【23】

| | |
|---|---|
| 氏名・(本籍) | 眞　鍋　昭治郎 |
| 学位の種類 | 理　学　博　士 |
| 学位記番号 | 第　5483　号 |
| 学位授与の日付 | 昭和56年12月15日 |
| 学位授与の要件 | 学位規則第5条第2項該当 |
| 学位論文題目 | **交点数とリーマン多様体上の拡散過程のホモロジー的挙動** |
| 論文審査委員 | (主査)教授 池田　信行<br>教授 渡辺　毅　教授 柴田　敬一　教授 福島　正俊<br>助教授 中尾愼太郎 |

## 論　文　内　容　の　要　旨

拡散過程は，さまざまの角度から論じられてきた。この論文では多様体上の拡散過程の道の幾何学的な性質，特に道のホモロジー論的な性質を，微分形式の道に沿った積分を用いることによって調べる。Mを，d次元の連結，向きづけ可能な$C^\infty$リーマン多様体とし，$\Delta$をラプラス・ベルトラミ作用素，bを$C^\infty$ベクトル場とする。$X=(X_t,\ P_x,\ x\in M)$を$\frac{1}{2}\Delta+b$に対応するM上の拡散過程とする。最初に，交点数の概念をXの道の定める曲線X［0, t］と(d−1)特異鎖cに対して定義する。通常の交点数は，調和積分論で知られているように特異性を持った二重形式の滑らかな鎖上での積分として表現される。拡散過程の道は滑らかではないが，Fisk-Stratonovichの確率積分を使うことにより微分形式の道に沿う積分としてX［0, t］とcの交点数を定義することができる。こうして定義された交点数は，普通のそれと対応する性質を(確率$P_x$—1で)持っていることが，確率積分に関する近似定理を援用することによってわかる。次にこの交点数を用いて，Mが種数$\kappa$ (≧1) の閉リーマン面の場合に拡散過程の道の定める曲線X［0, t］が，Mの$\kappa$個の穴のまわりをどうまわるかという漸近的性質をホモロジー論的観点から論じた。X［0, t］のホモロジー的位置$x(t)=(x_i(t))_{1\leq i\leq 2\kappa}$を，Mのホモロジー標準基 $(A_i, A_{i+\kappa})_{1\leq i\leq\kappa}$ を用いて定義すると，問題は$x(t)$の$t\to\infty$のときの振舞いを調べることに帰着される。このとき，$x_i(t)$の主要部が調和一次微分形式$\alpha^{(i)}$の道に沿う積分として表わされるという事実が重要である。このことから，Xの不変測度による$f_i(x)=\alpha^{(i)}(b)(x)$の平均$\bar{f}_i$が，0でないときは$A_i$を巻き，0のときは巻きつかないこと及び$x_i(t)$のtに関する増大度が$\bar{f}_i\neq 0$と$=0$のときでは異なることがわかる。更に，すべての$\bar{f}_i$が0の時は，個々の$x_i(t)$の挙動より一層詳しい$x(t)$の振舞いを表わすものとして，Xが $(A_{i_1},\cdots,A_{i_N})(1\leqq i_1<\cdots<i_N\leqq 2\kappa,\ 1\leqq N\leqq 2\kappa)$ をホモロジー的に巻く

というのを，$\lim_{t\to\infty}\sum_{\lambda=1}^{N} x_{i_\lambda}(t)^2=\infty$（確率$P_x-1$で）によって定義する。この性質を，XがM上のブラウン運動（$b\equiv 0$）の場合について調べ，次の結果を得た。Xが（$A_{i_1}\cdots, A_{i_N}$）をホモロジー的に巻くための必要十分条件は，$N\geqq 3$なることである。この事実は，$x_i(t)$の表現式からXが$(A_{i_1},\cdots,A_{i_N})$をホモロジー的に巻くかどうかということと，Mのホモロジー被覆面が，双曲型か放物型かを決定することとが同値になることにより示される。なお，Mが高次元のコンパクトなリーマン多様体の時も$X[0,t]$のホモロジー的位置を一次元のホモロジー群の基を用いて定義し，各$x_i(t)$の漸近的挙動を論じることができる。又，$M=R^2$のときにあるクラスの拡散過程について一点のまわり方を同様な観点から調べた。

## 論文の審査結果の要旨

拡散過程は最も典型的な確率過程であり，拡散過程の道の性質の解明は確率過程論における基本的な研究課題である。Mをd次元の連結，向きづけ可能な$C^\infty$リーマン多様体とし，$\Delta$をM上のラプラス・ベルトラミ作用素，bをM上の$C^\infty$ベクトル場とする。その時，作用素，$L=\Delta/2+b$で生成されるM上の拡散過程$X=(X_t, P_x, x\in M)$が存在する。眞鍋君の論文はこの拡散過程の道の幾何学的性質を，微分形式の拡散過程の道に沿った積分を用い研究したものである。

眞鍋君は先ず交点数の概念を拡散過程Xの道によって定まるM上の曲線$X[0,t]$と$(d-1)$特異鎖cに対する場合に確率論的方法で拡張し，通常の交点数の性質に対応することを確率積分に関する近似定理を用いて示している。続いてMがコンパクトな場合に交点数の漸近的性質の考察を行っている。特にMが種数$\kappa$（$\geq 1$）の閉リーマン面の場合に，交点数を用い拡散過程Xの道の漸近的性質をホモロジー論的観点から論じている。Mのホモロジー標準基$(A_i, A_{i+\kappa})_{1\leqq i\leqq\kappa}$に関する$X[0,t]$のホモロジー的位置を$x(t)=(x_i(t))_{1\leqq i\leqq 2\kappa}$とすれば，問題は確率過程$x(t)$, $0\leq t<\infty$の漸近的性質の考察に帰着される。この考察においては調和一次微分形式の曲線$X[0,t]$に沿った線積分が基本的な役割を果たす。眞鍋君はリーマン計量とベクトル場bより定まる特性量を用い，$x(t)$, $0\leq t<\infty$の漸近挙動を具体的に決定している。

本論文において得られた結果は拡散過程の道の研究に新たな展望を開くものである。更に，これらの結果は独創的方法によって導かれており，確率過程論における先駆的業績として高く評価される。

以上，本論文における眞鍋君の研究は確率過程論の進歩に寄与するところきわめて大きく，理学博士の学位論文として十分価値あるものと認められる。