



Title	交点数とリーマン多様体上の拡散過程のホモロジー的挙動
Author(s)	眞鍋, 昭治郎
Citation	大阪大学, 1981, 博士論文
Version Type	
URL	https://hdl.handle.net/11094/33044
rights	
Note	著者からインターネット公開の許諾が得られていないため、論文の要旨のみを公開しています。全文のご利用をご希望の場合は、大阪大学の博士論文についてをご参照ください。

The University of Osaka Institutional Knowledge Archive : OUKA

<https://ir.library.osaka-u.ac.jp/>

The University of Osaka

氏 名・(本籍)	眞 鍋 昭 治 郎
学 位 の 種 類	理 学 博 士
学 位 記 番 号	第 5 4 8 3 号
学位授与の日付	昭 和 56 年 12 月 15 日
学位授与の要件	学位規則第 5 条第 2 項該当
学 位 論 文 題 目	交点数とリーマン多様体上の拡散過程のホモロジー的挙動
論文審査委員	(主査) 教 授 池 田 信 行
	教 授 渡 辺 毅 教 授 柴 田 敬 一 教 授 福 島 正 俊
	助教授 中尾慎太郎

論 文 内 容 の 要 旨

拡散過程は、さまざまな角度から論じられてきた。この論文では多様体上の拡散過程の道の幾何学的な性質、特に道のホモロジー論的な性質を、微分形式の道に沿った積分を用いることによって調べる。 M を、 d 次元の連結、向きづけ可能な C^∞ リーマン多様体とし、 Δ をラプラス・ベルトラミ作用素、 b を C^∞ ベクトル場とする。 $X=(X_t, P_x, x \in M)$ を $\frac{1}{2}\Delta + b$ に対応する M 上の拡散過程とする。最初に、交点数の概念を X の道の定める曲線 $X[0, t]$ と $(d-1)$ 特異鎖 c に対して定義する。通常の交点数は、調和積分論で知られているように特異性を持った二重形式の滑らかな鎖上での積分として表現される。拡散過程の道は滑らかではないが、Fisk-Stratonovichの確率積分を使うことにより微分形式の道に沿う積分として $X[0, t]$ と c の交点数を定義することができる。こうして定義された交点数は、普通のそれと対応する性質を(確率 P_x-1 で)持っていることが、確率積分に関する近似定理を援用することによってわかる。次にこの交点数を用いて、 M が種数 κ (≥ 1)の閉リーマン面の場合に拡散過程の道の定める曲線 $X[0, t]$ が、 M の κ 個の穴のまわりをどうまわるかという漸近的性質をホモロジー論的観点から論じた。 $X[0, t]$ のホモロジー的位置 $x(t)=(x_i(t))_{1 \leq i \leq 2\kappa}$ を、 M のホモロジー標準基 $(A_i, A_{i+\kappa})_{1 \leq i \leq \kappa}$ を用いて定義すると、問題は $x(t)$ の $t \rightarrow \infty$ のときの振舞いを調べることに帰着される。このとき、 $x_i(t)$ の主要部が調和一次微分形式 $\alpha^{(i)}$ の道に沿う積分として表わされるといふ事実が重要である。このことから、 X の不変測度による $f_i(x)=\alpha^{(i)}(b)(x)$ の平均 $\bar{f}_i$ が、0でないときは A_i を巻き、0のときは巻きつかないこと及び $x_i(t)$ の t に関する増大度が $\bar{f}_i \neq 0$ と $\bar{f}_i = 0$ のときでは異なることがわかる。更に、すべての $\bar{f}_i$ が0の時は、個々の $x_i(t)$ の挙動より一層詳しい $x(t)$ の振舞いを表わすものとして、 X が $(A_{i_1}, \dots, A_{i_N})$ ($1 \leq i_1 < \dots < i_N \leq 2\kappa$, $1 \leq N \leq 2\kappa$)をホモロジー的に巻く

というのを、 $\lim_{t \rightarrow \infty} \sum_{\lambda=1}^N x_{i_\lambda}(t)^2 = \infty$ (確率 $P_x - 1$ で) によって定義する。この性質を、 X が M 上のブラウン運動 ($b \equiv 0$) の場合について調べ、次の結果を得た。 X が $(A_{i_1}, \dots, A_{i_N})$ をホモロジー的に巻くための必要十分条件は、 $N \geq 3$ なることである。この事実は、 $x_i(t)$ の表現式から X が $(A_{i_1}, \dots, A_{i_N})$ をホモロジー的に巻くかどうかということと、 M のホモロジー被覆面が、双曲型か放物型かを決定することとが同値になることにより示される。なお、 M が高次元のコンパクトなリーマン多様体の時も $X[0, t]$ のホモロジー的位置を一次元のホモロジー群の基を用いて定義し、各 $x_i(t)$ の漸近的挙動を論じることができる。又、 $M = \mathbb{R}^2$ のときにあるクラスの拡散過程について一点のまわり方を同様な観点から調べた。

論文の審査結果の要旨

拡散過程は最も典型的な確率過程であり、拡散過程の道の性質の解明は確率過程論における基本的な研究課題である。 M を d 次元の連結、向きづけ可能な C^∞ リーマン多様体とし、 Δ を M 上のラプラス・ベルトラミ作用素、 b を M 上の C^∞ ベクトル場とする。その時、作用素、 $L = \Delta/2 + b$ で生成される M 上の拡散過程 $X = (X_t, P_x, x \in M)$ が存在する。眞鍋君の論文はこの拡散過程の道の幾何学的性質を、微分形式の拡散過程の道に沿った積分を用い研究したものである。

眞鍋君は先ず交点数の概念を拡散過程 X の道によって定まる M 上の曲線 $X[0, t]$ と $(d-1)$ 特異鎖 c に対する場合に確率論的方法で拡張し、通常の交点数の性質に対応することを確率積分に関する近似定理を用いて示している。続いて M がコンパクトな場合に交点数の漸近的性質の考察を行っている。特に M が種数 $x (\geq 1)$ の閉リーマン面の場合に、交点数を用い拡散過程 X の道の漸近的性質をホモロジー論的観点から論じている。 M のホモロジー標準基 $(A_i, A_{i+x})_{1 \leq i \leq x}$ に関する $X[0, t]$ のホモロジー的位置を $x(t) = (x_i(t))_{1 \leq i \leq 2x}$ とすれば、問題は確率過程 $x(t)$, $0 \leq t < \infty$ の漸近的性質の考察に帰着される。この考察においては調和一次微分形式の曲線 $X[0, t]$ に沿った線積分が基本的な役割を果たす。眞鍋君はリーマン計量とベクトル場 b より定まる特性量を用い、 $x(t)$, $0 \leq t < \infty$ の漸近挙動を具体的に決定している。

本論文において得られた結果は拡散過程の道の研究に新たな展望を開くものである。更に、これらの結果は独創的方法によって導かれており、確率過程論における先駆的業績として高く評価される。

以上、本論文における眞鍋君の研究は確率過程論の進歩に寄与するところきわめて大きく、理学博士の学位論文として十分価値あるものと認められる。