Title	摂動のある安定過程の生成作用素に対するマルチンゲール問題について
Author(s)	小松, 孝
Citation	大阪大学, 1983, 博士論文
Version Type	
URL	https://hdl.handle.net/11094/33708
rights	
Note	著者からインターネット公開の許諾が得られていないため、論文の要旨のみを公開しています。全文のご利用をご希望の場合は、大阪大学の博士論文についてをご参照ください。

【13】

氏名・(本籍)	小(こ) 松(まつ) 孝(たかし)
学位の種類	理学博士
学位記番号	第 6125 号
学位授与の日付	昭和58年6月15日
学位授与の要件	学位規則第5条第2項該当
学位論文題目	**摂動のある安定過程の生成作用素に対するマルチンゲール問題について**
論文審査委員	(主査) 教授 渡辺 毅 (副査) 教授 池田 信行 教授 福島 正俊 助教授 中尾 愼太郎

論文内容の要旨

Markov 過程は連続関数の空間の上の半群として及び確率微分方程式の解として議論される。これらを統一したものとして martingale 問題が考えられる。いまLをR^d 上のLévy 型生成作用素とする。道の空間 $D(R_+ \to R^d)$上の確率測度Pが作用素Lに対する martingale問題の解であるとは，任意の compact な台を持つ滑らかな関数 f について

$$M^f(t) = f(X(t)) - f(X(o)) - \int_0^t Lf(X(s))\,ds$$

がPに関する martingale になることをいう。擬微分作用素Lの表象$\Psi(x, \xi) = e^{-ix\xi} L e^{ix\xi}$が$x$について連続ならばLに対する martingale 問題の解が存在することを筆者は前に示している。解の一意性が成立しない例がいくつか知られているが，それらはLが退化している場合である。そこで作用素Lが非退化であれば解の一意性が成立するかという問題が生ずる。ここでLが非退化であるとは，$0<\alpha \leqq 2$なるαが存在してLの表象$\Psi(x, \xi)$が，$\xi \fallingdotseq 0$に対して $\mathrm{Re}\,\psi^{(\alpha)}(x, \xi) < 0$ かつξについてα次の斉次関数である$\psi^{(\alpha)}(x, \xi)$ と$\phi^{(\alpha)}(x, \xi) = o(|\xi|^\alpha)(|\xi| \to \infty)$である$\phi^{(\alpha)}(x, \xi)$の和になっていることと解釈する。筆者は先に$\alpha = 2$の場合を論じた。この論文では$0<\alpha<2$で表象の主要部$\psi^{(\alpha)}$が$x$に無関係 ($\psi^{(\alpha)}(x, \xi) = \psi^{(\alpha)}(\xi)$) の場合を考察する。解の一意性の証明の要点は解の resolvent のL^p一評価($\alpha p > d$)であるが，本論文ではこのために Calderón–Zygmund の不等式すなわち特異積分作用素のL^p一有界性を利用する。土谷は先に$L = -|\partial|^\alpha + \phi^{(\beta)}(x, \partial)(\beta<\alpha)$ の場合を論じているが，特異積分の理論を用いればより一般のクラスの作用素Lについて martingale 問題の解の一意性が示される，$1<\alpha<2$の場合に限って具体的に述べる。いま

$$\psi^{(\alpha)}(\partial)f(x) = \int (f(x+y) - f(x) - y \cdot \partial f(x))\, m^{(\alpha)}(y)\,dy,$$

ただし$m^{(\alpha)}$は恒等的に0ではない$-d-\alpha$次の非負斉次関数とする。また

$$\phi^{(\alpha)}(x,\partial)f(x)=\int(f(x+y)-f(x)-I_{(|y|\leqq 1)}y\cdot\partial f(x))\,N^{(\alpha)}(x,dy)+b^{(\alpha)}(x)\cdot\partial f(x),$$

ただし$b^{(\alpha)}$は有界可測で

$$|N^{(\alpha)}(x,dy)|\leqq N_{*}^{(\alpha)}(dy),\quad \int|y|^{\alpha}\wedge 1\,N_{*}^{(\alpha)}(dy)<\infty$$

をみたす測度$N_{*}^{(\alpha)}(dy)$が存在するとする。この論文の主要定理は，$m^{(\alpha)}(y)$が球面$S^{\alpha-1}$上で十分滑らかであれば作用素$L=\psi^{(\alpha)}(\partial)+\phi^{(\alpha)}(x,\partial)$に対する martingale 問題の解の一意性が成立する，というものである。$\alpha\leqq 1$の場合の結果も同様である。なお本論文の方法はLの表象の主要部$\psi^{(\alpha)}(x,\xi)$がxによって変化する一般の場合にも適用できる。

論文の審査結果の要旨

マルチンゲール問題を明確に定義したのは Stroock と Varadhan(1969)である。彼らは連続係数をもつ多次元の非退化拡散作用素Lに対するマルチンゲール問題の解の存在と一意性を示し，それによってLを生成作用素にもつ拡散過程の一意的な存在を証明した。これはマルコフ過程論における長年の懸案を解決した重要な研究である。小松君は本論文を含む一連の仕事において，拡散作用素より一般な Lévy 型擬微分作用素のクラスに対して同様の問題を研究し，不連続な道をもつマルコフ過程の広いクラスを決定することに成功した。

小松君が一連の研究で扱っている作用素は$L=A^{(\alpha)}+B^{(\alpha)}(0<\alpha\leqq 2)$の形のもので，主要部$A^{(\alpha)}$の表象$\psi^{(\alpha)}(x,\xi)$については$\mathrm{Re}\,\psi^{(\alpha)}(x,\xi)<0$および$\xi$について$\alpha$の斉次関数であること，摂動部$B^{(\alpha)}$の表象については$\phi^{(\alpha)}(x,\xi)=0(|\xi|^{\alpha})\quad(|\xi|\to\infty)$を仮定する。このようなLに関するマルチンゲール問題の解の存在，および$\alpha=2$の場合の一意性は以前小松によって詳細に論じられ(1973)，ついで Stroock(1975)が小松の結果の別証明を与えた。しかし$0<\alpha<2$の場合の解の一意性については，土谷(1973, 74)などによって部分的な結果が得られたのみであった。

小松君は本論文において，$0<\alpha<2$で$A^{(\alpha)}$の表象がxに無関係な場合，$A(\alpha)$のLévy測度が非退化で滑らかという極めて自然な条件の下で，Lに関するマルチンゲール問題の解の一意性を示す事に成功した。証明は(1)$R_{\lambda}(\lambda-L)f=f$をみたし，有界な$L^{p}$－関数を連続関数に移すレゾルベント$R_{\lambda}$の構成，(2)マルチンゲール問題の解$(X_t)$が$R_{\lambda}$をレゾルベントにもつマルコフ過程であることの証明，の2段階から成る。本論文の独創的な点は，特異積分作用素に関する Calderón–Zygmund の不等式を巧みに適用して(1)を示し，(X_t)の近似過程(Z_t^{δ})の構成に新しい方法を導入することによって(2)を解決した点にある。最近小松君はこの方法を拡張することにより，$\psi^{(\alpha)}(x,\xi)$がxによって変化する場合のマルチンゲール問題の解決にも成功したが，重要なアイデアは本論文に負う所が多い。

以上のように，本論文における小松君の研究はマルコフ過程論およびそれに関連する解析学の分野に重要な貢献をなすものであって，理学博士の学位論文として十分価値あるものと認める。