【19】

氏名・(本籍)	伊達(だて)悦朗(えつろう)
学位の種類	理学博士
学位記番号	第 5944 号
学位授与の日付	昭和58年3月17日
学位授与の要件	学位規則第5条第2項該当
学位論文題目	**サイン・ゴルドン型非線型微分方程式の多重ソリトン解と準周期解**
論文審査委員	(主査) 教授 池田 信行 (副査) 教授 尾関 英樹　教授 田辺 広城　助教授 田中 俊一 講師 辻下 徹

論文内容の要旨

本論文においては，次の形の線型方程式系

$$\partial\Phi/\partial\xi=(\textstyle\sum_{j=0}^{m}M_j(\xi,\eta)\lambda^j)\Phi,\quad \partial\Phi/\partial\eta=(\textstyle\sum_{j=0}^{n}N_j(\xi,\eta)\lambda^{-j})\Phi$$

(λはパラメータ，M_j，N_jは2次行列）の可積分条件の形に表わされる非線形微分方程式のクラスを主として考える。サイン・ゴルドン型と呼ばれる，このクラスの方程式の厳密解と代数曲線の理論との関係を論じることが本論文の主な目的である。このクラスの方程式の例としては，微分幾何学，数理物理学に現われる，いわゆるサイン・ゴルドン方程式

$$\partial^2u/\partial\xi\partial\eta+\sin u=0,\quad u=u(\xi,\eta)$$

等がある。

代数幾何学的手法により，非線型方程式を扱う研究は，1960年代後半以降の，ソリトン理論の進展の過程において現われてきた。Krichever, Novikov, Manin, Mumford等は，ソリトン理論の出発点となったKorteweg-de Vries方程式を含むあるクラスの非線型方程式と代数曲線の理論との密接な関係を示した。しかしながら，上にあげたサイン・ゴルドン方程式はそのクラスには含まれない。彼らにより扱われたクラス，およびサイン・ゴルドン型方程式はともに，線型方程式系の可積分条件の形に表わされるのであるが，後者はその線型方程式の係数がパラメータに有理的に依存している点において前者と異なる。本論文では，Krichever等により扱われた場合における代数曲線の理論との関係を，サイン・ゴルドン型方程式に対し拡張し，更に新たな観点からの代数曲線の理論との関係を

示す。

第一部においては多重ソリトン解と呼ばれる厳密解を構成する。その構成法の要点は，対応する線型方程式系の同時解となるべき関数をパラメータの関数として特徴付け，構成する点にある。その特徴付けは，Krichever，Manin等の代数幾何学的方法を，より具体的に定式化し，一般化したもので，二重点を持つ有理曲線上の関数の性質に対応している。この方法は，Krichever等の方法より適用範囲がひろい。ソリトン理論に現われる，微分・差分方程式の典型である戸田格子の方程式にもこの方法を適用し，多重ソリトン解を求めた。

第二部においては，上述の考察を基礎として，サイン・ゴルドン型方程式の準周期解と呼ばれる厳密解を構成する。その要点は，上述の構成を一般化し，同時解となるべき関数を超楕円曲線上の，ヤコビの逆問題およびアーベル積分の理論を用いて，特徴付け，構成する点にある。この際，Krichever等の扱った場合と比較して，関数の真性特異点の個数を増やす必要があることがわかる。解は，θ 関数を用いて表示される。又，Pohlmeyer，Lund，Reggeにより提起されたサイン・ゴルドン方程式の一般化

$$\partial^2 u/\partial\xi\,\partial\eta - \partial v/\partial\xi \cdot \partial v/\partial\eta \cdot \sin(u/2)\big/2\cos^3(u/2) + \sin u = 0, \qquad u = u(\xi, \eta)$$
$$\partial^2 v/\partial\xi\,\partial\eta + (\partial u/\partial\xi \cdot \partial u/\partial\eta + \partial u/\partial\eta \cdot \partial v/\partial\xi)/\sin u = 0 \qquad v = v(\xi, \eta)$$

とサイン・ゴルドン方程式の関係を，上述の方法で構成される準周期解のクラスで考察した。その結果，この関係は，超楕円曲線上にある種のinvolution（対合）が存在するための条件と対応しているという，代数曲線の理論との新たな関係を見出した。更に，このように構成される準周期解が実数値となるための条件を，Klein，Weichold，Wittにより研究された対称リーマン面の概念を用いて求めた。

論文の審査結果の要旨

KdV方程式の進行波解の考察に由来する非線形型方程式の厳密解の研究は数学の多くの分野との関連を一層深めつつある。その周期解を具体的に表現する問題は，Krichever，Novikov，Manin，Mumford等の研究によってKdV方程式を含むあるクラスの非線型方程式の解と代数曲線の理論の密接な関係の解明へと発展した。一方，サイン・ゴルドン方程式

$$\frac{\partial^2 u}{\partial\xi\,\partial\eta} + \sin u = 0$$

はKdV方程式と類似な多くの特徴を持っているが彼等の枠組には含まれない。

伊達君は本論文において，次の形の線型方程式系

$$\frac{\partial\Phi}{\partial\xi} = \Big(\sum_{j=0}^{m} M_j(\xi,\eta)\lambda^{j}\Big)\Phi, \qquad \frac{\partial\Phi}{\partial\eta} = \Big(\sum_{j=0}^{n} N_j(\xi,\eta)\lambda^{-j}\Big)\Phi$$

（ここでλは助変数，$M_j(\xi, \eta)$，$N_j(\xi, \eta)$は２次行列）の可積分条件の形に表わされる非線型微分方程式の解と代数曲線の理論の関係を解明している。サイン・ゴルドン方程式はこの枠組で扱うことが出来る典型的な方程式である。この研究によって広い範囲の非線型方程式の研究に対し，代数幾何学的方法が適用可能になった。これらの取扱いにおいては方程式の準周期解は一般には複素数値の範囲で考察されているが，特に解が実数値になるための条件を決定する必要がある。この問題を伊達君は対称リーマン面の理論を用いて解決している。さらにサイン・ゴルドン方程式の準周期解を，その一般化であるPohlmeyer，Lund，Regge等によって提起された方程式に対応する超楕円曲線のリーマン面の性質を用いて特徴づけている。

本論文は非線型方程式の研究に関する一般的方法の発展に大きく貢献するとともに，新しい問題の提起を行いその解決を与えている。さらに，これらの結果は独創的方法によって導かれており高く評価される。

以上，本論文における伊達君の研究は非線型微分方程式の理論の進歩に寄与するところきわめて大きく，理学博士の学位論文として十分価値あるものと認められる。