印象記：3月24日

伊吹山知義（東京大学）
栗原　章（東京大学）

K. Iwasawa, Some Remarks on Hecke characters.

ある特殊な有限次代数体の A_0 型量指標について，いくつかの注意を述べられた．

j を $\boldsymbol{C}$ の複素共役写像とする．代数体 k が j で不変でかつ k から $\boldsymbol{C}$ の中への同型 σ に対し，いつでも $j\sigma=\sigma j$ がなりたつとき，k を j-field と呼ぶ．k が j-field なら，k は総実な体，または総実な体の総虚な2次拡大体である．以下 k は虚な j-field でかつ $\boldsymbol{Q}$ 上有限次 Galois 拡大とする．I を k の idele，I_0, I_∞ をそれぞれ I の有限部分および無限部分とする．$I=I_0\times I_\infty$ であり，$\alpha\in I$ は $\alpha=\alpha_0\alpha_\infty$，$\alpha_0\in I_0$，$\alpha_\infty\in I_\infty$ とかける．k の量指標 χ とは，定義により，$\chi(k^\times)=1$ となる I から $\boldsymbol{C}^\times$ への連続準同型のことである．さらに，G の群環 $R=\boldsymbol{Z}[G]$ のある元 ω が存在して，すべての $\alpha\in k^\times$ に対して $\chi(\alpha_\infty)=\alpha^{-\omega}$ となるとき，χ は A_0 型と呼ばれる．ω は χ のみで決まるので，これを ω_χ とも書くことにする．H を k の A_0 型量指標全体のなす群とすると，$\chi\to\omega_\chi$ は乗法群 H から加法群 R への準同型 φ を与える．$T=\mathrm{Ker}\,\varphi$，$A=\mathrm{Im}\,\varphi$ とおく．T は H の torsion 部分群である．さて，$\mathcal{O}=\sum_{\sigma\in G}\sigma$，$G=\mathrm{Gal}\,(k/\boldsymbol{Q})$ とおくと，$A=\{\omega\in R\,|\,$ある $a\in\boldsymbol{Z}$ に対して $(1+j)\omega=a\mathcal{O}\}$ となることがわかる．$[k:Q]=2n$ とおくと，$(1-j)R\subset A\subset R$ より，$\mathrm{rank}_{\boldsymbol{Z}}A=n+1$ がわかる．

k のイデアル $\mathfrak{m}$ に対し，$I_\mathfrak{m}$ を $\mathfrak{m}$ と素な k のイデアルのなす群とする．よく知られているように，適当な $\mathfrak{m}$ に対し，χ から自然に $\tilde{\chi}: I_\mathfrak{m}\to\boldsymbol{C}^\times$ なる準同型が決まる．$k_\chi=k(\chi(I_0))=k(\tilde{\chi}(I_\mathfrak{m}))$ とおく．このとき

命題. i)　k_χ は k 上有限次の j-field である．

ii)　$\mathfrak{A}\in I_\mathfrak{m}$ に対し，$\tilde{\chi}(\mathfrak{A})^{1+j}=N(\mathfrak{A})^a$，$\mathfrak{A}^\omega=(\tilde{\chi}(\mathfrak{A}))$ となる．ただし N は絶対ノルム，$(\tilde{\chi}(\mathfrak{A}))$ は $\tilde{\chi}(\mathfrak{A})$ で生成される k_χ の単項イデアルである．

注意. この命題の証明と同様な方法で，Q 上有限次な j-field k に対し，k 上有限次な j-field K で，k のイデアルが K ではすべて単項になるものの存在が示せる．

さて，$k_\chi=k$ とすると，この命題は，すべての $\mathfrak{A}\in I_\mathfrak{m}$ に対して $\mathfrak{A}^\omega$ が単項なことを示している．よってすべての k のイデアルに対してもそうである．つまり，k のイデアル群 C_k に対して，$C_k^\omega=1$．特に $K_m=Q(\zeta_m)$，$\zeta_m=e^{2\pi i/m}$ のとき，Jacobi の和から得られる量指標 χ に対しては，$K_{m,\chi}=K_m$ であり，このとき ω_χ は Stickelberger 作用素と呼ばれる．

次にFを$k\subset F\subset \boldsymbol{C}$なる体とする.

$A_F=\{\omega\in A|$すべてのkのイデアル$\mathfrak{A}$に対して, $\mathfrak{A}^\omega$はFで単項イデアルになる.$\}$

$B_F=\{\omega_\chi\in R|\chi\in H$かつ$k_\chi\subset F\}$

とおく. 命題より$B_F\subset A_F\subset A\subset R$である. A_F/B_Fを調べたい. 以下Fはj-fieldとする. $\omega\in A_F$とkのイデアル$\mathfrak{A}$に対し, $\mathfrak{A}^\omega=(\mu)$, $\mu\in F^\times$とおくと, $N(\mathfrak{A})^a=(\mu^{1+j})$となる. 今, Fの単数群をE, Fの総正な単数の群をE_+と書くと, $\varepsilon=N(\mathfrak{A})^{-a}\mu^{1+j}\in E_+$であり, また$\varepsilon$は, mod E^{1+j}では$\mathfrak{A}$のイデアル類とωのみによる. よって, $\bar{E}_F=E_+/E^{1+j}$とおけば, $A_F\times C_k\to\bar{E}_F$なるpairingが得られる.

定理. 上のpairingにおいて, C_kのA_FにおけるannihilatorはB_Fであり, よって,

$$A_F/B_F\longrightarrow \mathrm{Hom}\,(C_k,\bar{E}_F)$$

なる単射準同型が存在する.

容易にわかるように$\bar{E}_F$は指数2のアーベル群でありよってA_F/B_Fもそうである.

以下kは虚アーベル体とする. kのJacobiの和から決まる量指標χに対する$\omega_\chi\in R$たちで生成されるAの部分群をSと書く. $S\subset B_k\subset A_k\subset A\subset R$であり, $L(1,\chi)\neq 0$より$[A:S]<+\infty$が示せる. さて$[A:S]$および$[A_k:S]=[A_k:B_k][B_k:S]$は何かという問題がおこる. 特にkを虚2次体とすると$A_k=B_k$であり, $[A:A_k]=C_k$の指数, $[A:S]=k$の類数, となる. 一般にこれらは異なる. またA_k/Sは一般にA_k/B_kのような2-groupにもなっていない. さて, $K_m=Q(\zeta_m)$に対しても, $m=p^\alpha$または$m=p^\alpha q^\beta$ (p,q素数, α,β正整数) のとき, $[A:S]=(k$の類数の第1因子$)$であることが示せる. もし幸運なら, 粗い予想ではあるが, 一般の場合も上の等式が示せるだろう. またSをなんらかのやり方で特徴づけることにより, 必ずしも$\boldsymbol{Q}$上アーベルでないGalois j-fieldに対しても, Stickelberger作用素の定義が拡張されうるかもしれない.

T. Ono, Hopf maps and quadratic forms over $\boldsymbol{Z}$.

写像$h:\boldsymbol{R}^4\to\boldsymbol{R}^3$を

$$h(x_1,x_2,x_3,x_4)=(x_1^2+x_2^2-x_3^2-x_4^2,\,2(x_2x_3-x_1x_4),\,2(x_1x_3+x_2x_4))$$

で与えるとき, hは半径1の球面の間の写像$h_1:S^3\to S^2$を自然に引き起す. 写像h_1をHopf mapと呼ぶ. 写像hは$\boldsymbol{Z}$上で定義されているから, $\rho\in\boldsymbol{N}=\{1,2,\cdots\}$に対して

$$S^3(\rho)_{\boldsymbol{Z}}=\{(x_1,x_2,x_3,x_4)\in\boldsymbol{Z}^4;\ x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2=\rho\}$$

$$S^2(\rho^2)_{\boldsymbol{Z}}^{\text{even}}=\{(y_1,y_2,y_3)\in\boldsymbol{Z}^3;\ y_1^2+y_2^2+y_3^2=\rho^2 \text{ and } y_2,y_3 \text{ even}\}$$

とおけば, $\boldsymbol{Z}$上のHopf map $h_{\rho,\boldsymbol{Z}}:S^3(\rho)_{\boldsymbol{Z}}\to S^2(\rho^2)_{\boldsymbol{Z}}^{\text{even}}$が引き起される. そこで次の問題を考える.

問題. $y\in S^2(\rho^2)_{\boldsymbol{Z}}^{\text{even}}$に対して不定方程式$h_{\rho,\boldsymbol{Z}}(x)=y$の解の個数$a(y)$を求めよ.

これに対する答は

$c(y)=G.C.D.(y_1,y_2,y_3)=y_1,y_2,y_3$の最大公約数

$$r(N)=\#\{(X,Y)\in\boldsymbol{Z}^2;\ X^2+Y^2=N\}=4\Bigl(\sum_{\substack{d|N\\ d\equiv 1 \bmod 4}}1-\sum_{\substack{d|N\\ d\equiv 3 \bmod 4}}1\Bigr)$$

とおくとき

(答). $a(y)=r(c(y))$

である. Hopf map h_1は位相的にS^1 bundleであるが, この結果は直観的には$\boldsymbol{Z}$上のHopf map $h_{\rho,\boldsymbol{Z}}$が$\boldsymbol{Z}$上のS^1 bundleであることを意味する.

次にこの一般化を与える. X,Yを$\boldsymbol{Q}$上の有限次元線型空間とし, q_X,q_YをおのおのX,Y上の$\boldsymbol{Q}$係数正定値二次形式とする. さらに双一次写像$B:X\times Y\to Y$で$q_Y(B(x,y))=q_X(x)q_Y(y)$が成立するものをとる. $\lambda:X\to\mathrm{End}\,(Y)$を$B(x,y)=\lambda(x)y$で定義し$\lambda(x)^*\in\mathrm{End}\,(Y)$をmetric q_Yに関する$\lambda(x)$の転置写像とする. さらにX,Yのlattice O_X,O_Yで$q_X(O_X)\subset\boldsymbol{Z}$, $q_Y(O_Y)\subset\boldsymbol{Z}$, $\lambda(O_X)O_Y\subset O_Y$, $\lambda(O_X)^*O_Y\subset O_Y$となるものをとる. 以下このような組$(q_X,q_Y,B,O_X,O_Y)$を固定しておく. 前出の$S^3\to S^2$を考えるには$X=Y=\boldsymbol{Q}(\sqrt{-1})$, $q_X=q_Y=\mathrm{Norm}_{\boldsymbol{Q}(\sqrt{-1})/\boldsymbol{Q}}$, $B(x,y)=\sqrt{-1}\bar{x}y$, $O_X=O_Y=\boldsymbol{Z}[\sqrt{-1}]$とすればよい. 一般の$(q_X,q_Y,B,O_X,O_Y)$に戻って写像$h$を

$$h:X\times Y\longrightarrow\boldsymbol{Q}\times Y,$$
$$h(x,y)=(q_X(x)-q_Y(y),\,2B(x,y))$$

とおくと, $\rho\in\boldsymbol{N}$に対して$\boldsymbol{Z}$上のHopf map

$$h_{\rho,\boldsymbol{Z}}:S_{O_X\times O_Y}(\rho)\longrightarrow S_{\boldsymbol{Z}\times O_Y}(\rho^2)^{\text{even}}$$

れ得られる. ただし

$$S_{O_X\times O_Y}(\rho)=\{(x,y)\in O_X\times O_Y;\ q_X(x)+q_Y(y)=\rho\}$$

$$S_{\boldsymbol{Z}\times O_Y}(\rho^2)^{\text{even}}=\{(r,2v)\in\boldsymbol{Z}\times 2O_Y;\ r^2+q_Y(2v)=\rho^2\}$$

である. そこで

問題. $w=(r,2v)\in S_{\boldsymbol{Z}\times O_Y}(\rho^2)^{\text{even}}$に対して$h_{\rho,\boldsymbol{Z}}^{-1}(w)$の元の個数を求めよ.

この問題を変形することを考える. まず

$$f:X\times Y\to\boldsymbol{Q}\times\boldsymbol{Q}\times Y,$$
$$f(x,y)=(q_X(x),q_Y(y),B(x,y))$$

とおく. $\Sigma=\{\sigma=(t,u,v)\in\boldsymbol{Q}\times\boldsymbol{Q}\times Y;\ tu=q_Y(v)\}$とおけば$f(X\times Y)\subset\Sigma$であり

$$f_{\boldsymbol{Z}}:O_X\times O_Y\longrightarrow\Sigma_{\boldsymbol{Z}}=\Sigma\cap(\boldsymbol{Z}\times\boldsymbol{Z}\times O_Y)$$

が引き起される．そこで $w=(r,2v)\in S_{Z\times O_Y}(\rho^2)^{\mathrm{even}}$ に対して，$\sigma=((\rho+r)/2,(\rho-r)/2,v)$ とおくと $\sigma\in\Sigma_Z$ であり

$$h_{\rho,Z}^{-1}(w)\cong f_Z^{-1}(\sigma)$$

が成立する．これが問題の第一の変形である．これにより $\sigma=(t,u,v)\in\Sigma_Z$ について $f_Z^{-1}(\sigma)$ を考えればよいが，もし $t=0$ ならば

$$f_Z^{-1}(\sigma)\cong S_{O_Y}(u)\overset{\mathrm{def}}{=}\{y\in O_Y;\ q_Y(y)=u\}$$

であり，したがって問題は解けたと見ることができる．$t\neq 0$ ならば $t\geqq 1$ のときのみを考えればよい．そこで，$\Sigma_Z^*=\{\sigma=(t,u,v)\in\Sigma_Z;\ t\geqq 1\}$ とおく．$\sigma=(t,u,v)\in\Sigma_Z^*$ に対して

$$a_\sigma=\{x\in O_X;\ \lambda(x)^*v\in tO_Y\}$$

とおくと，a_σ は X の lattice で $tO_X\subset a_\sigma\subset O_X$ であるが

$$f_Z^{-1}(\sigma)\cong S_{a_\sigma}(t)\overset{\mathrm{def}}{=}\{x\in a_\sigma;\ q_X(x)=t\}$$

が成立する．これが問題の第二の変形である．

次に $S_{a_\sigma}(t)$ をもう少し簡単にすることを考える．$\sigma\in\Sigma_Z^*$ に対して $\sigma\in Z\times Z\times O_Y\cong Z\times Z\times Z\times\cdots\times Z$ と見なして σ の座標の最大公約数を $c(\sigma)$ と書く．また (X,q_X) の相似変換群

$$S(q_X)_Q=\{s\in GL(X);\ q_X(sx)=n(s)q_X(x),\ n(s)\in Q\}$$

を考え，X の lattice a,b について $a\sim b$ (resp. $a\underset{\mathrm{loc.}}{\sim}b$) $\Longleftrightarrow\exists s\in S(q_X)_Q$ (resp. $\exists s\in S(q_X)_A$) s.t. $a=sb$ と定義する．ただし $S(q_X)_A$ は $S(q_X)_Q$ の adelization である．さらに X の lattice a について $n(a)$ を $n(sa)=n(s)n(a)$ for $s\in S(q_X)_Q$ が成立つ意味でのノルムとする．そこで (q_X,q_Y,B,O_X,O_Y) らについての次の条件を考える．すなわち，

(I) $a_\sigma\underset{\mathrm{loc.}}{\sim}O_X$ for all $\sigma\in\Sigma_Z^*$,

(I)* $a_\sigma\sim O_X$ for all $\sigma\in\Sigma_Z^*$,

(II) $n(a_\sigma)=t$ for all $\sigma\in\Sigma_Z^*$ s.t. $c(\sigma)=1$.

そのとき，(I)，(II)が成立すれば

$$S_{a_\sigma}(t)\cong S_{a_i}(n(a_i)c(\sigma)).$$

ただし，$\{a_i\}_i$ を O_X に対応する種の類たちの代表系であるとし $a_\sigma\sim a_i$ なる a_i をとるものと考える．特に (I)*, (II) が成立すれば

$$S_{a_\sigma}(t)\cong S_{O_X}(c(\sigma)).$$

以上が一般的な結果である．前出の $S^3\to S^2$ の場合には (I)*, (II) が成立している．したがってはじめに述べた結果が導かれたことになる．この他にもいくつかの例がある．参考のために文献を掲げておく．

[1] T. Ono, Hasse principle for Hopf maps, J. Reine Angew. Math., **268/269** (1974), 209–212.

[2] T. Ono, On some rationality properties of Hopf maps, Nagoya Math. J., **55** (1974), 145–150.

[3] T. Ono, On the Hopf fibration over $\boldsymbol{Z}$, Nagoya Math. J., **56** (1974), 201–207.

[4] T. Ono, On the Hopf fibration $S^7\to S^4$ over $\boldsymbol{Z}$, Nagoya Math. J., **59** (1975), 59–64.

[5] T. Ono, Quadratic fields and Hopf fibrations, J. Math. Soc. Japan, 28, No. 1 (1976), 62–70.

Y. Ihara, Lifting curves together with Frobenius (Some infinitesimal results).

p を固定された素数とし $R_n=Z/p^{n+1}Z\ (n\geqq 0)$, $\hat{R}=\varprojlim_n R_n$ とおく．C を proper smooth irreducible algebraic curve over $R_0=F_p$ で genus が $g\geqq 2$ となるものとする．$C'=C$ とおき，Π,Π' をおのおの Frobenius map $C\to C'$, $C'\to C$ の graph とする．$T=\Pi+\Pi'$ とおき T を $C\underset{R_0}{\times}C'$ の reduced subscheme と考える．次の問題を考える．

問題 A. $\mathcal{C},\mathcal{C}'$; proper smooth curves over $\hat{R}$, $\mathcal{T}$ closed subscheme of $\mathcal{C}\underset{\hat{R}}{\times}\mathcal{C}'$, flat over $\hat{R}$ であって reduction modulo p でおのおの C,C',T となるものをすべて求めよ．

これは次の問題 A′ と同値である．

問題 A′. $\{C_n\}_{n\geqq 0}$, $\{C_n'\}_{n\geqq 0}$ projective systems of proper smooth curves over $\{R_n\}_{n\geqq 0}$, $\{T_n\}_{n\geqq 0}$ projective system of Cartier divisors of $\{C_n\underset{R_n}{\times}C_n'\}_{n\geqq 0}$, flat over $\{R_n\}_{n\geqq 0}$ であって，$C_0=C$, $C_0'=C'$, $T_0=T$ となるものをすべて求めよ．

問題 A′ を考えるために $C\underset{R_0}{\times}C'$ 上の 2 つの sheaf $\tilde{E}\subset\Theta$ を考える．

Θ = the sheaf of (holomorphic) derivation on $C\underset{R_0}{\times}C'$.

$E=\ker(\Theta\to N_T)$,

ただし　N_T = the normal sheaf of T.

そのとき，

命題 (a)　$H^1(C\underset{R_0}{\times}C',E)=0$.

(b)　$\dim_{F_p}\ker(H^2(C\underset{R_0}{\times}C',E)\to H^2(C\underset{R_0}{\times}C',\Theta))=4(p-1)(g-1)$,

が成り立つ．

次に $T_n\subset C_n\underset{R_n}{\times}C_n'$ over R_n が与えられているとしてその lift $T_{n+1}\subset C_{n+1}\underset{R_{n+1}}{\times}C_{n+1}'$ over R_{n+1} を求めることを考える．$C_n\underset{R_n}{\times}C_n'$ の十分細かい affine covering $\{U_n^\lambda\}_\lambda$ をとると U_n^λ は R_{n+1} 上への lift U_{n+1}^λ をもつ．U_{n+1}^λ は canonical ではない同型を除いて unique で $U_0^\lambda=U_n^\lambda\underset{R_n}{\times}R_0$ とおくとき

$$\mathrm{Aut}\,(U_{n+1}^\lambda/U_n^\lambda)\cong H^0(U_0^\lambda,\Theta)$$

である．$(U_n^\lambda,\ T_n|U_n^\lambda)$ の lift $(U_{n+1}^\lambda,\ T_{n+1}^\lambda)$ は $U_0^\lambda\cap$

$(\Pi\cap\Pi')=\phi$ ならば同型を除いてただ一つ存在し，$U_0^\lambda\cap(\Pi\cap\Pi')=\{P\}$ ならば $p^{\deg P}$ 個の同型類がある．この同型類を local class at P ということにする．さらに

$$\mathrm{Aut}\,((U_{n+1}^\lambda, T_{n+1}^\lambda)/U_n^\lambda)\cong H^0(U_0^\lambda, E)$$

である．問題 A′ を考えるために次の問題 A_n' を考える．

問題 $\mathbf{A}_n'$. $T_n\subset C_n\underset{R_n}{\times}C_n'$ および各 $P\in\Pi\cap\Pi'$ について local class at P が与えられているとき，lift $T_{n+1}\subset C_{n+1}\underset{R_{n+1}}{\times}C_{n+1}'$ で各 P では与えられた local class となるものを求めよ．

定理 1. (a) 問題 A_n' の solution は存在してもただ一つ．

(b) 問題 A_n' の situation に対して obstruction $\beta\in\ker(H^2(C\underset{R_0}{\times}C', E)\to H^2(C\underset{R_0}{\times}C', \Theta))$ が定義されるが，問題 A_n' が solution を持つためには $\beta=0$ が必要十分である．

定理 1 (a) は命題 (a) からの帰結である．また命題 (b) より $\beta=0$ でないことも可能である．したがって，$T_n\subset C_n\underset{R_n}{\times}C_n'$ の R_{n+1} 上への lift を求めることは，obstruction β が消える local class の組を特徴付けることと同値である．

最後に R_0 上から R_1 上への lift について述べる．C 上の degree $p-1$ の rational differential ω で次の (i), (ii) を満たすものの全体を Ω と書く．

(i) ω の zero は order 2 であり，さらに degree$\leqq 2$ over $\boldsymbol{F}_p$ である．

(ii) $\omega=\omega_1^{\otimes(p-1)}$ とするとき $\gamma(\omega_1)=\omega_1$ である．ただし，γ は Cartier operator である．

また $\omega, \omega'\in\Omega$ が次の (iii), (iv) を満たすとき associated であるということにする．

(iii) zero は一致する．

(iv) Q を共通の zero とし x を local parameter at Q として

$$\omega = cx^2(1+\cdots)(dx)^{\otimes(p-1)}$$
$$\omega' = c'x^2(1+\cdots)(dx)^{\otimes(p-1)}$$

と書くとき，$c'=c^p$.

そこで，

定理 2. 与えられた $T\subset C\underset{R_0}{\times}C'$ $(C=C')$ に対して，lift $T_1\subset C_1\underset{R_1}{\times}C_1'$ の同型類と associated pair (ω, ω') とは 1 対 1 に対応する．

さらに伊原氏は associated pair をいくつかの具体例について掲げられた．