Title	二次型式で定められる自己共役作用素の分数巾に値をとる関数の微分可能性
Author(s)	八木, 厚志
Citation	
Issue Date	
oaire:version	
URL	https://hdl.handle.net/11094/33470
rights	
Note	著者からインターネット公開の許諾が得られていないため、論文の要旨のみを公開しています。全文のご利用をご希望の場合は、大阪大学の博士論文についてをご参照ください。

【17】

氏 名 ・(本籍)	八 木 厚 志
学 位 の 種 類	理 学 博 士
学 位 記 番 号	第 5796 号
学位授与の日付	昭和57年9月30日
学位授与の要件	学位規則第5条第2項該当
学 位 論 文 題 目	**二次型式で定められる自己共役作用素の分数巾に値をとる関数の微分可能性**
論 文 審 査 委 員	(主査) 教 授 田辺 広城
	(副査) 教 授 池田 信行 教 授 渡辺 毅 助教授 井川 満

論 文 内 容 の 要 旨

H, V は Hilbert空間で, VはHに稠密に埋込まれているとする。$\{a(t;.,.)\}_{0\le t\le T}$はV×V上で定義された連続, 対称二次型式でGårdingの不等式を満たしているとする。この二次型式から定められるHの正定値自己共役作用素を$\{A(t)\}_{0\le t\le T}$とすると, $\frac{1}{2}$分数巾$A(t)^{\frac{1}{2}}$が定義されその定義域はVに一致することが知られている。この論文の第一の目的は, $A(t)^{\frac{1}{2}}$がパラメータ t についてV上強連続微分可能となるための, 二次型式a(t; . , .)が満たすべき十分条件を求めることであり, 第二の目的は, 具体的にΩを$\mathbf{R}^n$の領域として$H=L_2(\Omega)$, $V=H_1(\Omega)$

$$(1)\quad a(t;u,v)=\int_{\Omega}\Big\{\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}(t,x)\frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial\bar{v}}{\partial x_j}+ku\bar{v}\Big\}dx+\int h(t,\sigma)u\bar{v}\,d\sigma$$

と与えられた時に, その十分条件が実際に満たされることを示すことである。

実際, a(t;u, v)の t についての導関数$\dot{a}(t;u,v)$が不等式

$$(2)\quad |\dot{a}(t;u,v)|\le K_\rho\,|A(t)^\rho u|\,|A(t)^{1-\rho}v|$$

をある $\rho\,(\frac{1}{2}<\rho<1)$ について満たせば, $A(.)^{\frac{1}{2}}$はV上強連続微分可能であることが次の様に示される。$f\in H$, $g\in V$とすると

$$\left|\left(\frac{dA(t)^{-\frac{1}{2}}}{dt}f,\ A(t)^{\frac{1}{2}}g\right)\right|=\left|\frac{1}{\pi}\int_0^\infty\lambda^{-\frac{1}{2}}\dot{a}(t;(\lambda+A(t))^{-1}f,\ A(t)^{\frac{1}{2}}(\lambda+A(t))^{-1}g)\,d\lambda\right|$$

$$\leq \frac{K_\rho}{\pi}\int_0^\infty \lambda^{-\frac{1}{2}} \mid A(t)^\rho(\lambda + A(t))^{-1} f \mid \mid A(t)^{\frac{3}{2}-\rho}(\lambda + A(t))^{-1} g \mid d\lambda$$

であり，スペクトル分解を用いることにより

$\leq C \mid f \mid \mid g \mid$

と評価される。この事は，$A(.)^{-\frac{1}{2}}$ がHからVへの作用素として強微分可能であることを示しており，逆関数として$A(.)^{\frac{1}{2}}$ が強微分可能であることが導かれる。

次に，二次型式が(1)で与えられたとする。部分積分を用いることにより，Ω上のある関数d(t)が定まって，不等式

(3)　$\mid \dot{a}(t; u, v) - (d(t)A(t)u, v) \mid \leq C_\theta \| u \|_{1+\theta,\Omega} \| v \|_{1-\theta,\Omega}$

が$0 < \theta < \frac{1}{2}$に対して成立することが分かる。ここで，$\| \cdot \|_{s,\Omega}$ は$H_s(\Omega)$のノルムである。補間空間論により示される事実，$A(t)^\alpha (0 \leq \alpha \leq 1)$ の定義域は$H_{2\alpha}(\Omega)$に含まれる，に注意すると，(3)から直ちに任意の$\frac{1}{2} < \rho < \frac{3}{4}$について不等式(2)が得られる。

最後に，以上の事実は双曲型偏微分方程式の**Cauchy**問題を解くために応用される。

論文の審査結果の要旨

H，Vをヒルベルト空間，VはHに稠密に埋め込まれ，Vの位相はHの位相より強いとする。区間$[0, T]$の各tに対し$a(t; u, v)$はV×Vで定義された対称統御的二次型式，$A(t)$を$a(t; u, v) = (A(t)u, v)$で定義された作用素とする。A(t)はHで自己共役であるが更に正定符号とする。このとき$A(t)^{1/2}$が定義され，その定義域$D(A(t)^{1/2})$ は恒等的にVに等しい。この様な作用素$A(t)^{1/2}$のtについての微分可能性は双曲型方程式の混合問題の関数解析的取扱いと関連して多くの人により研究されてきたが今迄わかっていたのはD(A(t))が一定の場合のみである。

八木君の論文の主結果は各$u, v \in V$に対して$\dot{a}(t; u, v)$がt の微分可能な関数，ある数$\rho \in (1/2, 1]$，$K_\rho > 0$が存在して　$a(t; u, v)$のtに関する導関数$\dot{a}(t; u, v)$に対して

$$\mid \dot{a}(t; u, v) \mid \leq K_\rho \mid A(t)^\rho u \| A(t)^{1-\rho} v \| \qquad (*)$$

が成立すれば各$u \in V$に対して$A(t)^{1/2}u$はtの微分可能な関数であるというものである。ただしここで$\mid A(t)^\rho u \mid$，$\mid A(t)^{1-\rho} v \mid$はそれぞれ$A(t)^\rho u$，$A(t)^{1-\rho} v$のHの元としてのノルムを表す。応用例としてA(t)が2階対称楕円型偏微分作用素の第三種境界条件による自己共役実現であるとき（$*$）が満たされることを示している。

A(t)が2階対称楕円型偏微分作用素の自己共役実現の場合，境界条件がディリクレ型ならばD(A(t))はtに無関係となり，この様な場合は$A(t)^{1/2}$の微分可能性は古くから知られていた。境界条件

が第三種の場合は共法線方向が t と共に変るのでD(A(t))は t に依存し，この場合は多くの人の努力にも拘らず$A(t)^{1/2}$の微分可能性は証明されなかった。

八木君はこの様な場合にフーリエ変換，補間空間論等を巧みに用いて（＊）が成立，従って$A(t)^{1/2}$が微分可能であることを示した。これによって2階双曲型方程式の第三種混合問題の関数解析的取扱いが可能になった。以上により八木君の論文は理学博士の学位論文として十分の価値があると認める。