【31】

氏名・（本籍）	藤　崎　正　敏（ふじ さき まさ とし）
学位の種類	理　学　博　士
学位記番号	第　7156　号
学位授与の日付	昭和61年3月18日
学位授与の要件	学位規則第5条第2項該当
学位論文題目	**確率制御と退化した拡散係数を持つBellman方程式**
論文審査委員	（主査）教授 渡辺　毅 （副査）教授 池田　信行　教授 田辺　広城　教授 福島　正俊

論文内容の要旨

Bellman方程式は元来確率制御問題と密接な関係を持っているが，近年それ自身に関する研究もかなり進んできた。一般的に云って，Bellman方程式の拡散係数が退化していない場合は,既にW.H.Fleming('75)，N.V.Krylov('80)によってほぼ完全な結果が得られている。一方，拡散係数が退化している場合は，Fleming('64)，Krylov('80)，P.L.Lions('80～'81)及び筆者('84)等による部分的な結果があるが，充分とは云い難い。

この論文では，Flemingが考察したやや特殊な型の退化したBellman方程式を拡張して，次の様な方程式の解の存在と一意性について述べる：

$$(1)\quad \inf_{\alpha\in A}\left\{\frac{\partial v}{\partial s}+\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{\nu}a_{ij}^{\alpha}(s,x)\frac{\partial^2 v}{\partial x_i\partial x_j}+\sum_{i=1}^{d}b_i^{\alpha}(s,x)\frac{\partial v}{\partial x_i}-c^{\alpha}(s,x)v\right.$$

$$\left.+L^{\alpha}(s,x)\right\}=0\ ,\quad (s,x)\in(0,T)\times R^d\ ,\quad v(T,x)=h(x),\quad x\in R^d$$

ここで，$1\leq\nu<d$，Aは可分な距離空間，$a=(a_{ij})$，$1\leq i,j\leq\nu$，は$a=\bar{\sigma}\,\bar{\sigma}^*$なる行列で($\bar{\sigma}$は$\nu$次行列)，すべての$(s,x)$について$\sup_{\alpha\in A}(\xi,a^{\alpha}(s,x)\xi)>0$とする。Flemingが扱ったのは方程式(1)に於いてaとb_i($\nu+1\leq i\leq d$)がαに依存しない場合である。方程式(1)に現われる係数はすべて，αに関して連続，(s,x)に関しては滑らかで，それらの微係数も含めて，その絶対値は多項式の次数で増大するものとする。このとき方程式(1)の次の意味での解vの存在と一意性を示すことができる。すなわち，vは(s,x)について連続，超函数の意味の微分$\frac{\partial v}{\partial s}$，$\frac{\partial v}{\partial x_i}$($1\leq i\leq d$)，$\frac{\partial^2 v}{\partial x_i\partial x_j}$($1\leq i,j\leq\nu$)が存在して局所有界で，ほとんどすべての$(s,x)$について等式(1)を満たす。

これを解くには，良く知られている様に，先ず次の様な確率制御問題を考える：制御系を確率微分方

程式

(2)　$dX_t = b^{\alpha_t}(t, X_t)dt + a^{\alpha_t}(t, X_t)d\beta_t, \; X_s = x$

で定め，評価函数 $v(s, x)$を

(3)　$v(s, x) = \inf E\left[\int_s^T L^{\alpha_t}(t, X_t)e^{-\int_s^t c^{\alpha}_{\tau}d\tau}dt + h(X_T)e^{-\int_s^T c^{\alpha}_{\tau}d\tau}\right]$

で定める。ここに，σは$\sigma = \begin{pmatrix} \bar{\sigma} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$なるd次行列，$(\beta_t)$はd次元ブラウン運動，$(\alpha_t)$はAに値を取る発展的可測過程とし，(3)式のinfはその様なすべての(α_t)について取るものとする。このとき(3)式で与えられた函数vが上に述べた意味で方程式(1)の解となる。証明の際に使う主な道具は，Krylovによって得られている評価函数の諸性質と，良く知られた凸函数の諸性質である。

解の一意性については，更にもう少し強い条件を仮定した上で証明できる。また，上述の結果は何れも係数がαについて有界な場合に得られたものであるが，係数がαについて有界でない場合にも簡単な場合には同様な結論が成立つ。

論文の審査結果の要旨

Bellman方程式は拡散過程の制御問題における評価関数（または利得関数）に対するheuristicな考察から導かれる非線型の偏微分方程式であって，確率過程の制御理論において重要であるばかりでなく，微分方程式論の立場からも興味ある研究対象である。このため，ここ十数年間，KrylovやFlemingを始めとして数多くの研究が行われて来たが，その大部分はBellman方程式の拡散係数が非退化な場合の研究であり，退化している場合の研究は極めて少ない。

藤崎君は本論文において，次のような退化したBellman方程式の解の存在と一意性について考察した。

$$(*)\begin{cases} \inf\limits_{\alpha}\left\{\dfrac{\partial v}{\partial s} + \dfrac{1}{2}\sum\limits_{i,j=1}^{\nu} a^{\alpha}_{ij}(s, x)\dfrac{\partial^2 v}{\partial x_i \partial x_j} + \sum\limits_{i=1}^{d} b^{\alpha}_i(s, x)\dfrac{\partial v}{\partial x_i} - c^{\alpha}(s, x)v + L^{\alpha}(s,x)\right\} = 0, \\ (s, x) \in (0, T)\times \mathbf{R}^{\alpha}, \quad v(T, x) = h(x) \end{cases}$$

ここでαは制御パラメータ，$1 \leqq \nu < d$，$a^{\alpha}(s, x) = (a^{\alpha}_{ij}(s, x))$は$\nu$次の対称行列で，すべての$(s, x)$について$\sup\limits_{\alpha}(\xi, a^{\alpha}(s, x)\xi) > 0$ $(\mathbf{R} \in \xi \neq 0)$とする。すなわち，iまたは$j = \nu + 1, \cdots, d$にたいする拡散係数$a^{\alpha}_{ij}(s, x)$は恒等的に0であるとする。

本論文における主要な結果はつぎの通りである。方程式(*)に対応する確率制御問題の評価関数をv^*とする。このとき，データa，b，c，L，hに関する適当な正則性の条件の下で，超関数微分$\dfrac{\partial v^*}{\partial s}$，$\dfrac{\partial v^*}{\partial x_i}$ $(1 \leqq i \leqq d)$，$\dfrac{\partial^2 v^*}{\partial x_i \partial x_j}$ $(1 \leqq i, j \leqq \nu)$が局所有界関数で，ほとんどすべての(s, x)について方程式(*)を満たす。さらにデータについてもう少し強い仮定をおけば，(*)の任意の解がv^*と一致することが示される。v^*が解であることの証明は非退化な場合からの極限移行によって示されるが，拡散係数がαに依存するため退化方程式に対するこれ迄の方法は適用できない。藤崎君は，Krylovによって得られている評価関数の諸性質と巧妙な変数変換を結合してこの点を解決した。

方程式(*)においてaとb_i $(\nu + 1 \leqq i \leqq d)$が$\alpha$に依存しない特別な場合は以前Flemingによって扱

われ，ａのみがαに依存しない場合は，最近藤崎君自身によって研究された。本論文の結果はこれらの本質的な一般化を与えており，応用の面からも極めて興味深い。

以上本論文における藤崎君の研究は，確率論および解析学に寄与する所が大きく，理学博士の学位論文として十分価値あるものと認める。