【1】

氏名・（本籍）	齋藤鐵郎（さいとうてつお）
学位の種類	理学博士
学位記番号	第 6549 号
学位授与の日付	昭和59年6月11日
学位授与の要件	理学研究科 数学専攻 学位規則第5条第1項該当
学位論文題目	$\overline{\partial}$ーノイマン問題と$\overline{\partial}$ー問題に対する鋭い評価
論文審査委員	（主査） 教授 田辺 広城 （副査） 教授 柴田 敬一　教授 尾関 英樹　講師 小松 玄

論文内容の要旨

Mをエルミート計量をもつ複素多様体の相対コンパクトな領域で滑らかな境界をもつものとし，$A^{p,q}$を$\overline{M}$上の滑らかな（p,q）－form全体とする。$D^{p,q}$を$A^{p,q}$の元で$\overline{\partial}$の共役作用素の定義域に入るもの全体とする。$D^{p,q}$上の二次形式を$Q(\phi,\psi)=(\overline{\partial}\phi,\overline{\partial}\psi)+((\overline{\partial})^{*}\phi,(\overline{\partial})^{*}\psi+(\phi,\psi)$で定義する。

次の問題を考える。$f\in A^{p,q}$に対して，次の条件を満たす$u\in D^{p,q}$はあるか，またいかなる評価を持つか。

（0，1）　$Q(u,\phi)=(f,\phi)$　for $\forall\phi\in D^{p,q}$。

これを次の仮定（0，2）の下で考える。

（0，2）　$Q(\phi,\phi)\geqq K\int_{bM}|\phi|^{2}ds$　for $\phi\in D^{p,q}$

得られた結果を表わすために記号等を少し導入する。Uを境界bMと交わる開集合で，$\overline{U}$上には次の様な（1，0）型のベクトル場$\{Z_1\cdots,Z_n\}$があるものとする。Uの各点で$\{Z_1\cdots,Z_n\}$は(1，0）型接ベクトルのo.n.sであり，$Z_n=\frac{1}{\sqrt{2}}(\frac{\partial}{\partial n}-\sqrt{1}\,J\frac{\partial}{\partial n})$である，ここに$\frac{\partial}{\partial n}$はbMの外向き法ベクトル場でJは複素構造である。

（0，1）の解uについてKohnは次の評価を出した。ζ_0とζ_1をUに台をもつC^∞級の実関数で，$\mathrm{supp}\,\zeta_0$は$\{\zeta_1\equiv 1\}$の内部に含まれるものとする。そのとき

$\|\zeta_0 u\|_{k+1}\leqq C_k\{\|f\|_0+\|\zeta_1 f\|_k\}$　for $k\geqq 0$,

ここにノルムはL^2－ソボレフノルムである。

このKohnの評価ではuの一階上の微分しか扱っていないが，この論文では次の様にuの二階上の微分

まで評価できた。

$\|\nabla_{w_i}\nabla_{w_j}\zeta_0 u\|_k+\|\nabla_{z_n}\zeta_0 u\|_{k+1}\leqq C_k\{\|f\|_0+\|\zeta_1 f\|_k\}$ for $1\leqq i$, $j\leqq 2n-2$, $k\geqq 0$,

ここに $W_{z_j}=\mathrm{Im}\,Z_j$, $W_{z_{j-1}}=\mathrm{Re}\,Z_j$ で∇は適当な接続である。

次に$\bar{\partial}$－問題に対する鋭い評価を述べる。今$\theta\in A^{pq}$が$\bar{\partial}$－exactとする。このとき方程式$\bar{\partial}v=\theta$の解で$\bar{\partial}$の零空間に直交するものは次の評価をもつ。

$\sum_{j=1}^{2n-2}\|\nabla_{w_j}\zeta_0 v\|_k+\|\nabla_{\bar{z}_n}\zeta_0 v\|_k\leqq C_k\|\theta\|_k$ for $k\geqq 0$,

論文では簡単のため，証明はC^n内の領域について述べ，それを一般の複素多様体への拡張の方法と必要な微分幾何の知識をAppendixに述べた。

論文の審査結果の要旨

滑らかな境界をもつ複素n次元有界領域Mでの$\bar{\partial}$－ノイマン問題

Mで$\square u=f$かつ$u,\bar{\partial}u\in\mathrm{Dom}(\bar{\partial}^*)$，即ちbMで$i(\bar{Z}_n')u=0$，$i(\bar{Z}_n')\bar{\partial}u=0$，

ただしu,fは（p,q）型微分型式としZ_n'は境界bMで正則法線ベクトルと一致する（1,0）型ベクトル場を表わす。

は2階楕円型境界値問題であるが統御性の条件が満たされないため，fがソボレフ空間$H^k(M)$に属していてもuは$H^{k+2}(M)$に属するとは限らない。Mが強擬凸領域であり，$q\geqq 1$のとき広義の解uが存在すること及びfが$H^k(M)$に属すならばuは$H^{k+1}(M)$に属すことがJ.J.Kohnによって示されている。uのすべての2階偏導関数が$H^k(M)$に属さなくてもある方向の2階偏導関数が$H^k(M)$に属するのではないかということが解の微分可能性に関する次の問題になり，これに関し，P.C.GreinerとE.M.Steinは次のことを示した。uのallowableな方向の2階偏導関数は$H^k(M)$に属し，$\bar{Z}'_n u$のすべての方向の1階偏導関数は$H^{k+1}(M)$に属す。ただしここで境界への制限が$T^{1,0}(bM)\oplus T^{0,1}(bM)$に属するベクトル場をallowableなベクトル場という，GreinerとSteinはL^2―ソボフノルムのみでなく一般のL^pソボレフノルム（$1<p<\infty$），Lipshitzノルムに関しても同様のことが成立することを示しているが，Mは強擬凸としてレヴィ型式が非退化であること，計量が境界でレヴィ型式と一致する，即ちレヴィ計量であることを仮定している。斉藤君はL^2ソボレフノルムに限るが一般のエルミート計量に関して強擬凸性より弱い仮定のもとで上記のことが成立することを示した。これの応用として非斉次コーシー・リーマン方程式$\bar{\partial}v=\theta$の解vで$\bar{\partial}$－閉な微分型式に直交するものに関してθが$H^k(M)$に属すればvのallowableな方向の1階偏導関数と$Z'_n v$が何れも$H^k(M)$に属することを示した。

斉藤君の論文はGreinerとSteinの結果に含まれる不自然な仮定を除去して，一般な条件のもとに$\bar{\partial}$－ノイマン問題，非斉次コーシー・リーマン方程式に関して重要な評価を得たものであり，理学博士の学位論文として十分価値があるものと認める。