【25】

氏名・（本籍）	谷口 和夫 （たにぐち かずお）
学位の種類	理学博士
学位記番号	第 6244 号
学位授与の日付	昭和58年12月13日
学位授与の要件	学位規則第5条第2項該当
学位論文題目	**フーリエ積分作用素の多重積と包合的特性をもつ双曲型方程式の基本解**
論文審査委員	（主査）教授 田辺 広城 （副査）教授 池田 信行 助教授 井川 満 講師 小松 玄

論文内容の要旨

主部が対角形の双曲型作用素

$$L = D_t - \begin{bmatrix} \lambda_1(t, X, D_x) & & O \\ & \ddots & \\ O & & \lambda_\ell(t, X, D_x) \end{bmatrix} + (b_{mk}(t, X, D_x))$$

$$(\lambda_m \in M_t^0([O,\ T];\ S_\rho^1((2))),\ b_{mk} \in M_t^0([O,\ T];\ S_\rho^0))$$

の基本解 $E(t,\ s)$ は，eikonal 方程式を解くこととiterationを用いることにより

$$\begin{aligned} E(t,\ s) = I_\varphi(t,\ s) + \int_s^t I_\varphi(t,\ \theta)\{W_\varphi(\theta,\ s) \\ + \sum_{\nu=2}^{\infty} \int_s^\theta \int_s^{t_1} \cdots \int_s^{t_{\nu-2}} W_\varphi(\theta,\ t_1) W_\varphi(t_1,\ t_2) \cdots W_\varphi(t_{\nu-1},\ s) \\ \cdot dt_{\nu-1} \cdots dt_1\}\, d\theta \qquad (t_0 = \theta) \end{aligned}$$

と書ける。ここで $I_\varphi(t,\ s)$ と $W_\varphi(t, s)$ はフーリエ積分作用素を成分とする行列である。したがって，$E(t, s)$ の性質を調べるにはフーリエ積分作用素の多重積 $W_\varphi(\theta,\ t_1) W_\varphi(t_1,\ t_2) \cdots W_\varphi(t_{\nu-1},\ s)$ がどういう評価を持つかということを調べる必要がある。このことに関し次の定理が得られる。

定理1. $\phi_j(x, \xi) \in P_\rho(\tau_j, \tilde{\ell}_0)$, $p_j(x, \xi) \in S_\rho^{m_j}$, $j = 1, 2, \cdots\cdots$, $(\frac{1}{2} \leqq \rho \leqq 1)$ とする。次を仮定する。ⅰ）$\tilde{\ell}_0$ は十分大なる整数。ⅱ）十分小なる正数 τ_0 が存在して $\sum_{j=1}^{\infty} \tau_j \leqq \tau_0$ が成立する。ⅲ）$|\alpha + \beta| \leqq 2$ に対し $\{\partial_\xi^\alpha \partial_x^\beta (\varphi_j(x, \xi) - x \cdot \xi) / \tau_j\}$ は $S_\rho^{1-|\alpha|}$ で有界。ⅳ）$\sum_{j=1}^{\infty} |m_j|$ は収束する。ⅴ）$\{\langle \xi \rangle^{-m_j} p_j(x, \xi)\}$ は S_ρ^0 で有界。このとき，$\varphi_j(x, \xi)$ を相関数，$p_j(x, \xi)$ を表象とするフーリエ積分作用素 P_{j, φ_j} の多重積

$\widetilde{Q}_{\nu+1} = P_{1,\varphi_1} P_{2,\varphi_2} \cdots P_{\nu+1,\varphi_{\nu+1}}$

は適当な相関数$\Phi_{\nu+1}(x, \xi) \in P_\rho(\widetilde{\tau}_{\nu+1})$と適当な表象$q_{\nu+1}(x, \xi) \in S^{\overline{m}_{\nu+1}}$ ($\overline{m}_{\nu+1} = m_1 + \cdots \cdots + m_{\nu+1}$)をとると，$\Phi_{\nu+1}(x, \xi)$を相関数，$q_{\nu+1}(x, \xi)$を表象とするフーリエ積分作用素$Q_{\nu+1}, \Phi_{\nu+1}$となる。さらに，$\nu$に独立な定数$C_\sigma$が存在して上の表象$q_{\nu+1}(x, \xi)$から作られる集合$\{C_\sigma^{-(\nu+1)} \langle\xi\rangle^{-\overline{m}_{\nu+1}} q_{\nu+1}(x, \xi)\}$は$S^0_\rho$で有界である。

この定理の証明のキーポイントはフーリエ積分作用素の多重積$\widetilde{Q}_{\nu+1}$を擬微分作用素の多重積とフーリエ積分作用素$I_{\Phi_{\nu+1}}$（相関数が$\Phi_{\nu+1}(x, \xi)$，表象が1であるもの）との積に変形して擬微分作用素の多重積に関する評価を使うことである。この変形に次の定理を使用する。

定理2. $p(x, \xi) \in S^0_{\rho,\delta}$ $(0 \leqq \delta \leqq \rho \leqq 1, \ \delta < 1)$とする。

このとき，$p(x, \xi)$のセミノルム$|p|^{(\delta)}_{n+1, \ell_0}$ $(\ell_0 = (n+1)/(1-\delta))$が十分小であれば，$p(x, \xi)$を表象とする擬微分作用素のノイマン級数$\sum_{\nu=0}^{\infty} P^\nu$が収束し，作用素$I-P$の逆を与える。

この定理は振動積分の詳しい評価を求めることにより得られる。

次にLが包合的特性をもつ場合を考える。

定理3. 任意のm，kに対しorder 0の表象$a_{m,k}(t, x, \xi)$，$a'_{m,k}(t, x, \xi)$が存在し，$\tau - \lambda_m$と$\tau - \lambda_k$のPoisson bracket$\{\tau - \lambda_m, \tau - \lambda_k\}$は

$$\{\tau - \lambda_m, \tau - \lambda_k\} = a_{m,k}(t, x, \xi)(\lambda_m - \lambda_k) + a'_{m,k}(t, x, \xi)$$

と書けると仮定する。このとき，Lの基本解E(t, s)はフーリエ積分作用素の有限和で書ける。

この定理は，相関数の#一積に関する‘可換法則’を用いて証明される。

以上の結果から，熊ノ郷一谷口一戸崎で得られた波面集合の伝播に関する事実が明確に証明される。

論文の審査結果の要旨

本論文は主部が対角形の双曲系

$$L = D_t - \begin{pmatrix} \lambda_1(t, X, D_x) & & O \\ & \ddots & \\ O & & \lambda_\ell(t, X, D_x) \end{pmatrix} + (b_{mk}(t, x, D_x)) \qquad (1)$$

の基本解を構成し，それを用いて方程式LU=Oの解の特異性の伝幡を論じたものである。式(1)の基本解は一般にはフーリエ積分作用素の多重積の不定積分の無限級数として表わされる。谷口君は特にLの特性根$\{\lambda_j(t, x, \xi) ; j = 1, \cdots, \ell\}$に関して包合的と言われる条件が満たされるならば基本解は有限和の形に表わされることを示した。この表示を用いるとLU=Oの解の特異性の伝幡に関して従来知られていたことよりも遙かに多くのことを精密に知ることが出来る。

以上のことを示すために谷口君は先ずフーリエ積分作用素の多重積に関して深い研究を行なった。これはそれ自身独立の興味あるものである。一般に相関数が$\phi(x, \xi)$，表象が$p(x, \xi)$のフーリエ積分作用素をP_φと表わす。$\phi_j(x, \xi)$, $p_j(x, \xi)$をそれぞれS^1_ρ，$S^{m_j}_\rho$に属する相関数，表象として，谷

ロ君は $1/2 \leqq \rho \leqq 1$ の場合 $\{\phi_j\}$, $\{p_j\}$ がある意味で有界ならばフーリエ積分作用素の多重積

$$\widetilde{Q}_{\nu+1} = P_{1,\varphi_1} P_{2,\varphi_2} \cdots P_{\nu+1,\varphi_{\nu+1}}$$

はまたフーリエ積分作用素であり，その表象 $q_{\nu+1}$ に関して $\{C_0^{-\nu} q_{\nu+1}\}$ が有界になる様な正の数 C_0 が存在することを示した。これは，従来は $1/2 < \rho \leqq 1$ の場合に $\widetilde{Q}_{\nu+1}$ の作用素ノルムの評価のみが知られていたのに対し，更に進んで $1/2 \leqq \rho \leqq 1$ の場合に表象の評価を求めたものであり，この分野の研究に大きな進歩をもたらしたものである。この事実の証明において，先ず擬微分作用素のノイマン級数展開 $(I-P)^{-1} = \sum_{\nu=0}^{\infty} P^{\nu}$ の可能性に関する一般な事実を示し，それを用いて $I_{\varphi} R I_{\varphi *} = I$，$I_{\varphi *} R' I_{\varphi} = I$ を満足する擬微分作用素 R, R' の存在を示し，問題を擬微分作用素の多重積の研究に帰着している。ここで I_{φ} は相関数が $\phi(x, \xi)$, 表象が 1 のフーリエ積分作用素である。これらのことを用いて相関数の多重積の順序交換に関する定理を証明し所要の結果を得た。

本論文で明らかにされている事実は非常に興味深く注目すべきものであり，多くの困難な証明を独創的な方法で巧みに行なっている。以上により本論文は理学博士の学位論文として十分に価値があるものと認める。