



Title	On the diffusive structure for the damped wave equation with variable coefficients
Author(s)	若杉, 勇太
Citation	大阪大学, 2014, 博士論文
Version Type	VoR
URL	https://doi.org/10.18910/34055
rights	
Note	

The University of Osaka Institutional Knowledge Archive : OUKA

<https://ir.library.osaka-u.ac.jp/>

The University of Osaka

論文内容の要旨

氏 名 (若 杉 勇 太)	
論文題名	On the diffusive structure for the damped wave equation with variable coefficients (変数係数を持つ消散型波動方程式の拡散構造について)
論文内容の要旨 消散型波動方程式は、2 階の双曲型偏微分方程式であり、摩擦のある媒質中の波動現象を記述する一つのモデルとして知られている。また多孔媒質中の圧縮性流の方程式系とも密接な関係があり、応用上の観点からも重要な方程式である。消散型波動方程式については、「拡散現象」と呼ばれる、対応する熱方程式との興味深い関連があり、これまで多くの研究がなされてきた。ここで拡散現象とは、消散型波動方程式の解が、時間無限大において、対応する熱方程式の解に漸近する現象をいう。摩擦項が定数係数の線形消散型波動方程式に対しては、Matsumura (1976) によるエネルギー減衰率の導出や、Nishihara (2003) による具体的な漸近形の発見などから、拡散現象が実際に起きることが知られていた。一方で、Mochizuki (1976) は摩擦項が変数係数の係数を持つ場合を考察し、この係数が時間-空間遠方で 1 次のオーダーよりも速く減衰するならば、解は自由波動方程式のように振る舞うことを示した。これらの結果は近年より精密化されており、現在までに知られていることを簡単にまとめると、「摩擦項の係数の遠方での減衰が 1 次より遅い（摩擦が効果的な）場合には、解は対応する熱方程式の解のように振る舞い、1 次より速い（摩擦が非効果的な）場合は、解は自由波動方程式の解のように振る舞う」と述べるができる。特に摩擦項の係数が時間変数にのみ依存する場合には Fourier 変換が有効で、Wirth (2006, 2007) により漸近形まで含めた詳細な結果が得られている。しかし、摩擦項の係数が空間変数に依存する場合には、Todorova-Yordanov (2009) により解のエネルギー減衰率は得られているものの、拡散現象を示すような結果はこれまで知られていなかった。また拡散現象に関連して、非線形の問題についても多くの研究がなされており、例えば定数係数の摩擦でべき乗型の非線形項を持つ場合に、その「臨界指数」が熱方程式のものと一致することが Todorova-Yordanov (2001) により示されている。ここで臨界指数とは、時間大域解の存在と非存在の分かれ目となる非線形項の指数のことをいう。しかし、摩擦項が変数係数を持つ場合には、特別な形状の摩擦項に対してのみ、臨界指数が決定されているという状況に留まっている。 本論文では、これまであまり結果が知られていなかったより一般の摩擦項に対して、その拡散現象や非線形問題の臨界指数の決定を行う。 以下、本論文の構成および各章の概要について述べる。 本論文は九章からなる。第一章では、問題の背景、本論文の主結果および、先行研究の要約を述べる。 第二章では、消散型波動方程式の解の減衰評価、拡散現象、非線形の臨界指数問題について、これまでに知られている基礎的な事実を解説する。 第三章では、空間変数に依存する摩擦項を持つ線形波動方程式に対する拡散現象について述べる。摩擦項の係数が空間変数に依存し、かつ効果的な場合に、解が時間無限大に応じて対応する熱方程式の解に漸近することを示す。証明には、Todorova-Yordanov (2009) による重み付きエネルギー法を、高階の導関数に対して拡張したものを用いる。 第四章では、時間および空間に依存する係数を持つ半線形消散型波動方程式に対する時間大域的適切性について考察する。摩擦項が空間変数のみ、または時間変数のみに依存する場合には、それぞれ Ikehata-Todorova-Yordanov (2009), Lin-Nishihara-Zhai (2012) らにより臨界指数が分かっているが、時間と空間両方の変数に依存する場合にはこれまで結果がなかった。そこでまず対応する半線形熱方程式から臨界指数を予想し、非線形項の指数が予想される指数よりも大きい（優臨界）場合に、小さな初期値に対し時間大域解が存在することを示す。証明には、摩擦項の形状から決まる適当な重みを用いたエネルギー法を用いる。 第五章では、時間変数に依存しかつスケール不変な摩擦項を持つ半線形波動方程式の臨界指数問題について述べる。この場合には、解の挙動が摩擦項の係数につく定数の大きさに依存して変化することが知られており、この定数が大きければ、解の挙動は熱方程式のものに近くなり、定数が小さければ自由波動方程式のものに近くなる。まず、優臨界の場合に、摩擦項につく定数が十分大ければ、小さな初期値に対し時間大域解が存在することを示す。さらに、臨界および劣臨界の場合には、定数の大きさに依らず解の爆発の結果が得られる。特に、摩擦項につく定数が十分小さ	

いときには、臨界指数が対応する熱方程式のものよりも上昇することが示される。これは、摩擦の効果が小さくなり、解の挙動が自由波動方程式のものに近くなったためと解釈できる。

第六章では、時間と空間両方の変数に依存する摩擦項を持つ、空間 1 次元の半線形消散型波動方程式の解の有限時間爆発について考察する。これまでの研究では、解の爆発を示す際に Zhang (2001) により導入されたテスト関数法が用いられていたが、この方法は方程式が発散形であることを要請しており、時間と空間両方の変数に依存する摩擦項に対しては適用できない。また Lin-Nishihara-Zhai (2012) では、方程式に適切な補助関数を掛けて方程式を発散形に変換する方法が考案された。この手法を時間と空間両方の変数に依存する摩擦の場合に適用するとき、補助関数として非斉次の 2 階双曲型方程式の解を取る必要があり、その詳細な評価を得ることなどが困難であった。そこで、本章では空間 1 次元の場合に制限し、特性曲線の方法で具体的に逐次近似で補助関数を構成することによりこの困難を回避する。この補助関数を用いて、摩擦項が時間遠方で 1 次よりも速く減衰する場合に解の爆発を示す。これは、摩擦が非効果的な場合の非線形問題に対する結果としては初めてのものである。

第七章では、半線形消散型波動方程式に対し、有限時間で爆発する解のライフスパンの上からの評価について述べる。摩擦項が定数係数の場合かつ空間次元が 3 以下の場合には、Li-Zhou (1995) および Nishihara (2003) の結果が知られているが、空間次元が 4 以上の場合と、変数係数の場合には全く結果が知られていなかった。本章では、これらの場合に対し、テスト関数法を応用することにより、劣臨界におけるほぼ最適なライフスパンの評価を与える。

第八章では、定数係数の摩擦項を持つ線形消散型波動方程式の解の拡散現象について一注意を与える。空間次元が 1, 2, 3 次元のときにはそれぞれ、Marcati-Nishihara (2003), Hosono-Ogawa (2004), Nishihara (2003) により、解を熱部分と波動部分に分解する評価式が得られている。空間 4 次元以上の場合には Narazaki (2004) により対応する評価が得られているが、その評価は最適ではない。本章では具体的な解公式を用いることにより、空間次元が 4 以上の場合に解を熱部分と波動部分に分解する最良な評価式を示す。

論文審査の結果の要旨及び担当者

氏 名 (若 杉 勇 太)			
	(職)	氏 名	
論文審査担当者	主 査	教授	西谷 達雄
	副 査	教授	林 仲夫
	副 査	教授	土居 伸一
	副 査	准教授	砂川 秀明

論文審査の結果の要旨

時間変数のみ、あるいは空間変数のみに依存する摩擦項をもつ半線形消散型波動方程式に対する初期値問題の時間大域解の存在や非存在、解の最大存在時間の評価、解の漸近挙動等に関しては Nishihara, Todorova, Yordanov, Reissig, Wirth, Ikehata らによる数多くの研究があるが、若杉君は本論文で時間—空間変数に依存する摩擦項をもつ半線形消散型波動方程式に対して従来の研究を発展させ様々な新しい結果を得ることに成功した。

べき乗型の非線形項を持つ場合に、時間大域解の存在と非存在を分ける臨界指数は、線形方程式の解の漸近挙動から、摩擦が効果的に働く場合は、臨界指数は対応する非線形熱方程式のものと一致し、逆に摩擦が効果的でない場合には臨界指数は対応する非線形波動方程式のそれに一致することが予想される。本論文では時間—空間変数に依存し効果的に働く摩擦項をもつ波動方程式に対して非線形項の指数が予想される臨界指数より大きい時に、十分小さな初期値に対して時間大域解の存在を示した。また空間一次元かつ摩擦が効果的でない場合には、臨界指数が対応する非線形波動方程式のものと一致することも明らかにした。

摩擦項が効果的から非効果的となる境目の場合には線形方程式の解の挙動は熱方程式と波動方程式の中間的な振る舞いをするのが分かっているが若杉君は本論文で非線形問題でも同様のことが起こることを始めて示した。また時間大域解が存在しない場合の解の最大存在時間の上からの評価をテスト関数法を応用して一般次元の場合に与えている。最大存在時間の上からの評価については空間 3 次元までしか結果がなく、一般空間次元に関しては初めての結果である。

摩擦項が効果的でかつ空間変数に依存する場合に線形波動方程式の初期値問題の解の漸近形を考察し重み付きエネルギー法を高階導関数にまで拡張することによって解の漸近形が対応する熱方程式の適当な初期値問題の解で与えられることを示した。これは摩擦項が空間変数に依存する場合に対して解の漸近形を得た最初の結果である。

以上のように、本論文は時間—空間変数に依存する摩擦項をもつ半線形消散型波動方程式に対する初期値問題の解の時間大域存在および非存在、解の最大存在時間の上からの評価、また変数係数の摩擦項を持つ波動方程式の初期値問題の解の時間無限大での漸近挙動についての多くの新しい結果を含み、種々の波動現象やそのべき乗型非線形項との関係に対するより深い理解への手がかりを与えるものである。よって本論文は博士（理学）の学位論文として十分価値あるものと認める。