【28】

氏名・(本籍)	大和(やまと)祐一(ゆういち)
学位の種類	理学博士
学位記番号	第 5121 号
学位授与の日付	昭和 55 年 12 月 19 日
学位授与の要件	学位規則第 5 条第 2 項該当
学位論文題目	**確率微分方程式と冪零 Lie 代数**
論文審査委員	(主査) 教授 池田 信行 (副査) 教授 渡辺 毅　教授 熊ノ郷 準　助教授 中尾慎太郎

論文内容の要旨

$\boldsymbol{R}^d$ 上のベクトル場 $A_i=\sum_{\alpha=1}^{d}A_i^\alpha\dfrac{\partial}{\partial x^\alpha}$, $i=1,2,\cdots,n$ で次の条件をみたすものを考える：

(1)　A_i^α, $\alpha=1,2,\cdots,d$, $i=1,2,\cdots,n$ は $\boldsymbol{R}^d$ 上の C^∞ 関数で一階導関数が有界。

$\boldsymbol{R}^n$ 上の連続曲線 $(w_t)_{t\in[0,\infty)}$ 全体から成る空間を W^n とし，W^n の位相的 σ-加法族を $\mathscr{F}(W^n)$ とする。P は $\{W^n,\mathscr{F}(W^n)\}$ 上の Wiener 測度とし，確率空間 $\{W^n,\mathscr{F}(W^n),P\}$ 上で確率微分方程式

(2)　$dX_t^\alpha=\sum_{i=1}^{n}A_i^\alpha(X_t)\circ dw_t^i,\quad \alpha=1,2,\cdots,d$

を考える。ここで右辺の $\circ dw_t^i$ は Brown 運動に関する対称確率微分を表わす。任意に $x\in\boldsymbol{R}^d$ を取ると $X_0=x$ なる(2)の解 $X_t(w,x)=(X_t^\alpha(w,x))$ が P に関し殆んど全ての $w\in W^n$ に対して定まる。写像

(3)　$w\longmapsto(X_t(w,x))_{t\in[0,\infty)}$

による P の像測度を P_x とおけば，生成作用素

$$L=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}(A_i)^2$$

より定まる拡散過程 $\{P_x\}_{x\in\boldsymbol{R}^d}$ が得られる。

(3)の汎関数に対して次のことが成立つ。まず基本的な汎関数として次のものを考える。自然数 p を固定し，

$$E[1,p]=\{(i_1,\cdots,i_a);\ 1\leqq i_1,\cdots,i_a\leqq n,\ 1\leqq a\leqq p\},$$
$$\boldsymbol{R}^{E[1,p]}=\{y=(y^I)_{I\in E[1,p]};\ y^I\in\boldsymbol{R},\ I\in E[1,p]\}$$

とおき，$y\in\boldsymbol{R}^{E[1,p]}$を与えたとき，$W^n$ の上の汎関数

(4) $w\longmapsto(Y_t^I(w,y))_{t\in[0,\infty)},\quad I\in E[1,p]$

を

$$Y_t^i(w,y)=y^i+w_t^i,$$
$$Y_t^{i_1\cdots i_a}(w,y)=y^{i_1\cdots i_a}+\int_0^t Y_s^{i_1\cdots i_{a-1}}(w,y)\circ dw_s^{i_a}$$

で帰納的に定義する。汎関数(4)は

(5) $L'=\dfrac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}(Q_i)^2$

$\left(Q_i=\dfrac{\partial}{\partial y^i}+\sum_{\substack{1\leqq i_1,\cdots,i_a\leqq n\\ 1\leqq a\leqq p-1}}y^{i_1\cdots i_a}\dfrac{\partial}{\partial y^{i_1\cdots i_a i}}\right)$ を生成作用素に持つ拡散過程を与える。ベクトル場 $A_i,\ i=1,2,\cdots,n$ が条件：

$[\cdots[[A_{i_1},A_{i_2}],A_{i_3}],\cdots,A_{i_a}],$
$(i_1,\cdots,i_a)\in E[1,p]$ の各係数が遠方で高々一次の増大度

をみたすとき，次のことが成立つ。

定理1 C^∞ 関数 $h:\boldsymbol{R}^d\times\boldsymbol{R}^{E[1,p]}\to\boldsymbol{R}^d$が存在して各 $x\in\boldsymbol{R}^d$について $X_t(w,x)=h(x,Y_t(w,0))$が確率微分方程式(3)の解になるための必要十分条件は，$A_i,\ i=1,2,\cdots,n$ の生成する Lie 代数$\mathscr{L}(A_1,\cdots,A_n)$ が p 階冪零であることである。

以下，$\mathscr{L}(A_1,\cdots,A_n)$ が p 階冪零とする。上の関数 h は次のように決定される。$M=\boldsymbol{R}^{E[1,p]}\times\boldsymbol{R}^d$ の上のベクトル場 $Q_i+A_i,\ i=1,2,\cdots,n$の生成する Lie 代数$\mathscr{L}$ が対応：

$$\mathscr{D}:M\ni q\longmapsto\mathscr{L}_q\subset T_qM$$

($\mathscr{L}_q=\{Z_q;\ Z\in\mathscr{L}\}$) を与えるが，$\mathscr{L}_q$ の次元は一定で$\mathscr{D}$は完全積分可能になっている。$E[1,p]$ の部分集合 F を適当に取ることにより，点 q を通る$\mathscr{D}$の葉体 M_q の助変数表示の族：

(6) $f:M\times\boldsymbol{R}^F\longrightarrow M,\ M_q=\{f(q;u);\ u\in\boldsymbol{R}^F\}$

で

$$f(q;q^F)=q\qquad(q^F=(q^I)_{I\in F})$$

をみたすものが一意に存在する。$\boldsymbol{R}^F$ に値を取る関数 y^F, $y\in\boldsymbol{R}^{E[1,p]}$を $y^F=(y^I)_{I\in F}$で定義するとき，次のことが成立つ。

定理2　$h^\alpha(x,y)=f^\alpha(0^{E[1,p]},\ x;\ y^F)$ が定理1の関数 h を与える。ここで $0^{E[1,p]}$は $\boldsymbol{R}^{E[1,p]}$の原点とする。

次に各成分が遠方で高々一次の増大度のベクトル場 $A_0=\sum_{\alpha=1}^{d}A_0^\alpha(x)\frac{\partial}{\partial x^\alpha}$ が与えられたとき，確率微分方程式：

$$(7)\quad d\tilde{X}_t^\alpha=\sum_{i=1}^{n}A_i^\alpha(\tilde{X}_t)\circ dw_t^i+A_0^\alpha(\tilde{X}_t)dt,\qquad \alpha=1,2,\cdots,d$$

の解として，汎関数：

$$W^n\ni w\longmapsto\tilde{X}(w,\ x)\in W^d,\ \ x\in\boldsymbol{R}^d$$

が与えられる。そのとき汎関数 $\tilde{X}(\cdot,\ x)$ による P の像測度は $\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}(A_i)^2+A_0$ を生成作用素とする拡散過程を与える。W^F を $\boldsymbol{R}^F$ の上の連続曲線全体の空間とする。$x\in\boldsymbol{R}^d$ と $v\in W^F$ が与えられたとき，常微分方程式

$$D_t^\alpha=x^\alpha+\sum_{\beta=1}^{d}\int_0^t A_0^\beta(f^\gamma(0^{E[1,p]},\ D_t;\ v_t),\ \gamma=1,\cdots,d)$$

$$\times\left(\frac{\partial}{\partial x^\beta}f^\alpha\right)(f(0^{E[1,p]},\ D_t;\ v_t);\ 0^F),\qquad(\alpha=1,2,\cdots,d)$$

の解 $D_t=(D_t^\alpha)_{1\leq\alpha\leq d}$によって汎関数 Φ: $\boldsymbol{R}^d\times W^F\to W^d$ が定義でき，次のことが成立つ。

定理3　$\mathscr{L}(A_1,\cdots,A_n)$ が p 階冪零のとき，$\tilde{X}_t^\alpha(x,w)=f^\alpha(0^{E[1,p]},\ \Phi(x,\ Y^F(w))_t;\ Y_t^F(w))$, $\alpha=1,2,\cdots,d$, $t\in[0,\infty)$, $w\in W^n$ が(7)の解を与える。ここで $Y^F(w)=(Y^I(w,\ 0^{E[1,p]}))_{I\in F}$とする。

論文の審査結果の要旨

R^d 上のベクトル場 $A_i=\sum_{\alpha=1}^{d}A_i^\alpha\frac{\partial}{\partial x^\alpha}$, $i=0,1,\cdots,n$ に対し，確率微分方程式

$$(1)\quad dX_t^\alpha=\sum_{i=1}^{n}A_i^\alpha(X_t)\circ dw_t^i+A_0^\alpha(X_t)dt,\qquad\alpha=1,2,\cdots,d$$

を Wiener 空間 $\{W^n,\ \mathscr{B}(W^n),\ P\}$ 上で考える。この式の右辺の第一項は対称確率微分を表わす。$A_i^\alpha(x)$は R^d 上の C^∞ 関数で，それらの1階導関数は有界であるとする。$X_0=x\in R^d$ となる(1)の解を $X(t,x,w)$ とすれば，確率過程 $\{X(t,x,w),\ t\geq 0\}$は作用素 $\sum_{i=1}^{n}A_i^2/2+A_0$ に対応する拡散過程になる。(1)の解の構造の考察は拡散過程論の主要な研究課題である。大和君は Doss と Gaveau の成果を発展させ，ベクトル場の組 $\{A_1,\ A_2,\cdots,A_n\}$によって生成される Lie 代数 $\mathfrak{g}$ がこれらの研究において果たす役割を解明している。

大和君はまず$A_0=0$の場合につぎの結果を得ている。$E[p]=\{(i_1, i_2, \cdots, i_a); 1\leqq i_1, i_2, \cdots, i_a\leqq n, 1\leqq a\leqq p\}$, $R^{E[p]}=\{y=(y^I)_{I\in E[p]}; y^I\in R, I\in E[p]\}$とする。そのとき関数$h\in C^\infty(R^d\times R^{E[p]}\to R^d)$が存在し，各$x\in R^d$について$X(t, x, w)=h(x, Y(t, w))$と表わされるための必要十分条件はLie代数$\mathfrak{g}$が$p$階冪零であることである。ここで$Y(t, w)$は$R^{E[p]}$値汎関数で，各成分は$p$次またはそれ以下の次数の重複確率積分である。つぎに，$\mathfrak{g}$がp階冪零の時関数hを$A_1, A_2, \cdots, A_n$より具体的に構成する方法を幾何学的考察を基礎にして与えている。さらにこの構成法を利用して，$A_0\neq 0$で$\mathfrak{g}$がp階冪零の場合に(1)の解$X(t, x, w)$の具体的な表現を得ている。

本論文の結果は拡散過程の推移確率の性質や確率微分方程式の解より定まる微分同相等の考察で重要な役割を果たす。さらに，これらの結果は独創的方法によって導かれており，確率微分方程式の研究における先駆的業績として高く評価される。

以上，本論文における大和君の研究は確率過程論の進歩に寄与するところきわめて大きく，理学博士の学位論文として十分価値あるものと認められる。