様式３

論　文　内　容　の　要　旨

氏　　名　（　宮　西　吉　久　）	
論文題名	Low energy approximations of the Feynman path integral for Schrödinger evolution operators (シュレディンガー発展作用素に対するファインマン経路積分の低エネルギー近似)

論文内容の要旨

シュレディンガー方程式については、数多くの研究がなされてきた。とくに、シュレディンガー発展作用素のファインマン経路積分による表示は、物理学では厳密性を抜きにして常用されている。ただ不幸なことに、数学として厳密に扱うための測度を考えることは出来ない。実際、ファインマン経路積分で導入される cylinder sets 上の集合関数は、可算加法族をもつ複素測度に拡張できないことが知られている(Cameronの結果)。

数学的に厳密に扱うために、いくつか代替手段が考えられてきた。例えば

1.　Trotter Katoの公式を、ファインマン積分の数学的正当化とみなす方法
2.　プランク定数 h あるいは質量または時間を複素数とし、Wiener測度を構成し解析接続する方法
3.　ヒルベルト空間の新しい広義積分と考える方法（伊藤清の方法やAlbeverio達の方法など）
4.　超準解析を用いて、ディラック作用素に対する*測度における光速cを無限大数に取る方法
5.　時間分割近似法（藤原大輔の方法）

などである。これらの方法は、ポテンシャルが有界測度のフーリエ変換であったり、二次（調和振動）までのポテンシャルである場合には上手くいく。

しかしながら、コンパクトな多様体や高次（４次以上）のポテンシャルに対して、経路の役割が見える形で理論を展開できているとは言い難い。このような場合、有限時間に対して、2点を結ぶ古典経路が無限にあることが問題である。その上、シュレディンガー方程式の基本解は特異的であることが問題になっている。

これらの問題を考えるため、本論文では、コンパクトな多様体として球面、高次ポテンシャルとして偶数次数ポテンシャルを持つ一次元シュレディンガー方程式を扱った。

この際、時間分割近似法を用い、古典経路を有限個に制限するためにエネルギーに注目した。古典経路でもエネルギーが小さい軌道に限れば、2点間を結ぶ経路は有限個しかない。さらに、基本解も低エネルギー部分に射影制限すれば滑らかになっている。

まず、球面の場合には、曲がった空間の経路積分であることにも注意を要する。スカラー曲率R、時間tに対して、Rt/12が作用積分の補正項として必要となることが、物理学では提唱されている(Dewitt達)。エネルギー準位の評価と曲率による補正を合わせて、時間分割近似法がシュレディンガー発展作用素を与えることを本論文で示した。例えば、初期条件がラプラシアンの固有関数の有限和ならば、低エネルギー近似なしに、時間分割近似法がシュレディンガー方程式の解を与える。

さらに、高次のポテンシャルを扱った。時間tに対して、十分小さい領域内の2点を結ぶ古典経路は有限個であることがわかる。領域内を結ぶ線形経路を考え、作用積分を定義することができる。この定義のもと、経路積分として、低エネルギー近似を含んだ形で、時間分割近似法がシュレディンガー発展作用素を与えていることを示した。

以上の結果から、本論文は「一経路に対する作用積分と低エネルギー近似を用いた時間分割近似法」が、シュレディンガー発展作用素を与える傍証となっている。

様式7

論文審査の結果の要旨及び担当者

氏　名　（宮西　吉久）		
	(職)	氏　名
論文審査担当者	主 査　教 授	鈴木　貴
	副 査　教 授	関根　順
	副 査　教 授	日野　正訓

論文審査の結果の要旨

ファイマン積分は量子化された粒子状態の時間発展を記述するため1948年にDiracとFeynmanによって提唱され，今日では理論物理学の様々な問題に応用される基本的な道具となっている．一方数学的基礎は十分に整備されておらず，殆どの計算が数学的に正当化できていないのが現状である．それにもかかわらず，多くの研究者が継続的な努力を積み上げ，少しずつ進展も見られている．とりわけ最近，ファイマン積分の収束によってSchrödinger方程式の基本解を書き表す研究が進められ，成果を挙げている．しかしこの解析に限ってもファイマン積分の収束に関する数学研究はEuclid空間上で短いポテンシャルを与えた場合に限られてきた．一方形式計算では，多様体上でファイマン積分とSchrödinger方程式の基本解にはギャップがあること，そのギャップが曲率などの多様体の幾何学的計量とゼータ関数などの数論的関係式によって記述される場合があることなど，興味深い現象が明らかにされている．本論文はこのギャップに踏み込んだもので，ポテンシャルの遠方での増大が大きい場合と2次元球面の場合の2つについて，Feynman積分の収束を厳密に証明している．これらの結果は数学研究に新しい方向付けをしたものとして国内，国外の研究者から注目を集め，多くの研究者に分析されてその斬新さが広く認められているものである．本論文の成功の基礎は，Feynman積分の近似方法を工夫しているところにある．すなわち線形パス近似や低エネルギー近似という単純明快なスキームを適用した後で，鞍点法から出発した精妙な評価を積み重ねて収束を証明している．とりわけ通常の近似では発散すること，また2次元球面において近似極限に曲率が現れ，Heisenberg流のHamiltonianとギャップが生じることを示したことは，これまでの形式計算を正当化した著しい結果である．以上から本論文は博士（理学）の学位論文として価値のあるものと認める．