日本機械学会論文集 (C 編)
72 巻 717 号 (2006-05)

論文 No. 05-0033

ミニ・マックス型ロバスト最適設計の適切化変換を用いた高精度化法 *

廣 川 敬 康 *1, 藤 田 喜 久 雄 *2, Chiou Tzi FAM*3

Enhancement of Mini-Max Type Robust Optimal Design using Function Regularization*

Noriyasu HIROKAWA*4, Kikuo FUJITA and Chiou Tzi FAM

*4 *Department of Mechanical Engineering and Biomimetics, Kinki University, 930 Nishi-mitani, Uchita, Wakayama 649-6493, Japan*

This paper proposes a method for enhancing the quality of mini-max type robust optimal design by using the concept of function regularization. Since robust optimal design considers variations under various noises, the quality of a solution is affected by the intermediate model for considering variations of the objective function and constraints within a distribution region. The mini-max type robust optimal design has been proposed by the authors for considering the bounding points of the objective and constraints within the distribution region as a definition of robust optimality. The function regularization proposed in this paper enhances its accuracy by filtering the functions so as to improve fidelity of quadratic approximation, which is used for obtaining the bounding points. The filter is formulated as the form of Fourier series and is implemented for the mini-max type robust optimal design scheme. Then, numerical experiments, in which second-order Fourier series is used as the filter, are demonstrated with two numerical sample problems; a two-dimensional algebraic problem and a simple structural optimal design problem.

Key Words : Robust Optimal Design, Function Regularization, Design Optimization, Mini-Max Type Formulation, Quadratic Response Surface.

1 緒 言

ロバスト最適設計とは，製品の製造誤差や使用環境の変動などに伴い設計変数や設計パラメータが確率的に分布し，それによって目的関数や制約条件が変動する場合において安定した性能を示す設計解を求めるための方法である．その元来の意味は確率的な最適性を取り扱うものであるが，数理的な枠組みのもとで合理的な設計解を求めるためには計算可能なモデルを導入する必要があり，種々の見地から様々な代替モデルが提案されてきている(1)(2)．当初，提案されたモデルは，比較的単純な構成でロバスト最適性の意味も精度の低いものであったが，徐々に，近似関数の構成方法の改善，変動領域における連成項の考慮，ロバスト性の直接的な評価などを組み込みながら，高精度なものへと展開してきており，より厳密な意味でのロバスト最適設計解を求めることができるようになっている(3)．一連の展開を踏まえつつ，著者らは，連成を伴った変動領域において目的関数と制約条件が最悪値を取る限界点に着目することによって設計解のロバスト性をより厳密に評価するミニ・マックス型ロバスト最適設計法を構成し，変数変動領域の超球体表現(2)(4)(5)のもとで目的関数と制約条件の両方を 2 次応答曲面近似(6)することによって各関数の限界的な値を厳密かつ効率的に求めることによる解法を提案している(3)．

本論文では，上記のミニ・マックス型ロバスト最適設計法に対して，非線形性が強いために限界点を求めるための 2 次応答曲面近似の精度がそのままでは不十分であるような場合においてもその有効性が達成できるよう，対象関数に対するフィルターとしての適切化変換を組み合わせる高精度化法を提案する．あわせて，その効果をいくつかの数値的例題における比較実験を通じて検証する．なお，適切化変換に至る着想は既報(3)において例題として用いた構造設計問題において応力やたわみに関する制約条件式を逆数変換(7)した方が精度の高いロバスト最適解を得ることができたという事実に基づいたものであり，逆数変換に類する何らかの変換を対象問題の内容に応じて自動的に合成することを目指したものである．

---

* 原稿受付 2005 年 1 月 13 日
*1 正員, 近畿大学生物理工学部 (〒 649-6493 和歌山県那賀郡打田町西三谷 930).
*2 正員, 大阪大学大学院工学研究科 (〒 565-0871 吹田市山田丘 2-1).
*3 非会員, 大阪大学大学院工学研究科 (〒 565-0871 吹田市山田丘 2-1)
Email: hirokawa@waka.kindai.ac.jp

2　適切化変換を用いたロバスト最適設計

2.1　ロバスト最適設計の形式　本研究では，ロバスト最適設計を論じるにあたり，ノミナルな最適設計問題として以下の形式のものを想定する．

$$\left.\begin{array}{rl} \text{find} & \boldsymbol{x} = \left[\, x_1, x_2, \cdots, x_{n_x} \right]^T \\ \text{that minimizes} & f(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{p}) \\ \text{subject to} & g_k(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{p}) \leq 0 \quad (k = 1, 2, \cdots, n_g) \end{array}\right\} \tag{1}$$

ここで，$\boldsymbol{x} = \left[\, x_1, x_2, \cdots, x_{n_x} \right]^T$ は設計変数，$\boldsymbol{p} = \left[\, p_1, p_2, \cdots, p_{n_p} \right]^T$ は設計パラメータであり，n_x と n_p はそれぞれ，設計変数と設計パラメータの個数である．ロバスト最適設計においては，設計変数 $\boldsymbol{x}$ と設計パラメータ $\boldsymbol{p}$ がともに変化する場合を想定する必要があるため，以下では，両者を区別せずに扱う場合には，$\boldsymbol{v} = \left[\, \boldsymbol{x}^T, \boldsymbol{p}^T \right]^T = \left[\, v_1, v_2, \cdots, v_{n_v} \right]^T$ を用いる．ただし，$n_v = n_x + n_p$ である．

ロバスト最適設計は様々な形式で定めることができるが，例えば，変数の変動領域における全ての設計解が全ての制約条件を満足する確率を P_f 以上としつつ，目的関数の期待値を最小化するロバスト最適設計問題は以下のように記述される．

$$\left.\begin{array}{rl} \text{find} & \boldsymbol{x} \\ \text{that minimizes} & \mathrm{Exp}\left[\, f(\boldsymbol{v}) \right] = \displaystyle\int_{\boldsymbol{v}} \Phi(\boldsymbol{v})\, f(\boldsymbol{v})\, d\boldsymbol{v} \\ \text{subject to} & \mathrm{Probability}\left[\, g_1(\boldsymbol{v}) \leq 0 \cap g_2(\boldsymbol{v}) \leq 0 \cap \right. \\ & \quad \left. \cdots \cap g_{n_g}(\boldsymbol{v}) \leq 0 \,\right] \geq P_f \end{array}\right\} \tag{2}$$

ここで，$\Phi(\boldsymbol{v})$ はベクトル $\boldsymbol{v}$ の確率密度関数である．このように，ロバスト最適設計の定義には変数の変動領域全体における目的関数の積分計算や制約条件を満足する確率の計算あるいは最大値探索などを含む形式となる．その種の演算はそのままでは実施不可能であり，各関数から算出される何らかの特徴量に基づいて式 (2) や式 (3) のような定義を置き換えるための代替モデルが種々に提案されてきている[(1)(2)]．本研究で取り上げるミニ・マックス型ロバスト最適設計の意味は以下の形式により記述される[(3)]．

$$\left.\begin{array}{rl} \text{find} & \boldsymbol{x} \\ \text{that minimizes} & \displaystyle\max_{\boldsymbol{v} \in R} f(\boldsymbol{v}) \\ \text{subject to} & \displaystyle\max_{\boldsymbol{v} \in R} g_k(\boldsymbol{v}) \leq 0 \\ & \qquad (k = 1, 2, \cdots, n_g) \end{array}\right\} \tag{3}$$

ここで，R は上式中の max 処理を考えるにあたり想定する変数やパラメータの変動領域である．

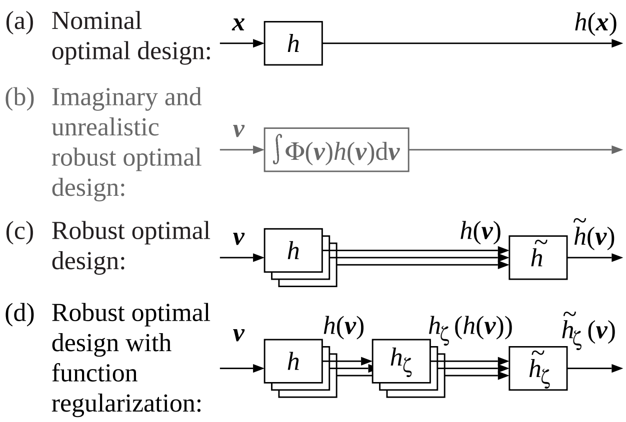


Fig. 1　Evaluation model in optimal design

2.2　適切化変換による高精度化　ロバスト最適設計法において，設計解のロバスト性を評価するために何らかの統計量を算出する際の基本は変数の変動領域における各関数の近似関数を構成することになる．したがって，高精度の解を得るためには，高精度の近似関数を構成することが重要である．本論文では，著者らによるミニ・マックス型ロバスト最適設計法[(3)]に対して緒言で述べた目的のために導入する変換を，逆問題[(8)]における類似の操作の名称を借りて，「適切化変換 (Regularization)」と呼ぶこととし，その一構成法を提案する．

図 1 はロバスト最適設計における代替モデルでの解の評価の枠組みを示したものである．図中，$h(\boldsymbol{v})$ は目的関数 $f(\boldsymbol{v})$ や制約条件 $g_k(\boldsymbol{v})$ $(k = 1, 2, \cdots, n_g)$ の一般的表記である．ロバスト性を考慮しないノミナル最適設計では，設計変数 $\boldsymbol{x}$ における関数値 $h(\boldsymbol{v})$ に基づいて最適化計算が行われる (図 1 (a))．これに対して，ロバスト最適設計とは元来の意味としては変数変動の分布上の積分計算により得られる指標の最適化を行うものである (図 1 (b))．しかしながら，その種の計算は実行不可能であるため，一般には，一連のサンプル点での関数値 $h(\boldsymbol{v})$ に基づいて何らかの近似関数 $\tilde{h}(\boldsymbol{v})$ を構成して最適化計算が行われる (図 1 (c))．適切化変換とは，事前に各サンプル点での関数値 $h(\boldsymbol{v})$ をフィルター h_ζ によって $h_\zeta(h(\boldsymbol{v}))$ に変換しておくことを通じて，上記において用いる近似関数の精度をより高いもの $\tilde{h}_\zeta(\boldsymbol{v})$ として構成するものである (図 1 (d))．

次に，ミニ・マックス型ロバスト最適設計の解法を念頭において，近似関数が 2 次応答曲面である場合を想定し，適切化変換の役割を図 2 に概説する．同図 (a) は原関数 $h(\boldsymbol{v})$ とその 2 次応答曲面 $\tilde{h}(\boldsymbol{v})$ である．図の場合のように，原関数の非線形性が強い場合，2

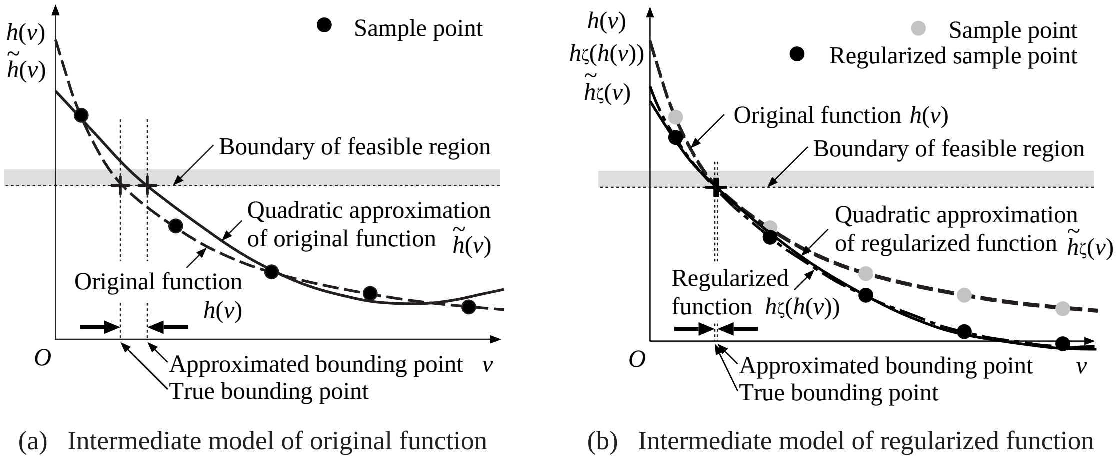


Fig. 2 Effect of function regularization

次応答曲面 $\tilde{h}(\boldsymbol{v})$ の精度は低くなることが避けられない．特に，近似する関数が制約条件の場合には，実行可能領域の境界 (図中の “Boundary of feasible region”) 近傍において近似関数の精度が悪いと，真の限界点 (図中の “True bounding point”) と得られた限界点 (図中の “Approximated bounding point”) が乖離し，結果として得られるロバスト最適設計解の精度が低くなる．これに対して，同図 (b) に示すように，妥当な適切化変換フィルター h_ζ を構成し，サンプル点での原関数値 $h(\boldsymbol{v})$ に対してそれを施して得られる $h_\zeta(h(\boldsymbol{v}))$ についてのより精度の高い 2 次応答曲面 $\tilde{h}_\zeta(\boldsymbol{v})$ を構成すれば，実行可能領域の境界近傍においても高精度の近似関数を構成することが期待でき，それによって，高精度の解を得ることも期待できる．

2.3 適切化変換フィルターの要件 式 (3) の定式化に対する適切化変換フィルターは前項の内容に従い対象関数の 2 次近似の精度を高めることを目的として設定する．その際，対象関数の非線形性が著しく強い場合には，フィルターによって 2 次近似の精度は高まるものの，元々の対象関数の原型を留めず，限界点が全く異なった箇所に再現される可能性も存在する．対象範囲内で凹凸を繰り返す場合などは，それに該当する極端な事例である．その種の可能性の多くは，適切化変換フィルター h_ζ が想定された範囲内で単調増加であれば，打ち消すことができる．つまり，フィルターの単調増加性は適切化変換を有効に機能させる上で要件となる．この単調増加性は，想定する変動領域内において関数 $h(\boldsymbol{v})$ が取り得る最小値を h_{min}，最大値を h_{max} とするとき，$h_{min} \leq h_1 < h_2 \leq h_{max}$ を満たすすべての h_1, h_2 に対して $h_\zeta(h_1) < h_\zeta(h_2)$ が成り立つことを意味する．本研究では，そもそもの 2 次近似の精度を論じる上での参照領域において，ここでの h_{min} と h_{max} を設定することとし，その変動領域のことを適切化対象領域と呼ぶことにする．

適切化対象領域の設定方法については，その大きさは関心となっている領域を含むものである必要がある．最適化計算の初期段階では，暫定解が最終的な解から離れていることが予想されることから，そのサイズはある程度大きなものである必要があるが，最終的には，式 (3) での R を含み，かつ，できるだけ小さいものとすることによって，適切化変換の効果は最大となる．そこで，最適化計算の進行に伴って適切化対象領域のサイズを段階的に縮小していくものとし，適切化対象領域を更新するたびに，領域内に設定したサンプル点での関数値に基づいて適切化変換フィルターを逐次的に構成することとする．

3 ミニ・マックス型ロバスト最適設計の適切化変換による高精度化

3.1 ミニ・マックス型ロバスト最適設計法

(1) 定式化 ミニ・マックス型のロバスト最適設計法は，変数変動領域における全ての設計の実行可能性と最適性を保証するために，おのおのを制約条件と目的関数の限界点での値により評価するものであり，式 (3) に示したように形式化され，設計変数と設計パラメータの変動領域を表す $\boldsymbol{v} \in R$ を以下のように定めることにより定式化される[(3)]．

$$(\boldsymbol{v}-\boldsymbol{v}_o)^T \Sigma^{-1} (\boldsymbol{v}-\boldsymbol{v}_o) \leq \chi^2(n_v, \alpha) \qquad (4)$$

ここで，$\boldsymbol{v}_o$ は変動の中心となる平均値，Σ は変数の分散共分散行列，$\chi^2(n_v, \alpha)$ は正規分布にしたがって分布する n_v 個の変数についてのパラメータ α によって規定される χ^2 分布である．なお，以下では，上式を $\boldsymbol{v} \in R(\boldsymbol{v}_o, \Sigma, \alpha)$ と記す．

(2) 限界点探索 上式は，ロバスト最適化問題の中に目的関数 $f(\boldsymbol{v})$ や制約条件 $g_k(\boldsymbol{v})$ $(k=1,2,\cdots,n_g)$ に関する限界点探索問題を含む形式となっている．この限界点探索問題は，関数を一般的に $h(\boldsymbol{v})$ と表記した場合，以下のように定式化できる．

$$\left.\begin{array}{rl} \text{find} & \boldsymbol{v} \\ \text{that maximizes} & h(\boldsymbol{v}) \\ \text{subject to} & \boldsymbol{v} \in R(\boldsymbol{v}_o, \Sigma, \alpha) \end{array}\right\} \tag{5}$$

本研究では，限界点探索問題の解を効率的に求めつつロバスト最適化計算を行うために，変数の変動領域を超球体により表現するとともに，関数を2次応答曲面近似する[3]．そのために，式(5)の限界点探索問題を次式のように再定式化する．

$$\left.\begin{array}{l} \text{find} \quad \boldsymbol{v}'' \\ \text{that maximizes} \\ \qquad \tilde{h}(\boldsymbol{v}'') = h(\boldsymbol{v}''_o) + \displaystyle\sum_{i=1}^{n_v} \beta_i v''_i \\ \qquad\qquad + \displaystyle\sum_{i=1}^{n_v}\sum_{j=i}^{n_v} \beta_{ij} v''_i v''_j \\ \text{subject to} \quad \boldsymbol{v}''^T \boldsymbol{v}'' \leq \chi^2(n_v, \alpha) \end{array}\right\} \tag{6}$$

ここで，$\boldsymbol{v}''$ は $\boldsymbol{v}''_o$ を原点とし連成変動領域が超球体になるように変数変換を施した座標系における設計変数ベクトルである．また，式(6)の2次応答曲面の係数 β_i，β_{ij} $(i=1,2,\cdots,n_v,\ j=1,2,\cdots,n_v)$ に関しては，変動領域の中心 $\boldsymbol{v}''_o$ において近似関数値が真の値と一致するようにした上で，ロバスト最適設計で考えるべき変動領域のサイズを踏まえれば，限界点は超球体面上に存在する可能性が高いことを考慮して，超球体面上にサンプル点を等方的に配置し，最小2乗法を用いて決定する[3]．

3.2 全体構成 本研究で提案する適切化変換を用いたミニ・マックス型ロバスト最適設計法の全体構成を図3に示す．提案する方法は，ミニ・マックス型ロバスト最適設計[3]の過程において，想定された領域において目的関数と制約条件の適切化変換フィルターを構成する過程 (図3 (a)〜(d)) と，構成した適切化変換フィルターを利用してサンプル点における各関数の値を変換して高精度の2次応答曲面を構成し，限界点を精度よく求めつつ最適化計算を行う過程 (図3 (e)〜(l)) とから構成されており，両者による操作を適切化変換領域を縮小しながら繰り返すというものである．以下に，適切化変換フィルターについての操作の詳細を示す．

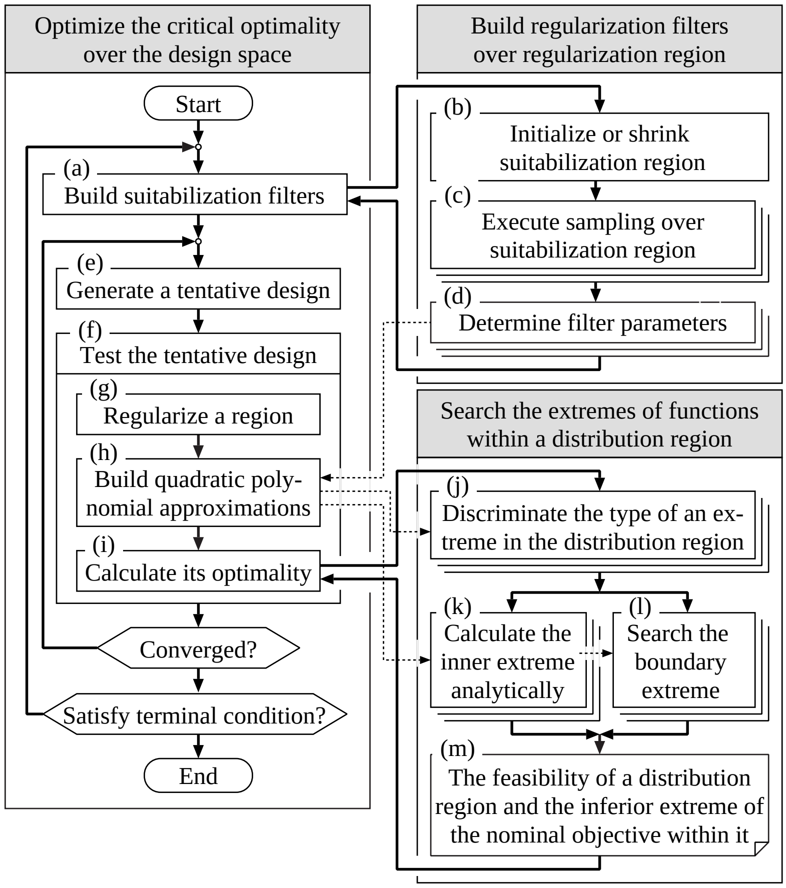


Fig. 3 Mini-max type robust optimal design by regularization

3.3 適切化対象領域の設定 適切化変換フィルターを定める際には，そのフィルターが適用される対象領域を設定する．具体的には，初期解もしくは暫定解を $\boldsymbol{x}$ とするとき，$\boldsymbol{v} = \left[\boldsymbol{x}^T, \boldsymbol{p}^T\right]^T$ を中心とした上下限が $v_i \pm C^{(k)}\sigma_i$ $(i = 1, 2, \cdots, n_v)$ の超直方体領域を適切化対象領域として設定する．ここで，σ_i は v_i の変動の標準偏差であり，k は適切化対象領域の設定回数である．適切化対象領域は，初期の $C^{(0)}$ に対し，変数の変動領域に接するまで K 回にわたって $C^{(k+1)} = C^{(k)} / \sqrt[K]{C^{(0)}}$ により，徐々に縮小していくものとする．

3.4 適切化変換フィルターの形式 適切化変換フィルター $h_\zeta(\cdot)$ には，本研究では，2次近似の精度を高めるフィルターの構成問題を比較的少数のパラメータにより調整可能な形式として定義すべく，フィ

ルターとしては作用のない等価変換に相当する 1 次関数に対して，適切化対象領域に周期を合わせたフーリエ級数の形式に準じて sin 関数群を重ね合わせて，以下の関係式のものを導入する．

$$h_{\zeta_S}\left(\alpha_\zeta, h_S(h(\boldsymbol{v}))\right) = h_S(h(\boldsymbol{v})) + \sum_{n=1}^{N} b_n \sin n\pi\, h_S(h(\boldsymbol{v})) \quad (7)$$

ここで，$h_S(\cdot)$は適切化対象領域内での $h(\boldsymbol{v})$ の最小値 h_{min} を 0，最大値 h_{max} を 1 にスケーリングする 1 次関数であり，$\alpha_\zeta = [\,b_1, b_2, \cdots, b_N\,]^T$ は各 sin 関数の係数ベクトルである．ただし，この係数ベクトルの値は，2.3 項で述べた単調増加性を保証するために，後出の条件を満たすものである必要がある．適切化変換フィルターは，この関係式のもと，α_ζ を調整パラメータとして，$h_\zeta\left(\alpha_\zeta, h(\boldsymbol{v})\right) = h_S^{-1}\left(h_{\zeta_S}\left(\alpha_\zeta, h_S(h(\boldsymbol{v}))\right)\right)$ により定義する．

3.5　適切化変換フィルターの調整　適切化フィルターの調整パラメータ α_ζ は，適切化変換後の関数に対して高精度の 2 次応答曲面 $\tilde{h}_\zeta(\alpha_\zeta, \boldsymbol{v})$ が構成できるように，フィルターの単調増加性を保証しつつ，変換後の関数とその 2 次応答曲面との差が最小になるようにして決定する．この α_ζ の決定問題は以下の最適化問題として定式化することができる．

$$\left.\begin{aligned}&\text{find}\quad \alpha_\zeta = [\,b_1, b_2, \cdots, b_N\,]^T\\ &\text{that minimizes}\\ &E_\zeta = \frac{1}{n_\zeta}\sum_{k=1}^{n_\zeta}\left[h_\zeta\left(\alpha_\zeta, h(\boldsymbol{v})\right) - \tilde{h}_\zeta(\alpha_\zeta, \boldsymbol{v}_k)\right]^2\\ &\text{subject to}\quad \frac{\partial h_{\zeta_S}(\alpha_\zeta, h_S(h(\boldsymbol{v})))}{\partial h_S(h(\boldsymbol{v}))} \geq 0\\ &\qquad\qquad \text{over}\quad 0 \leq h_S(h(\boldsymbol{v})) \leq 1\end{aligned}\right\} \quad (8)$$

ここで，n_ζ は，適切化対象領域内でランダムに設定するサンプル点の個数である．

式 (8) 中の制約条件は上述のようにフィルターの単調増加性を確保するためのものであり，実際には，上式のような微分計算式ではなく，それに相当する代数的な制約条件式を用いる．その $N = 2$ の場合の実行可能領域を，付録 A に示す．なお，一連の操作を行うには前出の h_{max} と h_{min} の値が前提となるが，それらを厳密に求めることは困難であり，全サンプル点についての $h(\boldsymbol{v})$ の最大値 h^s_{max} と最小値 h^s_{min} をもとに，Δ_h $(0 < \Delta_h < 0.5)$ により定めるマージンを加味して，$h_{max} = h^s_{max} + \Delta_h(h^s_{max} - h^s_{min})$, $h_{min} = h^s_{min} - \Delta_h(h^s_{max} - h^s_{min})$ として定まる値で代替する．

3.6　制約条件式に対するフィルターの設定

対象関数 $h(\boldsymbol{v})$ が制約条件の場合，適切化変換の前後で関数値が 0 となる点が厳密に一致する必要がある．そのための補正を加えて前出のフィルター $h_\zeta\left(\alpha_\zeta, h(\boldsymbol{v})\right)$ を以下のように再定義する．

$$h_\zeta\left(\alpha_\zeta, h_0, h(\boldsymbol{v})\right) = h_S^{-1}\left(h_{\zeta_S}\left(\alpha_\zeta, h_S(h(\boldsymbol{v}))\right)\right) - h_0 \quad (9)$$

ここで，h_0 は補正のための定数であり，$h^s_{min} \leq 0 \leq h^s_{max}$ の場合には，変換の前後で関数値が 0 となる点が変化しないように，$h^s_{min} > 0$ の場合には，変換の前後で関数値が h^s_{min} となる点が変化しないように，$h^s_{max} < 0$ の場合には，変換の前後で関数値が h^s_{max} となる点が変化しないように定める．

4　数値計算例

提案手法を具体的な 2 つの数値計算例に適用した例を示す．以下では，適切化変換フィルターの構成回数 $K = 5$，処理適切化変換フィルターのサイズに関するパラメータ $C^{(0)} = 3.0$，適切化変換フィルターにおけるフーリエ級数の次数 $N = 2$，サンプル点数 $n_\zeta = 400$，適切化変換フィルターの補正のためのマージンに関するパラメータ $\Delta_h = 0.33$ とした．

4.1　2 変数関数のロバスト最適化問題への適用

(1)　最適化問題の定式化　提案手法の有効性を視覚的に確認するために，まず，2 変数の設計問題についてのロバスト最適設計を考える．対象問題のノミナル最適化問題は以下のように定式化される．

$$\left.\begin{aligned}&\text{find}\quad \boldsymbol{x} = [\,x_1, x_2\,]^T\\ &\text{that minimizes}\\ &f(\boldsymbol{x}) = 2 - \frac{40}{(x_1-3)^2 + (3-x_2)^2}\\ &\text{subject to}\\ &g_1(\boldsymbol{x}) = \frac{-50}{(x_1-1.75)^2(x_2-5)} - 4 \leq 0\\ &g_2(\boldsymbol{x}) = \log(0.1x_1 + 0.41)\\ &\qquad + x_2 e^{(x_1{}^2+3x_2-4)} - x_2 - 1 \leq 0\end{aligned}\right\} \quad (10)$$

この最適化問題に対し，設計変数の分布の標準偏差を $\sigma = [\,0.13, 0.13\,]^T$，分散共分散行列を $\Sigma = \begin{bmatrix} 1.690\times10^{-2} & 8.450\times10^{-3} \\ 8.450\times10^{-3} & 1.690\times10^{-2}\end{bmatrix}$ とする．

図 4 は以上の問題における目的関数と制約条件の等高線を表しており，制約条件式 $g_2(\boldsymbol{x})$ の実行可能領域境界近傍での非線形性が強いことが確認できる．

(2)　数値計算結果　上記の問題に対して，適切化変換を用いない場合と用いた場合のロバスト最適

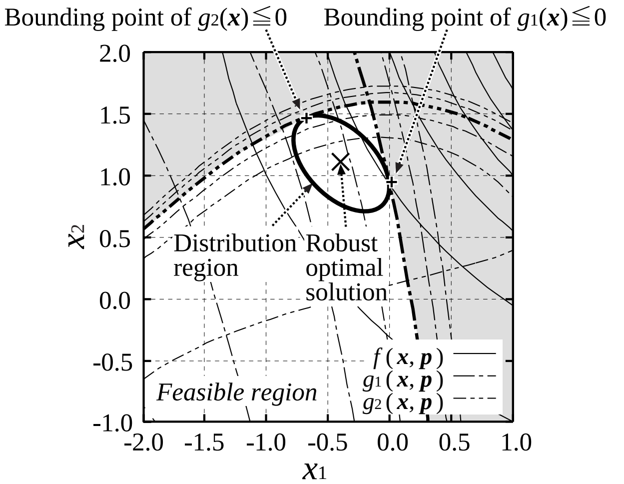


Fig. 4　Contour plot of two-dimensional sample problem

Table 1　Result of two-dimensional sample problem

	Robust optimum on original functions		Robust optimum on regularized function	
	Vaules in formulated model	Vaules in real behavior	Vaules in formulated model	Vaules in real behavior
x_1	−0.3945	⟵	−0.3943	⟵
x_2	1.1139	⟵	1.1003	⟵
$g_1(\boldsymbol{x}^*)$	0.0000	0.0148	0.0000	0.0023
$g_2(\boldsymbol{x}^*)$	0.0000	0.1835	0.0000	0.0139
$f(\boldsymbol{x}^*)$	−0.2903	−0.2874	−0.3201	−0.2818

設計の結果を表 1 に示す．表中，第 2 列，第 4 列は 2 次応答曲面を用いて求めた限界点での近似関数値である．また，第 3 列，第 5 列は，得られたロバスト最適設計解において 2 次応答曲面を用いずに求めた限界点での関数値である．適切化変換を用いて得られた解の実際の限界点での制約条件値 (第 5 列) は，適切化変換を用いずに得られた解のもの (第 3 列) よりも，一桁，小さいことが確認できる．これは，適切化変換によって非線形性が強い制約条件式 $g_2(\boldsymbol{x})$ に関しても高精度の近似関数が構成されているためである．なお，反面において，目的関数が若干大きくなっているものの，それ自体は制約条件の評価がより正確になり，計算上の実行可能領域が後退したことによるものである．

(3)　適切化変換フィルターとその効果　上記の結果における適切化変換の効果を確認するために，実行可能領域境界条件近傍での非線形性が強い制約条件式 $g_2(\boldsymbol{x})$ の 2 次応答曲面が，適切化変換フィルターを用いることによって高精度化されている様子を検討する．図 5 は，最終の繰返し ($k=5$) において制約条件式 $g_2(\boldsymbol{x})$ に対して構成した適切化変換フィルターであり，単調増加関数であることが確認できる．また，原関数 $g_2(\boldsymbol{x})$ と適切化変換フィルターを介して適切化対象領域において原関数を変換して得られた適切

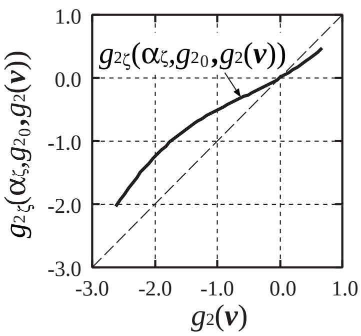
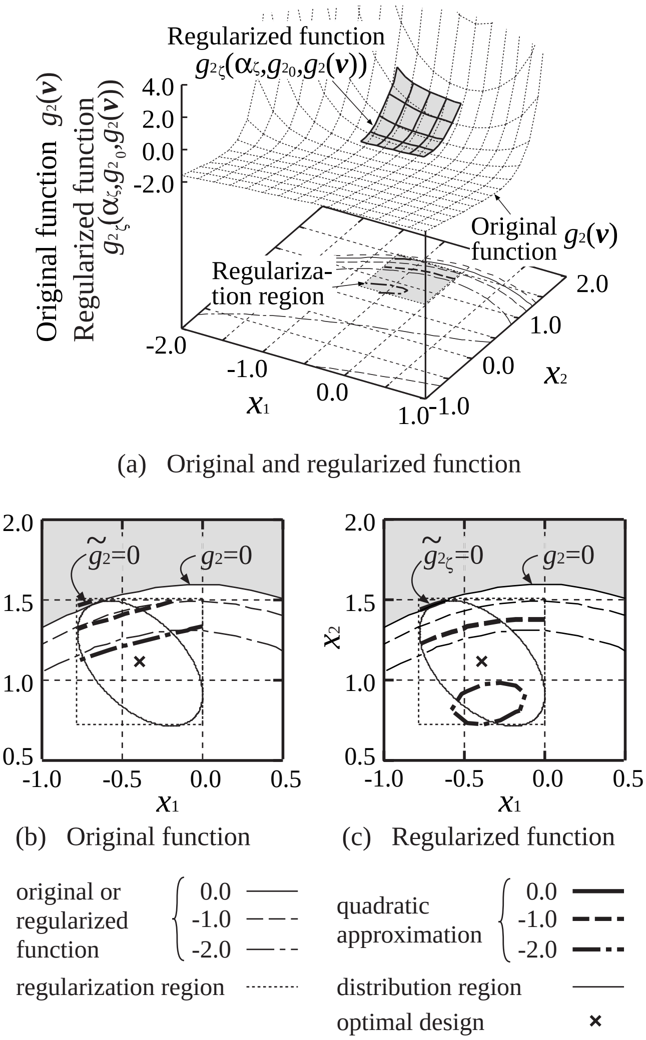


Fig. 5　Regularization filter for $g_2(\boldsymbol{v})$ at the final iteration　($b_1 = -0.128$, $b_2 = 0.076$)



(a)　Original and regularized function

(b)　Original function　(c)　Regularized function

Fig. 6　Approximation of $g_2(\boldsymbol{v})$ at the final iteration

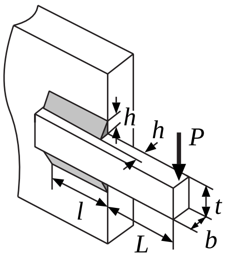


Fig. 7 Optimal design problem of welded beam

化関数 $g_{2\zeta}(\alpha_\zeta, g_{2_0}, g_2(\boldsymbol{v}))$ を図 6 (a) に示す．さらに，原関数から適切化変換フィルターを介さずに構成した 2 次応答曲面の等高線とその原関数と比較を同図 (b) に，適切化変換フィルターを介した場合のそれらを同図 (c) に示す．同図の (b) と (c) 中，$g_2=0$ で指示された曲線が原制約条件 $g_2 \leq 0$ の境界，点線が適切化対象領域，楕円が変数の変動領域，× 印が得られた解である．同図 (b) では，2 次応答曲面による $\tilde{g}_2=0$ の等高線が原関数のものとずれており，境界近傍での精度が悪いことが確認できる．これに対して，同図 (c) では，適切化変換を実施したことにより $\tilde{g}_{2_\zeta}=0$ として得られる境界の精度向上を確認できる．

4.2 溶接はりのロバスト最適設計問題への適用

(1) 最適化問題の定式化 次に，溶接はりの設計問題への適用例を示す．この問題は図 7 に示す片持ちはりの先端に作用する荷重により生じる曲げ応力やせん断応力，座屈，たわみ等に関する制約のもとで，材料と溶接のコストを最小化するように，はりの断面形状や溶接部の寸法を決定する問題であり，そのノミナルな最適設計問題は次式のように定式化される[9]．

$$\left.\begin{array}{l}
\text{find} \quad \boldsymbol{x}=[h,l,t,b]^T=\left[x_1,x_2,x_3,x_4\right]^T \\
\text{that minimizes} \\
\qquad f(\boldsymbol{x})=c_1\,{x_1}^2\,x_2+c_2\,x_3\,x_4\,(L+x_2) \\
\quad \text{Subject to} \\
\qquad g_1(\boldsymbol{x})=\tau(\boldsymbol{x})-\tau_{max} \leq 0 \\
\qquad g_2(\boldsymbol{x})=\sigma(\boldsymbol{x})-\sigma_{max} \leq 0 \\
\qquad g_3(\boldsymbol{x})=x_1-x_4 \leq 0 \\
\qquad g_4(\boldsymbol{x})=3.18\times10^{-3}-x_1 \leq 0 \\
\qquad g_5(\boldsymbol{x})=\delta(\boldsymbol{x})-\delta_{max} \leq 0 \\
\qquad g_6(\boldsymbol{x})=P-P_c(\boldsymbol{x}) \leq 0 \\
\qquad 2.54\times10^{-3} \leq x_1\,,\,x_4 \leq 5.08\times10^{-2} \\
\qquad 2.54\times10^{-3} \leq x_2\,,\,x_3 \leq 2.54\times10^{-1}
\end{array}\right\} \quad (11)$$

ここで，τ はせん断応力，σ は曲げ応力，δ はたわみであり，$\cdot_{max}$ はおのおのの許容値である．また，P_c は座屈応力，c_1 は材料コストについての係数，c_2 は加工コストについての係数である．本設計問題では，$L=355.6$ (mm)，$P=26.7$ (kN)，$\tau_{max}=93.9$ (MPa)，$\sigma_{max}=207.0$ (MPa)，$\delta_{max}=6.350$ (mm)，$c_1=67.414$ (\$/m^3), $c_2=2.936\times10^3$ (\$/m^3) とし，縦弾性係数を $E=207.0$ (GPa)，横弾性係数を $G=82.8$ (GPa) とした．また，各設計変数の変動の標準偏差を $\sigma=[\,0.5\,,\,0.5\,,\,0.17\,,\,0.17\,]^T$ (mm) とし，分散共分散行列を対角行列 diag (0.25, 0.25, 0.0289, 0.0289) (mm^2) とした．

(2) 検討ケース 上記の設計問題に対する検討ケースとして，(a)：原関数に対して直接的にミニ・マックス型ロバスト最適設計を行った場合，(b)：本論文で提案する適切化変換を用いた場合の結果である．さらに，(c)：制約条件式 $g_1(\boldsymbol{x})$，$g_2(\boldsymbol{x})$，$g_5(\boldsymbol{x})$ には設計変数が分母に含まれることから，構成する 2 次応答曲面の精度を向上させるために，設計変数が分母に含まれない形式[7]で次式に示すように再定式化を行った上で，ミニ・マックス型ロバスト最適設計を行った場合 (適切化変換は行わない)[3] の三つの場合を考えることにする．

$$\left.\begin{array}{l}
\text{find} \quad \boldsymbol{x}=[h,l,t,b]^T=\left[x_1,x_2,x_3,x_4\right]^T \\
\text{that minimizes} \\
\qquad f(\boldsymbol{x})=c_1\,{x_1}^2\,x_2+c_2\,x_3\,x_4\,(L+x_2) \\
\quad \text{Subject to} \\
\qquad {g_1}'(\boldsymbol{x})=\dfrac{1}{\tau_{max}}-\dfrac{1}{\tau} \leq 0 \\
\qquad {g_2}'(\boldsymbol{x})=\dfrac{1}{\sigma_{max}}-\dfrac{1}{\sigma} \leq 0 \\
\qquad g_3(\boldsymbol{x})=x_1-x_4 \leq 0 \\
\qquad g_4(\boldsymbol{x})=3.18\times10^{-3}-x_1 \leq 0 \\
\qquad {g_5}'(\boldsymbol{x})=\dfrac{1}{\delta_{max}}-\dfrac{1}{\delta} \leq 0 \\
\qquad g_6(\boldsymbol{x})=P-P_c(\boldsymbol{x}) \leq 0 \\
\qquad 2.54\times10^{-3} \leq x_1\,,\,x_4 \leq 5.08\times10^{-2} \\
\qquad 2.54\times10^{-3} \leq x_2\,,\,x_3 \leq 2.54\times10^{-1}
\end{array}\right\} \quad (12)$$

ここで，${g_1}'(\boldsymbol{x})$，${g_2}'(\boldsymbol{x})$，${g_5}'(\boldsymbol{x})$ はそれぞれ，式 (11) 中の $g_1(\boldsymbol{x})$，$g_2(\boldsymbol{x})$，$g_5(\boldsymbol{x})$ を変換したものである．

(3) 数値計算結果と考察 表 2 は上記の三つの場合のロバスト最適設計の結果を比較したものである．表中第 6 列の “∗” を記した値は，(c) の効果を (a) や (b) と比較するために，最適解を $g_1(\boldsymbol{x})$，$g_2(\boldsymbol{x})$，$g_5(\boldsymbol{x})$ に代入して求めた値である．同表より，適切化変換を施した場合 (表 2 (b)) の方が，原関数を直接的に使用する場合 (表 2 (a)) よりも，より制約条件違反が小さな解が得られていることが確認できる．また，適切化変換を行って得られる解 (表 2 (b)) は，原関数に対して直接的にミニ・マックス型ロバスト最適設計を行っ

Table 2 Robust optimal design result of welded beam

	(a) Robust optimum over original functions		(b) Robust optimum over regularized functions		(c) Robust optimum by manual reformulation	
	Values in formulated model	Values in real behavior	Values in formulated model	Values in real behavior	Values in formulated model	Values in real behavior
$x_1 = h$ [mm]	6.276	$\longleftarrow$	6.373	$\longleftarrow$	6.381	$\longleftarrow$
$x_2 = l$ [mm]	247.367	$\longleftarrow$	244.019	$\longleftarrow$	244.185	$\longleftarrow$
$x_3 = t$ [mm]	193.444	$\longleftarrow$	192.195	$\longleftarrow$	192.095	$\longleftarrow$
$x_4 = b$ [mm]	7.858	$\longleftarrow$	7.954	$\longleftarrow$	7.962	$\longleftarrow$
$g_1(\boldsymbol{x}^*)$ [MPa]	0.000	0.567	0.000	0.159	$0.000^{(*)}$	0.000
$g_2(\boldsymbol{x}^*)$ [MPa]	0.000	0.033	0.000	0.008	$0.000^{(*)}$	0.000
$g_3(\boldsymbol{x}^*)$ [mm]	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
$g_4(\boldsymbol{x}^*)$ [mm]	− 1.601	− 1.601	− 1.697	− 1.698	− 1.705	− 1.705
$g_5(\boldsymbol{x}^*)$ [mm]	− 5.914	− 5.913	− 5.914	− 5.913	$-5.911^{(*)}$	− 5.910
$g_6(\boldsymbol{x}^*)$ [kN]	−15.177	−15.166	−16.642	−16.638	−16.768	−16.757
$f(\boldsymbol{x}^*)$ [$]	3.736	3.736	3.751	3.746	3.751	3.751

た場合 (表 2 (a)) と，関数の形式を考慮して 2 次近似しやすいようにあらかじめ再定式化を行ってミニ・マックス型ロバスト最適設計を行った場合 (表 2 (c)) との中間的な性能を示していることも確認できる．以上より，関数の非線形性が強く 2 次近似しにくい関数に対しても，適切化変換を用いることによって高精度の 2 次応答曲面を適応的に構成することができることが確認できる．

4.3 計算コストに関する検討 適切化変換を行う場合には，適切化変換を行わない場合に比べ，適切化関数を構成するためのサンプリングを実施する必要があるため，余分な計算コストを必要とする．例えば，4.1 項に示した 2 変数関数のロバスト最適化問題においては，適切化変換を行わない場合には約 500 回の関数評価を行うのに対し，適切化変換を行う場合には約 3,800 回の関数評価を行った．また，4.1 項に示した溶接はりのロバスト最適設計においては，適切化変換を行わない場合には約 2,700 回の関数評価を行うのに対し，適切化変換を行う場合には約 8,000 回の関数評価を行った．ロバスト最適設計を実施する際には，サンプリングを行って関数の変動を推定するための応答曲面を構成する必要があるが，適切化変換を用いる場合には，それに加えて，適切化関数を構成するためのサンプリングが必要となっている．

上記のことは，元来，従来からの方法に比べて計算コストのかさむミニ・マックス型ロバスト最適設計法における計算コストの問題とともに，実用上の弊害となる．しかしながら，ロバスト最適設計において質の高い設計解を得ようとすればそれに伴って計算コストがかさむことは構造的な問題である．それらの状況に限らず，ロバスト最適設計における計算コストを改善するための方法を構築することは今後の課題であると言え，そのことに対応することができれば，適切化変換を行うことによる計算コストの増加についても，同様に対応できるものと考えられる．

5 結 言

本論文では，ミニ・マックス型ロバスト最適設計法に対する関数の適切化変換を用いた高精度化法を提案し，1 次関数に sin 関数群を重ねた適切化変換フィルターの形式とその基での具体的な数値計算例を示して，それらの有効性を検証した．ロバスト最適設計においては，解のロバスト性を厳密に考慮するために，変動領域における関数の変動を高精度で近似することが重要であるが，提案手法では，関数の適切化変換を行うことにより，非線形性が強い関数に対しても高精度の 2 次近似関数を構成することができるようになっており，これによって得られるロバスト最適解の精度を向上させることが可能となっている．

なお，本研究の一部は文部科学省科学研究費若手研究 B 13750119 の援助によるものである．

A　2 次の適切化変換フィルターが単調増加関数であるための条件

式 (7) における適切化変換フィルターとして 2 次のフーリエ級数を利用する場合 ($N=2$)，係数 b_1, b_2 についての式 (8) における実行可能領域は図 8 に示すような形となる．具体的には，点 $C\left(0, \dfrac{1}{4\pi}\right)$ を中心とする楕円 $b_1^2+32\left(b_2-\frac{1}{4\pi}\right)^2=\frac{2}{\pi^2}$ の境界と内部および，$b_2 \leq \frac{1}{2}b_1-\frac{1}{2\pi}$, $b_2 \leq -\frac{1}{2}b_1-\frac{1}{2\pi}$, $b_2 \leq \frac{1}{8}b_1$, $b_2 \leq -\frac{1}{8}b_1$ を満足する領域の和となる．計算過程でこの和の条件を判定する際には，点 C と解 P の距離 d_1 ならびに，半直線 CP と実行可能領域の境界との交点 Q との距離 d_2 を用いて，$\dfrac{d_1}{d_2} \leq 1$ により評価する．なお，式 (8) に示した適切化フィルターの決定問題では，$[\,b_1, b_2\,]^T=[\,0, 0\,]^T$ が実行可能解であることから，この点を初期解としてペナルティ法の内点法により解くようにする．

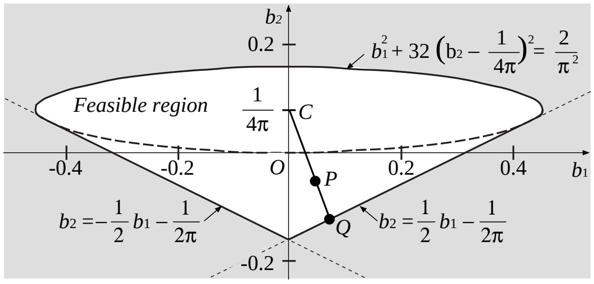


Fig. 8　Constraints on the parameters of second-order regularization filter

文　献

(1) Parkinson, A., Robust Mechanical Design Using Engineering Models, *Transactions of the ASME, Journal of Mechanical Design*, Vol. 117, (1995), pp. 48-54.

(2) Du, X. and Chen, W., Towards a Better Understanding of Modeling Feasibility Robustness in Engineering Design, *Transactions of the ASME, Journal of Mechanical Design*, Vol. 122, (2000), pp. 385-394.

(3) Hirokawa, N. and Fujita, K., Mini-Max Type Robust Optimal Design based on Design Variation Hyper Sphere and Quadratic Response Surface, *Proceeding of the 12th JSME Design & Systems Conference*, No. 02-31 (2002-11), pp. 224-227. (in Japanese)

(4) Yu, J.-C. and Ishii, K., Robust Design by Matching the Design with Manufacturing Variation Pattern, *Advances in Design Automation — Proceedings of the 20th Annual ASME Design Automation Conference*, DE-Vol. 69-2, (1994), pp. 7-14.

(5) Zhu, J. and Ting K.-L., Performance Distribution Analysis and Robust Design, *Transactions of the ASME, Journal of Mechanical Design*, Vol. 123, (2001), pp. 11-17.

(6) Yamazaki, K., Response Surface Approximation and Its Application to Nonlinear Structural Optimization, *Proceeding of the 4th JSME Optimization Symposium*, No. 00-27 (2000-11), pp. 169-174. (in Japanese)

(7) Yamakawa H. ed., *Optimal Design Handbook — Basis, Strategy and Application —*, (2003), pp. 32-36, Asakura-shoten. (in Japanese)

(8) Kubo, S., *Inverse Problems*, (1992), Baifukan. (in Japanese)

(9) Rao, S. S., *Engineering Optimization, Theory and Practice, Third Edition*, (1996), pp. 534-535, Wilsey.