

Title	θ - ノイマン問題と θ - 問題に対する鋭い評価
Author(s)	齋藤, 鐵郎
Citation	大阪大学, 1984, 博士論文
Version Type	
URL	https://hdl.handle.net/11094/34614
rights	
Note	著者からインターネット公開の許諾が得られていないため、論文の要旨のみを公開しています。全文のご利用をご希望の場合は、 〈a href="https://www.library.osaka-u.ac.jp/thesis/#closed"〉 大阪大学の博士論文について <a>〉 をご参照ください。

Osaka University Knowledge Archive : OUKA

<https://ir.library.osaka-u.ac.jp/>

Osaka University

【1】

氏名・(本籍)	さい 齋	とう 藤	てつ 鐵	お 郎
学位の種類	理	学	博	士
学位記番号	第	6549	号	
学位授与の日付	昭和59年6月11日			
学位授与の要件	理学研究科 数学専攻 学位規則第5条第1項該当			
学位論文題目	$\bar{\partial}$ -ノイマン問題と $\bar{\partial}$ -問題に対する鋭い評価			
論文審査委員	(主査) 教授 田辺 広城 (副査) 教授 柴田 敬一 教授 尾関 英樹 講師 小松 玄			

論文内容の要旨

Mをエルミート計量をもつ複素多様体の相対コンパクトな領域で滑らかな境界をもつものとし、 $A^{p,q}$ を \bar{M} 上の滑らかな (p,q) -form 全体とする。 $D^{p,q}$ を $A^{p,q}$ の元で $\bar{\partial}$ の共役作用素の定義域に入るもの全体とする。 $D^{p,q}$ 上の二次形式を $Q(\phi, \psi) = (\bar{\partial}\phi, \bar{\partial}\psi) + (\bar{\partial})^*\phi, (\bar{\partial})^*\psi + (\phi, \psi)$ で定義する。

次の問題を考える。 $f \in A^{p,q}$ に対して、次の条件を満たす $u \in D^{p,q}$ はあるか、またいかなる評価を持つか。

$$(0, 1) \quad Q(u, \phi) = (f, \phi) \quad \text{for } \forall \phi \in D^{p,q}.$$

これを次の仮定(0, 2)の下で考える。

$$(0, 2) \quad Q(\phi, \phi) \geq K \int_{bM} |\phi|^2 ds \quad \text{for } \phi \in D^{p,q}$$

得られた結果を表わすために記号等を少し導入する。Uを境界 bM と交わる開集合で、 \bar{U} 上には次の様な(1, 0)型のベクトル場 $\{Z_1, \dots, Z_n\}$ があるものとする。Uの各点で $\{Z_1, \dots, Z_n\}$ は(1, 0)型接ベクトルの $0, n, s$ であり、 $Z_n = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{\partial}{\partial n} - \sqrt{-1} J \frac{\partial}{\partial n} \right)$ である、ここに $\frac{\partial}{\partial n}$ は bM の外向き法ベクトル場でJは複素構造である。

(0, 1)の解uについてKohnは次の評価を出した。 ζ_0 と ζ_1 をUに台をもつ C^∞ 級の実関数で、 $\text{supp } \zeta_0$ は $\{\zeta_1 = 1\}$ の内部に含まれるものとする。そのとき

$$\|\zeta_0 u\|_{k+1} \leq C_k \{ \|f\|_0 + \|\zeta_1 f\|_k \} \quad \text{for } k \geq 0,$$

ここにノルムは L^2 -ソボレフノルムである。

このKohnの評価ではuの一階上の微分しか扱っていないが、この論文では次の様にuの二階上の微分

まで評価できた。

$$\|\nabla_{w_i} \nabla_{w_j} \zeta_0 u\|_k + \|\nabla_{z_n} \zeta_0 u\|_{k+1} \leq C_k (\|f\|_0 + \|\zeta_1 f\|_k) \text{ for } 1 \leq i, j \leq 2n-2, k \geq 0,$$

ここに $W_{z_j} = \text{Im } Z_j$, $W_{z_{j-1}} = \text{Re } Z_j$ で ∇ は適当な接続である。

次に $\bar{\partial}$ -問題に対する鋭い評価を述べる。今 $\theta \in A^{p,q}$ が $\bar{\partial}$ -exact とする。このとき方程式 $\bar{\partial}v = \theta$ の解で $\bar{\partial}$ の零空間に直交するものは次の評価をもつ。

$$\sum_{j=1}^{2n-2} \|\nabla_{w_j} \zeta_0 v\|_k + \|\nabla_{z_n} \zeta_0 v\|_k \leq C_k \|\theta\|_k \text{ for } k \geq 0,$$

論文では簡単のため、証明は C^n 内の領域について述べ、それを一般の複素多様体への拡張の方法と必要な微分幾何の知識を Appendix に述べた。

論文の審査結果の要旨

滑らかな境界をもつ複素 n 次元有界領域 M での $\bar{\partial}$ -ノイマン問題

$$M \text{ で } \square u = f \text{ かつ } u, \bar{\partial}u \in \text{Dom}(\bar{\partial}^*), \text{ 即ち } bM \text{ で } i(\bar{Z}'_n)u = 0, i(\bar{Z}'_n)\bar{\partial}u = 0,$$

ただし u, f は (p, q) 型微分型式とし Z'_n は境界 bM で正則法線ベクトルと一致する $(1, 0)$ 型ベクトル場を表わす。

は 2 階楕円型境界値問題であるが統御性の条件が満たされないため、 f がソボレフ空間 $H^k(M)$ に属していても u は $H^{k+2}(M)$ に属するとは限らない。 M が強擬凸領域であり、 $q \geq 1$ のとき広義の解 u が存在すること及び f が $H^k(M)$ に属すならば u は $H^{k+1}(M)$ に属することが J.J. Kohn によって示されている。 u のすべての 2 階偏導関数が $H^k(M)$ に属さなくてもある方向の 2 階偏導関数が $H^k(M)$ に属するのではないかということが解の微分可能性に関する次の問題になり、これに関し、P. C. Greiner と E. M. Stein は次のことを示した。 u の allowable な方向の 2 階偏導関数は $H^k(M)$ に属し、 $\bar{Z}'_n u$ のすべての方向の 1 階偏導関数は $H^{k+1}(M)$ に属す。ただしここで境界への制限が $T^{1,0}(bM) \oplus T^{0,1}(bM)$ に属するベクトル場を allowable なベクトル場という、Greiner と Stein は L^2 -ソボフノルムのみでなく一般の L^p ソボレフノルム ($1 < p < \infty$)、Lipshitz ノルムに関しても同様のことが成立することを示しているが、 M は強擬凸としてレヴィ型式が非退化であること、計量が境界でレヴィ型式と一致する、即ちレヴィ計量であることを仮定している。齊藤君は L^2 ソボレフノルムに限るが一般のエルミート計量に関して強擬凸性より弱い仮定のもとで上記のことが成立することを示した。これの応用として非斉次コーシー・リーマン方程式 $\bar{\partial}v = \theta$ の解 v で $\bar{\partial}$ -閉な微分型式に直交するものに関して θ が $H^k(M)$ に属すれば v の allowable な方向の 1 階偏導関数と $Z'_n v$ が何れも $H^k(M)$ に属することを示した。

齊藤君の論文は Greiner と Stein の結果に含まれる不自然な仮定を除去して、一般的な条件のもとに $\bar{\partial}$ -ノイマン問題、非斉次コーシー・リーマン方程式に関して重要な評価を得たものであり、理学博士の学位論文として十分価値があるものと認める。