1000 MPaのとき $D = 0.7$ a，またAが100MPaのとき $D = 0.4$ aで σ_{zz} は10MPa以下に減衰する。$b \geqq a$ の場合についても同様な結果が得られる。すなわち，x，y 方向の波長の短い方の波長に相当する深さの約0.6倍に相当する深さになると，そこでの応力値は10MPa以下となり測定誤差範囲内になるので表面の影響は無視できる程度になる。

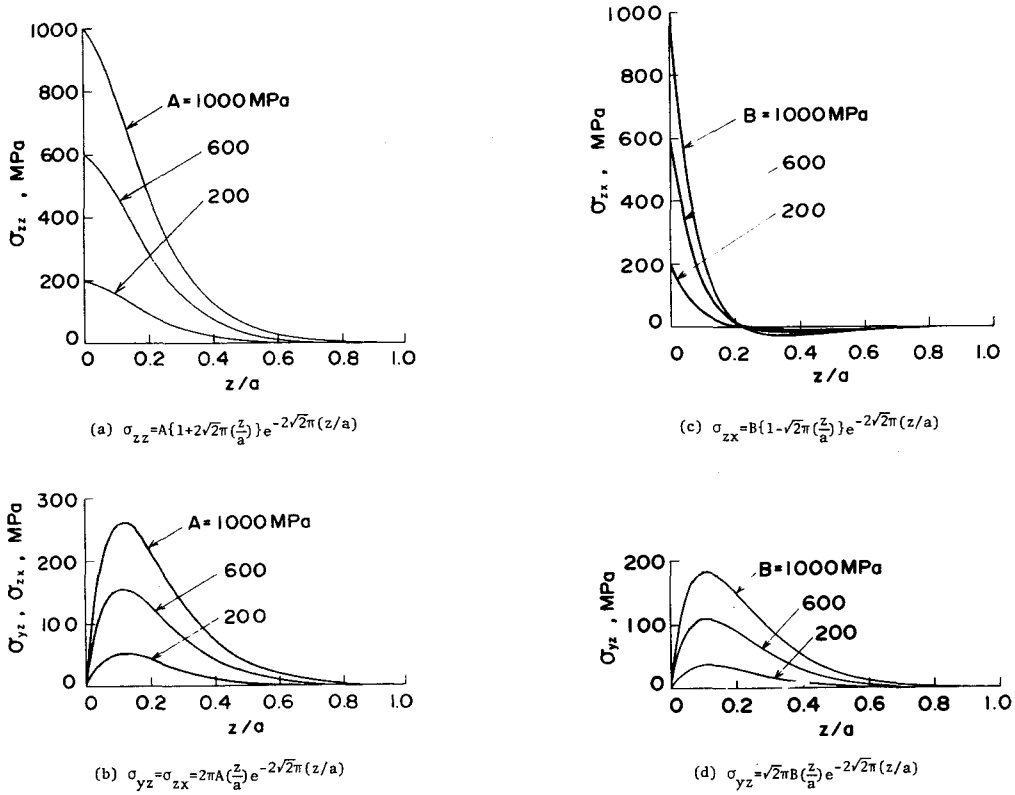
このような情況は式(4.47)で表わされる各応力成分をzの関数として図示すれば容易に理解できる。明らかなように応力はxおよびyにも依存するから，最大の応力分布を示す位置で自由表面の影響を考えてみる。簡単のため a = b と仮定すると，表面に垂直な表面力のみが作用する場合の最大の応力分布は

$$\left.\begin{aligned}\sigma_{zz}(x=0,\ y=0) &= A\{1+2\sqrt{2}\,\pi(\tfrac{z}{a})\}\,e^{-2\sqrt{2}\,\pi(z/a)}\\ \sigma_{yz}(x=0,\ y=\tfrac{a}{4}) &= \sigma_{zx}(x=\tfrac{a}{4},\ y=0) = 2\pi A(\tfrac{z}{a})\,e^{-2\sqrt{2}\,\pi(z/a)}\end{aligned}\right\}\quad(4.50)$$

で与えられる。同様に，x 方向のせん断力が作用する場合は

$$\left.\begin{aligned}
\sigma_{zz}(x=0,\ y=\tfrac{a}{4}) &= 2\pi B(\tfrac{z}{a})\ e^{-2\sqrt{2}\,\pi(z/a)} \\
\sigma_{yz}(x=\tfrac{a}{4},\ y=\tfrac{a}{4}) &= \sqrt{2}\pi B(\tfrac{z}{a})\ e^{-2\sqrt{2}\,\pi(z/a)} \\
\sigma_{zx}(x=0,\ y=0) &= B\{1-\sqrt{2}\,\pi(\tfrac{z}{a})\}\ e^{-2\sqrt{2}\,\pi(z/a)}
\end{aligned}\right\} \qquad (4.51)$$

である。y 方向のせん断力が作用する場合は式（4.51）と同様の結果になる。 Fig. 4. 6 にこ



(a) $\sigma_{zz}=A\{1+2\sqrt{2}\pi(\frac{z}{a})\}e^{-2\sqrt{2}\pi(z/a)}$

(c) $\sigma_{zx}=B\{1-\sqrt{2}\pi(\frac{z}{a})\}e^{-2\sqrt{2}\pi(z/a)}$

(b) $\sigma_{yz}=\sigma_{zx}=2\pi A(\frac{z}{a})e^{-2\sqrt{2}\pi(z/a)}$

(d) $\sigma_{yz}=\sqrt{2}\pi B(\frac{z}{a})e^{-2\sqrt{2}\pi(z/a)}$

Fig. 4.6. Influence of the free surface.

れらの結果を図示した。これより前述のように表面での応力振幅を 200 ～ 1000 ＭＰａ にとった場合， z/a ＝ 0.4 ～ 0.7 以上になるともはや実質的に表面の影響が無視できることがよくわかる。

さて，Ｘ線残留応力測定における二軸，三軸解析のクライテリオンの設定は，このような自由表面の影響層深さを表わすパラメータ δおよびＤとＸ線侵入深さの関連においてなされるべ

きものである。ごく大ざっぱな表現をすれば，残留応力状態をフーリエ級数で展開したとき，優位なフーリエ成分の中で最も高次の波（高調波）の波長の1／100がX線侵入深さに比べて大きいときにはX線回折に寄与する層の中では二軸応力状態とみなすことができるので，二軸応力解析が適切な方法と言える。また，優位なフーリエ成分の中で最も低次の波（基本波も含む）の波長がX線侵入深さに比べてきわめて小さい場合には，深さDまでの層からの回折強度への寄与は無視できるので，三軸応力解析が適切な方法となる。

4.5 結　言

本章では，仮想表面力の概念を用いて自由表面が残留応力分布に及ぼす効果について検討した。無限体中の仮想面上に残留応力が分布する場合，その面に垂直な方向に作用する応力成分を0にするような仮想表面力を与え，その表面力による応力分布を調べることによって自由表面の影響を知ることができる。残留応力分布をフーリエ級数で表現して，その一つの成分について応力分布を計算した結果つぎのことが明らかになった。

(1) 自由表面の効果は表面下の深さに対する指数関数と一次関数の積の形で減衰し，その減衰の度合は周期残留応力の波長に依存する。

(2) 自由表面の影響が無視できる深さDは残留応力分布の波長のオーダーの深さである。

(3) 自由表面の影響でほぼ完全に二軸応力状態に近似できる深さδは残留応力の波長の1／100のオーダーの深さまでである。

そして，残留応力測定の際の二軸あるいは三軸解析のクライテリオンは，この深さδおよびDとX線侵入深さとの相関によって決まり，X線侵入深さがδより小さければ二軸応力解析（すなわち $\sin^2\psi$ 法）の適用が可能であるが，X線侵入深さがDに比べてきわめて大きい場合には深さDまでの領域が観測される回折強度に寄与しない（すなわち自由表面の影響が無視できる）と考えて三軸解析を適用すべきである。しかし，一般的にはX線侵入深さがDと比較し得る場合も多いと考えられ，また残留応力の各成分が深さとともに変化することも考えられるので，このような場合には第2章で述べたようにX線の吸収をも考慮に入れた解析がなされなければならない。しかしこのような複雑な分布に対する完全な解は困難であり不可能に近いと思われる。

以上のように，周期的な残留応力のz方向の成分の波長と振幅によって，X線残留応力の二軸あるいは三軸解析のクライテリオンを考察し，それが主に波長によって決まることを示したが，実際問題の適用に当っては残留応力の波長が何を意味するかを充分検討しなければならない。たとえば，次章以下で扱う介在物粒子を含む二相材料における粒子中の応力測定のときには平均粒子間距離がそれに当るであろうし，多結晶体ではおそらく平均粒子間隔がそれに対応する

のではないかと思われる。

また，本解析では周期的残留応力分布をもつような無限体を仮想平面で切断して自由表面を作った。この過程には，切断によって物体内の微視的構造が変化しないという仮定が暗に含まれている。しかし，塑性変形を受けたような場合，たとえば単に引張予変形を与えたような試料においてさえも表面と内部では明確な微細構造（転位組織や転位密度など）や機械的強度に差のあることがわかっている〔179～186〕。これは表面に存在する結晶は変形に対する抵抗が小さく，内部の結晶に比べて容易に変形するためであり，表面から内部にわたって変化するような巨視的残留応力を付随的に引き起す〔40，51～74，90，92〕。X線応力測定の分野では表面効果〔52〕として良く知られた事実である。したがって，これら表面特性もよく理解した上で応力解析にのぞむことが必要であろう。

第５章　球状介在物の熱残留応力と三軸応力解析の相関性

5.1　緒　　言

介在物あるいは析出物を含む二相合金は，ある温度における無応力状態から均一な温度変化 ΔTを受けたとき，母相と第２相を構成している材料の熱膨張係数の差 $\Delta\alpha$ により微視的内部応力が発生する。このような応力は tessellated stress 〔187〕あるいは熱誘起応力（thermally induced stress〔188〕）と呼ばれ，一般につぎの形で示される。

$$\pm\ \Phi\ \Delta\alpha\ \Delta T$$

ここでΦは二つの材料の弾性定数，第２相の形状および分布，さらに問題とする個々の応力成分の方向と場所に依存する関数である。球状および円筒状介在物に対する関数Φは Laszlo〔187〕，Mott and Nabarro〔189〕，Gurland〔190〕，Liu and Gurland〔188〕，Brooksbank and Andrews〔191，192〕らによって求められてきた。

このような応力はいかなる熱処理によっても除去できる類のものではなく，応力の大きさと符号によってはとくに高硬度部材の破壊に対して重大な問題になることも予想される〔192〕。また，せんい強化材においても機械的特性に大きな関連があり〔193～196〕，その強度を改善するため積極的に tessellated stress を取り入れて考慮する必要性も考えられる。したがって，理論的考察〔197，198〕はさることながら，このような tessellated stress を実測して確認する必要も今後ますます生じてくることと考えられる〔199～201〕。ある高温時に存在するであろう無応力状態から材料を均一に冷却して室温にもたらしたとき生じる tessellated stress を以後熱残留応力と呼ぶことにする。

本章は熱残留応力を測定することが直接の問題ではないが，しかし介在物中の熱残留応力をＸ線的に測定，解析する方法を与える指針を提供することにはなるであろう。本章の直接の目的は，第４章で展開したＸ線残留応力測定における二軸，三軸応力解析に関連して，球状介在物の熱残留応力に伴うひずみを測定することにより実験的な検討を試みるものである。熱残留応力の理論は，熱膨張係数の温度依存性や誘起された応力による母相の塑性変形の時期と程度に関して未だ完全解が得られているとは言えないが，一応モデル的には理論解が存在する。また，球状粒子を含む場合には，その粒子中の応力は後に示すように単純な静水圧応力状態の形で表わされるから，第４章の解析と結合して実験値と比較し得る図を描くことが可能である。

5.2 球状介在物中の熱残留応力

5.2.1 球状介在物を含む無限体の熱残留応力

Liu and Gurland〔188〕および Brooksbank and Andrews〔191，192〕は球状介在物を含む二相材料の熱残留応力の分布を，母相が弾性的にのみ変形する場合および塑性変形も合わせて生じる場合について解いた。介在物が多数存在する場合，一個の介在物が属する領域（影響を及ぼす領域）を平均粒子間距離にとって Fig. 5.1 および Fig. 5.2 に示すような複合球モ

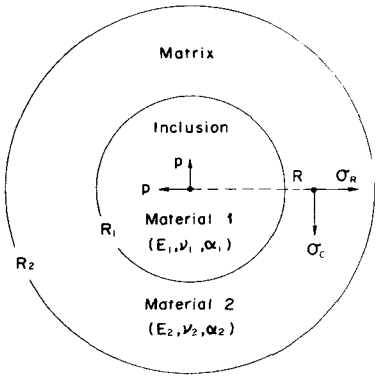


Fig. 5.1. Spherical inclusion in elastic matrix.

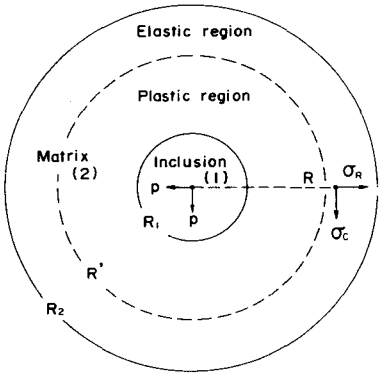


Fig. 5.2. Spherical inclusion in elastic-plastic matrix.

デルを仮定した。すなわち R_1 が介在物の半径，R_2 が影響領域の半径であり，半径方向の応力が母相と介在物の界面 $(R = R_1)$ で連続，影響領域の最外周 $(R = R_2)$ で0となるように境界条件が与えられた。

母相が弾性的にのみ変形する場合（ Fig. 5.1）の任意点の応力はつぎのように表わされる。

介在物中 $(R \leqq R_1)$ の応力は

$$p = (\sigma_R)_1 = (\sigma_C)_1 = \frac{(\alpha_2 - \alpha_1)\Delta T}{\dfrac{\frac{1}{2}(1+\nu_2) + (1-2\nu_2)d^3}{E_2(1-d^3)} + \dfrac{(1-2\nu_1)}{E_1}} \tag{5.1}$$

であり，半径方向応力，接線方向応力ともに等しい静水圧応力状態である。また

母相中 $(R_1 \leqq R \leqq R_2)$ の応力は

$$\left.\begin{aligned} (\sigma_R)_2 &= \frac{p}{(1-d^3)}\left(\frac{R_1{}^3}{R^3} - d^3\right) \\ (\sigma_C)_2 &= \frac{-p}{(1-d^3)}\left(\frac{1}{2}\frac{R_1{}^3}{R^3} + d^3\right) \end{aligned}\right\} \tag{5.2}$$

である。ここに

σ_R = 半径方向の主応力

σ_C = 円周方向の主応力

p = 球状介在物中の静水圧応力

ΔT = 温度変化（温度上昇を正とする）

α = 与えられた温度変化 ΔT における平均線熱膨張係数

E = ヤング率

ν = ポアソン比

指標1および2はそれぞれ介在物および母相を意味する。

すなわち，母相中の応力は中心からの距離Rの3乗に逆比例して減衰することがわかる。熱的ポテンシャル $(\alpha_2 - \alpha_1)\Delta T$ すなわち p が大きくなると，母相 － 介在物の界面付近で大きいせん断応力状態となり母相が降伏する（Fig. 5.2）ことが考えられるが，この場合 Tresca の降伏条件（母相中の最大せん断応力 $|\sigma_C - \sigma_R|$ が母相の降伏応力 Y_2 に達すると降伏が起る）に従うものとして，加工硬化はないと仮定するとつぎの応力状態が得られる。

介在物中 $(R \leqq R_1)$ の応力は

$$p = (\sigma_R)_1 = (\sigma_C)_1 = -2Y_2\{\ell n \frac{R'}{R_1} + \frac{1}{3}(1 - h^3)\} \tag{5.3}$$

母相中塑性変形領域 $(R_1 < R < R')$ の応力は

$$\left.\begin{aligned} (\sigma_R)_{2y} &= -2Y_2\{\ell n \frac{R'}{R} + \frac{1}{3}(1 - h^3)\} \\ (\sigma_C)_{2y} &= Y_2 - 2Y_2\{\ell n \frac{R'}{R} + \frac{1}{3}(1 - h^3)\} \end{aligned}\right\} \tag{5.4}$$

母相中弾性変形領域 $(R' < R < R_2)$ の応力は

$$\left.\begin{aligned} (\sigma_R)_{2e} &= -\frac{2}{3}Y_2\{(\frac{R'}{R})^3 - h^3\} \\ (\sigma_C)_{2e} &= +\frac{2}{3}Y_2\{\frac{1}{2}(\frac{R'}{R})^3 + h^3\} \end{aligned}\right\} \tag{5.5}$$

ここで R' は母相中の弾性領域と塑性領域の境界を表わし，R' と降伏応力 Y_2 は，$h = R'/R_2$ として

$$(\frac{1-2\nu_2}{E_2} - \frac{1-2\nu_1}{E_1})[3\ell n \frac{R'}{R_1} + (1-h^3)] = \frac{3}{2}[(\alpha_2-\alpha_1)\frac{\Delta T}{Y_2} + (\frac{1-\nu_2}{E_2})(\frac{R'}{R_1})^3] \tag{5.6}$$

で関係づけられる。

母相が塑性変形するか否かは母相の強度にも依存するが，軟い母相であれば実際に熱的ポテンシャル $(\alpha_2 - \alpha_1)\Delta T$ のみの効果で介在物のまわりに転位の発生することがエッチピット法〔202〕および電子顕微鏡観察〔203～207〕により実証されている。

5.2.2 表面近傍における球状介在物中の熱残留応力の緩和

球状介在物に発生する熱残留応力を用いると，その系に含まれる応力分布の波長との関連において二軸あるいは三軸応力解析のクライテリオンを検討することができる。

4.3節に示したように，表面近傍層の応力状態は無限体中に含まれる応力状態に自由表面の境界条件を満足させるような仮想表面力による応力を重畳させることによって計算できる。計算を容易にするため，Fig. 5.3 に示すように球状介在物は仮想表面（x-y 面）上に正方形配列し，その一つは直交座標系の原点に，また他の介在物はx，y，z軸に沿って周期的に存在しているものと仮定する。いま，x-y 面に自由表面を作るためには，この面に作用する σ_{zz}，σ_{zx} および σ_{yz} の応力分布を調べなければならない。Liu and Gurland および Brooksbank and Andrews の結果，すなわち式（5.1），（5.2）などによると介在物およびその周囲の応力状態はそれぞれ

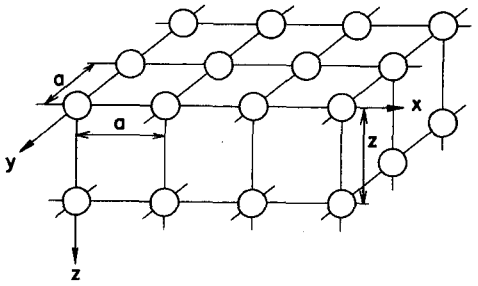


Fig. 5.3. Cyclic arrangement of spherical inclusions.

$$(\sigma_1) = \begin{pmatrix} p & 0 & 0 \\ 0 & p & 0 \\ 0 & 0 & p \end{pmatrix}$$

および

$$(\sigma_2) = \begin{pmatrix} \sigma_R & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_C & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_C \end{pmatrix}$$

の形で表わされる。したがって，Fig. 5.3 のような配列の場合x-y面に作用する法線方向（z方向）の応力成分は介在物中のpおよび母相中の σ_C で与えられる垂直応力 (σ_{zz}) のみでせん

断応力(σ_{zx} および σ_{yz})は存在しないことがわかる。これは $z = 0$ の面に自由表面を作るために，仮想表面力として z 方向の垂直力のみを与えればよいことを意味する。また，$z = 0$ の面上に作用する応力分布を二重フーリエ級数で表わすとき，第1近似として介在物の間隔を周期とする基本調波成分のみを考えることで充分なことが容易に想像される。

式（4.22）で $a = b$ として，正弦状に分布する垂直力

$$P_z = A \cos \frac{2\pi x}{a} \cos \frac{2\pi y}{a}$$

によって $x = ia$ および $y = ja$ $(i, j = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$ の位置に生じる応力は式（4.31）より次式で与えられる。

$$\left.\begin{aligned} \sigma_{xx} &= \sigma_{yy} = \frac{1}{2} A \{1 + 2\nu - 2\sqrt{2}\,\pi(\frac{z}{a})\}\, e^{-2\sqrt{2}\,\pi(z/a)} \\ \sigma_{zz} &= A \{1 + 2\sqrt{2}\,\pi(\frac{z}{a})\}\, e^{-2\sqrt{2}\,\pi(z/a)} \\ \sigma_{xy} &= \sigma_{yz} = \sigma_{zx} = 0 \end{aligned}\right\} \quad (5.7)$$

半無限体中の介在物中の応力を σ_{xx}^*，σ_{yy}^* および σ_{zz}^* と書くことにすると，これらは式（5.1）あるいは式（5.3）で表わされた静水圧応力と式（5.7）の応力との重畳で

$$\left.\begin{aligned} \sigma_{xx}^* &= p + \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy}^* &= p + \sigma_{yy} \\ \sigma_{zz}^* &= p + \sigma_{zz} \end{aligned}\right\} \quad (5.8)$$

と表現できる。$z = 0$ における境界条件

$$\sigma_{zz}^*(z = 0) = p + \sigma_{zz}(z = 0) = 0 \quad (5.9)$$

より係数Aは

$$A = -p \quad (5.10)$$

となる。この関係を式（5.7）に代入すると半無限体中の介在物中の応力は

$$\left.\begin{aligned} \sigma_{xx}^* = \sigma_{yy}^* &= p - \frac{p}{2} \{1 + 2\nu - 2\sqrt{2}\,\pi(\frac{z}{a})\}\, e^{-2\sqrt{2}\,\pi(z/a)} \\ \sigma_{zz}^* &= p - p \{1 + 2\sqrt{2}\,\pi(\frac{z}{a})\}\, e^{-2\sqrt{2}\,\pi(z/a)} \end{aligned}\right\} \quad (5.11)$$

で与えられる。この結果より $z = 0$ における介在物中の応力は

$$\sigma_{xx}^*(z = 0) = \sigma_{yy}^*(z = 0) = \frac{1 - 2\nu}{2} p$$

$$\sigma_{zz}^*(z = 0) = 0 \qquad (5.12)$$

そして，もちろんのこと z = ∞ では静水圧応力状態

$$\sigma_{xx}^* = \sigma_{yy}^* = \sigma_{zz}^* = p \qquad (5.13)$$

が得られる。これらの応力成分の分布をz/aの関数として Fig. 5.4 に示した。4.4節で詳しく調べたように，z/a = 1 すなわち球状介在物の平均間隔だけ深いところでは自由表面の影響は無視できることがよくわかる。

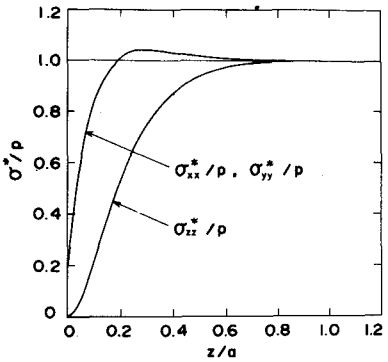


Fig. 5.4. Relaxation of tessellated stress in spherical inclusion near the free surface. ν=0.3.

5.3 介在物の熱残留応力に基づく $\sin^2\psi$ 線図の評価

試料表面法線からψだけ傾いた方向の垂直ひずみ ε_ψ は式（5.11）に Hooke の法則を適用して得られるひずみを ε_{xx}^*，ε_{zz}^* とすれば

$$\varepsilon_\psi = \varepsilon_{xx}^* \sin^2\psi + \varepsilon_{zz}^* \cos^2\psi$$

の関係を用いて容易に求まる。

$$\varepsilon_\psi(z) = \frac{p}{E}\left[\frac{1}{2}(1+\nu)(1-2\nu+6\sqrt{2}\pi\frac{z}{a})\, e^{-2\sqrt{2}\pi(z/a)}\right]\sin^2\psi$$

$$+ \frac{p}{E}\left[(1-2\nu) - (1+\nu)(1-2\nu+2\sqrt{2}\pi\frac{z}{a})\, e^{-2\sqrt{2}\pi(z/a)}\right] \qquad (5.14)$$

2.3.2節で示したように，回折強度分布曲線の重心位置に相当するみかけのひずみは重み付き平均ひずみ

$$\langle \varepsilon_\psi \rangle = \frac{\int_0^\infty \exp[-\frac{2\mu z}{\sin\theta\cos\psi}]\, \varepsilon_\psi(z)\, dz}{\int_0^\infty \exp[-\frac{2\mu z}{\sin\theta\cos\psi}]\, dz} \qquad (5.15)$$

に一致する。式（5.14）を式（5.15）に代入して積分を実行すると

$$\langle \varepsilon_\psi \rangle = \frac{p}{E}\left\{(1-2\nu) + (1+\nu)(1-2\nu)(\frac{1}{2}\sin^2\psi-1)(\frac{2\mu}{\sin\theta\cos\psi})(\frac{2\mu}{\sin\theta\cos\psi}+\frac{2\sqrt{2}\pi}{a})^{-1}\right.$$

$$\left. + \frac{\sqrt{2}\pi}{a}(1+\nu)(3\sin^2\psi - 2)(\frac{2\mu}{\sin\theta\cos\psi})(\frac{2\mu}{\sin\theta\cos\psi}+\frac{2\sqrt{2}\pi}{a})^{-2}\right\} \qquad (5.16)$$

が得られる。重み付き平均ひずみ $< \varepsilon_\psi >$ に対応する格子面間隔を $< d_\psi >$ とすると，これらの間には

$$< d_\psi > = d_0(1 + < \varepsilon_\psi >) \tag{5.17}$$

の関係があるから式（5.16）を式（5.17）に代入すれば $< d_\psi >$ と $\sin^2\psi$ の関係を得ることができる。

ここで，次節で実験対象とする Al–Si 二相合金と M_6C 炭化物粒子を含む高速度鋼（SKH 2）について，Si 粒子および M_6C 炭化物粒子の熱残留応力に伴う $< d_\psi > - \sin^2\psi$ 線図を描いておく。計算に用いた諸量の値は Table 5. 1 および Table 5. 2 に示すとおりである。

Table 5.1. Constants used in the calculation of tessellated stress of Al-Si alloy.

Young's modulus of Si	E_1 = 127 GPa
Young's modulus of Al	E_2 = 72 GPa
Poisson's ratio of Si	ν_1 = 0.28
Poisson's ratio of Al	ν_2 = 0.34
Temperature change	ΔT = -180 K
Mean linear thermal expansion coefficient of Si	α_1 = 7.6 × 10^{-6}/ K
Mean linear thermal expansion coefficient of Al	α_2 = 23.5 × 10^{-6}/ K
Interplanar spacing of Si at stress free state	$d_0(110)$ = 0.543393 nm
Diffraction angle of Si(331) plane	θ = 66.75°
Linear absorption coefficient of Al	μ = 402 × 10^{-4} μm^{-1}
Yield stress of Al	Y_2 = 100 MPa

Table 5.2. Constants used in the calculation of tessellated stress of SKH2.

Young's modulus of M_6C	E_1 = 342 GPa
Young's modulus of matrix	E_2 = 204 GPa
Poisson's ratio of M_6C	ν_1 = 0.17
Poisson's ratio of matrix	ν_2 = 0.283
Temperature change	ΔT = -580 K
Mean linear thermal expansion coefficient of M_6C	α_1 = 9.24 × 10^{-6}/ K
Mean linear thermal expansion coefficient of matrix	α_2 = 14.79 × 10^{-6}/ K
Interplanar spacing of M_6C at stress free state	d_0 = 0.130311 nm
Diffraction angle of M_6C(644/660/822) plane	θ = 61.52°
Linear absorption coefficient of matrix	μ = 905 × 10^{-4} μm^{-1}
Yield stress of matrix	Y_2 = 400 MPa

これら二種類の系においては第2相粒子の熱膨張係数が母相のそれより小さいため，バルク中では Si 粒子，M_6C 炭化物粒子とも圧縮の静水圧応力が生じる。母相が弾性的に変形するモデルを用いた式（5.1）より得られた結果は Si 粒子の場合 $p = -162$ MPa，M_6C 炭化物粒子の場合 $p = -448$ MPaであった。この値を用いて式（5.16）および式（5.17）により得られた $< d_\psi > - \sin^2\psi$ の関係を Fig. 5.5 および Fig. 5.6 に示す。

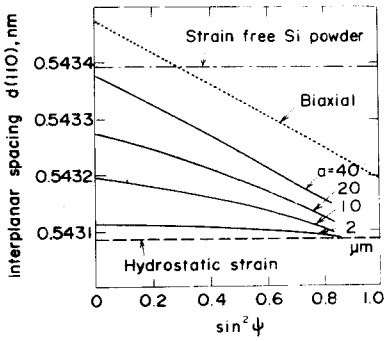


Fig. 5.5. $\sin^2\psi$ diagram based on the tessellated stress in silicon particles embedded in aluminum matrix.

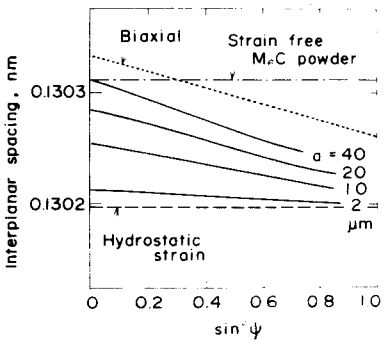


Fig. 5.6. $\sin^2\psi$ diagram based on the tessellated stress in M_6C particles of SKH2.

静水圧応力に基づくひずみ（静水圧ひずみと称する）は

$$\varepsilon_x = \varepsilon_y = \varepsilon_z = \frac{1 - 2\nu}{E} p \tag{5.18}$$

であるから $\sin^2\psi$ には無関係であり，$p < 0$ の場合には Fig. 5.5，Fig. 5.6 の破線で示すように無ひずみ紛末の格子面間隔（これも $\sin^2\psi$ には無関係で一点鎖線で示す水平線）を負側に平行移動したものとなる。自由表面の影響を考慮に入れて重み付き平均をとったときの格子面間隔の分布を実線で示した。粒子間距離 a（すなわち周期的応力分布の波長）が数 μm 以下の場合には $< d >$ はほとんど $\sin^2\psi$ に依存せず，静水圧ひずみの場合の分布に近似できるが，a が大きくなるに伴って $< d >$ 分布のこう配が右下りに大きくなり，式（5.12）で表わされた表面での応力値を用いて二軸応力状態として扱ったひずみ分布（点線で示した直線）に近づいていく。

この結果，X線的に観測されるひずみは粒子間隔が小さいときには三軸応力状態を表わし，粒子間隔が大きくなるに伴って二軸応力状態に移行していくことが理解できる。ここで取扱った熱残留応力の場合，粒子間隔はそのまま微視的応力分布の波長に一致するので，X線応力解析においてはこの応力分布の波長が二軸あるいは三軸解析のクライテリオンを与えることになる。

5.4　実験結果および考察

5.4.1　二相材の準備

熱残留応力に基づく実験を行うため二種類の試料を準備した。一つは Al− 11wt ％ Si合金である。純アルミニウムとアルミニウム − シリコン 母合金を混合して溶解しグラファイトるつぼに鋳込んだ後，鋳造組織を破壊するため手ハンマで約50％鍛造した。つぎに厚さ 3 mmの薄片を切り出し，Siを完全に母相から析出させ，また Si 粒子を球状化する目的で真空中 803 K 48時間の焼なましを施した。最後に 473 Kで 2 時間保持後空冷して熱残留応力を発生させた。

もう一つの試料は市販の高速度鋼 SKH 2 で受入れ状態において球状の M_6C 炭化物を含んでいた。これより厚さ 3 mmの小片を切り出し，加工による残留応力を除去するため真空中で 1173 K，1 時間の焼なましを施して徐冷した。さらに，熱残留応力を発生させる目的で 873 K，2 時間の焼戻しをして真空中炉冷した。熱処理時の酸化，脱炭層などの除去のため，両試料の表面を注意深く電解研摩して清浄にした。最終の試料表面あらさは両試片とも 1 μm 以下であり，表面あらさがX線測定値に及ぼす影響〔208，209〕はないものと考えられる。

Fig. 5. 7 および Fig. 5. 8 はそれぞれ Al − Si 合金の球状 Si 粒子，SKH 2 のM_6C 炭化物

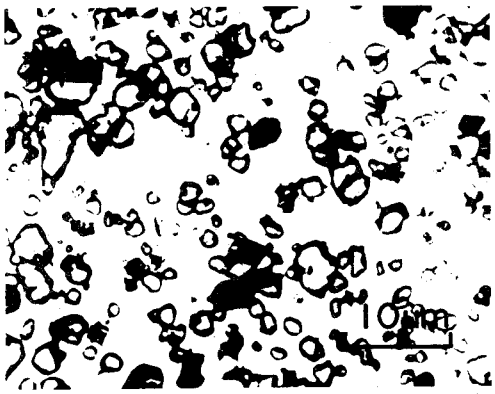


Fig. 5.7. Silicon particles in Al-Si two-phase alloy.

Fig. 5.8. M_6C carbide particles in SKH2.

粒子を表わす。Al − Si 合金中の Si 相の体積割合は成分比から計算して 0. 125，また SKH 2 中の M_6C 相の体積割合は Schwaltz − Saltikov の直径分析法〔210〕により約 4000 個の粒子を数えて 0. 15 を得た。粒子が単純立方格子の各格子点に配列するモデルを仮定すると，三次元的な平均粒子半径 R_1 および平均粒子間距離 $2R_2$ が次式より計算できる。

$$R_1 = \sqrt{\frac{3f}{2\pi N_s}}, \qquad R_2 = R_1 \sqrt[3]{\frac{\pi}{6f}}$$

ここに f は球状粒子の体積割合，N_s は単位面積当りの粒子の数である。これより Al − Si

合金および SKH 2 に対して Table 5.3の粒子パラメータが得られた。

Table 5.3. Structure parameters of Al-Si alloy and SKH2.

Parameter \ Material	Al-Si	SKH2
f	0.125	0.15
R_1 (μm)	0.58	0.63
R_2 (μm)	0.94	0.95

5.4.2 Si 粒子および M_6C 炭化物粒子の熱残留ひずみの測定

前節で作成された二種類の試料を用いて球状 Si 粒子および球状 M_6C 炭化物粒子の熱残留ひずみを測定した。X線測定条件は Table 5.4 に示すとおりであり，側傾法装置を用いている。回折線位置は，測定された回折強度分布に LPA 補正およびバックグラウンド補正を施した後，

Table 5.4. Conditions of X-ray measurement.

Characteristic X-ray	$CrK_{\alpha 1}$
Tube voltage and current	35 kVP, 9 mA
Diffraction plane	Si(331), M_6C(644/660/822)
Diffraction angle	132° for Si, 123° for M_6C
Measuring method	Side inclination, para-focusing
Counting method	1 min fixed time
Irradiated area	∿ 1.5 × 3 mm^2

Rachinger の方法〔211〕で $K_{\alpha 1}$ 線を分離して確率密度関数近似法〔212〕により決定した。

Fig. 5.9 は Al − Si 合金の Si 粒子中に発生した熱残留ひずみ（黒丸で示す）の測定結果

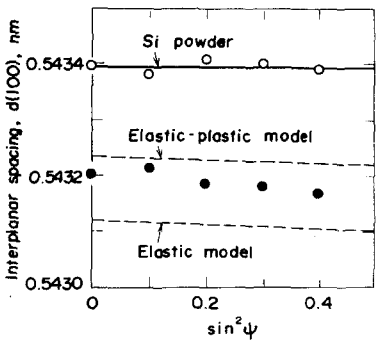


Fig. 5.9. Measurement of tessellated strain in silicon particles in Al-Si two-phase alloy; Si(331) plane.

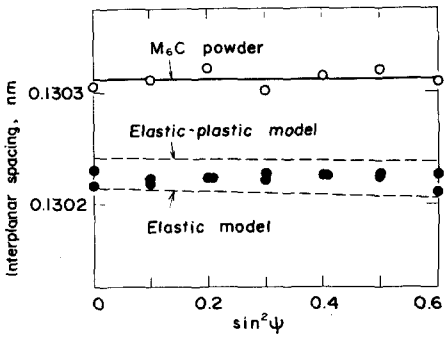


Fig. 5.10. Measurement of tessellated strain in M_6C carbide particles in SKH2; M_6C(644/660/822) plane.

を $\sin^2\psi$ の関数として表わしたものである。白丸で示したのは Si 粉末の焼なまし材から得られた結果であり，平均格子面間隔 d（100）= 0.54339 nmの $\sin^2\psi$ に無依存の測定値が得られた。Al − Si 合金バルク材から得られた格子面間隔の値は無ひずみ Si 粉末のそれに比べて小さく，わずか右下りのこう配を有しているものの両者間の差は $\sin^2\psi$ に対してほとんど一定である。これは Si と Al の熱膨張係数の差により， Al 母相に囲まれた Si 粒子は静水圧の圧縮応力を受けており，しかも自由表面による応力緩和の影響はそれほど大きくないことを意味している。

同様な結果は Fig. 5.10に示すように SKH 2 材の M_6C 炭化物粒子についても言える。この場合 M_6C 炭化物の紛末は焼なました SKH 2 バルク材から電解抽出法〔213〕によって採取した。同図はM_6C 相の（644／660／822）面から得られた d − $\sin^2\psi$ 線図であるが，Al − Si 合金の Si 相の結果と同様，バルク材における測定格子面間隔は無ひずみ紛末のそれより小さい値となっている。すなわち，バルク材中ではM_6C 炭化物粒子も静水圧的な圧縮応力の作用下にある。

5.4.3 考　察

式（5.1）および式（5.3）により Table 5.1，Table 5.2，Table 5.3 で与えられた数値を用いて Si 粒子および M_6C 炭化物粒子中に生じる静水圧の熱残留応力 p が Table 5.5 のように得られる。容易に推測されるように，母相が塑性変形する場合には降伏による応力場

Table 5.5. Hydrostatic stresses due to tessellation (MPa).

Model \ Material	Si in Al-Si alloy	M_6C in SKH2
Elastic model	-162	-448
Elastic-plastic model	- 92	-316

の緩和が生じるため，粒子中に発生する静水圧応力は弾性モデルのそれに比べて小さい値になる。

これらの応力値 p を用いて式（5.16）により重み付き平均ひずみが $\sin^2\psi$ の関数として得られ，その結果を Fig. 5.9 および Fig. 5.10に破線で示した。Fig. 5.5 および Fig. 5.6 にも示したが，本実験に用いた試料では平均粒子間隔が 1 ∿ 2 μm で Al − Si 合金および SKH 2 への X 線侵入深さに比べて 1 オーダー小さいので，回折線に及ぼす自由表面の影響は大きくない。したがって，弾性モデル，弾塑性モデルともにこう配は小さく無ひずみ状態の直線をほぼ

平行に負の方向へ移動させた分布となる。弾塑性モデルの解は母相の降伏応力によっても多少上下変動があるが，実測値はいずれの場合にも弾性モデルと弾塑性モデルの中間に位置し理論とのよい対応が見られる。すなわち，平均粒子間隔と残留応力の波長を等価においた本解析理論と実験結果の良好な対応関係より，三軸応力解析をすべきか否かのクライテリオンを微視的残留応力の波長で評価することができると結論される。

なお，粒子間距離を大きくすれば Fig. 5. 5 および Fig. 5. 6 に示したように三軸性から二軸性への移行過程を詳しく検討することが可能である。そのためには第 2 相粒子の体積比を小さくすることで達成可能であろうが， Al − Si 系では Si の結晶構造がダイヤモンド立方晶であるため Si 粒子の体積を減らせば測定に充分な回折線が得られず，また SKH 2 と同じ組織で M_6C 炭化物粒子の体積比が小さいような材料が見当らないため実際にこの検討をすることはできなかった。

一般に析出物の間隔は数 μm 以下であると考えられるから，もしも熱残留応力が存在しているとしてもX線的に測定されるひずみは $\sin^2\psi$ 線図上でほぼ水平な分布になる。$\mathrm{Sin}^2\psi$ 法はその直線のこう配から応力値を求めるものであり，水平分布した場合には応力は 0 としか計算されない。したがって，このような場合従来の $\sin^2\psi$ 法で応力解析することは不適当であり，三軸応力解析がなされなければならない。

5.5 結　言

母相中の球状粒子中に生ずる熱残留応力を対象として二軸，三軸応力解析のクライテリオンに関する検討を行った。球状粒子中の熱残留応力は理論的に解の求まる微視的残留応力であり平均粒子間隔を周期とするような三軸状態の残留応力場を形成する。すなわち，このような残留応力系を対象とすると，粒子間隔を波長とする正弦状分布の残留応力場を仮定することができ，第 4 章で展開した自由表面の影響を考慮して表面近傍に存在する粒子中の応力を求めることができる。そして，この応力を用いて重み付き平均ひずみが計算でき，実験結果と比較対照することが可能になる。本章で得られた主な結果はつぎのとおりである。

(1) 静水圧ひずみは $\sin^2\psi$ には依存せず，$d - \sin^2\psi$ 線図は静水圧応力 p の正負により無ひずみ状態のそれに対して正負の方向に平行移動するのみで $\sin^2\psi$ 線図のこう配としては現われてこない。

(2) 微視的応力分布の波長 a が数 μm 以下の場合，自由表面近傍の応力緩和層は回折線強度にほとんど寄与せず，重み付き平均ひずみは静水圧ひずみ状態に近似できるが，a が大きくなるにつれて二軸応力状態として扱ったひずみ分布に移行していく。

(3) Al − Si 合金の Si 粒子および SKH 2 材の M_6C 炭化物粒子中には，それぞれ母相と

の熱膨張係数の差に基づく静水圧の圧縮応力が形成されることが実証された。

(4) 1～2 μm の平均粒子間隔をもつ Si 粒子および M_6C 炭化物粒子から得られる d - $\sin^2\psi$ 線図は第4章で展開した理論解析と良好な一致を示し，X線応力解析における二軸，三軸性を決定する要因は微視的残留応力の波長であることが確認された。

本章で取り扱った球状粒子の熱残留応力は最も単純で基本的なものであった。しかし，加工層などの残留応力をX線的に測定しようとする場合，X線的に得られた情報が何に由来するかまた上に述べた残留応力の波長の物理的な意味が何であるかを熟慮した上で解析に望まなければならない。

第6章　X線応力測定における三軸応力解析の基礎

6.1　緒　　言

第3章でのラッピング加工層における測定結果および第4章，第5章での球状介在物の熱残留応力の解析ならびに測定結果より，X線的に測定されたひずみに基づいて三軸解析をしなければならないような場合のあることが明らかになった。X線的に三軸状態として扱う場合，表面法線方向の成分は表面で0にならなければならないから必ず応力こう配を伴う。加工層のような場合，第3章でも扱ったように表面に平行な方向の各応力成分もこう配を有すると考えられる。応力の一成分あるいは二成分がこう配を有する場合は，ある簡単な応力分布（直線的に変化するような分布）を仮定して解析が可能であるが，6個の応力成分がそれぞれ独立にこう配を有するような場合の完全な解析は実質的には不可能であるので，一般的にはX線侵入深さ内での重み付き平均値として解析するのが顕明であると考えられる。

本章では，まず一般の三軸応力状態についてX線的に測定されるひずみ $\varepsilon_{\phi\psi}$ が6個の応力成分の関数としてどのように表現されるかを導き，種々の仮定された典型的な応力状態における $\varepsilon_{\phi\psi}$ を $\sin^2\psi$ あるいは方位角 ϕ の関数として描く。これらの図を理解しておくことによって，測定された格子ひずみの分布を見てその材料がどのような応力状態にあるかを定性的に把握するのに有益になる。つぎに，測定によって得られた $\sin^2\psi$ 線図からX線侵入深さ内の平均応力値を求める三軸解析の方法を述べ，最後に三軸解析における留意点，すなわち無応力状態の格子面間隔 d_0 の必要性について検討を加える。

6.2　三軸応力状態における応力と格子ひずみの関係

3.5.2節で定義した有効深さの位置に座標原点をとり，Fig. 6.1に示す直交座標系を考える。x_1 軸および x_2 軸は試料表面に平行な方向に，x_3 軸は試料表面法線方向にとる。そしてこのとき x_1，x_2，x_3 軸は一般に主応力軸とは一致せず，この座標系に関する応力成分およびひずみ成分は0でないと考える。通常の表記法に従い，ϕ および ψ で決定される方向 x_3' 軸に垂直な方向の格子面の垂直ひずみ $\varepsilon_{33'}$ を $\varepsilon_{\phi\psi}$ とし，$\varepsilon_{\phi\psi}$ を試料座標系 (x_1, x_2, x_3) のひずみテンソル ε_{ij} で表わすことを考える。これ

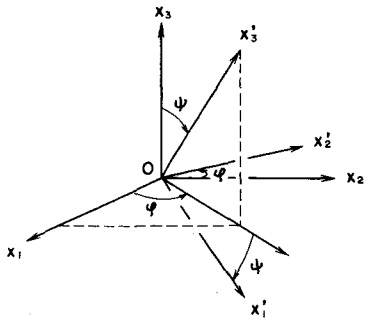


Fig. 6.1. Transformation of coordinate system.

は次式で示される2階のテンソル変換公式によって記述できる〔178〕。

$$T_{ij}' = a_{ik}\, a_{j\ell}\, T_{k\ell} \tag{6.1}$$

ここで，T_{ij} および T_{ij}' は元の座標系および任意の回転によって変換された新しい座標系における2階のテンソルであり，a_{ij} は二つの座標系の間の方向余弦を示す。この方向余弦は一般につぎのマトリクスの形で示される。

$$(a_{ij}) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \tag{6.2}$$

変換法則式（6.1）を用いると $\varepsilon_{\phi\psi}$ は

$$\varepsilon_{\phi\psi} = \varepsilon_{33'} = a_{3k}^{\psi}\, a_{3\ell}^{\psi}\, a_{km}^{\phi}\, a_{\ell n}^{\phi}\, \varepsilon_{mn} \tag{6.3}$$

のように簡単に記述できる。ここで a^{ψ}, a^{ϕ} は座標変換マトリクスでつぎの成分を持っている。

$$(a^{\psi}) = \begin{pmatrix} \cos\psi & 0 & -\sin\psi \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin\psi & 0 & \cos\psi \end{pmatrix}, \qquad (a^{\phi}) = \begin{pmatrix} \cos\phi & \sin\phi & 0 \\ -\sin\phi & \cos\phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{6.4}$$

この変換は Fig. 6.1 において，まず元の座標系を x_3 軸のまわりに ϕ 回転し，次いで変換された座標系をその x_2' 軸のまわりに ψ 回転して (x_1', x_2', x_3') の座標系を作る操作を考えれば容易に理解できる。式（6.3）を k, ℓ および m, n について展開し，式（6.4）の方向余弦の成分を代入すると

$$\begin{aligned} \varepsilon_{\phi\psi} = \varepsilon_{33} &+ [\varepsilon_{11}\cos^2\phi + \varepsilon_{12}\sin 2\phi + \varepsilon_{22}\sin^2\phi - \varepsilon_{33}]\sin^2\psi \\ &+ [\varepsilon_{31}\cos\phi + \varepsilon_{23}\sin\phi]\sin 2\psi \end{aligned} \tag{6.5}$$

が得られる〔214〕。$s_2/2 = (1+\nu)/E$, $s_1 = -\nu/E$, $\sigma_{\alpha\alpha} = \sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33}$ また δ_{ij} をクロネッカデルタとすると，一般化した Hooke の法則は

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} s_2\, \sigma_{ij} + s_1\, \sigma_{\alpha\alpha}\, \delta_{ij} \qquad (i, j = 1, 2, 3) \tag{6.6}$$

で表わされるから，この関係を式（6.5）に代入すると $\varepsilon_{\phi\psi}$ と試料座標系の応力成分の関係が

$$\begin{aligned} \varepsilon_{\phi\psi} = &\frac{1}{2} s_2 [\sigma_{11}\cos^2\phi + \sigma_{12}\sin 2\phi + \sigma_{22}\sin^2\phi - \sigma_{33}] \sin^2\psi + \frac{1}{2} s_2\sigma_{33} \\ &+ s_1[\sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33}] + \frac{1}{2} s_2 [\sigma_{31}\cos\phi + \sigma_{23}\sin\phi] \sin 2\psi \end{aligned} \tag{6.7}$$

のように求まる。これが一般の三軸応力状態における応力成分とX線的に測定される格子ひず

み $\varepsilon_{\phi\psi}$ との間の基本関係式であり，内容は式（6.5）と全く同一である。

式（6.5）あるいは式（6.7）において $\sin 2\psi$ を含む最終項を除けば $\varepsilon_{\phi\psi}$ は $\sin^2\psi$ に対して線形な関係になるが，x_3 軸に関するせん断成分 σ_{31}（あるいは ε_{31}）あるいは σ_{23}（ε_{23}）が0でなければ $\varepsilon_{\phi\psi}$ は $\sin^2\psi$ に関して非線形挙動を示すことになる。さらに $\sin 2\psi$ は ψ に関して奇関数であるから ψ の正負に対して異なる分布を示すことになる。このような挙動を ψ スプリット（ψ − Aufspaltung〔215〕，ψ − Splitting〔216〕）と呼んでいる。

ここで，$\varepsilon_{\phi\psi}$ と $\sin^2\psi$ の関係を具体的に知るために Table 6.1 の代表的な四つの応力状態について式（6.7）の表現を分類しておく。

Table 6.1. Four typical cases of stress state.

Case (1)	Case (2)	Case (3)	Case (4)
$\begin{pmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} p & 0 & 0 \\ 0 & p & 0 \\ 0 & 0 & p \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{31} \\ \sigma_{12} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{23} & \sigma_{33} \end{pmatrix}$

I. x_1，x_2，x_3 軸が主軸に一致する場合

（1）$\sigma_{11} = \sigma_1$，$\sigma_{22} = \sigma_2$，$\sigma_{33} = \sigma_3$，$\sigma_{12} = \sigma_{23} = \sigma_{31} = 0$.

$$\varepsilon_{\phi\psi} = \frac{1}{2}s_2\,[\sigma_1\cos^2\phi + \sigma_2\sin^2\phi - \sigma_3]\sin^2\psi + \frac{1}{2}s_2\,\sigma_3 + s_1[\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3] \tag{6.8}$$

特定の方位 $\phi = 0°$ および $\phi = 90°$ に対して

$$\phi = 0°:\quad \varepsilon_{\phi=0,\psi} = \frac{1}{2}s_2\,[\sigma_1-\sigma_3]\sin^2\psi + \frac{1}{2}s_2\,\sigma_3 + s_1[\sigma_1+\sigma_2+\sigma_3] \tag{6.8a}$$

$$\phi = 90°:\quad \varepsilon_{\phi=90,\psi} = \frac{1}{2}s_2\,[\sigma_2-\sigma_3]\sin^2\psi + \frac{1}{2}s_2\,\sigma_3 + s_1[\sigma_1+\sigma_2+\sigma_3] \tag{6.8b}$$

この場合は座標系に関してどのせん断成分も存在しないので $\varepsilon_{\phi\psi}$ は $\sin^2\psi$ に関して線形になるが，直線のこう配 $\partial\varepsilon_{\phi\psi}/\partial\sin^2\psi$ から得られるのは $(\sigma_1 - \sigma_3)$ あるいは $(\sigma_2 - \sigma_3)$ である。

（2）$\sigma_{11} = \sigma_1$，$\sigma_{22} = \sigma_2$，$\sigma_{33} = \sigma_{12} = \sigma_{23} = \sigma_{31} = 0$.

$$\varepsilon_{\phi\psi} = \frac{1}{2}s_2\,[\sigma_1\cos^2\phi + \sigma_2\sin^2\phi]\sin^2\psi + s_1[\sigma_1 + \sigma_2] \tag{6.9}$$

$$\phi = 0°:\quad \varepsilon_{\phi=0,\psi} = \frac{1}{2}s_2\,\sigma_1\,\sin^2\psi + s_1[\sigma_1 + \sigma_2] \tag{6.9a}$$

$$\phi = 90°:\quad \varepsilon_{\phi=90,\psi} = \frac{1}{2}s_2\,\sigma_2\,\sin^2\psi + s_1[\sigma_1 + \sigma_2] \tag{6.9b}$$

任意のϕ方向の垂直応力σ_ϕは

$$\sigma_\phi = \sigma_1\cos^2\phi + \sigma_2\sin^2\phi$$

で表わされるからこの式を式（6.9）に代入すると

$$\varepsilon_{\phi\psi} = \frac{1}{2} s_2 \sigma_\phi \sin^2\psi + s_1 [\sigma_1 + \sigma_2] \tag{6.9c}$$

が得られる。式（6.9 a），（6.9 b），（6.9 c）は通常の$\varepsilon_{\phi\psi}$ - $\sin^2\psi$の関係であり，平面応力を仮定した$\sin^2\psi$法の基本式である。

（3）$\sigma_{11} = \sigma_{22} = \sigma_{33} = p$, $\sigma_{12} = \sigma_{23} = \sigma_{31} = 0$.

すべてのϕに対して：$\varepsilon_\psi = (\frac{1}{2} s_2 + 3 s_1) p = \text{const.}$ (6.10)

これは特殊な場合であり，静水圧応力(p)状態のひずみを表わす関係式である。ε_ψは$\sin^2\psi$に関して一定値を示し，無ひずみ状態の0ひずみからの平行移動量よりpを求めることができる。第5章で扱ったように球状介在物の平均間隔がX線侵入深さに比べて非常に小さい場合の熱残留応力測定のときの関係である。

II. x_1，x_2，x_3軸が主軸に一致しない場合

（4） すべてのσ_{ij}が0でないとき；一般的な場合

特定の方位$\phi = 0°$，$45°$，$90°$に対して次式を得る。

$$\phi = 0°: \quad \varepsilon_{\phi=0,\psi} = \frac{1}{2}s_2 [\sigma_{11}-\sigma_{33}]\sin^2\psi + \frac{1}{2}s_2\sigma_{33} + s_1[\sigma_{11}+\sigma_{22}+\sigma_{33}] + \frac{1}{2}s_2\sigma_{31}\sin 2\psi \tag{6.11a}$$

$$\phi = 45°: \quad \varepsilon_{\phi=45,\psi} = \frac{1}{2}s_2 [\frac{1}{2}(\sigma_{11}+\sigma_{22})+\sigma_{12}-\sigma_{33}]\sin^2\psi + \frac{1}{2}s_2\sigma_{33} + s_1[\sigma_{11}+\sigma_{22}+\sigma_{33}] + \frac{1}{2}s_2 [\frac{1}{\sqrt{2}}(\sigma_{23}+\sigma_{31})]\sin 2\psi \tag{6.11b}$$

$$\phi = 90°: \quad \varepsilon_{\phi=90,\psi} = \frac{1}{2}s_2 [\sigma_{22}-\sigma_{33}]\sin^2\psi + \frac{1}{2}s_2\sigma_{33} + s_1[\sigma_{11}+\sigma_{22}+\sigma_{33}] + \frac{1}{2}s_2\sigma_{23}\sin 2\psi \tag{6.11c}$$

σ_{31}およびσ_{23}が共に0でない場合には式（6.11 a～c）より理解できるように，どの方位に測定してもψスプリットを生じるが，いずれかの成分，たとえばσ_{23}が0（すなわち主応力軸の一つがx_2軸に一致する場合）であれば式（6.11 c）の最終項が無くなるので，$\phi = 90°$方向に測定したときはψスプリットは起らず$\sin^2\psi$に関して線形になる。

なお，定数A，B，CをTable 6.2〔217〕のように置くと三軸応力状態の場合の一般式を

Table 6.2. Relation between orientation ϕ and A, B, C.

ϕ	A	B	C
0°		$\varepsilon_{11} - \varepsilon_{33}$	ε_{31}
45°	ε_{33}	$\frac{1}{2}(\varepsilon_{11} + \varepsilon_{33}) + \varepsilon_{12} - \varepsilon_{33}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}(\varepsilon_{31} + \varepsilon_{23})$
90°		$\varepsilon_{22} - \varepsilon_{33}$	ε_{23}
0°		$\frac{s_2}{2}(\sigma_{11} - \sigma_{33})$	$\frac{s_2}{2}\sigma_{31}$
45°	$\frac{s_2}{2}\sigma_{33} + s_1(\sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33})$	$\frac{s_2}{2}[\frac{1}{2}(\sigma_{11} + \sigma_{22}) + \sigma_{12} - \sigma_{33}]$	$\frac{s_2}{2}\frac{1}{\sqrt{2}}(\sigma_{31} + \sigma_{23})$
90°		$\frac{s_2}{2}(\sigma_{22} - \sigma_{33})$	$\frac{s_2}{2}\sigma_{23}$

$$\varepsilon_{\phi\psi} = A + B\sin^2\psi + C\sin 2\psi \tag{6.12}$$

の形で書き表わすことができる。右辺第3項が $\sin^2\psi$ に対して非線形，かつψの正負に対して絶対値等しく符号を異にする項で，$\sin^2\psi$ に関しては楕円分布になる。すなわちψスプリットを生じる項である。σ_{31} あるいは σ_{23} に相当する係数Cはψスプリット幅を示すものであり，C が大きければψスプリット幅が大きくなる。

つぎに，種々の応力状態について $\sin^2\psi$ 線図上の格子ひずみの分布を描くことにする。

Fig. 6.2 はいずれも主応力軸が試料座標系に一致する場合でありεは $\sin^2\psi$ に対して直線

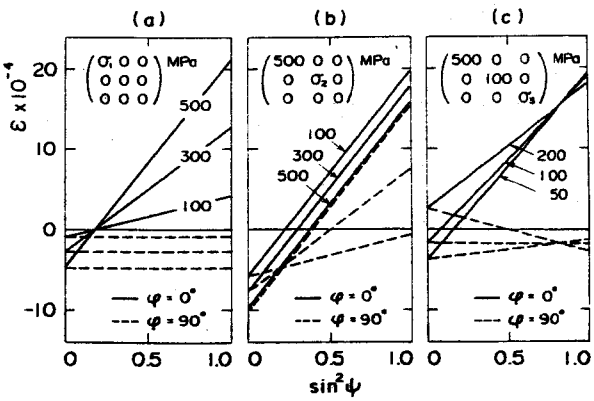


Fig. 6.2. $\sin^2\psi$ diagrams for cases that principal axes coincide with specimen coordinate system.

関係を示す。（a）は一軸引張の例であり σ_1 をパラメータにとってある。（b）は二軸応力

状態であり σ_2 をパラメータとしている。これら二つの例は通常の $\sin^2\psi$ 法における ε - $\sin^2\psi$ の関係であり，応力値はそれぞれの直線のこう配から容易に求まる。（c）はパラメータ σ_3 が0でない値を持つ場合であり，直線のこう配は σ_1 あるいは σ_2 のみで定まらず σ_3 の値に大きく影響されることがわかる。すなわち，それぞれの直線のこう配から得られるのは式（6.8 a）および式（6.8 b）で示したように $(\sigma_1 - \sigma_3)$ あるいは $(\sigma_2 - \sigma_3)$ である。

Fig. 6.3 ～Fig. 6.5 はせん断応力成分 σ_{31} を有する場合に生じる ψ スプリットの例である。

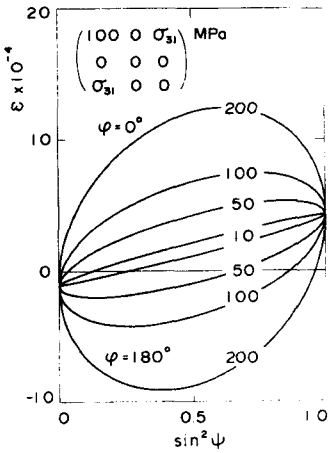


Fig. 6.3. ψ-splittings in $\sin^2\psi$ diagram.

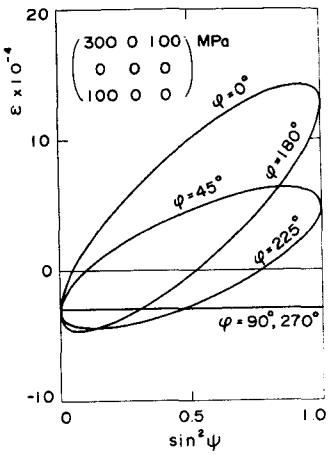


Fig. 6.4. ψ-splitting in different azimuths.

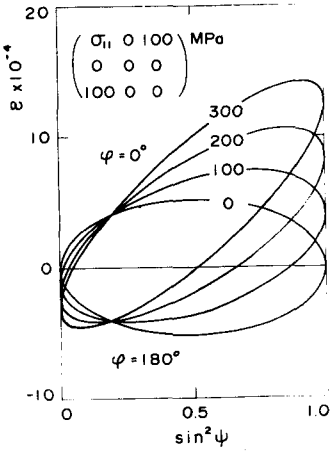


Fig. 6.5. Superposition of ψ-splitting and normal stress σ_{11}.

Fig. 6.3 は σ_{31} の増大に伴って ψ スプリット幅の広がる様子を示している。一般のX線測定では 10^{-4} のオーダーのひずみは容易に検出されるから，σ_{31} = 10 MPa の下で明瞭な ψ スプリットの観測されることが予想される。Fig. 6.4 は σ_{11} = 300 MPa，σ_{31} = 100 MPa の場合における種々の方位角 ϕ に関するひずみの分布である。この場合 σ_{23} = 0 であるので ϕ = 90° と 270° の間では ψ スプリットは起らず直線となる。また ψ スプリット幅は ϕ = 0° と 180° の間で最大となり，ϕ = 45° と 225° の間のスプリット幅は Table 6.2 に従って前者の $1/\sqrt{2}$ となる。Fig. 6.5 は垂直応力 σ_{11} とせん断応力 σ_{31} が重畳されたときの様子を示す。この図では σ_{31} = 100 MPa を一定とし，σ_{11} をパラメータに扱っている。したがって，ψ スプリット幅自身に変化はないがひずみ分布の平均こう配が σ_{11} の増加とともに増大する。

以上の例で容易に理解できるように，ψ 角を 180° 離れた二方向に傾けたときに生じる ψ スプリット挙動はせん断成分 σ_{31} あるいは σ_{23} が存在することに帰因する。また，上述のように各応力成分を一定と扱った場合にはひずみ分布は完全な楕円状を呈する。したがって，$\sin^2\psi$ 線図上に楕円状の ψ スプリット が観察された場合には，その ψ スプリット幅からせん断応力成分を求めることが可能である（その方法については 6.3 節で詳述する）。

別な考え方でもψスプリット挙動の説明が可能である。試料座標系においてせん断成分を有することは，主軸が試料座標系に一致しないことに他ならない。計算と理解を容易にするために Fig. 6. 6 のように主ひずみ軸 x_1^*，x_3^* が試料座標系の x_2 軸のまわりに$\Delta\psi^*$だけ傾いている場合を考える。X線により測定されるOP 方向の垂直ひずみ ε_ψ を主ひずみε_1^*，ε_3^*で表わすと次式が容易に導びかれる。

$$\varepsilon_\psi = \varepsilon_3^*\cos^2(\psi - \Delta\psi^*) + \varepsilon_1^*\sin^2(\psi - \Delta\psi^*)$$

$$= \varepsilon_3^* + (\varepsilon_1^* - \varepsilon_3^*)\sin^2(\psi - \Delta\psi^*) \qquad (6.13)$$

すなわち，主ひずみ（応力）軸の傾斜している場合は，測定されるひずみ ε_ψ は $\sin^2(\psi - \Delta\psi^*)$を変数にとったとき線形かつ $\pm(\psi - \Delta\psi^*)$ に対して対称になるのであって，$\sin^2\psi$ を変数とするともはや線形な関係は得られず，$\pm\psi$ に対して対称分布にはならないことが理解できる。たとえば，主応力テンソルを

$$(\sigma)^* = \begin{pmatrix} 300 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 100 \end{pmatrix} \quad \text{MPa}$$

のようにとったとき，$\Delta\psi^* = 0°$，$10°$，$20°$ の場合のひずみ分布を Fig. 6. 7 に示した。

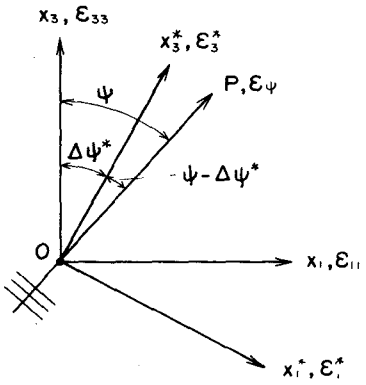


Fig. 6.6. Inclination of principal axes.

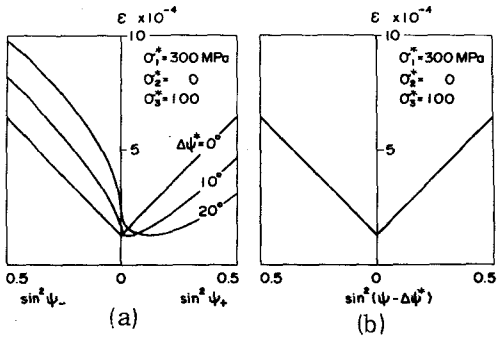


Fig. 6.7. Asymmetric strain distribution against $\sin^2\psi$ (a) and symmetric distribution against $\sin^2(\psi-\Delta\psi^*)$ when principal system rotates by $\Delta\psi^*$ about x_2-axis(b).

（a）は $\sin^2\psi_\pm$ を変数にとった場合の図であり $\Delta\psi^* = 0°$ の場合を除いてひずみ分布は横座標の0に関して非対称図形となる。それに対して，横座標を $\Delta\psi^*$ で修正した $\sin^2(\psi - \Delta\psi^*)$ で表わすと $\Delta\psi^*$ の値によらずひずみ分布は一致して直線となり，しかも対称になる。

したがって，楕円状のψスプリットあるいは $\sin^2\psi_\pm$ 線図上での非対称なひずみ分布を生じる基本的要因は，せん断成分 $\sigma_{31}(\varepsilon_{31})$ あるいは $\sigma_{23}(\varepsilon_{23})$ の存在，換言すれば主軸が試料座標系に対して傾きをもっていることであると結論できる。

さらに，一つのせん断応力（σ_{31} あるいは σ_{23}）と垂直応力が重畳するような場合について，全方位角にわたるひずみ分布を調べておくことは有益である。このような応力状態は次章以後で取り扱うようなある特定方向にのみ表面を加工した後の表面層に生じる。任意方向（φ，ψ）の格子面ひずみはすでに述べた式（6.7）によって容易に計算できる。

Fig. 6.8 は応力状態が

$$(\sigma) = \begin{pmatrix} -200 & 0 & +100 \\ 0 & -100 & 0 \\ +100 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{MPa}$$

で表わされる場合の，種々のψについてのひずみ分布を全方位角φにわたって図示したもので

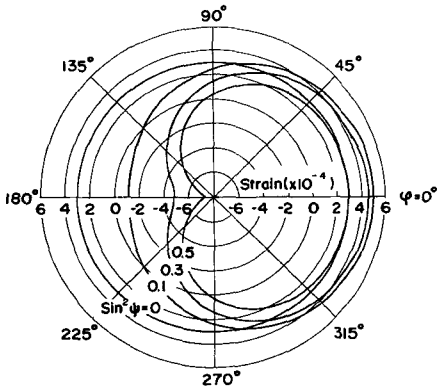


Fig. 6.8. Strain distributions in overall azimuth in a case having non-zero σ_{31} component.

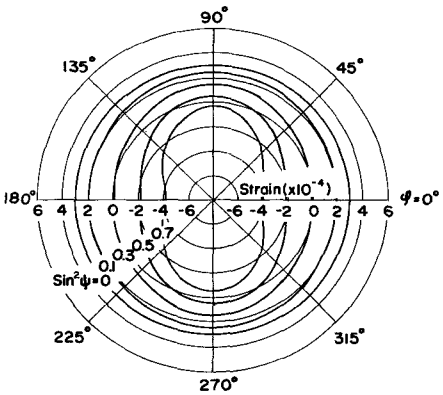


Fig. 6.9. Strain distributions in overall azimuth in a case σ_{31}=0.

ある（このような図を全方位ひずみ線図と呼ぶことにする）。式（6.7）に ψ = 0 を代入して得られる関係

$$\varepsilon_{\phi,\psi=0} = \frac{1}{2} s_2 \sigma_{33} + s_1[\sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33}] \tag{6.14}$$

から容易にわかるように，$\sin^2\psi = 0$ に対しては方位角φに依存せず，図の上では半径一定の円分布になる。

またこのようにせん断成分のうち σ_{31} のみが存在するときは，0でない任意の ψ に対して $\phi = 0° - 180°$ で表わされる軸に関しては対称であるが，それに直交する $\phi = 90° - 270°$ の軸に関しては非対称なひずみ分布になる。これに対して，せん断成分がすべて0である場合の例を Fig.6.9 に示したが，この場合は $\phi = 0° - 180°$ 軸に関してのみならず $\phi = 90° - 270°$ 軸に関しても対称な図形を描くことがわかる。この場合の応力状態はつぎのように仮定した。

$$(\sigma) = \begin{pmatrix} -200 & 0 & 0 \\ 0 & -100 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{MPa}$$

これら二つの例から容易に推測できるが，全方位ひずみ線図のひずみ分布の対称軸は主ひずみ軸に一致するから，大きな ψ 角で全方位のひずみ測定をすることにより主ひずみ方向を決定することができる。

6.3 平均応力成分の計算

X線応力測定の目的は ϕ および ψ で定まる種々な方向の格子面間隔から，試料座標系に関する応力成分を決定することである。(ϕ, ψ) 方向の垂直ひずみはすでに式（6.5）でつぎのように表わされている。

$$\varepsilon_{\phi\psi} = \varepsilon_{33} + [\varepsilon_{11}\cos^2\phi + \varepsilon_{12}\sin 2\phi + \varepsilon_{22}\sin^2\phi - \varepsilon_{33}]\sin^2\psi + [\varepsilon_{31}\cos\phi + \varepsilon_{23}\sin\phi]\sin 2\psi \tag{6.5}$$

右辺のひずみ成分 ε_{ij} はもちろん試料座標系に関するひずみである。$\varepsilon_{\phi\psi}$ はX線的に測定される格子面間隔と次式で結合される。

$$\varepsilon_{\phi\psi} = \frac{d_{\phi\psi} - d_0}{d_0} \tag{6.15}$$

ここで $d_{\phi\psi}$ は応力状態にある表面層において (ϕ, ψ) 方向に測定される格子面間隔，d_0 は無応力状態における格子面間隔である。したがって，式（6.5）と式（6.15）を結合した関係が三軸状態の応力解析に有用となる。ところで，平面応力状態を仮定した $\sin^2\psi$ 法では正確な d_0 の値を必要としなかったが，三軸応力解析においてはこの d_0 の値が必要となる〔215，217〕ことを明記しておかなければならない。これに関しては後述の6.5節で詳しく述べるので，ここでは式（6.5）および式（6.15）を用いて応力成分を求める方法を展開する。

式（6.5）からひずみ成分を求めるには二つの方法が可能である。最初の方法は線形方程式

を解く方法である。式（6.5）は6個の未知数(ε_{11}, ε_{12},....)を含んでいるから，6個の独立な方向において測定された格子面ひずみ $\varepsilon_{\phi\psi}$ があれば完全な解が得られる。さらに7個以上の測定値が得られれば，最小二乗法を用いて解の精度が向上される。

第2の方法は $\sin^2\psi$ 法に類似した方法で，Dölle und Hauk によって整理された形で報告された〔217〕。測定された格子ひずみ（格子面間隔）をまず6.2節に示したように $\sin^2\psi$ 線図に表わし，視覚的にひずみ状態を把握できるという意味で前者よりすぐれた方法と言える。

記述を簡単にするため，傾斜角ψの正および負の方向をそれぞれ ψ_+ および ψ_- で表わすことにする。すなわち，Fig. 6.10において方位角 $\phi(0° \leqq \phi < 180°)$ で決定されるOX_+軸方向に投影が一致するように回折面法線 (OP_+) を傾けたときを ψ_+，方位角$\phi+\pi$の OX_- 軸方向に法線 (OP_-) を傾けたときを ψ_- と定める。式（6.5）において $\psi_+(\psi \geqq 0)$ と $\psi_-(\psi \leqq 0)$で測定されるひずみの和と差をとり，つぎの a_1 および a_2 を定義する。

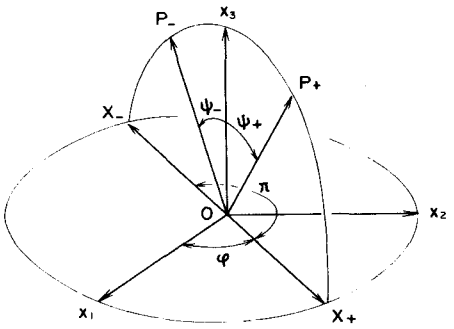


Fig. 6.10. Definition of positive and negative ψ-angles.

$$a_1 = \frac{1}{2}(\varepsilon_{\phi\psi+} + \varepsilon_{\phi\psi-}) = \frac{d_{\phi\psi+} + d_{\phi\psi-}}{2d_0} - 1$$

$$= \varepsilon_{33} + [\varepsilon_{11}\cos^2\phi + \varepsilon_{12}\sin 2\phi + \varepsilon_{22}\sin^2\phi - \varepsilon_{33}]\sin^2\psi \qquad (6.16)$$

$$= A + B\sin^2\psi \qquad (6.16')$$

$$a_2 = \frac{1}{2}(\varepsilon_{\phi\psi+} - \varepsilon_{\phi\psi-}) = \frac{d_{\phi\psi+} - d_{\phi\psi-}}{2d_0}$$

$$= [\varepsilon_{31}\cos\phi + \varepsilon_{23}\sin\phi]\sin|2\psi| \qquad (6.17)$$

$$= C\sin|2\psi| \qquad (6.17')$$

ここでA，B，Cはそれぞれひずみ成分を含む定数であり，特定の方位角φに対してすでにTable 6.2に示した。せん断成分 ε_{31} あるいは ε_{23} が0でない場合，$\varepsilon_{\phi\psi+}$ および $\varepsilon_{\phi\psi-}$ はそれぞれ $\sin^2\psi$ に対して線形な関係ではないが，式（6.16）および式（6.17）のように，ψ_+ と ψ_- における平均ひずみ a_1 および平均ひずみからの偏差 a_2 をとるとそれぞれは$\sin^2$

ψ および $\sin|2\psi|$ に対して線形な関係になる。したがって $\sin^2\psi$ 法の操作と同様に式（6.16），式（6.17）をそれぞれ $\sin^2\psi$, $\sin|2\psi|$ で偏微分すると

$$\frac{\partial a_1}{\partial \sin^2\psi} = \varepsilon_{11}\cos^2\phi + \varepsilon_{12}\sin 2\phi + \varepsilon_{22}\sin^2\phi - \varepsilon_{33} = B \qquad (6.18)$$

$$\frac{\partial a_2}{\partial \sin|2\psi|} = \varepsilon_{31}\cos\phi + \varepsilon_{23}\sin\phi = C \qquad (6.19)$$

が得られる（ Fig. 6.11)。さらに，表面法線方向のひずみ ε_{33} は a_1 - $\sin^2\psi$ 線図の直線の $\psi = 0$ における切片，あるいは $\psi = 0$ で測定されたいくつかの格子面ひずみの平均値により求めることができる。

$$\varepsilon_{33} = a_1(\psi = 0) = \frac{d(\psi = 0) - d_0}{d_0} = A \qquad (6.20)$$

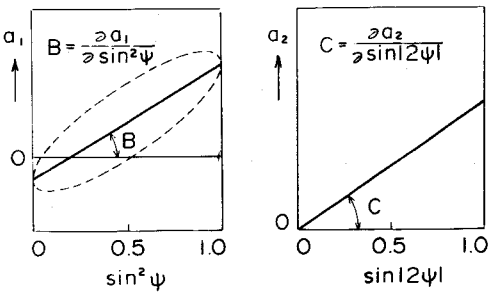


Fig. 6.11. Method obtaining strain tensors from elliptic strain distribution (shown as broken line) in $\sin^2\psi$ diagram.

具体的には ϕ = 0° - 180°, 45° - 225°, 90° - 270° のそれぞれの方位に対して種々の ψ 方向の測定値から Fig. 6.11 の a_1 - $\sin^2\psi$, a_2 - $\sin|2\psi|$ 線図を描き，最小二乗法を用いて B および C を求めると Table 6.2 の上段に示した係数が定まるので，これらの値と式（6.20）の $A = \varepsilon_{33}$ を用いて 6 個のひずみ成分を計算することができる。前にも述べたが，式（6.16），式（6.17）および式（6.20）からわかるように，この方法でひずみ成分を計算するには d_0 が既知であることを必要とする。

すべてのひずみ成分が求まれば Hooke の法則

$$\sigma_{ij} = \frac{1}{s_2/2}\left[\varepsilon_{ij} - \delta_{ij}\cdot\frac{s_1}{s_2/2 + 3s_1}(\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33})\right] \qquad (6.21)$$

を用いて応力成分に換算できる。$\varepsilon_{\phi\psi}$ を応力成分で表現した式（6.7）から出発して同じ操作をすると

$$a_1 = \frac{1}{2}(\varepsilon_{\phi\psi+} + \varepsilon_{\phi\psi-}) = \frac{d_{\phi\psi+} + d_{\phi\psi-}}{2d_0} - 1$$

$$= \frac{s_2}{2}[\sigma_{11}\cos^2\phi + \sigma_{12}\sin 2\phi + \sigma_{22}\sin^2\phi - \sigma_{33}]\sin^2\psi + \varepsilon_{33} \qquad (6.22)$$

$$a_2 = \frac{1}{2}(\varepsilon_{\phi\psi+} - \varepsilon_{\phi\psi-}) = \frac{d_{\phi\psi+} - d_{\phi\psi-}}{2d_0}$$

$$= \frac{s_2}{2}[\sigma_{31}\cos\phi + \sigma_{23}\sin\phi]\sin|2\psi| \qquad (6.23)$$

が得られるから，Table 6.2の下段の係数によって直接応力値を求めることが可能である。

もし，これらの応力成分から主応力σ_1，σ_2，σ_3を求めたい場合にはつぎの特性方程式を解けばよい〔218〕。

$$\begin{vmatrix} \sigma_{11} - \sigma & \sigma_{12} & \sigma_{31} \\ \sigma_{12} & \sigma_{22} - \sigma & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{23} & \sigma_{33} - \sigma \end{vmatrix} = 0 \qquad (6.24)$$

これはσに関する三次方程式であり，三つの主応力はこの特性方程式の三根(σ_1，σ_2，σ_3)で与えられる。これら三つの主応力はこの方程式の固有値であるから，それぞれの固有値に対応する固有ベクトルはそれらの方位を与える。すなわち，正規化された固有ベクトル（方向余弦，ℓ，m，n)は

$$\ell^2 + m^2 + n^2 = 1 \qquad (6.25)$$

の関係に注意して，同次線形方程式

$$\begin{bmatrix} \sigma_{11} - \sigma_i & \sigma_{12} & \sigma_{31} \\ \sigma_{12} & \sigma_{22} - \sigma_i & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{23} & \sigma_{33} - \sigma_i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ell_i \\ m_i \\ n_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (i = 1,2,3) \qquad (6.26)$$

を解くことによって得られる〔219〕。

6.4 三軸応力解析における無応力状態の格子面間隔の必要性

式（6.22）および式（6.23）は$(d_{\phi\psi+} + d_{\phi\psi-})$と$(d_{\phi\psi+} - d_{\phi\psi-})$がそれぞれ$\sin^2\psi$および$\sin|2\psi|$に対して線形な関係にあることを示している。これらの直線の$\phi = 0°$および$\phi = 90°$に対するこう配を$m_1(\phi=0°)$，$m_1(\phi=90°)$，$m_2(\phi=0°)$，$m_2(\phi=90°)$とすると応力テンソルの垂直成分の差およびせん断成分がつぎの関係によって表わされる。

$$\sigma_{11} - \sigma_{33} = \frac{1}{2d_0}\frac{1}{s_2/2}m_1(\phi = 0°) \qquad (6.27)$$

$$\sigma_{22} - \sigma_{33} = \frac{1}{2d_0}\frac{1}{s_2/2}m_1(\phi = 90°) \qquad (6.28)$$

$$\sigma_{31} = \frac{1}{2d_0} \frac{1}{s_2/2} m_2(\phi = 0°) \tag{6.29}$$

$$\sigma_{23} = \frac{1}{2d_0} \frac{1}{s_2/2} m_2(\phi = 90°) \tag{6.30}$$

ここで，d_0 の誤差 Δd_0 による応力値の見かけの変化 $\Delta(\sigma_{11} - \sigma_{33})$，$\Delta\sigma_{31}$ などを検討するために，それぞれの式を d_0 で微分して整理するとつぎの簡単な関係式が得られる。

$$\frac{\Delta(\sigma_{11} - \sigma_{33})}{\sigma_{11} - \sigma_{33}} = \frac{\Delta(\sigma_{22} - \sigma_{33})}{\sigma_{22} - \sigma_{33}} = \frac{\Delta\sigma_{31}}{\sigma_{31}} = \frac{\Delta\sigma_{23}}{\sigma_{23}} = - \frac{\Delta d_0}{d_0} \tag{6.31}$$

すなわち，垂直応力の差成分 $(\sigma_{11} - \sigma_{33})$ および $(\sigma_{22} - \sigma_{33})$ とせん断応力成分 σ_{31} および σ_{23} の誤差をたとえば 1 % (10^{-2}) 以内に押えるためには d_0 を 1 %以内の精度で決定しておけば充分であることがわかる。一般に d の測定精度は回折角測定の際のX線強度の統計変動，試料設定の精度などに依存するが，ディフラクトメータを用いて充分注意深い測定をすれば，良好な回折線の得られる焼なまし材の場合 $2\theta = 60° \sim 160°$ の範囲において，ほぼ $|\Delta d_0/d_0| < 5 \times 10^{-5}$ の精度で測定できることを確めた。すなわち，この精度の測定がなされれば，上記の応力成分の決定に関して d_0 の測定誤差は全く影響を及ぼさないことがわかる。通常の $\sin^2\psi$ 法においても式（6.31）と同様な関係式

$$\frac{\Delta\sigma_{11}}{\sigma_{11}} = \frac{\Delta\sigma_{22}}{\sigma_{22}} = \frac{\Delta\sigma_{\phi}}{\sigma_{\phi}} = - \frac{\Delta d_0}{d_0}$$

が成立するので正確な d_0 の値を必要とせず，試料面法線方向の格子面間隔 $d_\perp$ で代用できることが容易に理解できる。なぜなら一般の応力状態では $|d_\perp - d_0|/d_0 \lesssim 10^{-3}$ である。

つぎに，垂直応力成分 σ_{11}，σ_{22}，σ_{33} に及ぼす Δd_0 の影響については，$(\sigma_{11} - \sigma_{33})$，$(\sigma_{22} - \sigma_{33})$ が充分な精度で決定できることが保障されているので，たとえば σ_{33} に及ぼす Δd_0 の影響を検討すればよい。σ_{33} は式（6.27），式（6.28）と

$$\varepsilon_{33} = \frac{d_{33} - d_0}{d_0} = \frac{s_2}{2}\sigma_{33} + s_1(\sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33}) \tag{6.32}$$

の関係を用いてつぎのように表わすことができる。

$$\sigma_{33} = \frac{1}{2d_0} \frac{1}{s_2/2+3s_1}\left[2d_{33} - \frac{s_1}{s_2/2}\{m_1(\phi=0°) + m_1(\phi=90°)\}\right] - \frac{1}{s_2/2+3s_1} \tag{6.33}$$

この式を d_0 で微分すると

$$\Delta\sigma_{33} = -\left\{\sigma_{33} - \frac{1}{s_2/2 + 3s_1}\right\}\frac{\Delta d_0}{d_0} \tag{6.34}$$

が得られるが，σ_{33} に対しては実際の場合

$$\sigma_{33} << (s_2/2 + 3s_1)^{-1} \tag{6.35}$$

が常に成立する。たとえばα鉄の（211）面の場合 $s_2/2 = 4.59 \times 10^{-6}$ MPa^{-1}，$s_1 = -0.976 \times 10^{-6}$ MPa^{-1} であるから $(s_2/2 + 3s_1)^{-1} = 6.0 \times 10^5$ MPa となり，σ_{33}は無視できるオーダーである。したがって式（6.34）は次式で近似される。

$$\Delta\sigma_{33} = \frac{1}{s_2/2 + 3s_1} \frac{\Delta d_0}{d_0} \tag{6.36}$$

すなわち，$\Delta\sigma_{33}$ への影響としては $\Delta d_0/d_0$ に弾性定数項が直接乗算される結果，σ_{33} を充分な精度で評価するためには d_0 の高い精度が要求されることを意味する。次章で供試材として使用する高速度鋼 SKH 2 の各回折面について $|\Delta\sigma_{ii}| < 50$ MPa の精度を得るための $\Delta d_0/d_0$ の許容限界を Table 6.3 にまとめた。

Bragg の条件式

$$\lambda = 2d_0 \sin\theta_0 \tag{6.37}$$

を微分し，特性X線の波長λの変動を無視すると d_0 の誤差による回折角の変動 $\Delta 2\theta_0$ は次式で表わされる。

$$\Delta 2\theta_0 = -2\tan\theta_0 \cdot \frac{\Delta d_0}{d_0} \tag{6.38}$$

この式は $\Delta d_0/d_0$ の許容限界値に対応する回折線位置決定の許容限界値を与えるので，この関係を用いて $\Delta 2\theta_0$ の許容限界も Table 6.3 に示した。母相（211）面に対する値 0.045° は河田ら〔220〕の試算結果とよく一致する。

Table 6.3. Allowable limits of $\Delta d_0/d_0$, $\Delta 2\theta_0$ and y to obtain a precision of $|\Delta\sigma_{ii}| < 50$ MPa.

Phase	hkl	2θ (deg)	Allowable limit		
			$\Delta d_0/d_0$ ($\times 10^{-5}$)	$\Delta 2\theta_0$ (deg)	y (μm)
Matrix	100	69	5.1	0.004	3
	200	106	16.4	0.025	25
	211	156	8.3	0.045	133
M_6C	422	61	20.2	0.014	10
	333/511	65	13.7	0.010	7
	644/660/822	123	9.6	0.020	26

d_0 あるいは$2\theta_0$の決定の際の誤差は主に回折線プロフィルを測定するときのX線強度の統計的変動と試料表面のディフラクトメータ軸上への設定誤差によって生じる。統計変動による誤差は繰返し測定することによって減少させることができるが，試料の設定誤差は d_0 あるいは d の値に系統的誤差を導き，式（6.36）により σ_{33} に大きな誤差を与えるから，試料設定には細心の注意をはらわなければならない。集中ビーム条件による側傾法を採用した場合，試料表面がディフラクトメータ軸よりy だけずれたことによる d_0 の見かけの変化 Δd_0 は

$$\frac{\Delta d_0}{d_0} = -\frac{2y}{R}\frac{\cos^2\theta}{\sin\theta}\frac{1}{\cos\psi} \tag{6.39}$$

で与えられる〔221〕。ここで R (= 200 mm) はディフラクトメータ円の半径である。
式（6.36）および式（6.39）より

$$y = \frac{R}{2}\frac{\sin\theta}{\cos^2\theta}\cos\psi\left(\frac{s_2}{2} + 3s_1\right)\Delta\sigma_{33} \tag{6.40}$$

が得られる。ψ を0°から45°までの範囲にとるとすれば，上記の精度を得るためのyの許容限界は Table 6.3 の最後の欄に示した値となる。試料の表面あらさも当然問題になるが，充分なめらかな表面であれば，実験室的に ±5 μm 以内に試料設定することは容易である。

Fig. 6.12は通常X線測定に用いられるα鉄（211）面に対する $|\Delta\sigma_{ii}|$ と $\Delta d_0/d_0$，$\Delta 2\theta_0$ の許容限界の関係を示す。すなわちこの場合は0.01°の精度で $2\theta_0$ が測定されれば σ_{11}，σ_{22}，σ_{33} の各成分に及ぼす影響は10MPa であり，X線応力測定の精度から考えても充分満足のゆくものになる。

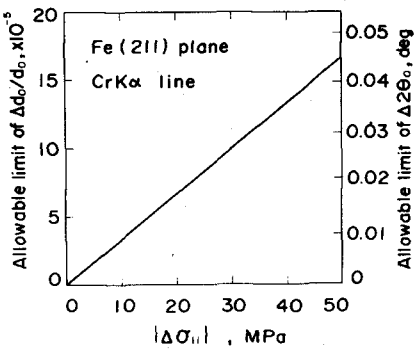


Fig. 6.12. Allowable limit of $\Delta d_0/d_0$ and $\Delta 2\theta_0$ against an accuracy in $|\Delta\sigma_{ii}|$.

6.5 σ_{31} の分布形と $\sin^2\psi$ 線図

6.2節では各応力成分がX線侵入深さの範囲内でそれぞれ一定値をとるものと仮定して $\varepsilon_{\phi\psi}$ を表わし $\sin^2\psi$ 線図上の分布挙動を描いた。しかし，前にも述べたように σ_{31}，σ_{23}，σ_{33} は試料表面では0にならなければならない制約があるので，もしそれらの成分が存在するなら必ず応力こう配を有しなければならない。また，加工層などでは加工力の及ぶ影響範囲が一般に表面下の浅い領域に限定されるので，当然の結果として他の応力成分も応力こう配を有して

いる。このような一般的な応力状態の完全解を得ることが不可能なことは前にも述べたが，ある特別な応力分布を仮定して $\sin^2\psi$ 線図上のひずみ分布を描くことは可能である。そして，この分布図を理解しておくことによって，測定結果と比較して定性的に応力分布を推測することに役立つかも知れない。本節では一定応力分布の他に，数学的に計算の容易な二つの応力分布を仮定して $\sin^2\psi$ 線図の形を解析した。

(1) まず最初に試料座標系 (x_1, x_2, x_3) における応力成分を

$$(\sigma) = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & 0 & \sigma_{31} \\ 0 & 0 & 0 \\ \sigma_{31} & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

とし，このときの深さ方向への応力分布を Fig. 6.13 （a），（b）のように仮定する。

（i）σ_{11} = const., σ_{31} = const.

の場合

これはすでに 6.2 節で示したように，X 線侵入深さに関係なく測定される格子ひずみは

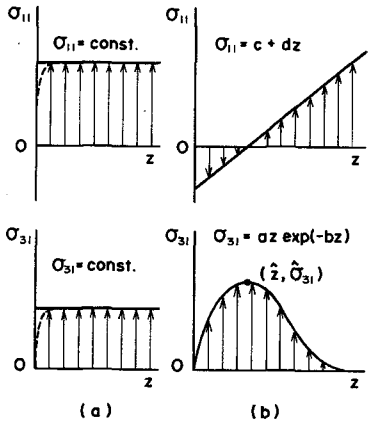


Fig. 6.13. Patterns of stress distribution into body.

$$\varepsilon_\psi = \frac{1}{2} s_2 \sigma_{11} \sin^2\psi + s_1 \sigma_{11} + \frac{1}{2} s_2 \sigma_{31} \sin 2\psi \qquad (\phi = 0^\circ)$$

で表わされる。そして，$\sin^2\psi$ 線図は Fig. 6.3 および Fig. 6.5 に示したように楕円状の ψ スプリット挙動として観察され，ψ スプリット幅は σ_{31}，楕円の平均こう配は σ_{11} に依存する。このような情況は厳密には起り得ないが，（a）図の破線で描いたように，自由表面の影響による応力緩和領域が X 線侵入深さに比べてきわめて浅い層に限定されるときに観察される挙動と考えられる。この応力緩和領域の深さは第 4 章で述べたように，微視的残留応力分布の波長に依存する。

（ii）$\sigma_{31} = aze^{-bz}$, $\sigma_{11} = c + dz$ の場合

σ_{31} の分布を深さ z に関する線形項と指数項の積で表わした。このときの σ_{31} の最大になる深さと応力値は

$$\hat{z} = \frac{1}{b}, \qquad \hat{\sigma}_{31} = \frac{a}{b} e^{-1}$$

で表わされるので，これらの値を種々変えることによって $\sin^2\psi$ 線図の変化挙動を知ることができる。応力が z とともに変る場合，測定値と対比するためにはX線反射強度に関する重み付き平均ひずみ

$$< \varepsilon_\psi > = \frac{\int_0^\infty e^{-2\mu z/\sin\theta\cos\psi}\, \varepsilon(z)\, dz}{\int_0^\infty e^{-2\mu z/\sin\theta\cos\psi}\, dz} \tag{6.41}$$

をとれば良いことを第2章で示した。式（6.41）に，仮定した応力分布を代入して積分を実行すれば

$$< \varepsilon_\psi > = (s_1 + \frac{s_2}{2}\sin^2\psi)(c + d\,\frac{\sin\theta\cos\psi}{2\mu}) + \frac{s_2}{2} a \frac{\dfrac{2\mu}{\sin\theta\cos\psi}}{\left(\dfrac{2\mu}{\sin\theta\cos\psi} + b\right)^2} \sin 2\psi \tag{6.42}$$

が得られる。定数 a，b，c，dを適当に与えて計算した $\sin^2\psi$ 線図の例を Fig. 6.14 に示す。（a）および（b）は σ_{31} が一定の場合と，より現実的であろうと考えられる Fig. 6.13（b）のような分布の場合の ψ スプリットの形を比較するために $\sigma_{11} = 0$ として σ_{31}

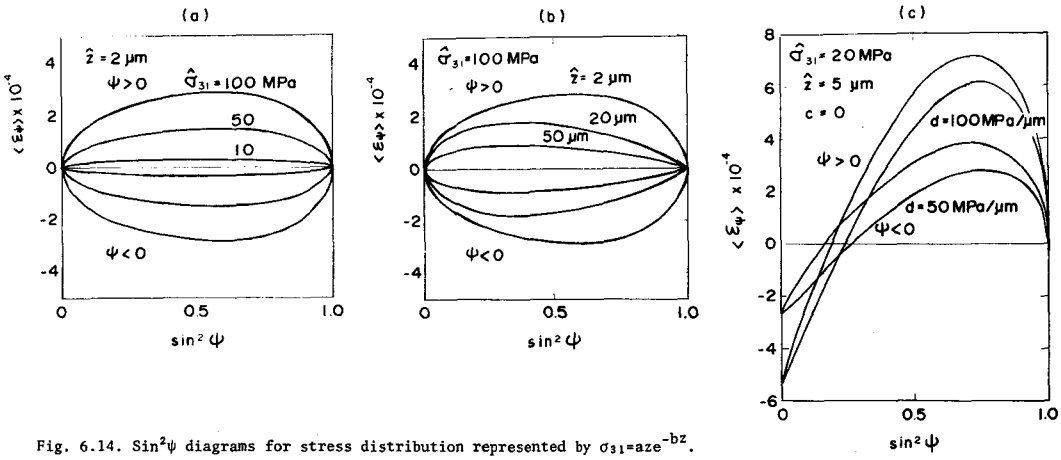


Fig. 6.14. $\sin^2\psi$ diagrams for stress distribution represented by $\sigma_{31}=aze^{-bz}$.

のみの効果を調べたものである。（a）は σ_{31} が最大となる深さ $\hat{z}$ を 2 μmとしてその最大値 $\hat{\sigma}_{31}$ を変化させた。仮定した σ_{31} の分布形の場合，$\sin^2\psi$ 線図上のひずみ分布の

形は $\hat{\sigma}_{31}$ の大きさによらず単に ψ スプリット幅が変化するだけであるが，完全な楕円形状にはならずスプリット幅の最大になる位置が $\sin^2\psi = 0.5$ に一致しなくなる。（b）は $\hat{\sigma}_{31}$ を一定として $\hat{z}$ を 2 μm から 50 μm に変化させた結果である。σ_{31} の最大位置が表面下浅い場合には ψ スプリット幅の最大個所が $\sin^2\psi$ の値の大きいところに位置するが $\hat{z}$ が深くなるに伴ってスプリット幅の最大個所は $\sin^2\psi$ の小さい方に移行してくる。類似の計算を Dölleら〔222〕は折れ線で表わされる σ_{31} の分布形を用い，式（6.41）の積分の上限をX線侵入深さの2倍にとって同様な結果を得ているが，ここでは重み付き平均ひずみを用いて近似のない厳密な解析をした。Fig. 6.14（c）は同じ σ_{31} の分布と線形に変化する σ_{11} の重畳の効果を示すものである。$\hat{\sigma}_{31} = 20$ MPa，$\hat{z} = 5$ μm とし σ_{11} のこう配を $d = 50$ および 100 MPa/μm で与えた。$\hat{\sigma}_{31}$ が小さく σ_{11} が急こう配の場合には，第3章の Fig. 3.8 に示された湾曲した曲線に幅の小さい ψ スプリットが重畳した形になり，ψ の正負ともに同じ向き（この場合は上に凸）に湾曲しているように観察される。

(2) つぎに主応力軸が試料座標系の x_2 軸のまわりに一定角 ψ^* だけ傾斜して主応力テンソルが

$$(\sigma^*) = \begin{pmatrix} \sigma_1^* & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

で与えられる場合を考える。この応力状態を試料座標系の成分で表わすとテンソル変換公式（6.1）を用いて

$$(\sigma) = \begin{pmatrix} \sigma_1^*\cos^2\psi^* & 0 & -\sigma_1^*\sin\psi^*\cos\psi^* \\ 0 & 0 & 0 \\ -\sigma_1^*\sin\psi^*\cos\psi^* & 0 & \sigma_1^*\cos^2\psi^* \end{pmatrix} \tag{6.43}$$

に変換される。

(iii) $\sigma_1^* = \text{const.}$ の場合

このときは式（6.43）からもわかれるように σ_{31} も一定値となりしかも $\sigma_{11} = \sigma_{33}$ であるから式（6.11a）より，$\phi = 0$ で

$$\varepsilon_\psi = \frac{1}{2} s_2\sigma_1^*\cos^2\psi^* + 2s_1\sigma_1^*\cos^2\psi^* - \frac{1}{2} s_2\sigma_1^*\sin\psi^*\cos\psi^*\sin 2\psi \tag{6.44}$$

が得られる。σ_1^*，ψ^* が定数であるから，これは完全な楕円を描く。

(iv) $\sigma_1^* = a + bz$ の場合

$\sigma_1{}^*$ そのものがこう配を有する場合（ Fig. 6.15（a））であり，式（6.43）の関係より試

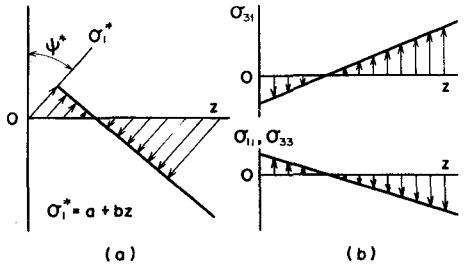


Fig. 6.15. Principal stress ($\sigma_1{}^*$) distribution tilting its axis by ψ^* (a), and its equivalent distributions of stress tensors (b).

料座標系で表わされた応力分布は Fig. 6.15 （b）のようになる。この場合，重み付き平均ひずみをとると $\phi = 0$ において

$$< \varepsilon_{\psi} > = a \{ s_1 + \frac{s_2}{2} \sin^2(\psi-\psi^*)\} + b \{ s_1 + \frac{s_2}{2} \sin^2(\psi-\psi^*)\} \frac{\sin\theta\cos\psi}{2\mu} \qquad (6.45)$$

が得られる。このときの $\sin^2\psi$ 線図は Fig. 6.16（a）および（b）に示されるように $\psi > 0$ と $\psi < 0$ のひずみ分布が交叉して描かれることが特長である。主応力 $\sigma_1{}^*$ が正の値から負の値に変化することは同図中に示すように試料座標系で表わした σ_{31} の符号が負から正へと

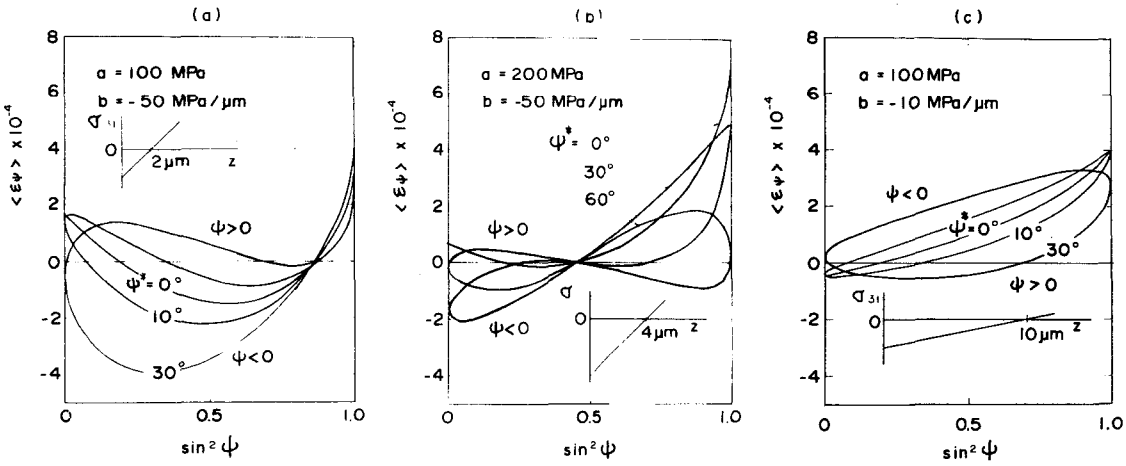


Fig. 6.16. $\sin^2\psi$ diagrams for a case that the principal stress depends linearly on depth and its axis tilts from the specimen coordinate system.

移り変ることに対応する。また，$\sin^2\psi$ が0から1まで変化することはX線侵入深さが徐々に減少し，$\sin^2\psi = 1$ では0になることに相当する。すなわち，Fig. 6.16（a）および（b）のように表面下の浅い位置で符号が逆転する応力分布のときには，$\sin^2\psi$ が小さい範囲では重み付き平均値として深い領域の正の応力が優位に効くが，$\sin^2\psi$ が大きい範囲では浅い領域の負の応力が効果的になり，その結果 $\psi \gtrless 0$ のひずみ分布が逆転するのである。Fig.

6.16（c）のように σ_{31} の符号の変る深さがX線侵入深さと比較し得る程度かあるいはそれより深い場合には $\psi \gtrless 0$ のひずみ分布の逆転はなく楕円分布に近くなる。（a）および（b）のように $\sin^2\psi$ 線図上で $\psi \gtrless 0$ のひずみ分布が交叉逆転するような挙動は，たとえば反転加工を受けた表面層の測定で見られるかも知れない。

6.6 結　　言

本章では三軸応力状態における任意方向(ϕ, ψ)の垂直ひずみと応力成分の間の関係を導出し，仮定した種々の応力状態について $\sin^2\psi$ 線図および全方位ひずみ線図を描いた。これによって測定された格子ひずみの分布を見て表面層の応力状態の定性的な概要を把握できると考えたからである。三軸応力状態における格子ひずみ $\varepsilon_{\phi\psi}$ と試料座標系の応力成分との間の基本的な関係は

$$\varepsilon_{\phi\psi} = \frac{1}{2} s_2[\sigma_{11}\cos^2\phi + \sigma_{12}\sin 2\phi + \sigma_{22}\sin^2\phi - \sigma_{33}]\sin^2\psi + \frac{1}{2} s_2\sigma_{33}$$
$$+ s_1[\sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33}] + \frac{1}{2} s_2[\sigma_{31}\cos\phi + \sigma_{23}\sin\phi]\sin 2\psi$$

で表現され，σ_{31}，σ_{23} のせん断応力成分がX線侵入深さ領域に存在する場合にはψを正負にとることによって $\sin^2\psi$ 線図上ではそれぞれ異なるひずみ分布（ψスプリット）が得られる。各応力成分を深さ方向に一定と考えるなら，この分布は楕円形状になることを示した。

つぎに，このようなひずみ分布から三軸応力解析する方法を Dölleらの提案にしたがって簡単に記述した。この方法は $\sin^2\psi$ 法に類似した方法で，ひずみ分布を視覚的に把握できるという意味ですぐれた方法であり，現在この種の応力解析に広く利用されつつある。

三軸応力解析においては $\sin^2\psi$ 法と異なり無応力状態の格子面間隔 d_0 あるいは回折角$2\theta_0$が既知でなければならないとされているが，その必要性の由来を検討した。その結果，せん断応力成分 σ_{31}，σ_{23} の解析には$\sin^2\psi$ 法と同様 d_0 あるいは$2\theta_0$の精度を必要としないが垂直応力成分 σ_{11}，σ_{22}，σ_{33} の解析においては d_0 あるいは$2\theta_0$を精度よく測定しておかなければならないことがわかった。たとえば，一般によく使用される CrK_α 線によるフェライト系鉄鋼材料の（211）面の測定においては，$2\theta_0$ を0.01°の精度で決定しておけば10MPa の精度で垂直応力成分を評価できる。

最後に各応力成分が深さ方向に変化するモデルを用いて重み付き平均ひずみを $\sin^2\psi$ の関数として表わした。このときにもせん断応力σ_{31}あるいはσ_{23}の存在によりψスプリットが生じるが，その分布形は完全な楕円にならないことが明らかになった。とくに，X線侵入深さ領域内でせん断応力の符号が変化するような場合には $\psi \gtrless 0$ のひずみ分布は，$\sin^2\psi$線図上で交叉逆転するような挙動になることを示した。

第７章　有向性加工層の残留ひずみ測定

7.1　緒　　言

前章で一般の三軸応力状態を仮定したとき，試料座標系に関するせん断応力成分σ_{31}あるいはσ_{23}が存在すると，$\varepsilon_{\phi\psi}$は$\sin^2\psi$線図上で楕円状の分布（ψスプリット）になることを明らかにした。このような現象は最初，石井〔26〕による超ジュラルミンの切削加工層のＸ線応力測定の研究において，またFuks and Gladkikh〔223〕による旋削加工層のＸ線測定において，ψ角を正負にとったときのひずみ分布の非対称性として報告された。すでにこのとき彼らは，この現象を主応力軸の試料表面法線からの傾きに帰因するものとして理論解析を行い，原因を明らかにした。その後 Semko ら〔224〕，福良ら〔225, 226〕，若林ら〔227, 228〕により，また1976年に Härterei－Technische Mitteilungen のＸ線応力測定評価に関する特集号でψスプリット現象の報告〔229, 230〕がなされて以来，この現象に注目が集まるようになった〔134, 231, 232〕。また，このような挙動に対する現象の理解や応力解析の方法についても多くの報告がなされ〔217, 233, 234〕，6.3節で述べた Dölle らの解析法のほかに Lode und Peiter によって新しく $\phi\psi\xi$ 法〔235, 236〕，積分法（Integralverfahren）〔237 ~ 240〕も開発された。

このような$\sin^2\psi$線図上の特異性は，多結晶金属材料の研削〔241 ~ 249〕，切削〔249, 250〕，転動〔251 ~ 257〕，その他〔258〕の加工層の残留応力をＸ線的に測定する際，加工方向に測定した残留ひずみを整理すると一般的に現われることが明らかになっている。すなわち，通常の$\sin^2\psi$法では主応力軸の一つが試料表面法線方向に一致し，Ｘ線侵入深さの範囲内では法線方向の残留応力成分σ_{33}，σ_{31}，σ_{23}は０であるという仮定が設けられているが，加工表面では，きわめて浅い層（Ｘ線侵入深さ程度の層）の中に無視できないσ_{31}，σ_{23}の成分が存在するためψスプリットが生じるのである。切削，研削などの機械加工は加工面に対して垂直力のみならず加工方向のせん断力を伴う局部的な強加工であるので，表面下に形成された加工変質層はきわめて複雑な微細構造を有し，かつ，せん断力の作用した結果として残留せん断応力場の形成された状態にあると考えられる。

すでにψスプリット現象に関して多数の測定結果が報告され，またそれがσ_{31}あるいはσ_{23}に帰因することが明らかになっているものの，系統的な研究は少く残留応力の平衡条件や境界条件などを考えると未だ不明確な点も依然として残されている。したがって，有向性加工層におけるψスプリット現象の問題をさらに深く堀り下げて究明することはＸ線応力解析の方法を

確立する上にも，また加工変質層の微視的構造変化を調べる上にも重要な意味があるものと考えられる。本章はそのような観点にたって数種の有向性加工を施した加工表面について残留ひずみ分布を詳細に測定し，加工方法と被加工材のψスプリット挙動に及ぼす影響についての系統的な知見を得ることを目的とした。また，とくに炭化物粒子を含む二相材料について，母相と炭化物との残留ひずみ状態を同時に測定することにより興味深い結果が得られたので，これらの結果を基に有向性加工層においてψスプリットを起させる原因としての微視的構造について考察を加えた。

7.2 全方位ひずみ測定

7.2.1 実験方法

本実験に使用した材料は，市販の普通炭素鋼Ｓ５５Ｃである。受入れ材より長さ50mm×幅10mm×高さ20mmの直方体を切り出し，初期残留応力を０にするため真空中で973 K，２時間の焼なましを施した。有向性加工の方法としては，研削加工と二次元切削加工を採用し，その条件を Table 7.1 および Table 7.2 に示した。研削加工は横形平面研削盤の往復テーブル上にマグネットチャックで試料を取り付け，約 10 μm の切込みを与えてテーブルの１往復毎に 0.2 mmの横送りをかけ，試験片の全幅を研削した。この操作を３回繰返し，全研削量は都合約 30 μm であった。二次元切削加工には形削り盤を用い，仕上用のヘールバイトを一定切込み量（約80 μm）に固定して切りくずが生成されなくなるまでストロークを繰返した。

Table 7.1. Grinding conditions.

Grinding wheel	WA80J
Dimension of wheel	145 mm$^{\phi}$
Revolution speed	3390 rpm
Depth of cut	10 μm × 3 times
Mode of grinding	Traverse grinding

Table 7.2. Cutting conditions.

Tool	Straight tool, SKH4
Rake and clearance angles	20° and 8°
Cutting speed	12.6 m/min
Mode of cutting	Orthogonal planing

方位角φは，Fig. 7.1に示すように，と粒あるいは工具の進入してくる方向(にげ面側)をφ = 0°，進行方向(すくい面側)をφ = 180°にとり，それと直角方向をφ=90°

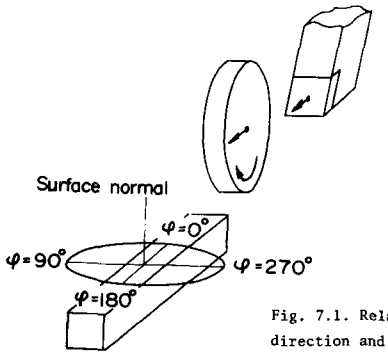


Fig. 7.1. Relation between the working direction and the azimuth φ.

および 270°と定めた。

X線測定条件は Table 7.3 に示すとおりであり，側傾法を使用した。

回折角測定には，連続走査により描かれた回折線プロフィルに⅔価幅法を適用した。

方位角φは，0°から45°おきに8方位とり，それぞれの方位について6方向の ψ（$\sin^2\psi$ = 0，0.1，0.2，0.3，0.4，0.5）でひずみ測定を行った。

Table 7.3. Conditions of X-ray measurement.

Characteristic X-ray	CrK_α
Tube voltage and current	35 kVP, 9 mA
Diffraction plane	(211)
Diffraction angle	$2\theta \simeq 156°$
Measuring method	Side inclination, para-focusing
Scanning speed	2 deg (in 2θ)/min
Irradiated area	$\sim 1.5 \times 3\ mm^2$

7.2.2 実験結果および考察

Fig. 7.2 は，研削した試験片から得られた格子面間隔の $\sin^2\psi$ 線図上の分布である。これは典型的なψスプリットの例であり，6.2節で議論した楕円状分布に密接に近似できる。図中

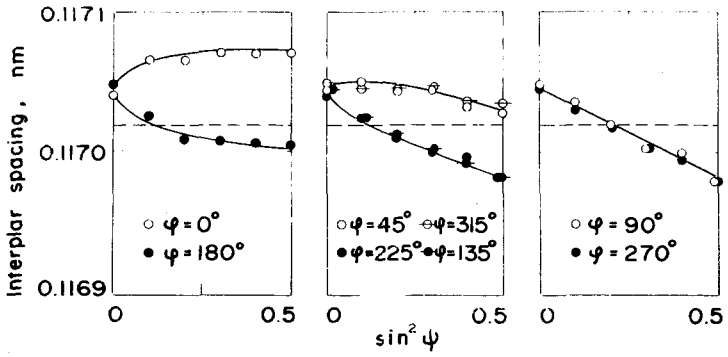


Fig. 7.2. Elliptic distributions of interplanar spacing taken from the ground surface.

の実線は，Dölle らの方法〔217〕に従って計算された応力値を用いて式（6.7）により再計算した格子面間隔の楕円分布である。ψスプリット幅は φ = 0° と 180°の間で最大であり，測定方位が加工方向（φ = 0° - 180°）から離れるに従って小さくなり，φ = 90°と270°では，完全に一致して直線になる。

Fig. 7.3 は，二次元切削した試験片から得られた $\sin^2\psi$ 線図である。

この場合も ϕ = 0° - 180°，45° - 225°，135° - 315° のそれぞれにおいて，

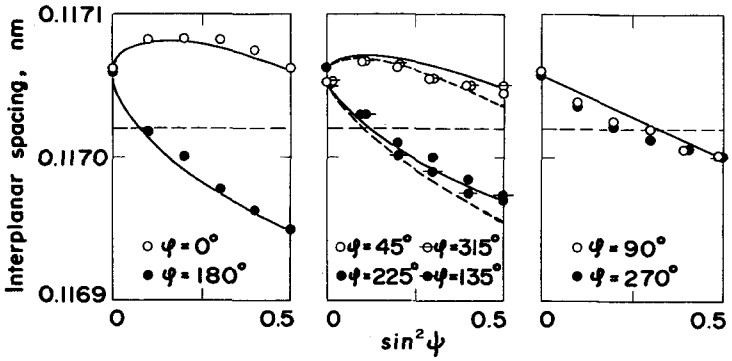


Fig. 7.3. Elliptic distributions of interplanar spacing taken from the orthogonal planing.

ほぼ楕円状の分布が得られているが，後二者の方位角の組合わせには，互いにわずかの偏差が認められる。これは切削した場合，回折線強度が小さくなるので，回折線プロフィルからその位置を決めるときに誤差が入ったためか，あるいは加工時の完全な二次元切削条件からのわずかな偏差によるものであろうと考えられる。また，ϕ = 90° - 270° に見られる湾曲した分布は，表面下の急激な応力こう配によるものであろう。Fig. 7.2 および 7.3 に水平に描かれた破線は同じ試験片の焼なまし状態における格子面間隔の値 (d_0 = 0.117020 nm) ある。

Fig. 7.4 および 7.5 は，それぞれ研削表面（Fig. 7.2）および二次元切削表面（Fig. 7.3）のデータを全方位ひずみ線図に表わしたものである。すでに Fig. 7.1 に示してあるように加

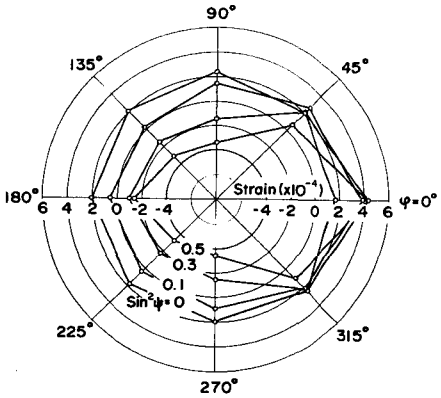


Fig. 7.4. Strain distributions in overall azimuth; ground surface.

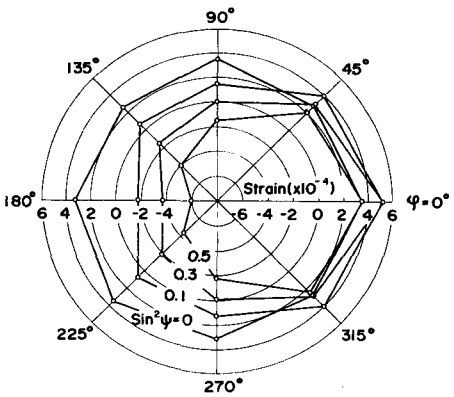


Fig. 7.5. Strain distributions in overall azimuth; orthogonally planed surface.

工方向は ϕ = 0° - 180° の軸に沿ってとってある。両加工面ともひずみ分布はこの軸に対称であり，それに直角な軸（ϕ = 90° - 270°）に対しては非対称となっている。同様な結果は若林ら〔259, 260〕，Wolfstieg ら〔230〕，Hauk ら〔244〕によっても

観察された。単結晶を加工する場合には，結晶方位により横分力の生じること〔261, 262〕が明らかにされているが，被加工材が多結晶体の場合には平均化されて横分力は0となるので $\phi = 0° - 180°$ 軸に対する対称なひずみ分布は有向性加工表面に対して必然的な結果である。これは Fig. 6.8 で示したように $\sigma_{23} = 0$ の場合のひずみ分布であり，したがって有向性加工の場合には残留応力状態を6個の成分を未知とする代りに

$$(\sigma) = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & 0 & \sigma_{31} \\ 0 & \sigma_{22} & 0 \\ \sigma_{31} & 0 & \sigma_{33} \end{pmatrix} \tag{7.1}$$

と考えて応力解析にのぞむことができる。これは計算過程を簡単にするばかりでなく，式（7.1）に示された4個の応力成分を決定するためには $\phi = 45° - 315°$, $\phi = 135° - 225°$ の測定が不要であるので測定時間が短縮される。

Fig. 7.6 および 7.7 は，Fig. 7.2 および 7.3 に示されたデータから式（6.16)および式（6.17）に従って $a_1 - \sin^2\psi$ および $a_2 - \sin|2\psi|$ の関係を図示したものである。

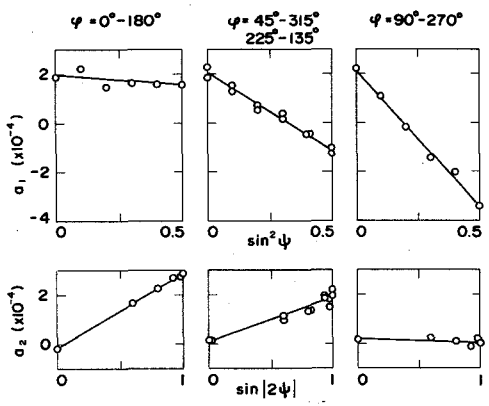


Fig. 7.6. a_1 vs. $\sin^2\psi$ and a_2 vs. $\sin|2\psi|$ diagrams for ground surface.

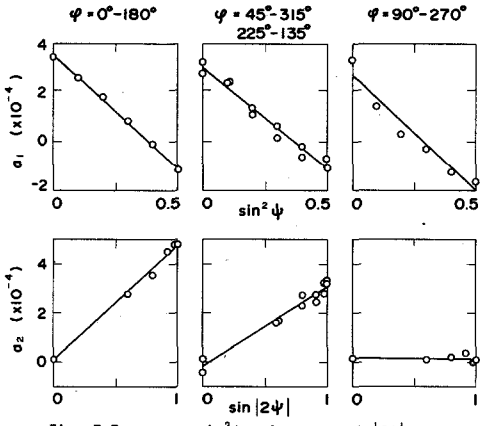


Fig. 7.7. a_1 vs. $\sin^2\psi$ and a_2 vs. $\sin|2\psi|$ diagrams for orthogonally planed surface.

Fig. 7.7 の $\phi = 90° - 270°$ の $a_1 - \sin^2\psi$ 線図を除くすべての場合について，ほぼ良好な直線関係の得られることがわかる。これらの図より最小二乗法を用いて求めたそれぞれの直線のこう配から，Table 6.2 のひずみ成分が計算できる。さらに Hooke の法則を用いて応力成分を計算した結果は，つぎのようになる。

$$(\sigma) = \begin{pmatrix} -29 & -7 & +59 \\ -7 & -227 & -4 \\ +59 & -4 & -11 \end{pmatrix} \text{MPa}, \qquad (\sigma) = \begin{pmatrix} -198 & +24 & +92 \\ +24 & -204 & -1 \\ +92 & -1 & -19 \end{pmatrix} \text{MPa}$$

（研削加工表面）　　（二次元切削加工表面）

前にも述べたように，Fig. 7.2および7.3の楕円曲線は，これらの値を用いて計算されたものであり，測定値の分布とよく一致する。しかし，測定値と式（6.5）あるいは式（6.7）との良好な適合は後に続く実験で常に成立するものではない。加工変質層内部で急激な応力こう配のある場合や強い優先方位が形成されたような場合には，測定された格子面間隔は $\sin^2\psi$ 線図上で楕円分布とはならず〔260〕，また a_1 - $\sin^2\psi$，a_2 - $\sin|2\psi|$ 線図も直線関係を満さなくなる。すでに Fig. 7.7 にその例を示した。Fig. 7.8 は格子面間隔(格子定数) - $\sin^2\psi$の非楕円形状の典型的な例である。この結果は工業用純鉄焼なまし材に1回，5回，10回のストロークを与えて二次元切削加工した表面の測定から得られた。とくに1回のストロークにおいて $\phi = 0° - 180°$ の測定値は $\sin^2\psi = 0.5$ の付近で交叉した形となり，$\phi = 90°$の分布も著しく湾曲している。とくに軟かい単相材では，塑性変形により容易に結晶の回転が起って集合組織が形成されることが明らかにされており〔263〕，優先方位と結晶の弾性異方性のからみによって楕円分布が阻害されたものと考えられる。

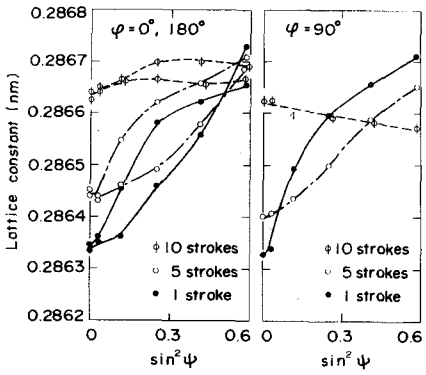


Fig. 7.8. $\sin^2\psi$ diagram obtained from orthogonally planed surface of the pure iron.

7.3 ψスプリット挙動と微視的残留せん断応力

7.3.1 実験目的と実験方法

すでに述べたようにX線侵入深さの領域内に無視し得ない残留せん断応力が存在する場合，$\sin^2\psi$ 線図上にψスプリット現象が生じる。この現象に関しては旋削加工，平削り加工，研削加工そして転動後の表面層について多くの結果が報告され，またこれらの研究において種々様々の材料がその対象となった。しかし，ψスプリット現象と，それに影響を及ぼす様々の因子に関して系統的な研究は少く，ψスプリット現象を起させる微視的，物理的原因については依然として未知のままである。本節ではψスプリット現象を系統的に把握するために，加工方法，供試材料，測定対象とする相および回折面の種々の組合わせの下で，格子面間隔をψの関数として測定した。

供試材料は市販の工業用純鉄（0.01％C），普通炭素鋼（S10CおよびS55C），軸受鋼（SUJ2）および高速度鋼（SKH2）である。

Table 7.4に示す形状寸法に加工した後，各表面を研削仕上して真空中で焼なまし，加工に

Table 7.4. Shape of specimens and heat treatments.

Material	Shape and dimension	Heat treatment
Pure iron	L 50 mm × W 12 mm × H 5 mm	1223 K, 2h → F. C.
S10C	L 50 mm × W 12 mm × H 20 mm	973 K, 2h → F. C.
S55C	L 50 mm × W 10 mm × H 20 mm	973 K, 2h → F. C.
SUJ2	L 50 mm × W 12 mm × H 20 mm	973 K, 2h → F. C.
SKH2	L 45 mm × W 10 mm × H 10 mm	1173 K, 2h → F. C.

よる残留ひずみを完全に除去した。その後，L×W面に各種の有向性加工を施してX線ひずみ測定に供した。

有向性加工の方法としては研削加工，切削加工およびエメリー紙による研摩を採用した。研削条件は Table 7.1に示したとおりであり，と石切込みを 10 μm ずつ与えて3回の往復トラバース研削を行った。切削条件は Table 7.2に示すとおりであり，形削り盤を用いて仕上げ用平バイトに固定切込みを与え，切りくずが出なくなるまでストロークを繰返した。さらにψスプリット現象に及ぼす加工方向の影響を調べるために反転切削も行った。また，エメリー研摩はエメリー紙G，M，Fの順番に手によって軽く一方向のみに研摩した。加工方向に対する方位角φのとり方は Fig. 7.1と同じである。

X線測定には CrK_{α} 線を用い，集中ビーム法による並傾法および側傾法（全回折角応力測定装置〔45〕搭載）を採用した。X線照射面積は並傾法の場合10×10㎟，側傾法の場合1.5×3～7㎟であった。また，回折線位置の決定にはディジタル方式により回折線プロフィルを測定して，ピーク法〔78〕（6～8点の放物線近似法），確率密度関数近似法〔95〕，あるいはアナログ方式による半価幅中点法〔78〕を適宜採用した。

ψスプリット現象に関して繰返し多くの測定結果が報告されているが，これらはいずれも多相材料の母相についての測定結果のみである。二相材料に含まれる硬質炭化物粒子は母相に比べて塑性変形に対する抵抗が大きいので，第2相粒子中の残留ひずみを測定することは材料の変形機構および材料内部の微視的残留応力状態を知る上で非常に興味がある〔45, 46, 264～266〕。この目的に対しては，焼なましたＳＵＪ２およびＳＫＨ２の各炭化物相中のひずみ測定がなされた。ＳＫＨ２材は，すでに熱残留ひずみの測定のため5.4.2節で実験材料に使用したが，その焼なましバルク材から得られた回折線図形を Fig. 7.9に示す。現われた回折ピークは，ＡＳＴＭカードのデータと一致して母相とM_6C炭化物からのみであることがわかり，ＳＫＨ２焼なまし材は完全に二相材料であると理解される。M_6C炭化物は，その構造が fcc 構造で

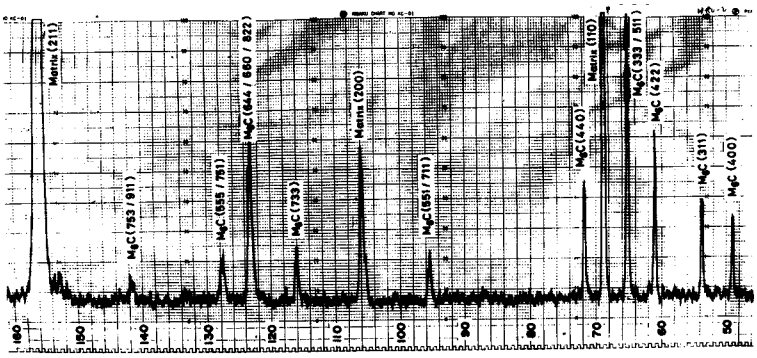


Fig. 7.9. Diffraction profile obtained from annealed bulk material of SKH2.

ある〔267〕ので大きい回折強度が得られ，しかも 2θ の広い範囲にわたって他の回折線と重ならない回折ピークが得られる。このことは全回折角応力測定装置を用いることによって，母相および第2相の残留応力を独立に測定することが容易なことを示し，ＳＫＨ２材は，この種の研究にきわめて有益な材料であることを意味する。研削面，切削面から得られるM_6C回折ピークは焼なまし材のそれに比べてわずかに幅が広がり，最大強度は ⅔～⅓ に減少するが M_6C（422），M_6C（ 333／511 ），およびM_6C（ 644／660／822 ）回折線は，すべて測定に充分な強度を有していた。

7.3.2 無ひずみ状態の格子面間隔の決定

ψスプリットの生ずる場合，σ_{31} などの応力成分が問題となるので，平面応力状態の仮定の下に解析することができず，三軸応力解析がなされなければならない。このとき無ひずみ状態の格子面間隔 d_0 の値が必要とされる〔217, 241〕ので焼なまし試料，あるいは粉末試料を用意して各回折面の d_0 を測定した。

純鉄，S10C，S55Cは焼なまし試料について母相（211）面の測定結果より格子定数 a_0 = 0.28665 nmと決定した。第２相の体積割合が大きい場合，母相と炭化物の熱膨張係数の差に基づく熱残留応力の影響があるので，ＳＫＨ２に対しては粉末試料を用意した。M_6C 炭化物粉末はＳＫＨ２焼なまし材から電解抽出法〔213〕により母相を溶去し，また母相

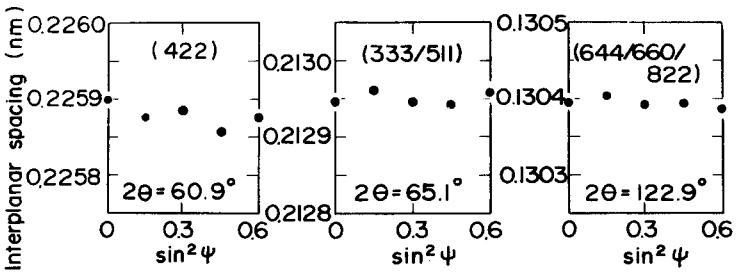


Fig. 7.10. $Sin^2\psi$ diagrams for annealed M_6C carbide powder.

に対しては，やすりがけ粉末を乳鉢で粉砕して700°Cで焼なまし，d_0測定のための試料とした。Fig. 7.10はM6C炭化物粉末の $\sin^2\psi$ 線図，Fig. 7.11はヤスリがけ焼なまし粉末から得られた母相各回折面の $\sin^2\psi$ 線図である。低角度の回折線について多少のばらつきが認められるが，同一回折面で測定された回折角の最大差は 0.015°(2θ) 以下であり，ゴニオメータの測角精度から考えて充分な測定精度であると判断した。また低角度 (2θ = 60°) から高角度(2θ= 156°) までのすべての回折線について Fig. 7.10および Fig. 7.11 のような $\sin^2\psi$ 線図の良好な水平性から，装置全体の調整も完全であると認められる。以上の結果より得られた測定値の平均値をもって，SKH2の各回折面の d_0 と決定し，Table 7.5 に与えた。

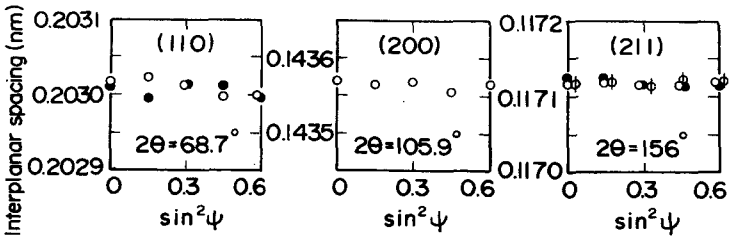


Fig. 7.11. $\sin^2\psi$ diagrams for matrix phase obtained from filed powder of SKH2. (o : Annealed powder, digital method; ● : Not annealed powder, digital method; φ : Annealed powder, analog method).

Table 7.5. Interplanar spacings for SKH2 measured from powder samples.

Phase	hkl	d_0 ± Δd_0* (nm)
Matrix	110	0.203008 ± 5 × 10^{-6}
	200	0.143564 ± 5 × 10^{-6}
	211	0.117121 ± 3 × 10^{-6}
M_6C	422	0.225880 ± 17 × 10^{-6}
	333/511	0.212949 ± 8 × 10^{-6}
	644/660/822	0.130394 ± 6 × 10^{-6}

* Δd_0 means the confidence interval of 90 per cent.

7.3.3 有向性加工層における d - $\sin^2\psi$ 曲線

(1) エメリー研摩材表面

Fig. 7.12はS10C焼なまし材をエメリー紙で軽く手研摩した表面より得られた$\sin^2\psi$線図である。ごく軽度の加工と思われるが，

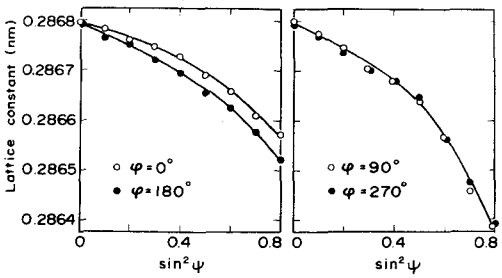


Fig. 7.12. $\sin^2\psi$ diagrams obtained from unidirectionally, emery polished surface, S10C.

$\phi = 0°$と 180°の間には実験誤差範囲を超えて明白なψスプリットが認められ，それらの平均値は上に凸で右下りの平均こう配を有する。一方，研摩に直角な方向では同様な湾曲が見られるものの，$\phi = 90°$と 270°では完全な一致が認められる。6.5節の解析結果と比較検討すると，わずかなσ_{31}が存在しσ_{23}は0であって，σ_{11}，σ_{22} ともに表面では圧縮であり，表面下急激な正の応力こう配を有するような応力状態の典型的な例である。

(2) 切削加工材表面

Fig. 7.13 は純鉄および炭素鋼の二次元切削加工表面から得られた $\sin^2\psi$ 線図である。単相材である純鉄にもψスプリットは顕著に現われ，また炭素量（供試材が焼なまし状態であるからセメンタイトあるいはパーライトの体積比に相当する）が増すに従って ψ スプリットの度合は増加する。この様子は若林ら〔227〕による研削加工材における結果と同じ挙動であり，フェライト相とセメンタイト相の間の微視的残留応力（相応力）に密接な関係のあることがうかがわれる。また $\phi = 0°$ と 180°の間の平均格子定数および $\phi = 90°$と 270°の格子定数は $\sin^2\psi$ に対してほぼ直線関係にあり，X線侵入深さ領域での応力こう配はゆるやかであるが，とくに純鉄の場合は $\sin^2\psi$ の小さい値の範囲で楕円分布から離れて複雑な挙動を呈している。これは7.2.2節の最後の例（Fig. 7.8）に挙げたように強い優先方位による弾性異方性の効果と考えられる。また，切削加工はエメリー研摩に比べて強加工であるから，同じS10C材で比較すると切削加工材のψスプリット幅は極端に広く，大きなせん断応力の残留していることが理解できる。

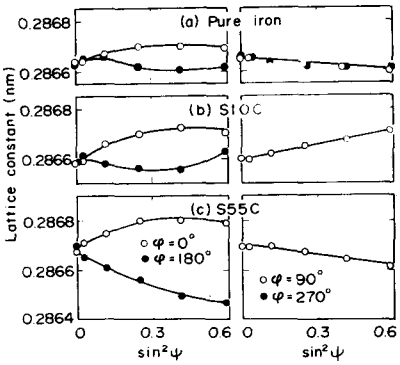


Fig. 7.13. $\sin^2\psi$ diagrams obtained from orthogonally planed surfaces of pure iron and carbon steels.

反転加工は Fig. 7.14 に示すようにψスプリット挙動に顕著な変化を与える。試験片の一端から他端へ切削した後，逆方向へ切削を行うとψスプリット挙動は $\phi = 0°$ と 180°で互いに反転して，残留せん断応力の符号が逆転することを意味する。もちろん方位角φは先の切削方向に固定してとってある。したがって，$\phi = 0°$ と $\phi = 180°$ における格子面間隔のいずれが大きいかを知ることによって，最終加工の方向

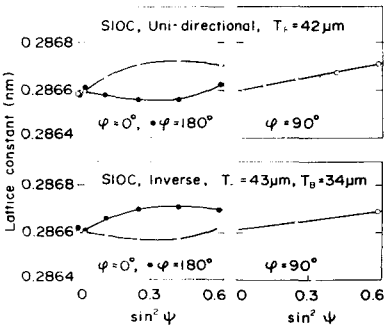


Fig. 7.14. Effect of inverse planing on the ψ-splitting. T_F and T_B are the depth of cut at forward and backward planing, respectively.

を見出すことが可能となる。同様の結果は Dölle ら〔216〕によって研削加工材でも観察された。

(3) 研削加工材表面

Fig. 7.15 は純鉄および普通炭素鋼の研削加工表面から得られた結果である。$\phi = 0°$および $180°$の間には切削材に比べて程度は小さいが，ここでもセメンタイト量によらずψスプリット現象が見られ，またセメンタイト量の増加に伴ってその度合が大きくなる傾向にある。さらに，目づまりしたと石を用いて苛酷な研削をするとψスプリット幅が大きくなるとともに平均こう配も大きくなり，引張残留応力が増大する傾向も観察された。一方，$\phi = 90°$と $270°$ではψスプリット現象は認められないが，軟質材では極端な非直線性が見られる。

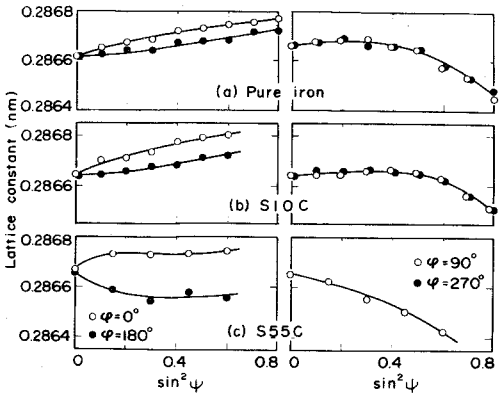


Fig. 7.15. $\sin^2\psi$ diagrams obtained from ground surfaces of pure iron and carbon steels.

これまでのすべての結果は母相（211）面の測定結果であり，反転加工表面を除いて，$\phi = 0°$の格子定数が $\phi = 180°$ のそれより常に大きいことが共通点である。Fig. 7.13および Fig. 7.15の結果よりセメンタイト相の体積割合の増大とともにψスプリット幅も大きくなることが理解できた。すなわち，硬質第2相がψスプリット挙動に対して重要な影響を及ぼしていると考えられるので，炭化物相の測定に注意を向けた。

Fig. 7.16は球状化炭化物を含むＳＵＪ２焼なまし材の研削加工表面より得た母相（211）面および炭化物相（121）面についての測定結果である。ＳＵＪ２の炭化物相（121）面については，研削などの加工を与えた場合，その回折線が母相（110）回折線のすそのに重って得られることと，炭化物自体斜方晶構造であるため本質的に回折強度が小さいことにより，測定が極めて困難であり，測定精度も定かではない。しかし，ψスプリットは母相（211）面のみならず炭化物相（121）面にも明らかに発生し，しかも炭化物相のψスプリット挙動は，母相のそれと比較すると顕著な違いがあり，$\phi = 0°$と $180°$との格子面間隔の値の逆転していることが注目される。このことをさらに明らかにするためにＳＫＨ２の母相とＭ$_6$Ｃ炭化物相の種々の

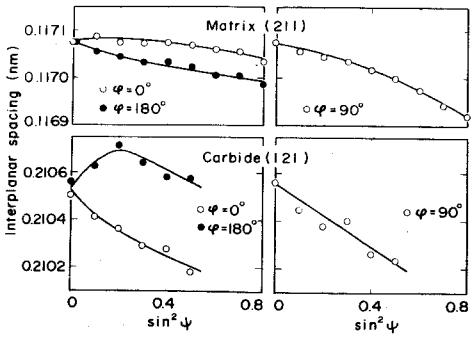


Fig. 7.16. $\sin^2\psi$ diagrams obtained from ground surface of SUJ2.

回折面についての測定を行った。

Fig. 7.17 はＳＫＨ２研削加工材母相の（110），（200），および（211）の各面についての測定結果であり，前述の各種加工表面における結果と同様，また若林ら〔227〕の結果と一致して回折面の選択によらず $d(\phi = 0^\circ) > d(\phi = 180^\circ)$ となる。これに対してM_6Cの（422），（333／511）および（644／660／822）面の測定結果は Fig. 7.18 に示される

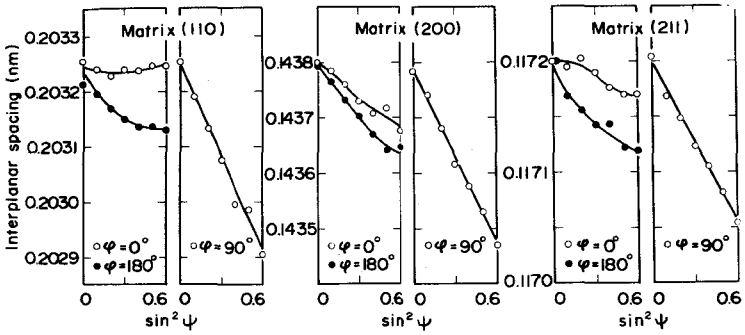


Fig. 7.17. $Sin^2\psi$ diagrams for the matrix phase obtained from ground surface of SKH2.

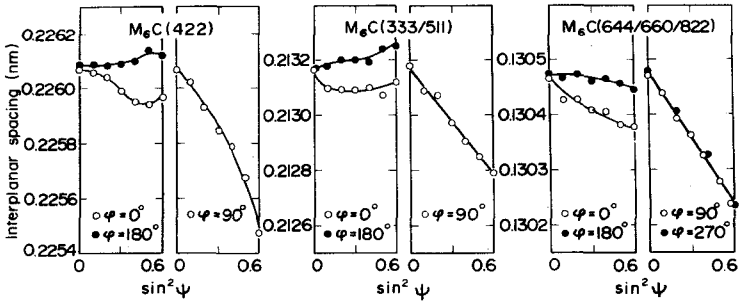


Fig. 7.18. $Sin^2\psi$ diagrams for the carbide (M_6C) phase obtained from ground surface of SKH2.

ように，これも回折面の選択には依存しないが，母相とは逆に$d(\phi = 0^\circ) < d(\phi = 180^\circ)$となっている。これは母相と炭化物相の残留せん断応力の符号が互いに逆であることを意味しており，引張塑性変形後，引張軸方向の残留応力が母相と炭化物相との間で相応力平衡条件を満足している〔45〕のと同様，有向性加工表面層の残留せん断応力も互いに二相間で相応力平衡の関係にあることを示唆している。

同様な結果は研削加工表面のみならず他の加工表面においても矛盾なく成立する。Fig. 7.19 および Fig. 7.20 はそれぞれＳＫＨ２材のエメリー研摩（Ｇ，Ｍ，Ｆ）表面およびフライス加

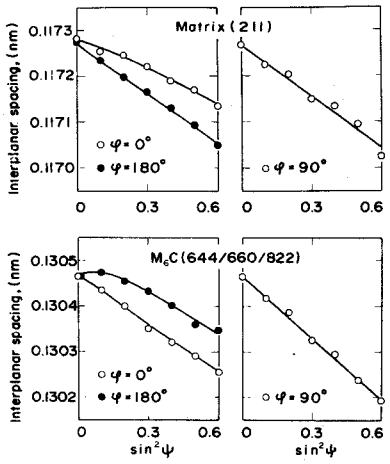


Fig. 7.19. $\sin^2\psi$ diagrams obtained from unidirectionally emery polished surface, SKH2.

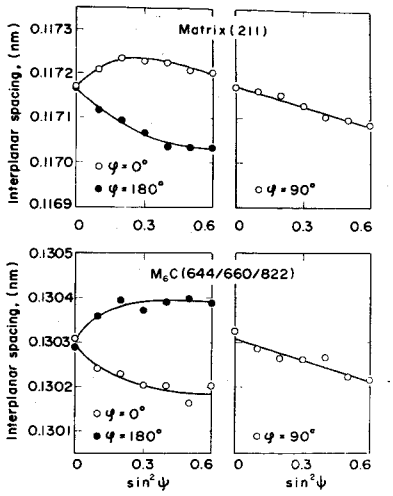


Fig. 7.20. $\sin^2\psi$ diagrams obtained from milled surface, SKH2.

工表面における母相（211）面および M_6C 炭化物相（644／660／822）面の $\sin^2\psi$ 線図を比較対照したものである。研削加工表面と同様 $\phi = 0°$ および $180°$ の格子面間隔の分布は母相と炭化物相とで互いに逆の関係にある。さらにエメリー研摩表面の母相（211）面の結果を Fig. 7.12 のS10C材の結果と比較するとSKH2材の方が ψ スプリット幅は大であり，やはり炭化物相の体積比との間に関係がみられる。また加工の度合についても，フライス加工表面では ψ スプリット幅が著しく大きく現われている。

7.3.4 残留応力の計算

境界条件により材料の自由表面では σ_{31} などは存在し得ないので，$\phi = 0° - 180°$ の間に ψ スプリットが認められるということは σ_{31} がX線侵入深さの範囲内で Fig. 6.13 に示したように表面下にこう配を有していることに他ならない。一つあるいは二つの応力成分がこう配をもっている場合には，第2章で述べた重み付き平均解析法で解析が可能であるが，三軸状態でしかも各応力成分が独立にこう配をもつような一般の応力状態の完全な解析は不可能である。しかし，X線による測定はその侵入深さ範囲内での平均応力を求めるものであると考えて，X線の有効深さにおける応力値が侵入深さ内で一定に分布存在しているという仮定を設ければ解析は容易になる。

本実験の有向性加工においては $\phi = 90°$ と $270°$ における測定ひずみにほぼ良好な一致が見られたので $\varepsilon_{12} = \varepsilon_{23} = 0$ として，6.3節の Dölle らの方法〔217〕にしたがって平均応力を解析し，その結果を Table 7.6 にまとめた。 X線的弾性定数は純鉄，S10C，S55

Table 7.6. Residual stresses at the uni-directionally deformed surfaces.

Method of working	Material	Diffraction plane*	Residual stress (MPa)				Remark
			σ_{11}	σ_{22}	σ_{33}	σ_{31}	
Emery polished	S10C	$(211)_\alpha$	-105	-153	+ 58	+ 9	
	SKH2	$(211)_\alpha$	-407	-570	+134	+ 54	D
		$(644/660/822)_\eta$	-463	-829	+183	- 90	
Orthogonal-planed	Iron	$(211)_\alpha$	- 23	- 95	- 35	+ 30	A
	S10C		+ 85	+135	+ 6	+ 64	
	S55C		- 76	-109	- 11	+114	
	S10C		+168	+451	-143	+ 51	... B
Ground	Iron	$(211)_\alpha$	+ 33	-190	+ 77	+ 19	
	S10C		+149	- 88	+ 11	+ 25	
	S10C		+233	-121	+ 12	+ 34	... C
	S55C		-125	-371	-110	+ 56	
	SUJ2		- 14	-152	+ 84	+ 35	... D
	SKH2	$(110)_\alpha$	+267	-468	+385	+ 41	D
		$(200)_\alpha$	- 31	-320	+231	+ 20	
		$(211)_\alpha$	-145	-403	+ 36	+ 42	
		$(422)_\eta$	+ 24	-478	+104	- 51	
		$(333/511)_\eta$	+202	-454	+215	- 64	
		$(644/660/822)_\eta$	-196	-870	+ 13	- 65	

* Subscripts α and η mean the matrix phase and the carbide (M_6C) phase, respectively.

(A) Planed by ten strokes at a given depth of cut.

(B) Planed by only one stroke at a given depth of cut.

(C) Heavily ground.

(D) SUJ2 and SKH2 contain spheroidized carbide particles.

C，ＳＵＪ２の（211）面については池内ら〔268〕の結果を，またＳＫＨ２の各回折面については第８章で実測した値を用いた。 Table 7.6 の σ_{31} のみに注目すると Fig. 7.12 ~ 7.20 の $\sin^2\psi$ 線図のψスプリット挙動に相応して母相（211）面では加工度の増大に伴い，また炭化物量の増加に伴ってσ_{31}は大きくなり，さらに回折面によらず母相では $\sigma_{31} > 0$ ，炭化物相では $\sigma_{31} < 0$ となることが明らかになった。

Fig. 7.21は研削加工材および二次元切削加工材について炭化物の体積比と母相の残留せん断応力 σ_{31} の関係を図示した。

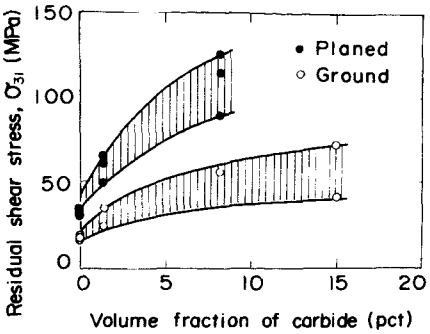


Fig. 7.21. Residual shear stresses produced by orthogonal planing and grinding as a function of the volume fraction of carbide phase.

7.4 考　　察

これまでにいくつかの報告がなされたように，ψスプリットの原因はX線侵入深さの範囲内での残留せん断応力（σ_{31}あるいはσ_{23}）の存在そのものである。すなわち，加工表面層では従来，X線応力解析で伝統的に認められてきた平面応力状態の仮定がもはや成立せず，極く浅い層の内部でも三軸応力状態を考慮しなければならないという結論が導かれる。

X線的な検証として三軸応力状態を考慮すべきであると結論できる最も基本的な例は，第5章で扱った第2相介在物中の熱残留応力の問題であろう。Fig. 5.9 および Fig. 5.10の Al－Si 合金中の Si粒子およびSKH2材中の M_6C炭化物粒子の格子面間隔は,無ひずみ粉末のそれより小さいことが明白である。これは母相と第2相粒子の熱膨張係数の差によって，冷却過程中に導入された静水圧的な初期圧縮応力による結果であり，これらの図から三軸応力解析をすると Si 粒子について $\sigma_{11} = \sigma_{22} = -140$ MPa，$\sigma_{33} = -121$ MPa，M_6C 炭化物粒子については $\sigma_{11} = \sigma_{22} = -433$ MPa，$\sigma_{33} = -402$ MPa が計算される。さらに第3章におけるラッピング加工表面での測定や疲労クラック先端での測定〔149〕において，試料表面法線方向の垂直残留応力成分の存在が報告されている。

一方，加工表面層の透過電子顕微鏡による転位構造の観察結果によれば，70／30黄銅の切削加工層〔269〕，純アルミニウム切削仕上面下〔270〕，アルミニウムおよび黄銅の単粒ひっかककきず近傍〔271〕，またアルミニウム，銅，鉄などの疲労破面下〔272〕あるいは疲労き裂近傍〔273〕などに非常に微細な（0.1 ∿ 0.15 μm），発達した亜結晶構造が認められている。これら極微細な亜結晶は表面層に集中した局部的強加工の結果として生成されたものであり，加工表面直下のX線が侵入する程度の内部にも安定して存在しているものと考えられる。そして，このような亜結晶内部の応力状態は一般に複雑であり，平面応力状態というよりは，むしろ三軸応力状態の下に置かれていると考えるのが妥当であろう。

Fig. 7.22は有向性加工層内部の転位構造モデルを示したものである。

せん断力の作用した結果として方向性のある転位分布が形成され，硬質の炭化物粒子に集積した転位，また，セル壁を形成する転位から構成されていると考えられる。X線で測定する場合，母相からの回折に寄与するのは転位密度の少いセル内部，すなわち可干渉領域であるから，ここでは集積転位から受ける逆応力によって正のせん断応力状態の下にある。一方，炭化物粒子は，たとえばOrowanループ〔274〕のような形で，その周囲に集積した転位の作用〔275, 276〕として，負のせん断応力状態におかれる。また結晶粒界，セル壁も負のせん断応力を支えることが可能であろう。結局，炭化物粒子を切るA－A断面，セル壁を切るB－B断面の残留せん断応力の分布は，同図の下部に描いたような分布状態であると考えられる。

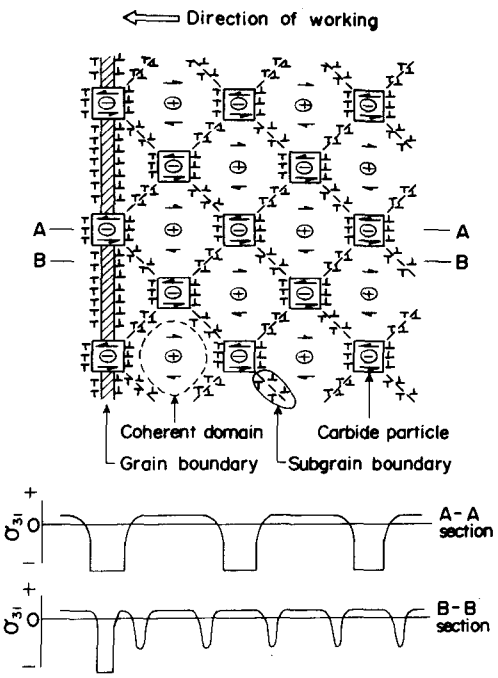


Fig. 7.22. A model of dislocation substructures within a uni-directionally deformed layer and distribution curves of residual shear stress.

以上のことは，Fig. 7.16～7.20あるいは Table 7.6 に示されたように，母相のみならず炭化物中の残留ひずみが精度良く測定されたことによって確証された。また純鉄の切削，研削面でψスプリットが認められたことは上記の結晶粒界，セル壁の寄与が無視できないことを示している。

第4章において，自由表面の影響を周期的に分布する微視的残留応力(σ_{33}，σ_{31}，σ_{23})の波長に関連して議論した。そして，自由表面による応力緩和領域は微視的残留応力系をフーリエ級数で展開したとき，その優位なフーリエ成分の最も低次の波長のオーダーの深さに限定されることを示した。また一方，X線応力測定の結果は残留せん断応力が Fig. 7.22 に示したように，母相と炭化物相あるいはセル内部とセル壁の間で交互に符号を異にして周期的に分布していることを明らかにした。したがって，優位なフーリエ成分の最も低次の波の波長は，平均炭化物粒子間距離あるいは平均セル径のオーダーに一致する。加工層中のセル径は，前述のように 0.1 ∿ 1.5 μm のオーダーであり，SKH2の M_6C 炭化物の平均粒子間距離は Fig. 5.8の組織写真から約 1.9 μm であるので，自由表面による応力緩和層は約 2 μm あるいはそれ以下に限定されると考えられ，これより深い領域では三軸応力状態下にあること

が理解できる。この応力緩和層の深さはX線侵入深さに比較して充分小さい値であり，このような場合，回折線のピーク移動量には三軸応力状態の情報が含まれることになる。

無方位ラッピング加工面では，いかなる方位についてもψスプリットが現われないという第3章の事実結果を考え合わせると，ψスプリットすなわち残留せん断応力成分の観測される原因は，有向性加工により Fig. 7.22 のように方向性のある転位分布構造が形成され，しかもそれがX線侵入深さ範囲内に安定して存在していることによるもので，単相材を問わず，また加工の種類によらず，有向性加工で材料内部に塑性変形が起り，転位が特定方向に動く限りにおいて，程度の差はともかく加工方向のψスプリットは厳密に起り得ると結論できる。そしてこの現象は母相と第2相，あるいはX線的な可干渉領域と非干渉領域の間における微視的残留応力のつり合いから生じるものと考えられる。

7.5 結　　言

本章では残留応力の主軸が試料面法線に一致しないような例，すなわちψスプリットの生じる例についての実験結果を系統的に集めて，ψスプリット挙動と微視的残留せん断応力の関係を統一的に把握することに努めた。純鉄，S10C，S55C，SUJ2およびSKH2の各材料に対して，エメリー研摩，研削および二次元切削の加工方法により有向性加工を施し，加工表面の残留格子ひずみ分布を測定して，つぎのことを明らかにした。

(1) 多結晶材に有向性加工を施すと残留格子ひずみは全方位ひずみ分布線図上で加工方向軸 ($\phi = 0° - 180°$) に対して対称となり，直角方向軸 ($\phi = 90° - 270°$) に対しては非対称分布となる。これは $\sigma_{12} = \sigma_{23} = 0$ であり $\sigma_{31} \neq 0$ であることを示す。

(2) 有向性加工を施した表面の残留格子ひずみを $\sin^2\psi$ 線図に表わすと，加工方向にψスプリットを生じ，加工度が大になるほどその傾向は顕著になる。一方，加工と直角方向にはψスプリットは認められない。

(3) 単相材，二相材を問わずψスプリットが認められ，炭化物の体積比が大になるほど顕著になる。

(4) ψスプリットは回折面の選択によらず，どの面についても認められ，炭化物を含む材料でのその挙動は母相と炭化物相とでは互いに逆になる。これは母相と炭化物相の残留せん断応力の符号が互いに逆であることに対応する。

これらの系統的な実験結果に基づいて有向性加工層内部の転位分布モデルを提案した。このモデルによってψスプリット挙動の発生が定性的にではあるが容易に理解できる。ψスプリット挙動の原因が残留せん断応力（ σ_{31} あるいは σ_{23} ）によるものであることは明白な事実であるが，微視的な立場から考えると，X線侵入深さの範囲内に微細なセル組織や粒子を取り

囲む転位ループなど，モデルに示したような方向性のある転位構造を有することが直接の原因である。そして，このような転位構造によって作られる微視的残留応力分布の波長がX線侵入深さに比べて小さい場合，三軸応力場のクライテリオンに基づいてψスプリットが生じる。

第８章　有向性加工層内部の微視的残留せん断応力の平衡

8.1　緒　　言

前章において種々の有向性加工表面における残留格子ひずみを測定した結果を系統的に整理すると，ψスプリット挙動はつぎのように要約される。 (1)単相材とみなせる工業用純鉄にもψスプリットが生じ，炭化物の増大とともにその挙動は顕著になる。 (2)加工度が大なるほどψスプリット幅は増大する。 (3)母相と炭化物相のψスプリット挙動はψの正負に対して，互いに逆の関係にある。

これらの結果を総合的に判断すると，ψスプリットが生じる原因として炭化物および亜結晶粒界を形成するセル壁が大きな役割を演じているように思われる。換言すれば，Ｘ線回折の選択性，すなわちＸ線の可干渉あるいは非干渉領域に関する問題としてψスプリット挙動をとらえることができよう。前章では，このことを転位分布モデルを用いて定性的に図解表現した（ Fig. 7.21）。 本章ではさらにこの考え方をすすめて，定量的な観点からψスプリット現象をとらえ，母相中のセル内部とセル壁および炭化物相の三つの領域の微視的残留せん断応力の間の関係を調べ，さらに加工表面のみならず加工層全体にわたる残留応力状態について検討する。

8.2　試料および実験方法

用いた試料は市販の純鉄と高速度鋼ＳＫＨ２であり，形状および熱処理条件は Table 7. 4 に示したとおりである。有向性加工の方法としては研削加工とフライス加工を採用した。研削加工条件は Table 7. 1 と同一であり，フライス加工は34枚歯のフライスカッタを33 rpmで回転させ，テーブル送り速度を １６ｍ／min として上向き加工で約１ｍｍの切込みを与えた。加工層内部にわたる応力分布を調べるために，加工表面ならびに逐次電解研摩により，層除去して得られた面について残留格子ひずみをＸ線測定した。測定に供した回折面は純鉄およびＳＫＨ２の母相については（211）面，ＳＫＨ２の M_6C 相については（644／660／822）面である。加工層などの測定では層除去により回折線幅が変化し，K_α二重線のままでは放物線あるいは確率密度関数などの関数近似法〔277〕によって正確な回折線位置の変化を追うことができない。したがって，定時計数により得た強度にＬＰＡ補正およびバックグランド補正をした後， Rachingerの方法〔211〕によって分離した$K_{\alpha 1}$線のプロフィルに確率密度関数近似法〔212〕を適用して回折線位置を決定した。

また，有向性加工材とは別にＳＫＨ２材の母相と炭化物相のＸ線的弾性定数を測定するため Fig. 8.1 に示す引張試験片を用意した。全回折角応力測定装置〔45〕に取り付けた引張試験機により，40MPa毎の荷重を加えてその都度Ｘ線測定を行った。

なお，負荷荷重は試験片表面のＸ線照射域の両脇に貼付けたひずみゲージにより測定した。

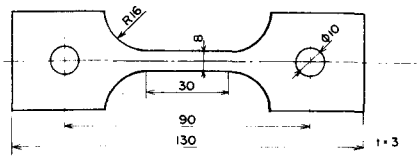


Fig. 8.1. Tensile specimen.

8.3 実験結果

8.3.1 ＳＫＨ２材のＸ線的弾性定数

本章の主な目的はψスプリット挙動に関する微視的残留せん断応力状態の定量的な検討であり，ＳＫＨ２材について母相のみならず M_6C 炭化物相のＸ線的弾性定数を,前もって知る必要があった。これには第１章で示したように，引張試験片に一軸引張応力を負荷する一般的な方法を用いた。Fig. 8.2 および Fig. 8.3 はそれぞれＳＫＨ２材の母相および M_6C炭化物相の

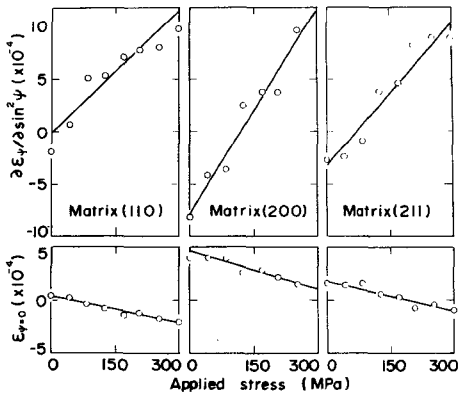


Fig. 8.2. Measurements of X-ray elastic constants of matrix phase (SKH2).

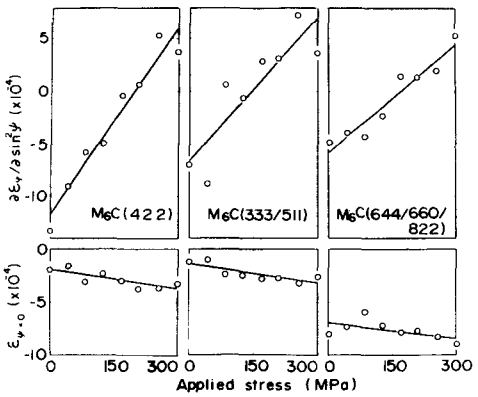


Fig. 8.3. Measurements of X-ray elastic constants of M_6C phase (SKH2).

各回折面について測定された $(\partial\varepsilon_\psi/\partial\sin^2\psi)$ - σ および $\varepsilon_{\psi=0}$ - σ の関係であり，これらの直線のこう配からＸ線的弾性定数が Table 8.1 に示されるように決定された。 異なる回折面に対して異なる弾性定数が得られるのは結晶の弾性異方性に基づくものであり，このよう

Table 8.1. X-ray elastic constants for a low carbon steel and a high speed steel, SKH2.

Material	Diffraction plane		X-ray elastic constant ($\times 10^{-6}$ MPa^{-1})	
			$s_2/2$	$-s_1$
Low carbon steel	Matrix	(211)	5.12	0.98
SKH2	Matrix	(110)	3.57	0.85
		(200)	6.52	1.08
		(211)	4.59	0.98
	M_6C	(422)	5.94	0.63
		(333/511)	4.61	0.62
		(644/660/822)	3.42	0.50

な事実は多くの金属および合金について測定されている〔36 ~ 39〕。なお同表に本研究で純鉄に代用した低炭素鋼（211）面の弾性定数〔268〕も示してあるが，ＳＫＨ２材母相(211)面の値とのわずかな差は，ＳＫＨ２材における合金元素の固溶による効果と考えられる。

8.3.2 純鉄フライス加工材のψスプリット挙動

Fig. 8.4 は純鉄フライス加工材の加工表面および逐次電解研摩面から得られたψスプリット

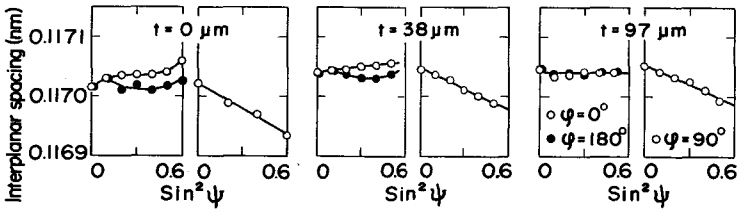


Fig. 8.4. $Sin^2\psi$ diagrams for the pure iron obtained from the deformed layer by milling.

の例である。二次元切削加工の例（Fig. 7.13）と同じように，$\phi = 0° - 180°$ において明瞭なψスプリットが生じ，加工の度合が大なることが理解されるが，格子面間隔の分布は楕円にはならずゆがんだ形状となっている。また，ψスプリット幅は電解研摩量とともに 90 ~ 100 μmで消滅するまで徐々に減少する。これは工具の機械的作用が約 100 μmの深さまで達し，また深さとともに減少することを意味している。

8.3.3　SKH2研削加工層の残留応力分布

Fig. 8.5 および Fig. 8.6 は SKH2研削加工材を逐次電解研摩して測定した母相とM_6C

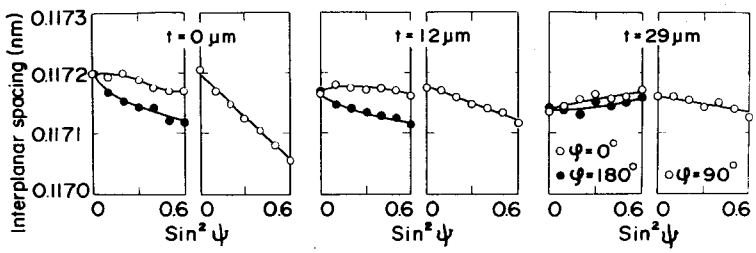


Fig. 8.5. $Sin^2\psi$ diagrams for the matrix phase of SKH2 obtained from the deformed layer by grinding.

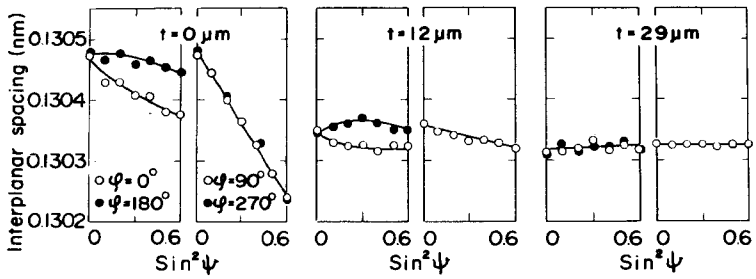


Fig. 8.6. $Sin^2\psi$ diagrams for the M_6C carbide phase of SKH2 obtained from the deformed layer by grinding.

炭化物相の $\sin^2\psi$ 線図の例である。この場合は母相，M_6C 相ともにほぼ楕円状の分布が得られ，また前章で観察したように母相において$d(\phi=0°)>d(\phi=180°)$,炭化物相において$d(\phi=0°)<d(\phi=180°)$の関係は加工表面のみならず加工層中においても成立する。これらの事実より，加工層全域にわたって残留せん断応力σ_{31}は母相において正，炭化物相において負であることが明らかになる。またψスプリット幅は研摩深さとともに減少の傾向を示し，両相とも約 30 μm の深さで消失する。これらのグラフより三軸応力解析の式に従って計算した残留応力成分の分布を Fig. 8. 7 および Fig. 8. 8 に示す。

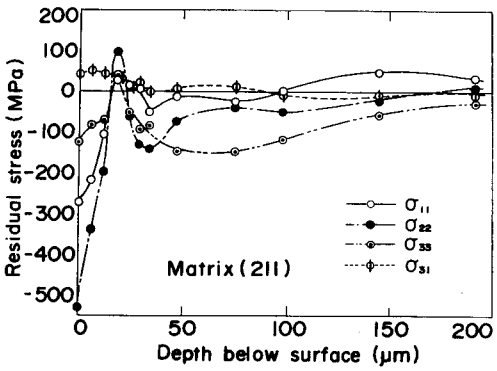


Fig. 8.7. Residual stress distributions for the matrix phase of SKH2 beneath the ground surface.

母相，炭化物相ともにσ_{31}はψスプリット挙動に相応して約 30 μm の深さで消失して

0になる。しかし，残留応力の垂直成分は複雑な変化を示し，σ_{31}が0になる深さを超えてかなりの深さまで存在していることがわかる。

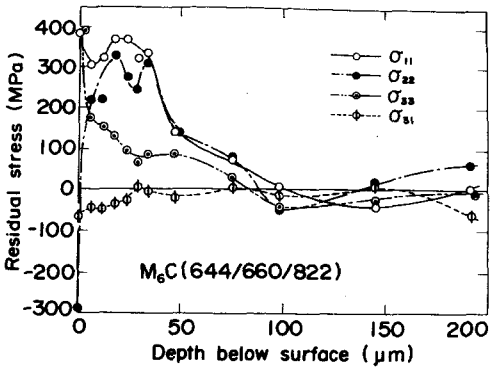


Fig. 8.8. Residual stress distributions for the M_6C carbide phase of SKH2 beneath the ground surface.

8.3.4 SKH2フライス加工層の残留応力分布

Fig. 8.9 および Fig. 8.10は，それぞれフライス加工層から得られた母相および M_6C 炭化

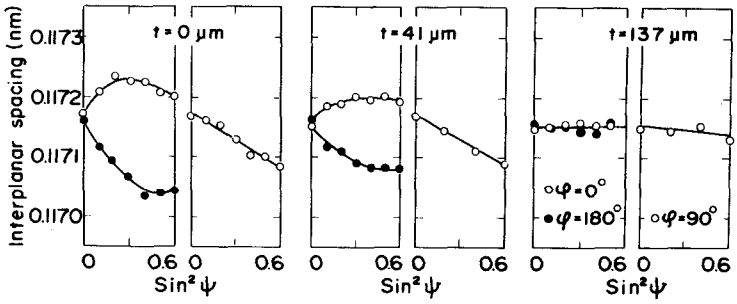


Fig. 8.9. $Sin^2\psi$ diagrams for the matrix phase of SKH2 obtained from the deformed layer by milling.

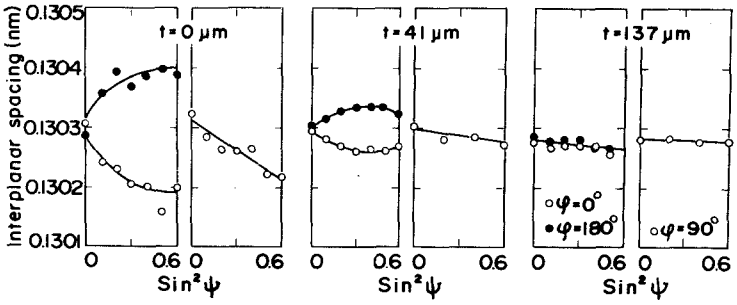


Fig. 8.10. $Sin^2\psi$ diagrams for the M_6C carbide phase of SKH2 obtained from the deformed layer by milling.

物相の $\sin^2\psi$ 線図の例である。この場合もほぼ楕円状の分布が得られ，母相において$d(\phi = 0°) > d(\phi = 180°)$，炭化物相において $d(\phi = 0°) < d(\phi = 180°)$ の関係が加工層中にわたって成立し，残留せん断応力σ_{31}の符号は母相で正，炭化物相で負である。

Fig. 8.5 および Fig. 8.6 との比較でも明らかなように，純鉄同様フライス加工材ではψスプリット幅が非常に大きく，しかもψスプリットすなわちσ_{31}が消失する深さは研削加工材の 30 μm に対して約 100 μmに達する。これは，フライス加工は加工応力とそれが侵透する深さが研削加工に比べて著しく大きいことを意味する。Fig. 8.11 および Fig. 8.12 はそれぞれ

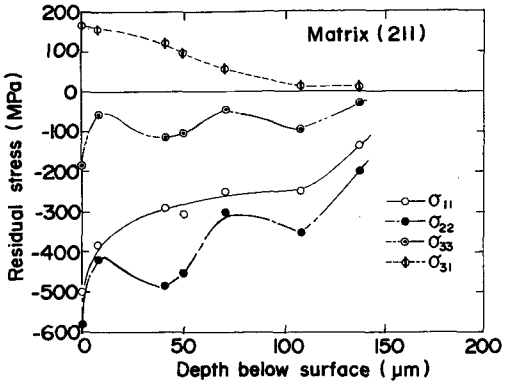


Fig. 8.11. Residual stress distributions for the matrix phase of SKH2 beneath the milled surface.

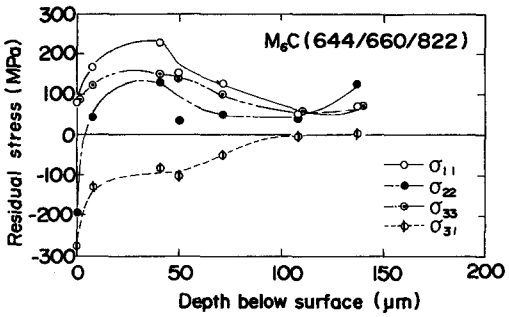


Fig. 8.12. Residual stress distributions for the M_6C carbide phase of SKH2 beneath the milled surface.

母相および炭化物相の残留応力分布を示す。σ_{31}が約 100 μmで消失するのに対して垂直応力成分は約 150 μmで消失するようである。

8.4 考　　察

8.4.1 微視的残留せん断応力の平衡

ＳＫＨ２研削材およびフライス加工材の表面から内部にわたる母相とＭ$_6$Ｃ相の測定結果より，母相の残留せん断応力σ_{31}は正，Ｍ$_6$Ｃ相のそれは負であることが確証された。また，ＳＫＨ２材に比較すると小さいが，純鉄研削材およびフライス加工材にもψスプリット現象が見られσ_{31}は正であった。このことは，単相材の可干渉領域において微視的残留応力が存在することを意味し，有向性加工表面下の転位構造モデル（Fig. 7.22）によると，結晶粒界近傍およびセル壁で負の残留せん断応力の存在を意味している。このようにψスプリット（σ_{31}）がＸ線的に検証されることは，材料内部の可干渉領域，すなわちセル内部およびＭ$_6$Ｃ炭化物における微視的効果がＸ線回折の選択性によって現われてきたものと考えられる。ここで，上記のようにＸ線の干渉性によって分けられた三つの領域（セル内部，セル壁，炭化物粒子）の中の微視的残留応力の平衡を検討することは興味深い。いまFig. 8.13のように加工表面にＡＤ面を接して第２相を含む微小

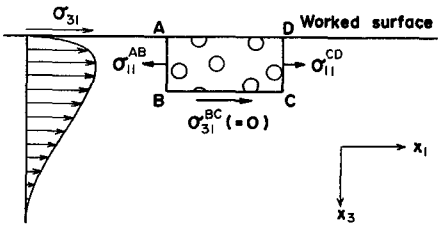


Fig. 8.13. Equilibrium condition of the residual shear stress within the region faced to the free surface.

体積要素ＡＢＣＤを考える。自由表面の境界条件よりＡＤ面にσ_{31}は存在しないので，Ｘ線的にσ_{31}が確認されることは図に示すようにσ_{31}が表面下でこう配を有し，ある値で極植をとるような分布になるはずである。すなわち，ＢＣ面にはσ_{31}^{BC}が作用していると仮定する。ところが，Ｘ線測定の結果は $\sigma_{12} = 0$ であることを保証しており，加工方向において残留応力が一様 $(\sigma_{11}^{AB} = \sigma_{11}^{CD})$ であることを認めると，x_1方向の力のつり合い条件より$\sigma_{31}^{BC} = 0$でなければならないことになる。すなわち，加工表面下の任意の深さにおいてσ_{31}は０であるので，Ｘ線の侵入する領域内で単相材および二相材の巨視的残留せん断応力 $\sigma_{31}^{M_1}$ および $\sigma_{31}^{M_2}$ に対して

$$\sigma_{31}^{M_1} = \sigma_{31}^{m_1} V^{m_1} + \sigma_{31}^{g_1} V^{g_1} = 0 \qquad \text{(単相材)} \qquad (8.1)$$

$$\sigma_{31}^{M_2} = \sigma_{31}^{m_2} V^{m_2} + \sigma_{31}^{g_2} V^{g_2} + \sigma_{31}^{c} V^{c} = 0 \qquad \text{(二相材)} \qquad (8.2)$$

なる平衡条件式が導かれる。ここで，上指標 m，c，g はそれぞれセル内部，炭化物，セル壁を，また上指標 1, 2 はそれぞれ単相材，二相材を意味する。さらにＶはそれぞれの領域の体積比を表わし，つぎの関係式が成立する。

$$V^{m_1} + V^{g_1} = 1 \qquad \text{(単相材)} \qquad (8.3)$$

$$V^{m_2} + V^{g_2} + V^{c} = 1 \qquad \text{(二相材)} \qquad (8.4)$$

すなわち，Ｘ線的に観察されるψスプリット現象は純粋に微視的な効果によるものであり，巨視的な効果によるものではないと結論される。また式（8.1）および式（8.2）と同様な平衡条件式はσ_{33}についても成立し，Fig. 8.7 と 8.8 および Fig. 8.11 と 8.12に見られるように母相と M_6C 相で互いに逆符号の残留応力が形成されていることから定性的に実証されている。

このように，Ｘ線的に測定されたσ_{31}に巨視的効果が含まれていないことから，以下のようにしてセル壁に関する知識を得ることができそうである。ＳＫＨ２材と純鉄では，もともと組織状態が異なるため，同一加工条件で加工しても厳密には同様な変形組織にはならないであろうが，Fig. 8.14に示されるように両材料の加工後と加工前の母相の回折線半価幅比は同一加工では，ほぼ等しくなることから，近似的に同様な微視的変形組織状態が得られているものと考えられる。このように考えると $\sigma_{31}^{g_1}V^{g_1}$ を $\sigma_{31}^{g_2}V^{g_2}$ に近似することが可能であり，式（8.1）～（8.4）の関係式を用いて平衡条件

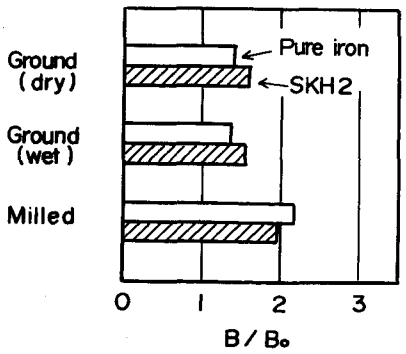


Fig. 8.14. Comparison of the half-width of diffraction profiles between pure iron and SKH2.

式を満足する V^g を，

$$V^g = \frac{\sigma_{31}{}^{m_2}(1 - V^c) - \sigma_{31}{}^{m_1} + \sigma_{31}{}^{c}\, V^c}{\sigma_{31}{}^{m_2} - \sigma_{31}{}^{m_1}} \tag{8.5}$$

で表わすことができる。さらに，V^g が求まると式（8.2）と式（8.4）より $\sigma_{31}{}^g$ が計算できる。V^g はセル壁の体積比であり，$\sigma_{31}{}^g$はその領域が受けもつ微視的残留せん断応力である。変形度が大きい程，活動する転位の数が増してセル境界にとらえられる機会が多くなる結果，この領域が成長して体積比が増大すると考えられる。母相（211）面と M_6C（644／660／822）面について得られた種々の加工表面での残留応力値と V^c = 0.15 を用いて計算した結果，V^gの値としてフライス加工材では0.58，研削加工材では乾式の場合0.30，湿式の場合0.68，二次元切削加工材で0.51，エメリー研摩材で0.52の値を得た。この非干渉領域の体積比について Cullity ら〔278〕は，15%引張変形させたニッケル試料における磁気的測定の結果 V^g = 0.12 を得ている。一方，Turley〔269〕は，70／30黄銅の切削表面下の転位組織を圧延材の組織と比較し，外挿することによって，加工表面の塑性ひずみが5～7にまで達することを明らかにしており，また Moore ら〔279〕は，銀ろうと銅の積層試料におけるアブレイシブ摩耗表面下 2.5 μmの深さで～2.5のひずみの生じることを観察している。したがって純鉄やＳＫＨ２材でも同様に切削や研削などの加工によって極めて高い変形状態にあり，V^gも大きい値になることが予想される。また，純アルミニウム切削仕上面下の透過電子顕微鏡観察において，セル壁の幅が著しく発達している事実〔270〕からも高い V^g の値を裏付けることができる。乾式研削で比較的 V^g が小さいのは加工度そのものにも依存するであろうが，研削熱のため自己焼戻しされ転位組織の回復が生じたためと考えられる。

Fig. 8.15および Fig. 8.16 は，研削加工材およびフライス加工材について，それぞれ V^g =

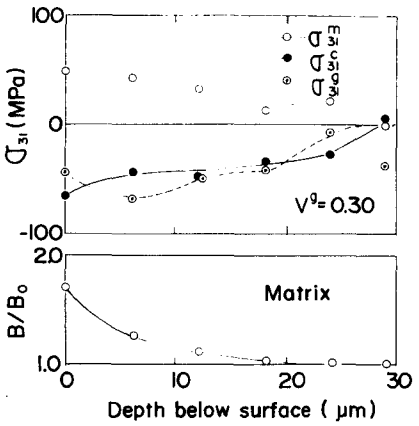


Fig. 8.15. Distributions of residual shear stresses and half-value breadth ratio within the deformed layer by grinding, (SKH2).

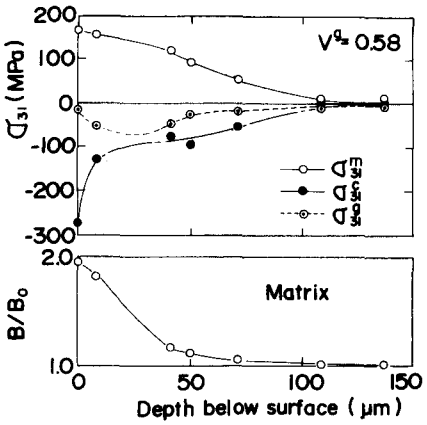


Fig. 8.16. Distributions of residual shear stresses and half-value breadth ratio within the deformed layer by milling, (SKH2).

0.30 および $V^g = 0.58$ を用いて$\sigma_{31}{}^g$を計算した結果であり，$\sigma_{31}{}^m$，$\sigma_{31}{}^c$ の実測値とともに示した。研削加工材，フライス加工材ともにセル壁に約−50MPa の無視できない残留応力の作用していることが予想される。

8.4.2 機械的作用と熱的作用が残留応力分布に及ぼす効果

金属材料に切削，研削などの機械加工を施すと表面層に組織変化をきたすばかりでなく，残留応力を発生することは従来の多くの研究や解説〔116 ~ 128, 280 ~ 287〕が明らかにするところである。このような加工層における残留応力の発生原因を大別すると，

(1) 機械的な作用による不均一な塑性変形

(2) 不均一な温度分布に起因する熱応力の作用による塑性変形

(3) 金属学的組織変化（相変態，析出など）による部分的体積変化

に分けられる〔283 ~ 285〕。低速切削で温度のそれほど上らない加工を焼なまし材に施すような場合，(3)の原因は重要な意味を持たないが，一般にはこれらのうち二つ以上の原因が重畳し合って残留応力を発生することが多く，測定された残留応力分布からこれらを分離評価することは非常に困難である。古くから加工条件を種々に変えて生じた残留応力分布を系統的に測定した結果があり，それぞれの原因をある程度推測することは可能であるが，それらに基づいて考えられた残留応力発生のモデルも定性的な域を脱することはできない。それに対して，最近，垣野ら〔288 ~ 290〕，江田ら〔291, 292〕によって有限要素法による解析が試みられ，簡単なモデルに対して加工抵抗，加工速度，加工力の方向などの関数として残留応力分布が計算されて有益な知見を与えている。

ところで，X線的に測定されるψスプリットは微視的残留せん断応力σ_{31}そのものであり，Fig. 8.15およびFig. 8.16のσ_{31}の変化挙動においてσ_{31}の消失する深さは，母相とM_6C相では完全に一致しているから，炭化物粒子界面へ集積した転位群の母相およびM_6C 粒子への作用・反作用の関係を矛盾なく反映している。したがって，ψスプリット（あるいはσ_{31}）の生じる原因が Fig. 7.22 に示したように転位の集積作用による結果であることは明白であり，またσ_{31}を生じるような転位の動きは特定方向に加工された機械的作用の結果に他ならないから，σ_{31}の挙動は有向性加工層において機械的作用の及ぶ範囲を決める有力なパラメータになり得る。一方，X線回折線幅は第2章でも取り扱ったように結晶粒子（可干渉領域）の微細化および結晶粒内あるいは結晶粒間の格子の不規則な分布により増大し，いずれも加工による結晶格子の変形に関係があるので，加工層深さを測定する手段としてしばしば用いられる〔116, 117〕。Fig. 8.15およびFig. 8.16 の下部には，それぞれの加工材の母相（211）面から得られた回折線半価幅Bを焼なまし材の半価幅B_0で除した値の深さ方向への分布を示した。σ_{31}が0にな

る深さは半価幅が焼なまし材のそれと同一になる深さとよい対応を示しており，これより機械的作用の及んだ深さは研削加工材では約 30 μm ，フライス加工材では約 100 μmであることが理解できる。

これに対して熱的作用は体積変化あるいはそれに基づく塑性変形を与えるものであるから，σ_{31}の発生には無関係であり，σ_{11}，σ_{22} などを生じる原因になる。もちろん機械的作用もσ_{31}だけでなくσ_{11}，σ_{22} なども引き起すから，垂直応力成分は機械的作用と熱的作用の重畳した結果と考えてよい。これら垂直応力成分から二つの作用を分離して求めることは困難であるが，それぞれの作用が及ぼす影響層の深さを比較することは容易である。すなわち，Fig. 8.7,8.8およびFig.8.11,8.12においてσ_{11},σ_{22}の消失する深さは研削加工材，フライス加工材ともに，約 100～150 μmと見積ることができる。これをσ_{31}の消失する深さと比較すれば，研削加工層では熱的作用による影響が深くまで及んで残留応力形成に大きい効果を示すのに対して，フライス加工層ではσ_{31}がσ_{11}，σ_{22} などの成分と同程度の深さまで達しているので，機械的作用の影響が大きいことを示唆している。垣野ら〔288〕，江田ら〔292〕の有限要素解析の結果によると，残留応力の及ぶ深さは，切削加工では機械的作用が，また研削加工では熱的作用が大きいことを認めており，上記の実験結果とよい対応を示す。なお，残留応力の値そのものについてX線測定の結果と対応比較するためには，各相における残留応力を解析する必要があり，今後さらに検討すべき課題であろう。

8.5 結　　言

本章では研削およびフライス加工材について表面下加工層内部にわたって残留ひずみ挙動を測定して残留応力分布を求め，また残留せん断応力の平衡条件を検討した結果，つぎのことが明らかになった。

(1) 両加工材ともψスプリット（あるいはσ_{31}）は加工表面のみならず加工層内部についても認められ，σ_{31}は母相で正，M_6C 相で負の関係が保たれる。

(2) ψスプリット幅（ σ_{31} ）は研削加工層に比べてフライス加工層の方が著しく大きく，それが消失する深さもまたフライス加工層の方が大であった。

(3) 残留応力状態では，σ_{31}は巨視的には0でなければならず，X線的にψスプリット(σ_{31})が検出されることは，加工層内部の微視的残留せん断応力とX線回折の選択性に基づく効果によるものである。

(4) X線の干渉性にしたがって加工層内部をセル内部，セル壁，炭化物の三領域から構成されると考えて微視的残留せん断応力の平衡条件式を用いると，セル壁の占める体積比V^g，セル壁の受け持つ残留せん断応力 $\sigma_{31}{}^g$ を試算することが可能である。試算の結果は，

研削加工表面では $V^g = 0.30$ ，フライス加工表面では $V^g = 0.58$ であり，$\sigma_{31}{}^g$ は両加工材とも約 −50MPa であった。

(5) 残留応力の影響領域に関する熱的作用と機械的作用について，研削加工では熱的作用がフライス加工では機械的作用が優先的であることが示された。

第9章　総　　括

本研究は加工層のX線応力測定の際に生じる基本的な問題について解析的，実験的に検討を行ったものである。金属材料表面に強い力で刃物により切りくずを生成して仕上面を得るとき，表面直下きわめて浅い層に加工変質層が生じる。加工層に対するX線応力測定は，このきわめて浅い層の残留格子ひずみから弾性論に基づいて残留応力を解析し，その挙動を把握することが目的である。さらにX線の有効侵入深さも数 10 μm というきわめて浅い層に限定されるので両者が干渉しあって測定される残留格子ひずみは複雑な挙動を示す。そして $\sin^2\psi$ 法の予言，すなわち格子ひずみの $\sin^2\psi$ 線図上での直線分布を逸脱する事実が発生する。しかし，これは $\sin^2\psi$ 法が誤っていることを意味するものでもなく，また測定結果に信頼性がないためでもない。加工層という特殊性のために，事実複雑なひずみ分布挙動を示すことは過去5～6年にわたって繰返し実証されてきた。ただ，$\sin^2\psi$ 法にはいくつかの基本的な仮定がある。加工層はそれらの仮定を満足しない典型的な例であり，そのために $\sin^2\psi$ 法の適用が誤った結果をもたらすことになるのである。

X線応力測定法は金属材料表面層の残留応力を非破壊的に測定できる唯一の手段である。したがって，加工層の残留応力測定に対するX線技術の適用は，その正しい解析により今後ますます有益な知見をもたらすであろう。本研究は $\sin^2\psi$ 法に述べられた仮定の一つ一つを注意深く吟味して，加工層のX線残留応力の正しい解析の方法を見出し，また加工層における残留応力挙動の一端を明らかにした。

本研究の内容は大きく分けて，つぎの三つの部分に大別される。まず最初は，加工表面下急激な応力こう配を有する場合についての残留応力解析の方法と，その実験的検討について述べた。このとき，従来は無視されてきた試料表面法線方向の応力成分の存在，すなわち残留応力の三軸性が確認されたので，つぎの部分では試料表面近傍の応力の緩和現象についての統一的な解釈を行い，二軸，三軸解析に対するクライテリオンを与えた。最後は主として残留応力主軸の試料面法線方向からの傾きに関する記述である。切削，研削などの有向性加工層に関する問題に取り組み，系統的な実験から微視的な三軸応力状態についての検討を行った。本研究で得られた結果あるいは理解された事項は，各章の最後にそれぞれまとめてあるが，さらに要約すると以下のようになる。

第1章では従来の $\sin^2\psi$ 法を解説し，その方法に含まれている仮定を理解した。すなわち $\sin^2\psi$ 法は，(1)均質等方性体であること，(2)残留応力はX線侵入深さ領域で一様であること，

(3)表面近傍層の測定であるから残留応力は平面応力状態であること　の仮定を含んでおり，これらの仮定がすべて満足され，あるいは近似的に満足されれば測定格子ひずみ $\varepsilon_{\phi\psi}$ は

$$\varepsilon_{\phi\psi} = \frac{1+\nu}{E}\sigma_{\phi}\sin^2\psi - \frac{1}{E}(\sigma_1 + \sigma_2)$$

の関係で表わされるように $\sin^2\psi$ に対して線形になり，そのこう配から試料表面内に働く σ_{ϕ} を求めることができる。これらの仮定から逸脱する場合には $\varepsilon_{\phi\psi}$ の $\sin^2\psi$ 線図上の分布は直線関係からの系統的偏差として現われてくるので，無頓着に $\sin^2\psi$ 法を適用して直線からの統計的な偏差として扱い，直線近似をすれば正しい応力値を与えないことになる。

第２章では，表面近傍に急激な応力こう配を有するときの新しい応力解析法である重み付き平均解析法の理論を提案した。まず，Warren の提唱した〝powder pattern power theorem〟と〝small coherent domains and strains〟の理論を適用して，X線回折理論に基づき回折線プロフィルを解析した。その結果，急激な応力こう配を有するときには，回折線プロフィルはそのピーク位置に対して非対称図形を描き，その形は試料表面法線に対する回折面法線の傾き角 ψ に依存することがわかった。またこの結果，回折線の重心位置に相当するひずみは $\sin^2\psi$ 線図上で放物線を描くが，ピーク位置あるいは半価幅中点位置に相当するひずみは前者と異なりＳ字状の曲線を描くことがわかった。X線応力測定法は材料中の弾性ひずみに基づく回折線の移動量を知ることが基本になっているので，回折線位置を表わす適切な特性値を定める必要性が生じてくる。一方，従来より知られている重み付き平均ひずみの式を等二軸応力状態について展開して，重み付き平均解析法の基礎式

$$\langle \varepsilon_{\psi} \rangle = \frac{1}{E}(\sigma_3 - 2\nu\sigma_0) + \frac{1+\nu}{E}(\sigma_0 - \sigma_3)\sin^2\psi - \frac{1}{E}\{2\nu - (1+\nu)\sin^2\psi\}\frac{\sin\theta}{2\mu}\alpha'\sqrt{1-\sin^2\psi}$$

を導き，その意味を注意深く検討した。その結果，重み付き平均ひずみ $\langle \varepsilon_{\psi} \rangle$ は回折線の重心位置に相当するひずみに一致することが明らかになった。そして，回折線の重心位置を求めるには，図式簡便法として１／５ Imax 法を用いれば良いことを示した。

第３章は重み付き平均解析法の実験的検討である。ＳＵＪ２焼なまし材を平面ラッピングして等二軸急こう配の残留応力状態の試料を作成した。この試料に対して実測されたひずみは，$\sin^2\psi$ 線図上で湾曲し，しかもピーク位置と重心位置から計算したひずみは異なる分布になることがわかった。さらに表面下の残留応力分布を重み付き平均解析法により求めた結果，表面法線方向の垂直応力を考慮した方が適切な残留応力分布を与えることが示された。この結果，加工層の残留応力測定には，平面応力解析に代って三軸応力解析を施す必要のあることが示唆された。

第4章は，表面近傍層で二軸応力状態，三軸応力状態を決定する因子を統一的に把握することを目的とした。自由表面では表面法線方向の三つの応力成分 σ_{33}，σ_{31}，σ_{23} が0でなければならないので，これらの成分の自由表面近傍の緩和のされかたを検討することで目的を達成できる。また，それには応力状態にある無限体中の任意の仮想表面上で自由表面の境界条件を満たすべく仮想的な表面力を作用させ，その表面力による応力場を調べることで理解できる。仮想表面上での任意の応力場はフーリエ級数で表わされるので，その一つの成分についての理論展開を行った。その結果，自由表面の影響する深さは応力分布の波長に依存し，その波長が長ければ影響深さは大きく，短かければ小さくなることが示された。X線残留応力解析における二軸，三軸性のクライテリオンはこの自由表面の影響深さとX線侵入深さの相関によって規定されるべきであり，X線侵入深さが応力周期の波長の1／100以下であれば二軸応力状態の近似ができ，X線侵入深さが応力周期の波長に比べて充分大きければ自由表面の影響を無視して三軸応力解析をすればよいことがわかった。

第5章では，周期的な微視的残留応力の波長と二軸，三軸解析の関連において，球状介在物の熱残留応力系を用いて実験的な検討を加えた。Al－Si二相合金のSi粒子，高速度鋼ＳＫＨ２のM_6C炭化物粒子に発生する静水圧的な圧縮残留応力を対象として，理論解と実験値の比較を行った。このような残留応力系の場合，周期残留応力の波長は粒子間隔で表わすことができ，粒子間隔が小さいときには $d - \sin^2\psi$ 線図は無ひずみ時の d_0 を平行移動した水平線で表わされ，粒子間隔が大きくなるにしたがって二軸応力状態に近づき，こう配をもつ $\sin^2\psi$ 線図になることを理論解より求めた。1 ∿ 2 μm の粒子間隔をもつAl－Si，ＳＫＨ２バルク材から得られたＳｉ粒子およびM_6C粒子の熱残留応力に基づくひずみを実測した結果，いずれも理論解から求めた三軸応力状態に近い $\sin^2\psi$ 線図が得られた。これより二軸，三軸応力解析のクライテリオンが微視的残留応力分布の波長で決まることが裏付けられた。

第6章は，X線応力測定における三軸解析の基礎について述べた。6個の応力成分がそれぞれ深さ方向に一様でないような場合の解析は実際上不可能なので，ここでは平均応力として取扱った。まず，一般の三軸応力状態における測定格子ひずみの基本式

$$\varepsilon_{\phi\psi} = \frac{1}{2} s_2[\sigma_{11}\cos^2\phi + \sigma_{12}\sin 2\phi + \sigma_{22}\sin^2\phi - \sigma_{33}]\sin^2\psi + \frac{1}{2} s_2\sigma_{33}$$
$$+ s_1[\sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33}] + \frac{1}{2} s_2[\sigma_{31}\cos\phi + \sigma_{23}\sin\phi]\sin 2\psi$$

を導き，二軸応力状態を含めていくつかの典型的な応力状態に対する $\sin^2\psi$ 線図および全方位ひずみ線図を図示した。この結果，せん断成分σ_{31}あるいはσ_{23}が存在すると $\sin^2\psi$ 線図が楕円で表わされるψスプリットの生じることを明らかにした。つぎに，このようなψスプリットの生じたような場合の応力解析の方法（ Dölle らの方法）を解説した。また， $\sin^2\psi$ 法

と異なり三軸応力解析には無応力状態の格子面間隔の値が必要となるが，その理由と必要精度について論じた。最後に σ_{31}，σ_{11} を深さの関数として扱ったときの重み付き平均ひずみを計算して $\sin^2\psi$ 線図を描き，測定結果を判断するときの一助とした。このような一般的な場合，ψスプリット挙動は正確な楕円形状にはならないことがわかった。

第７章では，純鉄，普通炭素鋼，軸受鋼の焼なまし材にエメリー研摩，研削加工，二次元切削加工などの有向性加工を施して，加工表面の残留格子ひずみを測定し，ψスプリット挙動の実態を系統的に把握した。この結果，ψスプリットはいずれの加工表面にも観察され，加工度の増大とともに，また第２相炭化物の体積比が大きいほどψスプリット幅の大きくなることが明らかにされた。また，軸受鋼の炭化物，高速度鋼の M_6C 炭化物のひずみ測定に成功し，母相と炭化物相ではψスプリット挙動が互いに逆転することが明らかにされた。これは母相と炭化物相に作用している残留せん断応力の符号が互いに逆であることに相当する。以上の系統的な実験結果に基づいて有向性加工層内部の転位分布モデルを提案した。このモデルによって定性的に実験結果が首尾よく説明される。

第８章は，高速度鋼ＳＫＨ２の研削加工，フライス加工材について加工表面から内部にわたる残留応力の分布を母相と炭化物相について測定し，加工層内部で母相に正，炭化物相に負の残留せん断応力の存在を確めた。ψスプリットの生じる原因をさらに微視的な金属組織学的立場から追求する目的で，有向性加工層内部の残留せん断応力の平衡関係を検討した結果，ψスプリットは純粋に微視的な要因に帰因し，Ｘ線回折の選択性によって微視的残留応力挙動が反映した結果であることが明らかになった。すなわち，二相材料をＸ線の干渉性によってセル内部(m)，セル壁(g)，炭化物粒子(c)の三つの領域にわけると σ_{31} を残留せん断応力，V を三領域の体積比として，

$$\sigma_{31}{}^{m} V^{m} + \sigma_{31}{}^{g} V^{g} + \sigma_{31}{}^{c} V^{c} = 0$$

の平衡条件式が成立しなければならないことから，これと単相材の平衡式を合わせてセル壁の体積比とセル壁が受け持つせん断応力を計算できる可能性のあることを示した。さらに σ_{31} は機械的作用のみによる結果であることから，研削加工では熱的作用が，またフライス加工では機械的作用が残留応力形成に優先的な役割を果していることが明らかになった。

本研究の主題は，加工層のＸ線応力測定の際に生じる問題点の理解と解明およびその対策であり，従来の $\sin^2\psi$ 法に述べられた仮定の一つ一つを吟味検討してきた。そして，全章を通してふり返ってみれば，加工層の測定においては三軸応力解析を導入すべきことが結論される。第６章でも詳述したように，三軸応力解析は $\sin^2\psi$ 法と異なって無応力状態における格子定数 d_0 の正確な値を知らなければならない。本研究のように，焼なまし材に加工を施すような

場合には，あらかじめ d_0 の測定が可能であろう。しかし，研削加工のように発熱のある場合には，炭化物の再溶解なども考えられ，母相への炭素の固溶拡散で d_0 が変化することも起り得るであろう。また，熱処理材を加工するような場合には，加工以前にすでに残留応力を含んでいるので d_0 の決定は困難であり，また焼なまし材と同様，母相中の炭素量なども加熱によって変化するであろう。 したがって，今後 d_0 の精度よい決定法，また d_0 そのものの変化挙動について詳細な検討がなされなければならない。

また，第4章では三軸応力解析に対するクライテリオンを微視的残留応力の波長で与えた。第2相粒子の熱残留応力系，有向性加工層の残留応力系などでは粒子間隔がその波長に相当することが一応実証されたが，種々の材料，種々の変形様式で生じた残留応力系において，残留応力分布の波長が物理的に何を意味するかを今後，系統的に把握していく必要がある。前述したように本研究は，伝統的に培われてきた $\sin^2\psi$ 解析法を否定しようとするものではない。ただ，加工層は二軸応力の仮定が成立せず，三軸解析をしなければならない一つの例なのである。その意味で混乱を避けるためにX線的に測定される残留応力の物理的意味を系統的に再確認する必要があると考えられる。

加工層のX線応力測定に対しては，もう一つの重要な問題がある。本研究では材料を均質等方性体として扱える範囲に限定して，従来の $\sin^2\psi$ 法から逸脱する部分を取り出し，その要因と生じた結果の解釈および応力解析の方法について述べた。金属材料を構成する個々の結晶粒子を取り出してみれば，その機械的性質は一般に大なり小なり異方的な性質を有しているが，それら結晶粒子が充分小さく，ランダムな方位に分布しているなら巨視的には等方性としての扱いができる。しかし，圧延材のように強い集合組織が形成されているような場合には $\sin^2\psi$ 線図上の大きいうねりの発生することが明らかになっており，その方面の実験および理論解析も多くの研究者によって成されてきた〔137 ~ 148〕。 有向性加工層の場合にも，表面下著しい組織流れが生じるので当然，優先方位が存在しており〔227, 228〕， 正常な楕円分布をゆがめる原因になる〔293〕。 とくに純鉄など軟かい材料の二次元切削，フライス加工における複雑な ψ スプリット挙動は，こうした原因が σ_{31} に重畳した結果であろうと考えられる。

もちろん，このような種々の原因が残留格子ひずみ分布に及ぼす影響を詳細に調査検討することには学問的な意義が深いが，得られた測定結果から，これら個々の要因を取り出すことは大変手間がかかり実用的ではない。要するに，ある複雑な現象の系において，何が最も優先的に作用を及ぼしている原因であるかを見極めるべきであり，その意味において今後加工層の問題としては σ_{31}，および優先方位の残留ひずみに及ぼす程度の重要さを検討していかなければならない。

X線応力測定法に関する研究は，得られた格子ひずみの物理的な意味を探究することは今ま

で同様，必要欠くべからざることであるが，同時にそれでもって工業的に有意義に即応できる体系を作り上げなければならない。その意味において，我が国で独自に開発され，確立された平行ビーム法はX線応力測定法の歴史の中で大きな意義をもつものであり，また筆者と共同研究者が我が国に初めて導入した側傾法も数々の優れた利点ゆえに現在のX線応力測定法の主流の座を占めつつある。また最近の傾向としては，測定器にマイコンを組み入れ，測定およびデータ処理を自動化して最終結果のみをプリントアウトする傾向にあるが，少くとも $\sin^2\psi$ 線図を描いてみて格子ひずみの分布挙動を自分の目で確めることは，とくに加工層の測定には欠かすべきではない。$\mathrm{Sin}^2\psi$ 線図上で直線からの系統的な偏りを熟視すべきであり，一概に統計的な変動として扱い，最小二乗法で直線を結ぶのは禁物である。

近年，残留応力の生成に関していくつかの理論解析が行われ，それなりに成果を挙げて大きな評価を得ている。しかし，我々が使用している金属は生きものであり，種々の環境によって敏感に反応する。加工層の残留応力に対しても，ほんのわずかな加工条件の違いによっても，その絶対値あるいは分布形態に大きな差が現われる。過去に幾多の研究がなされてきたにもかかわらず統一的な見解が出ないのはそのためであり，加工層の挙動がいかに複雑であるかを物語っている。理論解析によってその大要が把握でき，種々の知見が得られることには，大きな意義があるが，現象の複雑さゆえ実測によって残留応力を把握することは，これまで同様ますます必要性を増すであろう。正しい測定技術によって得られ，また正しく解析された結果は真実であり，それは何物にも置き換えることができないからである。しかも，X線応力測定法は表面ごく近傍層の残留応力を非破壊的に測定し得る唯一の手段である。

したがって，本研究の成果を踏まえ，X線応力測定法が加工層を含めて工業的に適用できる統一的な応力測定法として利用されるべく，なお絶ゆまぬ努力を積み上げることは，我々に課された命題であろう。

参　考　文　献

[1] 日本材料学会編，X線応力測定法，（1966），養賢堂。

[2] 日本材料学会編，改著X線応力測定法，（1981），養賢堂。

[3] C. S. Barrett and T. B. Massalski, Structure of Metals, 3rd ed., Chap. 17 (1966), McGraw-Hill.

[4] 日本材料学会編，X線材料強度学・基礎編応用法編，第Ⅱ編，第1章（1973）養賢堂。

[5] H. P. Klug and L. E. Alexander, X-Ray Diffraction Procedures for Polycrystalline and Amorphous Materials, 2nd ed., Chap. 11 (1974), John Wiley & Sons.

[6] B. D. Cullity, Elements of X-Ray Diffraction, Chap. 17 (1956), Addison-Wesley.

[7] R. Glocker, Materialprüfung mit Röntgenstrahlen unter besonderer Berücksichtigungen der Röntgenmetallkunde, Chap. 27 (1971), Springer-Verlag.

[8] 林　建吉，機械の研究，21，1092; 1261（1969）。

[9] 平　修二，蒲地一義，機械の研究，24，401（1972）。

[10] 林紘三郎，材料，21，486；612（1972）。

[11] 日本材料学会X線材料強度部門委員会，材料，18，679（1969）。

[12] 日本材料学会材料強度部門委員会，材料，25，1010（1976）。

[13] 蒲地一義，白岩俊男，材料，20，1240（1971）。

[14] 林　建吉，牧野容正，材料，21，263（1972）。

[15] 本田和男，細川智生，皿井孝明，材料，27，1209（1978）。

[16] H. H. Lester and R. H. Aborn, Army Ordnance, 6, 120; 200; 283; 364 (1925).

[17] G. Sachs und J. Weerts, Z. Phys., 64, 481 (1930).

[18] C. S. Barrett and M. Gensamer, Phys. Rev., 45, 563 (1943).

[19] R. Glocker, B. Hess und O. Schaaber, Z. Tech. Phys., 19, 194, (1938).

[20] A. Schaal, Arch. Eisenhüttenwes., 26, 445 (1955).

[21] 西原利夫，小島公平，日本機械学会論文集，3，203（1937）。

[22] 小島公平，高村正治，応用物理，9，18（1940）。

[23] 西原利夫，小島公平，駒井喜雄，日本機械学会論文集，8，Ⅰ－32（1942）。

[24] 小島公平，材料試験，6，502（1957）。

[25] 辛島誠一，藤原晴夫，小島公平，日本機械学会論文集，23，870；875（1957）。

[26] 石井勇五郎，中央航空研究彙報，2，1（1943）；3，169；187（1944）。

[27] 石井勇五郎，日本機械学会論文集，13，71（1947）；14，Ⅰ－90（1948）。

[28] 石井勇五郎，菊地初太郎，日本機械学会論文集，18，151（1952）。

[29] V. Hauk, Z. Metallkde., 46, 33 (1955).
[30] E. Macherauch und P. Müller, Arch. Eisenhüttenwes., 29, 257 (1958).
[31] E. Macherauch und P. Müller, Z. angew. Physik, 13, 305 (1961).
[32] N. Otsuki, I. Wakaomi and T. Katayama, Proc. 3rd Int. Conf. Non-destructive Testing, p. 733 (1960), Science Council of Japan.
[33] 種村 孝，中島恭郎，材料試験，11，631 (1962)。
[34] 福良二郎，藤原晴夫，材料，15，825 (1966)。
[35] 英 崇夫，福良二郎，藤原晴夫，材料，16，948 (1967)。
[36] F. Bollenrath, V. Hauk und E. H. Müller, Z. Metallkde., 58, 76 (1967).
[37] K. Hayashi, Doctoral Dissertation, Kyoto University (1970).
[38] 有間淳一，学位論文，立命館大学 (1976)。
[39] 日本材料学会X線材料強度部門委員会，材料，20，1257 (1971)。
[40] G. B. Greenough, J. Iron and Steel Inst., 169, 235 (1951); Progress in Metal Physics, Vol. 3, p. 176 (1952).
[41] L. Reimer, Z. Metallkde., 46, 39 (1955).
[42] V. Hauk, Arch. Eisenhüttenwes., 25, 254 (1957).
[43] 辛島誠一，島谷幸治，一柳 肇，材料，12，848 (1963)。
[44] 本田和男，有間淳一，小長哲郎，材料，13，1006 (1964)。
[45] 英 崇夫，福良二郎，藤原晴夫，日本機械学会論文集，35，237 (1969)；Bull. of JSME, 12, 931 (1969).
[46] F. Bollenrath, V. Hauk und W. Ohly, Arch. Eisenhüttenwes., 41, 445 (1970).
[47] F. Bollenrath, V. Hauk, W. Ohly und H. Preut, Z. Metallkde., 60, 228 (1969).
[48] T. Hanabusa and H. Fujiwara, Proc. of the Seminar on X-Ray Study on Strength and Deformation of Metals, Extension Seminar of ICM 1, p. 33 (1971), JSMS.
[49] 英 崇夫，藤原晴夫，徳島大学工学部研究報告，第18号，P.99 (1973)。
[50] D. Emter und E. Macherauch, Arch. Eisenhüttenwes., 35, 909 (1964).
[51] F. Bollenrath, V. Hauk und E. Osswald, VDI-Zeitschrift., 83, 129 (1939).
[52] T. Nishihara and S. Taira, Mem. Fac. Eng., Kyoto Univ., 12, 90 (1950).
[53] E. Macherauch und P. Müller, Z. Metallkde., 51, 514 (1960).
[54] K. Kolb und E. Macherauch, Z. Metallkde., 53, 580 (1962).
[55] K. Kolb und E. Macherauch, Phil. Mag., 7, 415 (1962).
[56] D. Emter und E. Macherauch, Arch. Eisenhüttenwes., 35, 909 (1964).
[57] G. Bierwirth, Arch. Eisenhüttenwes., 35, 133 (1964).
[58] K. Kolb und E. Macherauch, Arch. Eisenhüttenwes., 36, 9 (1965).
[59] G. Faninger und A. W. Reitz, Z. Metallkde., 56, 825 (1965).

[60] F. Bollenrath, V. Hauk und W. Ohly, Z. Metallkde., 57, 464 (1966).
[61] V. Hauk, Arch. Eisenhüttenwes., 38, 233 (1967).
[62] G. Faninger, Z. Metallkde., 58, 201 (1967).
[63] K. Kolb und E. Macherauch, Z. Metallkde., 58, 238 (1967).
[64] K. Kolb und E. Macherauch, Materialprüf., 10, 371 (1968).
[65] G. Faninger, Z. Metallkde., 59, 277 (1968).
[66] 平　修二，吉岡靖夫，材料，12，852（1963）。
[67] 小島公平，田丸武好，材料，12，861（1963）。
[68] 辛島誠一，島谷辛治，材料，12，848（1963）。
[69] 辛島誠一，島谷幸治，杉沢精一，材料，13，938（1964）。
[70] 平　修二，吉岡靖夫，日本機械学会論文集，30，1142（1964）。
[71] 平　修二，材料，14，924（1965）。
[72] 田丸武好，小島公平，材料，14，987（1965）。
[73] 田丸武好，小島公平，材料，16，972（1967）。
[74] 平　修二，林紘三郎，浦川信夫，日本金属学会誌，35，197（1971）。
[75] S. Taira, T. Abe and T. Ehiro, Bull. JSME, 12, 947 (1969).
[76] 日本材料学会X線材料強度部門委員会，材料，18，679；685（1969）。
[77] 日本材料学会材料強度部門委員会，材料，25，1010（1976）。
[78] 日本材料学会材料強度部門委員会，X線応力測定法標準（1973）。
[79] 日本材料学会材料強度部門委員会，X線応力測定法標準（1982），発刊予定。
[80] A. Reuss, Z. f. angew. Math. und Mech., 9, 49 (1929).
[81] W. Voigt, Lehrbuch der Kristallphysik, Teubner, 962, (1928).
[82] E. Kröner, Z. f. Phys., 151, 504 (1958).
[83] 本田和男，細川智生，有間淳一，常永寿伸，材料，18，1053（1969）。
[84] 有間淳一，細川智生，本田和男，材料，18，1060（1969）。
[85] 有間淳一，細川智生，本田和男，材料，19，1042（1970）。
[86] N. Hosokawa, K. Honda and J. Arima, Proc. 1st Int. Conf. on Mech. Behavior of Materials, Vol. 1, 164 (1972), Kyoto.
[87] 本田和男，細川智生，皿井孝明，非破壊検査，26，539（1977）。
[88] 本田和男，細川智生，皿井孝明，非破壊検査，27，278（1978）。
[89] 本田和男，細川智生，皿井孝明，材料，27，278（1978）。
[90] G. Faninger, Berg- und Hüttenmännische Monatshefte, 112, 112 (1967).
[91] M. J. Donachie, Jr. and J. T. Norton, Trans. ASM, 55, 51 (1962).
[92] K. Kolb und E. Macherauch, Materialprüf., 4, 369 (1962).
[93] F. Bollenrath und V. Hauk, Arch. Eisenhüttenwes., 37, 253 (1966).
[94] G. Lucas und L. Weigel, Materialprüf., 6, 149 (1964).
[95] 福良二郎，藤原晴夫，日本機械学会論文集，32，1597（1966）。
[96] R. Prümmer,　材料，17，1066（1968）。
[97] 平　修二，林紘三郎，蒲田政信，材料，23，2（1974）。
[98] 蒲地一義，谷　昇，材料，21，1112（1972）。

[99] 並川宏彦，青山咸恒，知久健夫，材料，18，1040（1969）。
[100] H. Dölle und V. Hauk, Z. Metallkde., 71, 708 (1980).
[101] 福良二郎，藤原晴夫，徳島大学工学部研究報告，No.10，75（1965）。
[102] 白岩俊男，阪本喜保，材料，16，943（1967）。
[103] 岩永省吾，並川宏彦，青山咸恒，材料，21，1106（1972）。
[104] 上原勝景，小木曽克彦，材料，26，1（1977）。
[105] 蒲地一義，川辺泰嗣，清水良一，関口晴男，安居喜代三，材料，26，6（1977）。
[106] E. Macherauch und U. Wolfstieg, Materials Science Engineering, 30, 1 (1979).
[107] M. R. James and J. B. Cohen, Adv. X-Ray Anal., 20, 291 (1976).
[108] M. R. James and J. B. Cohen, Treatise on Materials Science and Technology, 19A, 1 (1980).
[109] M. R. James and J. B. Cohen, Adv. X-Ray Anal., 19, 695 (1975).
[110] 松本　淳，橋本郁郎，須藤憲洋，川瀬信行，材料，29，512（1980）。
[111] 吉岡靖夫，材料，23，15（1974）。
[112] T. Shiraiwa, Y. Sakamoto and A. Hatono, Proc. 23th Japan Cong. on Mat. Research, p.364 (1980), The Soc. Mat. Sci., Japan.
[113] 小木曽克彦，神長宇享，斎藤　孟，材料，21，1058（1972）。
[114] 川辺泰嗣，関口晴男，桐山貞夫，阿部野信行，材料，25，20（1976）。
[115] 吉岡靖夫，長谷川賢一，持木幸一，材料，27，216（1978）。
[116] 荒木田豊，日本機械学会論文集，28，1361（1962）。
[117] 村上裕則，井淵弘昭，材料，16，966（1967）。
[118] P. M. Winter and W. J. McDonald, Trans. ASME, Journal of Basic Engineering, 15 (1969).
[119] 貴志浩三，江田　弘，精密機械，37，112；488（1971）。
[120] 貴志浩三，江田　弘，精密機械，38，275（1972）。
[121] 光永公一，福武　諄，日本機械学会論文集（第1部），39，42（1973）。
[122] 土田幸滋，川田雄一，児玉昭太郎，日本機械学会論文集，40，1563（1974）。
[123] 小田　明，田口紘一，宮川英明，材料，26，11（1977）。
[124] B. Syren, H. Wohlfahrt und E. Macherauch, Arch. Eisenhüttenwes., 48, 421 (1977); Proc. 2nd International Conference on Mechanical Behavior of Materials, Special Volume, p. 212 (1978), The American Society for Metals.
[125] 財満鎮雄，大須賀章郎，日本金属学会誌，42，658（1978）。
[126] 財満鎮雄，米谷　茂，磯部雅義，日本金属学会誌，42，669（1978）。
[127] Y. Nakagawa, K. Usami, A. Minato, T. Tamamura, R. Sasaki and A. Naruse, Mechanical Behavior of Materials, Vol. 2, p. 603 (1980), Pergamon Press.
[128] 米谷　茂，残留応力の発生と対策，第1章，第3章（1979），養賢堂。
[129] 文献〔128〕の第4章。

[130] C. W. Marschall and R. E. Maringer, Dimensional Instability, Chap. 6 (1977), Pergamon Press.
[131] P. J. E. フォーサイス（中沢一，小林英男共訳），金属疲労の基礎，（1975），養賢堂。
[132] 藤原晴夫，精密機械，40，324（1974）。
[133] 藤原晴夫，材料，27，1129（1978）。
[134] 藤原晴夫，英　崇夫，機械と工具，22，41（1978）。
[135] 英　崇夫，藤原晴夫，日本材料学会第17回X線材料強度に関する討論会前刷，P. 5（1981）。
[136] S. P. Timoshenko and J. N. Goodier, Theory of Elasticity, 3rd ed., Chap. 1 (1970), Kōgakusha, Tokyo.
[137] 平　修二，林紘三郎，材料，18，1047（1969）。
[138] T. Shiraiwa and Y. Sakamoto, Proc. of the Seminar on X-Ray Study on Strength and Deformation of Metals, Extension Seminar of ICM 1, p. 15 (1971).
[139] R. H. Marion and J. B. Cohen, Adv. X-Ray Anal., 18, 466 (1974).
[140] R. H. Marion and J. B. Cohen, J. Appl. Cryst., 8, 430 (1975).
[141] 本田和男，細川智生，皿井孝明，材料，27，278（1978）。
[142] V. Hauk und H. Kockelmann, Z. Metallkde., 69, 16 (1978).
[143] H. Dölle, V. Hauk und H. Zegers, Z. Metallkde., 69, 766 (1978).
[144] V. Hauk und H. Seesemann, Z. Metallkde., 67, 646 (1976).
[145] H. Dölle, V. Hauk, H. Kockelmann und H. Seesemann, J. Strain Anal., 12, 62 (1977).
[146] H. Dölle und V. Hauk. Z. Metallkde., 69, 410 (1978).
[147] H. Dölle and J. B. Cohen, Met. Trans. A, 11A, 831 (1980).
[148] 本田和男，細川智生，皿井孝明，非破壊検査，26，539（1977）。
[149] 小長哲郎，本田和男，日本機械学会誌，73，972（1970）。
[150] 細川智生，本田和男，皿井孝明，非破壊検査，27，478（1978）。
[151] B. E. Warren, X-Ray Diffraction, Chap. 13 (1969), Addison-Wesley.
[152] 英　崇夫，藤原晴夫，西岡一水，材料，30，247（1981）。
[153] T. Hanabusa, H. Fujiwara and K. Nishioka, Härterei- Tech. Mitt., to be published.
[154] 英　崇夫，藤原晴夫，西岡一水，材料，30，254（1981）。
[155] K. Nishioka, T. Hanabusa and H. Fujiwara, Scripta Met., 8, 1349 (1974).
[156] N. Takei, K. Nishioka, T. Hanabusa and H. Fujiwara, Scripta Met., 11, 619 (1977).
[157] 若林三記夫，中山　守，永田彰信，精密機械，43，661（1977）。
[158] 英　崇夫，藤原晴夫，材料，30，1095（1981）。
[159] T. Hanabusa and H. Fujiwara, Härterei- Tech. Mitt., to be published.
[160] 英　崇夫，藤原晴夫，材料，31，227（1982）。
[161] 田丸武好，学位論文，大阪大学（1967）。

[162] A. Peiter und W. Lode, Metall, 31, 500 (1977).
[163] 日本材料学会材料強度部門委員会，X線応力測定法標準追補（1977）。
[164] U. Wolfstieg, Härterei- Tech. Mitt., 31, 19 (1976).
[165] B. D. Cullity, Elements of X-Ray Diffraction, Chap. 3 (1956), Addison-Wesley.
[166] A. J. C. Wilson, Elements of X-Ray Crystallography, p. 41 (1970), Addison-Wesley.
[167] H. R. Letner and H. J. Snyder, Trans. ASME, 873 (1953).
[168] たとえば，本間仁，春日屋伸昌，次元解析・最小２乗法と実験式，第３章（1957），コロナ社。
[169] M. G. Moore and W. R. Evans, SAE Transactions, 66, 340 (1958).
[170] H. Stroppe, Wissenschaftliche Zeitschrift der Technischen Hochschule Otto von Guericke Magdeburg, 7, 345 (1963).
[171] H. Dölle und V. Hauk, Härterei- Tech. Mitt., 34, 272 (1979).
[172] S. Öhman, E. Pärnama and S. Palmqvist, Jernkont. Ann., 151, 126 (1967).
[173] D. M. Vasil'ev, Soviet Phys. -Tech. Phys., 3, 2315 (1959).
[174] Y. C. Fung，固体の力学／理論，大橋義夫，村上澄男，神谷紀生訳，第８章（1972），培風館。
[175] 国尾　武，固体力学の基礎，第５章（1977），培風館。
[176] 文献〔174〕の第２章。
[177] 文献〔174〕の第７章。
[178] J. F. Nye, Physical Properties of Crystals, Chap. 1, (1972), Oxford University Press.
[179] H. Mughrabi, phys. stat. sol., 39, 317 (1970).
[180] H. Mughrabi, phys. stat. sol. (b), 44, 391 (1971).
[181] K. Kolb und E. Macherauch, Arch. Eisenhüttenwes., 36, 9 (1965).
[182] P. Doig and P. E. J. Flewitt, Phil. Mag., 35, 1063 (1977).
[183] J. T. Fourie, Phil. Mag., 17, 735 (1968).
[184] J. T. Fourie, Phil. Mag., 21, 977 (1970).
[185] J. T. Fourie, Canadian Journal of Physics, 45, 777 (1967).
[186] R. J. Murphy, Scripta Met., 3, 905 (1969).
[187] F. Laszló, JSIS, 147, 173 (1943).
[188] C. T. Liu and J. Gurland, Trans. ASM, 58, 66 (1965).
[189] N. F. Mott and F. R. N. Nabarro, Proc. Phys. Soc., Lond., 52, 86 (1940).
[190] J. Gurland, Trans. ASM, 50, 1063 (1958).
[191] D. Brooksbank and K. W. Andrews, JISI, 207, 474 (1969).
[192] D. Brooksbank and K. W. Andrews, JISI, 210, 246 (1972).
[193] D. A. Koss and S. M. Copley, Met. Trans., 2, 1557 (1971).
[194] E. R. Thompson, D. A. Koss and J. C. Chesnutt, Met. Trans., 1, 2807 (1970).
[195] K. Wakashima, T. Kawakubo and S. Umekawa, Met. Trans. A, 6A, 1755 (1975).

[196] J. Gayda and L. J. Ebert, Met. Trans. A, 10A, 349 (1979).
[197] G. Garmong, Met. Trans., 5, 2183; 2191 (1974).
[198] G. Garmong, Met. Trans., 6, 1179 (1975).
[199] H. P. Cheskis and R. W. Heckel, Met Trans., 1, 1931 (1970).
[200] 竹田博光，森田幹郎，材料，24，35 (1975) 。
[201] 池内保一，藤原晴夫，材料，31，547 (1982) 。
[202] H. Stuart and N. Ridley, JISI, 208, 1087 (1970).
[203] 茅野秀夫，日本金属学会誌，31，310 (1967) 。
[204] G. C. Weatherly, Metal Sci. Journ., 2, 237 (1968).
[205] M. E. Gulden and W. D. Nix. Phil. Mag., 18, 217 (1968).
[206] M. F. Ashby, S. H. Gelles and L. E. Tanner, Phil. Mag., 19, 757 (1969).
[207] M. Nemoto and S. Koda, Trans. JIM, 7, 235 (1966).
[208] 本山盛太郎，榎並豊一郎，堀沢　寛，加藤紀久雄，材料，12，882 (1963) 。
[209] S. Taira and J. Arima, Proc. of 7th Japan Congress on Testing Materials, p. 21 (1964).
[210] E. E. Underwood, Quantitative Stereology, Chap. 5 (1976), Addison-Wesley.
[211] H. P. Klug and L. E. Alexander, X-Ray Diffraction Procedures for Polycrystalline and Amorphous Materials, 2nd ed., p. 625 (1974), John Wiley & Sons.
[212] 福良二郎，藤原晴夫，日本機械学会論文集，32，1597 (1966) 。
[213] 佐藤知雄，金子秀夫，西沢泰三，日本金属学会誌，19，336 (1955) 。
[214] D. Evenschor und V. Hauk, Z. Metallkde., 66, 167 (1975).
[215] H. Dölle, V. Hauk und A. Neubauer, Härterei- Tech. Mitt., 33, 318 (1978).
[216] H. Dölle and J. B. Cohen, Met. Trans. A, 11A, 159 (1980).
[217] H. Dölle und V. Hauk, Härterei- Tech. Mitt., 31, 165 (1976).
[218] たとえば，文献〔174〕の第3章。
[219] たとえば，G.N.スミス，有限要素法による応力解析入門，瀬川富士訳，第4章 (1974) ，ブレイン図書。
[220] 河田　充，森永正彦，長岡振吉，星鉄太郎，吉岡靖夫，第17回X線材料強度に関するシンポジウム前刷，P.7 (1980) 。
[221] 文献〔4〕のP. 247.
[222] H. Dölle und V. Hauk, Härterei- Tech. Mitt., 34, 272 (1979).
[223] M. Ya. Fuks and L. I. Gladkikh, Zavodskaya Laboratoriya, 31, 978 (1965).
[224] M. F. Semko, et al., Russian Engineering Journal, 46, No. 12, 48 (1968).
[225] 福良二郎，沖津昭慶，藤原晴夫，精機学会昭和43年春季大会講演会前刷，P. 348 (1968) 。
[226] 英　崇夫，藤原晴夫，福良二郎，昭和52年度精機学会春季大会学術講演会前刷，P. 45 (1977) 。

[227] 若林三記夫，中山　守，永田彰信，精密機械，43，661（1977）。
[228] 若林三記夫，中山　守，精密機械，44，710（1978）。
[229] G. Faninger und H. Walburger, Härterei- Tech. Mitt., 31, 79 (1976).
[230] U. Wolfstieg und E. Macherauch, Härterei- Tech. Mitt., 31, 83 (1976).
[231] 英　崇夫，藤原晴夫，日本材料学会第17回X線材料強度に関する討論会テキスト，P. 5（1981）。
[232] 英　崇夫ほか，日本材料学会第65回X線材料強度部門委員会資料（1982）。
[233] H. Dölle und V. Hauk, Z. Metallkde., 68, 725 (1977).
[234] A. Peiter und W. Lode, Metall, 31, 500 (1977).
[235] A. Peiter, Härterei- Tech. Mitt., 31, 158 (1976).
[236] W. Lode und A. Peiter, Metall, 30, 1122 (1976).
[237] W. Lode und A. Peiter, Härterei- Tech. Mitt., 32, 235 (1977).
[238] W. Lode und A. Peiter, Härterei- Tech. Mitt., 32, 308 (1977).
[239] A. Peiter und W. Lode, VDI-Berichte, Nr. 313, 227 (1978).
[240] W. Lode und A. Peiter, Härterei- Tech. Mitt., 35, 148 (1980).
[241] H. Dölle, V. Hauk und A. Neubauer, Härterei- Tech. Mitt., 33, 318 (1978).
[242] J. B. Cohen, H. Dölle and M. R. James, Proc. of Symposium on Accuracy in Powder Diffraction, 453 (1979) NBS, Gaithersburg, MD.
[243] H. Dölle, J. Appl. Cryst., 12, 489 (1979).
[244] V. Hauk, W. K. Krug, G. Vaessen und H. Weisshaupt, Härterei- Tech. Mitt., 35, 144 (1980).
[245] M. Kawata, M. Morinaga and Y. Yoshioka, Adv. X-Ray Anal., 24, 181 (1981).
[246] E. Brinksmeier und H. H. Nölke, Härterei- Tech. Mitt., 36, 314 (1981).
[247] 小川広海，河田　充，森永正彦，湯川夏夫，吉岡靖夫，日本材料学会第18回X線材料強度に関するシンポジウム前刷，P.79（1981）。
[248] 伴　典則，吉岡靖夫，寺沢正男，同上，P. 92（1981）。
[249] 長嶋晋一，田中方孝，昆　　誠，松川公映，同上，P.99（1981）。
[250] 長嶋晋一，田中方孝，西川真一，勝又弘好，同上，P. 103（1981）。
[251] 長嶋晋一，田中方孝，大坪稔典，中村　元，同上，P. 107（1981）。
[252] 室　　博，潤滑，23，828（1978）。
[253] K. Maeda, N. Tsushima, M. Tokuda and H. Muro, Adv. X-Ray Anal., 23, 341 (1980).
[254] E. Christ und H. Krause, Z. Metallkde., 66, 615 (1975).
[255] H. Krause und H. -H. Jühe, Härterei- Tech. Mitt., 31, 168 (1976).
[256] H. Dölle, V. Hauk, H. -H. Jühe und H. Krause, Materialprüf., 18, 427 (1976).
[257] 小沼静代，古川　徹，日本材料学会第16回X線材料強度に関するシンポジウム前刷，P. 40（1979）。

[258] 上田隆司，山本　明，精密機械，48，155（1982）。
[259] 若林三記夫，中山　守，永田彰信，精機学会昭和50年度関西地方定期学術講演会前刷，P.211（1975）。
[260] 若林三記夫，精機学会接触表面特性に関する調査研究分科会第３分科会資料（1981）。
[261] S. Ramalingam and J. Hazra, Trans. ASME, Ser. B, 95, 939 (1973).
[262] 安富雅典，学位論文，大阪大学（1977）。
[263] R. H. Marion and J. B. Cohen, Adv. X-Ray Anal., 18, 466 (1974).
[264] D. V. Wilson, Trans. ASM, 47, 321 (1955).
[265] D. V. Wilson and Y. A. Konnan, Acta Met., 12, 617 (1964).
[266] 英　崇夫，藤原晴夫，応力と歪，1，22（1972）。
[267] 日本金属学会編，金属便覧（改訂３版），P.790（1971），丸善。
[268] 池内保一，藤原晴夫，材料，18，1066（1969）。
[269] D. M. Turley, J. Inst. Metals, 99, 271 (1971).
[270] 金枝敏明，津和秀夫，精密機械，45，1500（1979）。
[271] 川辺秀昭，山田朝治，川上隆司，大塚　昭，精密機械，40，995（1974）。
[272] T. Ogura, T. Masumoto and Y. Imai, Trans. JIM, 17, 733 (1976).
[273] 片桐一宗，粟谷丈夫，材料，29，99（1980）。
[274] たとえば，幸田成康，合金の析出，第８章（1972），丸善。
[275] J. C. Fisher, E. W. Hart and R. H. Pry, Acta Met., 1, 336 (1953).
[276] A. Kelly and R. B. Nicholson, Progress in Materials Science, ed. B. Chalmers, Vol. 10, p. 149 (1963), Pergamon Press.
[277] 粟田政則，日本材料学会第18回Ｘ線材料強度に関するシンポジウム，P.35（1981）。
[278] B. D. Cullity and O. P. Puri, Trans. Met. Soc. AIME, 227, 359 (1963).
[279] M. A. Moore and R. M. Douthwaite, Met. Trans. A, 7A, 1833 (1976).
[280] H. R. Letner and H. J. Snyder, Trans. ASME, 75, 873 (1953).
[281] H. R. Letner, Trans. ASME, 79, 149 (1957).
[282] H. Bühler und H. K. Tönshoff, Werkstatt und Betrieb, 100, 211 (1967).
[283] 會田俊夫，井川直哉，岩田一明，岡村建二郎，中島利勝，星鉄太郎，切削工学，第10章（1973），コロナ社。
[284] 米谷　茂，残留応力の発生と対策，第３章（1979），養賢堂。
[285] 中島利勝，機械の研究，24，801（1972）。
[286] 藤原晴夫，機械技術，16，21（1968）。
[287] 藤原晴夫，機械の研究，24，1161（1972）。
[288] 垣野義昭，奥島啓弐，精密機械，35，775（1969）。
[289] 垣野義昭，精密機械，37，503（1971）。
[290] 垣野義昭，学位論文，京都大学（1971）。
[291] 江田　弘，貴志浩三，大久保昌典，精密機械，45，1347（1979）。
[292] 江田　弘，貴志浩三，大久保昌典，上野秀雄，精密機械，47，314（1981）。
[293] 若林三記夫，日本材料学会第65回Ｘ線材料強度部門委員会資料（1982）。

謝　　辞

本論文をまとめるにあたり，御懇切な御指導と御助言を賜りました大阪大学教授山田朝治先生に深甚なる敬意と謝意を表します。

大阪大学教授川辺秀昭先生と同大学教授井川直哉先生は本論文を御校閲下さり，有益な御助言と御教示を賜りました。ここに深く感謝の意を表します。

また，本論文執筆にあたり，ひとかたならぬ御指導と御鞭達をいただきました大阪大学教授津和秀夫先生，同大学教授牧之内三郎先生に厚く御礼申し上げます。

X線応力測定法の研究を筆者に託して下さり，本研究遂行中，終始変らぬ御指導を賜りました徳島大学教授藤原晴夫先生には，実験解析の重要さを教えていただき，また同大学教授西岡一水先生には，解析的アプローチからの適切な御指導と御教示をいただきました。さらに阿南工業高等専門学校教授福良二郎先生には，初期の研究においてX線応力測定の基礎を教えていただきました。ここに敬意を表し深く感謝致します。

徳島大学工学部精密機械工学科精密測定講座の小松敏行技官には，実験装置の試作・改良，試験片の作成，また本論文の図表の整理を心よく引受けていただき，さらに筒井宏隆技官は研究遂行中，種々の労を煩らっていただきました。ここに厚く感謝致します。また，同講座の大学院修士課程に在籍された竹井名保氏，同学士課程に在籍された東條　洋氏，風岡伸彦氏，浦川純二氏，花沢　修氏には本論文の各章の研究にたずさわっていただき多大の助力を得ました。ここにあわせて感謝致します。