様式３

論　文　内　容　の　要　旨

氏　名	（　嶺　山　良　介　）
論文題名	The limit sets of Coxeter groups （コクセター群の極限集合）

論文内容の要旨

Coxeter群はEuclid空間上の鏡映変換を抽象化したものとして定義され、幾何学的に重要な役割を果たす。この群は有限表示群であって非常に顕著な組み合せ的性質を持つことが知られており、その観点から多くの研究が為されてきた。一方で有限生成群そのものを幾何学的対象と見なし、その漸近的性質から群の構造を調べるという手法がGromovなどにより導入され、Gromovの意味で双曲的な群において深く調べられている。本論文ではこの観点からあるCoxeter群の類に対して双曲空間への離散的な作用を構成しその漸近的な振る舞いについて考察する。

Coxeter群を代数的に調べる際の最も基本的で有用な道具としてルート系がある。鏡映変換はベクトルの方向と1対1に対応しており、群の生成系の各元に対応する（長さを固定した）ベクトルの集合を単純ルート系と呼ぶ。ルート系は単純ルート系の軌道として定義され、Coxeter群の鏡映変換としての作用の構造を反映するものである。しかしながらルート系の研究は有限Coxeter群に対しては著しい結果がある一方、一般の無限Coxeter群に関しての結果はほとんど知られていない。そこでHohlweg-Labbe-Ripollは鏡映変換と、ある超平面への射影とを合成して得られる作用を定義し、その超平面に正規化したルート系を考えた。このように正規化することによってルート系の集積点集合を調べることが可能になる。彼らは同じ論文において集積点集合の分布に関する予想を述べている。本論文ではこの予想に対してランクnのCoxeter群に付随する二次形式が(n-1,1)の場合を考察し、その証明を与える。これは本質的にCoxeter群の集積点集合への作用が極小であるという事実を示すことによって得られる。さらに付随する二次形式が(n-1,1)の場合、その零点の集合は錐になる。鏡映変換は付随する二次形式を保つのでこの錐は群作用に関して不変である。従って超平面と錐との交点集合を考えるとこれは正規化された作用に関して不変であることがわかる。正規化する超平面を適切に選ぶと交点集合は有界となり、交点集合で分割される超平面の二つの連結成分のうち有界であるものは内部と呼ばれる。このとき上で述べたようにCoxeter群の内部への作用を考えることができる。内部はHilbert距離と呼ばれる距離を定めることにより距離空間になり、この空間は双曲空間のKleinモデルと等長的である。この空間への正規化した群作用は離散的かつ等長的であることがわかるのでCoxeter群の極限集合を定義できる。ルート系への作用は外部への作用を考えていることに他ならないので、内部への作用との関係性を調べるのは自然な問題である。実際、ルート系の集積点集合と極限集合は一致することが本論文において示される。これはHohlweg-Labbe-Ripollの予想と併せると極限集合の分布の様子がわかることを意味し、極限集合にはCoxeter群の構造が多く含まれていると期待される。Gromovの思想の下、この極限集合と群のCayleyグラフに対して定義される無限遠境界であるGromov境界とを比較する。この際、Coxeter群はGromov双曲的であるとは限らないのでGromov境界が定義されるかどうか明らかでない。そこで本論文ではその定義を任意の距離空間にまで拡張したものを用いる。一般に離散群が二つの空間に作用しているとき、それら二つの間に同変な全射連続写像が存在すればそれをCannon-Thurston写像と呼ぶ。本論文では群がCoxeter群でそのGromov境界から極限集合へのCannon-Thurston写像が存在することを示す。

様式 7

論文審査の結果の要旨及び担当者

氏　名　（　　嶺山　良介　　）		
	（職）	氏　名
論文審査担当者	主 査　教授	大鹿　健一
	副 査　教授	後藤　竜司
	副 査　教授	満渕　俊樹
	副 査　准教授	金　英子
	副 査　准教授	宮地　秀樹

論文審査の結果の要旨

本論文は、コクセター群に関する博士論文審査申請者（以下、申請者）の研究をまとめたものであり、２つの研究に大別される。

第一の研究は、コクセター群のルート系のコクセター群の作用による軌道の集積点集合の特徴付けに関する研究である。コクセター群は位数２の元により生成される群であり、その関係式はコクセター行列により記述される。コクセター群の各生成元は単純ルートと呼ばれるベクトルを対応し、コクセター群は単純ルートに関する超平面の鏡映変換により生成される群として生成元の個数と同一の次元を持つベクトル空間に作用する。この作用はコクセター行列から定まる２次形式を保ち､その２次形式の定義する錐により囲まれる領域に自然に作用する。申請者はコクセター行列の符号が(n-1、1)型の場合に、東谷氏（大阪大学）と中島氏（豊田工業大学）との共同研究において単純ルートの集積点の特徴付けに成功した。この結果はHohlweg、 Labbe、 Ripoll氏により予想されていたものである。申請者の研究によると、集積点集合が錐から定まる双曲空間へのコクセター群の作用の極限集合と一致する。このため、この研究により、元来代数的および多面体の組み合わせ的な研究が主流であったコクセター群の研究において、変換群による空間の無限遠における作用の観察するという力学系的視点からの研究及び不変集合（不変量）の研究が自然であることが明示された。

第二の研究は、極限集合の構造に関する研究である。一般に群が距離空間に作用する場合において群の無限遠境界から距離空間への群同変な連続写像が存在する場合、その連続写像をCannon-Thurston写像と呼ぶ。存在及び性質については双曲群の場合にはよく研究されている。しかしコクセター群は一般には双曲群ではなく、そして群の無限遠境界に関しては、位相などの基本的研究がほとんどなされていなかった。申請者はコクセター行列の符号が(n-1、1)型の場合にコクセター群の無限遠境界及びその位相を定義し、コクセター群の無限遠境界から極限集合（単純ルート系の集積点集合）へのCannon-Thurston写像の存在を証明した。申請者により定義されたコクセター群の無限遠境界は､与えられたコクセター群が双曲群の場合にはM.Gromovにより定義された無限遠境界と同相となる。申請者による存在の証明は、コクセター群のケーリーグラフ内の測地線の無限遠の振る舞いと、それらに対応する元の双曲空間へ作用の関連を巧みに解析することにより得られるものである。今回のCannon-Thurston写像の構成、即ち無限語による極限集合の記号化の成功により、コクセター群の研究において群の記号力学系との研究が自然に関連することが示唆される。

本論文には参考論文として、宮地氏（大阪大学）との共同研究により得られているタイヒミュラー空間に作用する双正則写像の特徴付けが加えられている。この研究も上記と同様の思想によるものである。即ち、タイヒミュラー空間の無限遠における双正則写像の作用を詳細に観察することにより得られた研究である。

上記の申請者による一連の研究は、空間の無限遠の作用を用いた力学系的視点によるコクセター群の研究の新しい知見を与え、そしてその研究の基礎をなすものと考えられる。そのため申請者の研究はコクセター群の理論のこれからの発展に寄与するところ大である。以上により、本論文は博士（理学）の学位論文として十分価値あるものと認める。