

Title	代数的整数論国際シンポジウム印象記
Author(s)	伊吹山, 知義
Citation	数学. 29(3) P.221-P.224
Issue Date	1977-07
Text Version	publisher
URL	http://hdl.handle.net/11094/3305
DOI	
rights	
Note	

Osaka University Knowledge Archive : OUKA

<https://ir.library.osaka-u.ac.jp/>

Osaka University

印象記：3月24日

伊吹山知義 (東京大学)

栗原章 (東京大学)

K. Iwasawa, Some Remarks on Hecke characters.

ある特殊な有限次代数体の A_0 型量指標について、いくつかの注意を述べられた。

j を \mathbb{C} の複素共役写像とする。代数体 k が j で不変でかつ k から \mathbb{C} の中への同型 σ に対し、いつでも $j\sigma = \sigma j$ がなりたつとき、 k を j -field と呼ぶ。 k が j -field なら、 k は総実な体、または総実な体の総虚な 2 次拡大体である。以下 k は虚な j -field でかつ \mathbb{Q} 上有限次 Galois 拡大とする。 I を k の idele, I_0, I_∞ をそれぞれ I の有限部分および無限部分とする。 $I = I_0 \times I_\infty$ であり、 $\alpha \in I$ は $\alpha = \alpha_0 \alpha_\infty$, $\alpha_0 \in I_0$, $\alpha_\infty \in I_\infty$ とかける。 k の量指標 χ とは、定義により、 $\chi(k^\times) = 1$ となる I から \mathbb{C}^\times への連続準同型のことである。さらに、 G の群環 $R = \mathbb{Z}[G]$ のある元 ω が存在して、すべての $\alpha \in k^\times$ に対して $\chi(\alpha_\infty) = \alpha^{-\omega}$ となるとき、 χ は A_0 型と呼ばれる。 ω は χ のみで決まるので、これを ω_χ と書くことにする。 H を k の A_0 型量指標全体のなす群とすると、 $\chi \rightarrow \omega_\chi$ は乗法群 H から加法群 R への準同型 φ を与える。 $T = \text{Ker } \varphi$, $A = \text{Im } \varphi$ とおく。 T は H の torsion 部分群である。さて、 $\mathcal{O} = \sum_{\sigma \in G} \sigma$, $G = \text{Gal}(k/\mathbb{Q})$ とおくと、 $A = \{\omega \in R \mid \text{ある } a \in \mathbb{Z} \text{ に対して } (1+j)\omega = a\mathcal{O}\}$ となることがわかる。 $[k:\mathbb{Q}] = 2n$ とおくと、 $(1-j)R \subset A \subset R$ より、 $\text{rank}_{\mathbb{Z}} A = n+1$ がわかる。

k のイデアル \mathfrak{m} に対し、 $I_{\mathfrak{m}}$ を \mathfrak{m} と素な k のイデアルのなす群とする。よく知られているように、適当な \mathfrak{m} に対し、 χ から自然に $\tilde{\chi} : I_{\mathfrak{m}} \rightarrow \mathbb{C}^\times$ なる準同型が決まる。 $k_\chi = k(\chi(I_0)) = k(\tilde{\chi}(I_{\mathfrak{m}}))$ とおく。このとき

- 命題. i) k_χ は k 上有限次の j -field である。
- ii) $\mathfrak{A} \in I_{\mathfrak{m}}$ に対し、 $\tilde{\chi}(\mathfrak{A})^{1+j} = N(\mathfrak{A})^\alpha$, $\mathfrak{A}^\omega = (\tilde{\chi}(\mathfrak{A}))$ となる。ただし N は絶対ノルム、 $(\tilde{\chi}(\mathfrak{A}))$ は $\tilde{\chi}(\mathfrak{A})$ で生成される k_χ の単項イデアルである。

注意. この命題の証明と同様な方法で、 \mathbb{Q} 上有限次の j -field k に対し、 k 上有限次の j -field K で、 k のイデアルが K ではすべて単項になるものの存在が示せる。

さて、 $k_\chi = k$ とすると、この命題は、すべての $\mathfrak{A} \in I_{\mathfrak{m}}$ に対して \mathfrak{A}^ω が単項なことを示している。よってすべての k のイデアルに対してもそうである。つまり、 k のイデアル群 C_k に対して、 $C_k^\omega = 1$ 。特に $K_m = \mathbb{Q}(\zeta_m)$, $\zeta_m = e^{2\pi i/m}$ のとき、Jacobi の和から得られる量指標 χ に対しては、 $K_{m,\chi} = K_m$ であり、このとき ω_χ は Stickelberger 作用素と呼ばれる。

次に F を $k \subset F \subset C$ なる体とする.

$A_F = \{\omega \in A \mid \text{すべての } k \text{ のイデアル } \mathfrak{A} \text{ に対して, } \mathfrak{A}^\omega \text{ は } F \text{ で単項イデアルになる.}\}$

$$B_F = \{\omega_x \in R \mid \chi \in H \text{ かつ } k\chi \subset F\}$$

とおく. 命題より $B_F \subset A_F \subset A \subset R$ である. A_F/B_F を調べたい. 以下 F は j -field とする. $\omega \in A_F$ と k のイデアル \mathfrak{A} に対し, $\mathfrak{A}^\omega = (\mu)$, $\mu \in F^\times$ とおくと, $N(\mathfrak{A})^\omega = (\mu^{1+j})$ となる. 今, F の単数群を E , F の総正な単数の群を E_+ と書くと, $\varepsilon = N(\mathfrak{A})^{-\omega} \mu^{1+j} \in E_+$ であり, また ε は, mod E^{1+j} では \mathfrak{A} のイデアル類と ω のみによる. よって, $\bar{E}_F = E_+/E^{1+j}$ とおけば, $A_F \times C_k \rightarrow \bar{E}_F$ なる pairing が得られる.

定理. 上の pairing において, C_k の A_F における annihilator は B_F であり, よって,

$$A_F/B_F \longrightarrow \text{Hom}(C_k, \bar{E}_F)$$

なる単射準同型が存在する.

容易にわかるように \bar{E}_F は指数 2 のアーベル群でありよって A_F/B_F もそうである.

以下 k は虚アーベル体とする. k の Jacobi の和から決まる量指標 χ に対する $\omega_x \in R$ たちで生成される A の部分群を S と書く. $S \subset B_k \subset A_k \subset A \subset R$ であり, $L(1, \chi) \neq 0$ より $[A:S] < +\infty$ が示せる. さて $[A:S]$ および $[A_k:S] = [A_k:B_k][B_k:S]$ は何かという問題がおこる. 特に k を虚 2 次体とすると $A_k = B_k$ であり, $[A:A_k] = C_k$ の指数, $[A:S] = k$ の類数, となる. 一般にこれらは異なる. また A_k/S は一般に A_k/B_k のような 2-group にもなっていない. さて, $K_m = Q(\zeta_m)$ に対しても, $m = p^\alpha$ または $m = p^\alpha q^\beta$ (p, q 素数, α, β 正整数) のとき, $[A:S] = (k \text{ の類数の第 1 因子})$ であることが示せる. もし幸運なら, 粗い予想ではあるが, 一般の場合も上の等式が示せるだろう. また S をなんらかのやり方で特徴づけることにより, 必ずしも Q 上アーベルでない Galois j -field に対しても, Stickelberger 作用素の定義が拡張されうるかもしれない.

T. Ono, Hopf maps and quadratic forms over Z .

写像 $h: R^4 \rightarrow R^3$ を

$$h(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 - x_4^2, 2(x_2x_3 - x_1x_4), 2(x_1x_3 + x_2x_4))$$

と与えるとき, h は半径 1 の球面の間の写像 $h_1: S^3 \rightarrow S^2$ を自然に引き起す. 写像 h_1 を Hopf map と呼ぶ. 写像 h は Z 上で定義されているから, $\rho \in N = \{1, 2, \dots\}$ に対して

$$S^3(\rho)_{\mathbf{Z}} = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in Z^4; x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = \rho\}$$

$$S^2(\rho^2)_{\mathbf{Z}}^{\text{even}} = \{(y_1, y_2, y_3) \in Z^3; y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 = \rho^2 \text{ and } y_2, y_3 \text{ even}\}$$

とおけば, Z 上の Hopf map $h_{\rho, Z}: S^3(\rho)_{\mathbf{Z}} \rightarrow S^2(\rho^2)_{\mathbf{Z}}^{\text{even}}$ が引き起される. そこで次の問題を考える.

問題. $y \in S^2(\rho^2)_{\mathbf{Z}}^{\text{even}}$ に対して不定方程式 $h_{\rho, Z}(x) = y$ の解の個数 $a(y)$ を求めよ.

これに対する答は

$$c(y) = G.C.D.(y_1, y_2, y_3) = y_1, y_2, y_3 \text{ の最大公約数}$$

$$r(N) = \#\{(X, Y) \in Z^2; X^2 + Y^2 = N\}$$

$$= 4 \left(\sum_{d=1}^{\sqrt{N}} 1 - \sum_{d=3}^{\sqrt{N}} 1 \right)$$

とおくとき

$$(\text{答}). a(y) = r(c(y))$$

である. Hopf map h_1 は位相的に S^1 bundle であるが, この結果は直観的には Z 上の Hopf map $h_{\rho, Z}$ が Z 上の S^1 bundle であることを意味する.

次にこの一般化を与える. X, Y を Q 上の有限次元線型空間とし, q_X, q_Y をおのおの X, Y 上の Q 係数正定値二次形式とする. さらに双一次写像 $B: X \times Y \rightarrow Y$ で $q_Y(B(x, y)) = q_X(x)q_Y(y)$ が成立するものをとる. $\lambda: X \rightarrow \text{End}(Y)$ を $B(x, y) = \lambda(x)y$ で定義し $\lambda(x)^* \in \text{End}(Y)$ を metric q_Y に関する $\lambda(x)$ の転置写像とする. さらに X, Y の lattice O_X, O_Y で $q_X(O_X) \subset Z, q_Y(O_Y) \subset Z, \lambda(O_X)O_Y \subset O_Y, \lambda(O_X)^*O_Y \subset O_Y$ となるものをとる. 以下このような組 (q_X, q_Y, B, O_X, O_Y) を固定しておく. 前出の $S^3 \rightarrow S^2$ を考えるには $X = Y = Q(\sqrt{-1}), q_X = q_Y = \text{Norm}_{Q(\sqrt{-1})/Q}, B(x, y) = \sqrt{-1}\bar{x}y, O_X = O_Y = Z[\sqrt{-1}]$ とすればよい. 一般の (q_X, q_Y, B, O_X, O_Y) に戻って写像 h を

$$h: X \times Y \longrightarrow Q \times Y,$$

$$h(x, y) = (q_X(x) - q_Y(y), 2B(x, y))$$

とおくと, $\rho \in N$ に対して Z 上の Hopf map

$$h_{\rho, Z}: S_{O_X \times O_Y}(\rho) \longrightarrow S_{Z \times O_Y}(\rho^2)^{\text{even}}$$

れ得られる. ただし

$$S_{O_X \times O_Y}(\rho) = \{(x, y) \in O_X \times O_Y; q_X(x) + q_Y(y) = \rho\}$$

$$S_{Z \times O_Y}(\rho^2)^{\text{even}} = \{(r, 2v) \in Z \times 2O_Y; r^2 + q_Y(2v) = \rho^2\}$$

である. そこで

問題. $w = (r, 2v) \in S_{Z \times O_Y}(\rho^2)^{\text{even}}$ に対して $h_{\rho, Z}(w)$ の元の個数を求めよ.

この問題を変形することを考える. まず

$$f: X \times Y \rightarrow Q \times Q \times Y,$$

$$f(x, y) = (q_X(x), q_Y(y), B(x, y))$$

とおく. $\Sigma = \{\sigma = (t, u, v) \in Q \times Q \times Y; tu = q_Y(v)\}$ とおけば $f(X \times Y) \subset \Sigma$ であり

$$f_{\mathbf{Z}}: O_X \times O_Y \longrightarrow \Sigma_{\mathbf{Z}} = \Sigma \cap (Z \times Z \times O_Y)$$

が引き起される。そこで $w=(r, 2v) \in S_{Z \times O_Y}(\rho^2)^{\text{even}}$ に対して、 $\sigma=((\rho+r)/2, (\rho-r)/2, v)$ とおくと $\sigma \in \Sigma_Z$ であり

$$h_{\sigma}^{-1} z(w) \cong f_Z^{-1}(\sigma)$$

が成立する。これが問題の第一の変形である。これにより $\sigma=(t, u, v) \in \Sigma_Z$ について $f_Z^{-1}(\sigma)$ を考えればよいが、もし $t=0$ ならば

$$f_Z^{-1}(\sigma) \cong S_{O_Y}(u) \stackrel{\text{def}}{=} \{y \in O_Y; q_Y(y)=u\}$$

であり、したがって問題は解けたと見ることができる。 $t \neq 0$ ならば $t \geq 1$ のときのみを考えればよい。そこで、 $\Sigma_Z^* = \{\sigma=(t, u, v) \in \Sigma_Z; t \geq 1\}$ とおく。 $\sigma=(t, u, v) \in \Sigma_Z^*$ に対して

$$a_{\sigma} = \{x \in O_X; \lambda(x)^* v \in tO_Y\}$$

とおくと、 a_{σ} は X の lattice で $tO_X \subset a_{\sigma} \subset O_X$ であるが

$$f_Z^{-1}(\sigma) \cong S_{a_{\sigma}}(t) \stackrel{\text{def}}{=} \{x \in a_{\sigma}; q_X(x)=t\}$$

が成立する。これが問題の第二の変形である。

次に $S_{a_{\sigma}}(t)$ をもう少し簡単にするを考える。 $\sigma \in \Sigma_Z^*$ に対して $\sigma \in Z \times Z \times O_Y \cong Z \times Z \times Z \times \dots \times Z$ と見なして σ の座標の最大公約数を $c(\sigma)$ と書く。また (X, q_X) の相似変換群

$S(q_X)_{\mathbb{Q}} = \{s \in GL(X); q_X(sx) = n(s)q_X(x), n(s) \in \mathbb{Q}\}$ を考え、 X の lattice a, b について $a \sim b$ (resp. $a \sim_{10c} b$) $\iff \exists s \in S(q_X)_{\mathbb{Q}}$ (resp. $\exists s \in S(q_X)_A$) s. t. $a = sb$ と定義する。ただし $S(q_X)_A$ は $S(q_X)_{\mathbb{Q}}$ の adelization である。さらに X の lattice a について $n(a)$ を $n(sa) = n(s)n(a)$ for $s \in S(q_X)_{\mathbb{Q}}$ が成立つ意味でのノルムとする。そこで (q_X, q_Y, B, O_X, O_Y) らについての次の条件を考える。すなわち、

- (I) $a_{\sigma} \sim_{10c} O_X$ for all $\sigma \in \Sigma_Z^*$,
- (I)* $a_{\sigma} \sim O_X$ for all $\sigma \in \Sigma_Z^*$,
- (II) $n(a_{\sigma}) = t$ for all $\sigma \in \Sigma_Z^*$ s. t. $c(\sigma) = 1$.

そのとき、(I), (II) が成立すれば

$$S_{a_{\sigma}}(t) \cong S_{a_i}(n(a_i)c(\sigma)).$$

ただし、 $\{a_i\}_i$ を O_X に対応する種の類たちの代表系であるとし $a_{\sigma} \sim a_i$ なる a_i をとるものとする。特に (I)*, (II) が成立すれば

$$S_{a_{\sigma}}(t) \cong S_{O_X}(c(\sigma)).$$

以上が一般的な結果である。前出の $S^3 \rightarrow S^2$ の場合には (I)*, (II) が成立している。したがってはじめに述べた結果が導かれたことになる。この他にもいくつかの例がある。参考のために文献を掲げておく。

[1] T. Ono, Hasse principle for Hopf maps, J. Reine Angew. Math., 268/269 (1974), 209-212.
 [2] T. Ono, On some rationality properties of Hopf

maps, Nagoya Math. J., 55 (1974), 145-150.
 [3] T. Ono, On the Hopf fibration over Z , Nagoya Math. J., 56 (1974), 201-207.
 [4] T. Ono, On the Hopf fibration $S^7 \rightarrow S^4$ over Z , Nagoya Math. J., 59 (1975), 59-64.
 [5] T. Ono, Quadratic fields and Hopf fibrations, J. Math. Soc. Japan, 28, No. 1 (1976), 62-70.

Y. Ihara, Lifting curves together with Frobenius
 (Some infinitesimal results).

p を固定された素数とし $R_n = Z/p^{n+1}Z$ ($n \geq 0$), $\hat{R} = \varprojlim_n R_n$ とおく。 C を proper smooth irreducible algebraic curve over $R_0 = F_p$ で genus が $g \geq 2$ となるものとする。 $C' = C$ とおき、 Π, Π' をおのおの Frobenius map $C \rightarrow C', C' \rightarrow C$ の graph とする。 $T = \Pi + \Pi'$ とおき T を $C \times_{R_0} C'$ の reduced subscheme と考える。次の問題を考える。

問題 A. C, C' ; proper smooth curves over \hat{R} , \mathcal{C} closed subscheme of $C \times_{\hat{R}} C'$, flat over \hat{R} であって reduction modulo p でおのおの C, C', T となるものをすべて求めよ。

これは次の問題 A' と同値である。

問題 A'. $\{C_n\}_{n \geq 0}, \{C'_n\}_{n \geq 0}$ projective systems of proper smooth curves over $\{R_n\}_{n \geq 0}, \{T_n\}_{n \geq 0}$ projective system of Cartier divisors of $\{C_n \times_{R_n} C'_n\}_{n \geq 0}$, flat over $\{R_n\}_{n \geq 0}$ であって、 $C_0 = C, C'_0 = C', T_0 = T$ となるものをすべて求めよ。

問題 A' を考えるために $C \times_{R_0} C'$ 上の 2 つの sheaf $E \subset \theta$ を考える。

θ = the sheaf of (holomorphic) derivation on $C \times_{R_0} C'$.
 $E = \ker(\theta \rightarrow N_T)$,
 ただし N_T = the normal sheaf of T .

そのとき、

- 命題 (a) $H^1(C \times_{R_0} C', E) = 0$.
- (b) $\dim_{F_p} \ker(H^2(C \times_{R_0} C', E) \rightarrow H^2(C \times_{R_0} C', \theta)) = 4(p-1)(g-1)$,

が成り立つ。

次に $T_n \subset C_n \times_{R_n} C'_n$ over R_n が与えられているとしてその lift $T_{n+1} \subset C_{n+1} \times_{R_{n+1}} C'_{n+1}$ over R_{n+1} を求めることを考える。 $C_n \times_{R_n} C'_n$ の十分細かい affine covering $\{U_n^{\lambda}\}_{\lambda}$ をとると U_n^{λ} は R_{n+1} 上への lift U_{n+1}^{λ} をもつ。 U_{n+1}^{λ} は canonical ではない同型を除いて unique で $U_n^{\lambda} = U_{n+1}^{\lambda} \times_{R_n} R_0$ とおくと

$$\text{Aut}(U_{n+1}^{\lambda}/U_n^{\lambda}) \cong H^0(U_n^{\lambda}, \theta)$$

である。 $(U_n^{\lambda}, T_n|_{U_n^{\lambda}})$ の lift $(U_{n+1}^{\lambda}, T_{n+1}^{\lambda})$ は $U_n^{\lambda} \cap$

$(\Pi \cap \Pi') = \emptyset$ ならば同型を除いてただ一つ存在し, $U_0^1 \cap (\Pi \cap \Pi') = \{P\}$ ならば $p^{\deg P}$ 個の同型類がある. この同型類を local class at P ということにする. さらに

$$\text{Aut}((U_{n+1}^1, T_{n+1}^1)/U_n^1) \cong H^0(U_0^1, E)$$

である. 問題 A' を考えるために次の問題 A_n' を考える.

問題 A_n' . $T_n \subset C_n \times_{R_n} C_n'$ および各 $P \in \Pi \cap \Pi'$ について local class at P が与えられているとき, lift $T_{n+1} \subset C_{n+1} \times_{R_{n+1}} C_{n+1}'$ で各 P では与えられた local class となるものを求めよ.

定理 1. (a) 問題 A_n' の solution は存在してもただ一つ.

(b) 問題 A_n' の situation に対して obstruction $\beta \in \ker(H^2(C \times_{R_0} C', E) \rightarrow H^2(C \times_{R_0} C', \theta))$ が定義されるが, 問題 A_n' が solution を持つためには $\beta=0$ が必要十分である.

定理 1 (a) は命題 (a) からの帰結である. また命題 (b) より $\beta=0$ でないことも可能である. したがって, $T_n \subset C_n \times_{R_n} C_n'$ の R_{n+1} 上への lift を求めることは, obstruction β が消える local class の組を特徴付けることと同値である.

最後に R_0 上から R_1 上への lift について述べる. C 上の degree $p-1$ の rational differential ω で次の (i), (ii) を満たすものの全体を Ω と書く.

(i) ω の zero は order $2|$ であり, さらに degree ≤ 2 over F_p である.

(ii) $\omega = \omega_1^{\otimes (p-1)}$ とするとき $\gamma(\omega_1) = \omega_1$ である. ただし, γ は Cartier operator である.

また $\omega, \omega' \in \Omega$ が次の (iii), (iv) を満たすとき associated であるということにする.

(iii) zero は一致する.

(iv) Q を共通の zero とし x を local parameter at Q として

$$\begin{aligned} \omega &= cx^2(1+\dots)(dx)^{\otimes (p-1)} \\ \omega' &= c'x^2(1+\dots)(dx)^{\otimes (p-1)} \end{aligned}$$

と書くとき, $c' = c^p$.

そこで,

定理 2. 与えられた $T \subset C \times_{R_0} C' (C=C')$ に対して, lift $T_1 \subset C_1 \times_{R_1} C_1'$ の同型類と associated pair (ω, ω') とは 1 対 1 に対応する.

さらに伊原氏は associated pair をいくつかの具体例について掲げられた.