【9】

氏名・（本籍）	大(おお) 倉(くら) 弘(ひろ) 之(ゆき)
学位の種類	理学博士
学位記番号	第 6933 号
学位授与の日付	昭和60年6月24日
学位授与の要件	学位規則第5条第2項該当
学位論文題目	**マルコフ過程に収束する確率過程族に対する大きい偏差の研究**
論文審査委員	（主査） 教授 渡辺 毅 （副査） 教授 池田 信行　教授 石井 恵一　助教授 中尾愼太郎 講師 眞鍋昭治郎

論文内容の要旨

大きい偏差（large deviation）の理論は確率過程に対する漸近解析の方法を与えるもので，特に確率過程$\{\eta_t\}$に対してProb$\{\eta_t\in A\}\to 0$（$t\to\infty$）となる場合に着目して，その収束の速さの定量的な評価を問題にするものである。

近年DonskerとVaradhanはマルコフ過程に対する大きい偏差の理論を著しく発展させ，並行して統計物理から派生した問題の解決をはじめ多くの重要な応用例を与えた。本論文の主結果は Donsker−Varadhan の理論における不変原理と言うべきものである。これを特別な場合に限って以下に述べる。

$\{x(t)\}$を距離空間X上のマルコフ過程とし，μ_tをその滞在分布：$\mu_t(A)=\frac{1}{t}\int_0^t\chi_A(x(s))ds$（$A\subset X$）とする。Donsker−VaradhanはX上の確率測度の適当な集合Bに対し，

$$\mathrm{Prob}\{\mu_t\in B\}=\exp\{-t\inf_{\mu\in B}I(\mu)+o(t)\}\quad(t\to\infty)$$

の形の漸近公式を証明し，$I(\mu)$の具体的計算方法を与えた。ここで適当な確率過程の族$\{x^\varepsilon(t)\}$（$\varepsilon>0$）で，$\varepsilon\downarrow 0$の時上の$\{x(t)\}$に確率過程の法則の意味で収束するものを考える。主結果の主張は，各$\{x^\varepsilon(t)\}$の滞在分布をμ_t^εとするとき，

$$\mathrm{Prob}\{\mu_t^\varepsilon\in B\}=\exp\{-t\inf_{\mu\in B}I(\mu)+o(t)\}\quad\left(\begin{matrix}t\to\infty\\ \varepsilon\downarrow 0\end{matrix}\right)$$

が成立することである。ここで重要なことは$I(\mu)$が前と同じものであり，族$\{x^\varepsilon(t)\}$のとり方には依らず，極限の$\{x(t)\}$のみから定まることである。

上記の主結果における$\{x^\varepsilon(t)\}$の例としては多くの極限定理におけるものをとることができる。例えば①周期的あるいはランダムな係数をもつ拡散過程のhomogenization，②マルコフ過程の加法的汎関数に対する極限定理，③ランダムな力学系（例えば輸送過程）の拡散近似，などにおけるものは重

要な例である。これらは $\{x^\varepsilon(t)\}$ がある確率過程 $\{X(t)\}$ から $x^\varepsilon(t)=\varepsilon X(t/\varepsilon^2)$ の形で与えられている典型的な極限定理であり，いずれも極限 $\{x(t)\}$ は拡散過程（特に①②ではブラウン運動）である。尚，主結果において各 $\{x^\varepsilon(t)\}$ はあるマルコフ過程 $\{\tilde{x}^\varepsilon(t)\}$ の射影になっていればよく，それ自身がマルコフ過程である必要はない。上の②③はそのような例ともなっていて，このような場合を含むことは本研究の一つの特徴である。

最後に応用について述べる。Donsker−Varadhanの理論のいくつかの応用例においては，その適用対象が特殊なスケール変換で不変なマルコフ過程（例えばブラウン運動 $\{x(t)\}$ は確率過程として $\{\varepsilon x(t/\varepsilon^2)\}$ と同法則である。）に限られている。本研究ではこのような適用対象を組織的に広げることができる典型的な例としてChung型の重複対数の法則を詳しくとりあげた。これにはDonsker−Varadhanの理論の応用としての証明がブラウン運動の場合に知られている。そこで適当な確率過程 $\{x(t)\}$ に対し $x^\varepsilon(t)=\varepsilon X(t/\varepsilon^2)$ とおき，$\{x^\varepsilon(t)\}$ がブラウン運動 $\{x(t)\}$ に確率過程の法則の意味で収束することを仮定する。この $\{x^\varepsilon(t)\}$ に主結果を適用することにより $\{x(t)\}$ に対するのと同じ重複対数の法則が $\{X(t)\}$ に対して証明される。前述の例①②における $\{X(t)\}$ はこのことの例ともなっている。

論文の審査結果の要旨

f，gは区間A＝[a，b]上の正の連続関数で，fはA上で唯1つの最小点をもつとする。このとき $P^h(A)=\int_a^b g(x)\exp\{-h^{-1}f(x)\}dx\ (h>0)$ に対し $\lim_{h\to 0} h\log P^h(A)=-\inf(f(x);x\in A)$ が成り立つ。いま，$P^h(A)$ がある関数空間上の確率測度の族 $\{P^h\}$ における漸近的微小確率であるとき，上と類似の結果がどのような場合に成り立つかを調べることは，確率過程論において極めて重要であり，大きい偏差（large deviation）の理論と呼ばれる。近年大きい偏差の研究は急速に進みつつあるが，中でもDonskerとVaradhanによるマルコフ過程に対する大きい偏差の理論（以下D−V理論と略記）は特に著しい成果である。

本論文の主要な結果は①D−V理論における基本定理の本質的な拡張，および②拡張の有効性を示す応用例を与えたことである。以下にその概略を述べる。

Xを距離空間，M(X)をX上の確率測度の全体，$\{x(t)\}$ をX上のマルコフ過程，μ_t を $\{x(t)\}$ の滞在分布 $\mu_t(B)=\frac{1}{t}\int_0^t \chi_B(x(s))ds\ (B\subset X)$ とする。D−V理論の基本定理は，適当な $A\subset M(X)$ に対して $\lim_{t\to\infty}\frac{1}{t}\log P\{\mu_t\in A\}=-\inf\{I(\mu);\mu\in A\}$ が成り立つというものである。ここで $I(\mu)$ は $\{x(t)\}$ から定まるM(X)上の汎関数である。大倉君はこの定理を次のように一般化した。「確率過程の族 $\{x^\varepsilon(t)\}$ が $\varepsilon\downarrow 0$ のときマルコフ過程 $\{x(t)\}$ に分布収束しているならば，各 $\{x^\varepsilon(t)\}$ の滞在分布 μ_t^ε に対し，

$$P\{\mu_t^\varepsilon\in A\}=\exp\{-t(\inf_{\mu\in A} I(\mu)+o(1))\}\quad \left(\begin{matrix}t\to\infty\\ \varepsilon\to 0\end{matrix}\right)$$

の形で大きい偏差の定理が成り立つ。」これはD−V理論における一種の不変原理を与えるもので，これを用いてD−V理論の適用範囲を著しく拡大することができる。例えば $\{x^\varepsilon(t)\}$ がある確率過程 $\{X(t)\}$

によって$x^{\varepsilon}(t)=\varepsilon X(t/\varepsilon^2)$の形で与えられるような極限定理が数多く知られているが，上の結果から$\{X(t)\}$の$t\to\infty$におけるある種の漸近的性質は極限過程$\{x(t)\}$のそれと同じであることが期待される。そのような具体例として，Chung型重複対数の法則が本論文の後半において詳しく論じられている。

以上，本論文における大倉君の研究は，確率過程の漸近理論の発展に寄与するところが大きく，理学博士の学位論文として十分価値あるものと認める。