



Title	代数的数からなる巾級数値の代数的独立性
Author(s)	西岡, 久美子
Citation	大阪大学, 1985, 博士論文
Version Type	
URL	<a href="https://hdl.handle.net/11094/35127">https://hdl.handle.net/11094/35127</a>
rights	
Note	著者からインターネット公開の許諾が得られていないため、論文の要旨のみを公開しています。全文のご利用をご希望の場合は、 <a href="https://www.library.osaka-u.ac.jp/thesis/#closed">＜a href="https://www.library.osaka-u.ac.jp/thesis/#closed"&gt;https://www.library.osaka-u.ac.jp/thesis/#closed</a> >大阪大学の博士論文について <a href="https://www.library.osaka-u.ac.jp/thesis/#closed">&lt;/a&gt;</a> をご参照ください。

*The University of Osaka Institutional Knowledge Archive : OUKA*

<https://ir.library.osaka-u.ac.jp/>

The University of Osaka

氏名・(本籍)	にし 西	おか 岡	く 久	み 美	こ 子
学位の種類	理	学	博	士	
学位記番号	第	6994	号		
学位授与の日付	昭和60年	9月	26日		
学位授与の要件	学位規則第5条第2項該当				
学位論文題目	代数的数からなる巾級数値の代数的独立性				
論文審査委員	(主査)				
	教授	宮西	正宜		
	(副査)				
	教授	永尾	汎	教授	井川 満 助教授 山本 芳彦

### 論文内容の要旨

$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} z^{n!}$  のように非常に速く収束する級数の代数的数における値が超越数であるか否かという問題は古くから研究されており、一応の解決が得られているが、いくつかの代数的数における値の代数的独立性について近年、興味が高まり研究が進められている。例えば Bundschuh と Wylegala は、代数的数  $\alpha_1, \dots, \alpha_n$  で、 $0 < |\alpha_i| < 1$  ( $1 \leq i \leq n$ )、 $|\alpha_i| \neq |\alpha_j|$  ( $i \neq j$ ) をみたすものについて、 $f(\alpha_1), \dots, f(\alpha_n)$  が代数的独立であることを証明している。しかし  $|\alpha_i|$  が相異なるという条件は強すぎるものであり、 $\alpha_i / \alpha_j$  ( $i \neq j$ ) が 1 の巾根でないという条件だけで十分であろうと予想されている。私はこの問題に関し次の様な結果を得た。先ず、記号を説明しよう。素数  $p$  に対して  $p$ -進体  $\mathbb{Q}_p$  の代数的閉包の完備化を  $\mathbb{C}_p$ 、そこでのノルムを  $||p$  で表わし、級数  $f(z)$  の  $\mathbb{C}_p$  での代数的数  $\alpha$  における値を  $f(\alpha)_p$  であらわす。複素数体を  $\mathbb{C}_{\infty}$ 、通常の絶対値を  $||_{\infty}$  で表わし、 $\mathbb{C}_{\infty}$  での代数的数  $\alpha$  における値を  $f(\alpha)_{\infty}$  で表わす。1 の巾根全体の集合を  $W$  で、 $f(z)$  の  $z$  に関する  $\ell$  回微分を  $f^{(\ell)}(z)$  で表わす。

以下に述べる結果はより一般的な巾級数について成り立つが、簡単のため、 $f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} z^{n!}$  に限って述べることにする。

定理 1.  $p$  は素数とする。代数的数  $\alpha_1, \dots, \alpha_n$  は  $0 < |\alpha_i|_p < 1$  ( $1 \leq i \leq n$ )、 $\alpha_i / \alpha_j \notin W$  ( $i \neq j$ ) をみたすとする。この時、 $\{f^{(\ell)}(\alpha_i)_p\}_{1 \leq i \leq n, 0 \leq \ell}$  は代数的独立である。

定理 2. 代数的数  $\alpha_1, \dots, \alpha_n$  は  $0 < |\alpha_i|_{\infty} < 1$  ( $1 \leq i \leq n$ )、 $\alpha_i / \alpha_j \notin W$  ( $i \neq j$ ) をみたし、ある素数  $p$  に対して  $0 < |\alpha_i|_p < 1$  ( $1 \leq i \leq n$ ) をみたすとする。この時  $\{f^{(\ell)}(\alpha_i)_{\infty}\}_{1 \leq i \leq n, 0 \leq \ell}$  は代数的独立である。

定理 3. 代数的数  $\alpha_1, \alpha_2$  は  $0 < |\alpha_i|_{\infty} < 1$ , ( $i = 1, 2$ )、 $\alpha_1 / \alpha_2 \notin W$  をみたすとする。この時、

$f(\alpha_1)_\infty, f(\alpha_2)_\infty$  は代数的独立である。

次に、級数  $f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a^{n!} z^{n!}$  を考えよう。ここで、 $a$  は代数的数で、 $0 < |a|_p < 1$  をみたすとする。

定理 4.  $p$  は素数または  $\infty$  を表わす。 $\alpha_1, \dots, \alpha_n$  は 0 でない代数的数で、 $\alpha_i \neq \alpha_j$  ( $i \neq j$ ) をみたすとする。この時、 $\{f^{(\ell)}(\alpha_i)_p\}_{1 \leq i \leq n, 0 \leq \ell}$  は代数的独立である。

## 論文の審査結果の要旨

$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^{e_k}$  ( $e_1 < e_2 < e_3 < \dots$ ) を代数的数を係数にもつ、非常に早く収束する級数とし、その収束半径を  $R$  とする。例えば  $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} z^{k!}$ . Cijssouw と Tijdeman は、 $0 < |\alpha| < R$  をみたす代数的数  $\alpha$  について、級数値  $f(\alpha)$  が (有理数体  $\mathbb{Q}$  上の) 超越数になることを示した。また、Bundschuh と Wylegala は代数的数  $\alpha_1, \dots, \alpha_n$  が条件  $0 < |\alpha_1| < \dots < |\alpha_n| < R$  をみたせば、 $f(\alpha_1), \dots, f(\alpha_n)$  は  $\mathbb{Q}$  上互いに代数的独立であることを示した。しかし、最後の条件は強すぎるので、“ $\alpha_i / \alpha_j$  は、 $i \neq j$  ならば、1 の巾根ではない” という条件に置きかえて、同じ結果が成立することが予想されている。

本論文は、この予想を  $p$  進体上で考えて、それを肯定的に解決している。すなわち、絶対値  $|\cdot|$  を  $p$  進付値  $|\cdot|_p$  でおきかえ、その収束級数値 ( $f(z)_p$  とかく) を複素  $p$  進体  $\mathbb{C}_p$  ( $= p$  進体  $\mathbb{Q}_p$  の代数的閉包の完備化) のなかで考える。上記級数  $f(z)$  の収束半径を  $R_p$  として、代数的数  $\alpha_1, \dots, \alpha_n$  が条件 “ $0 < |\alpha_i|_p < R_p$  ( $\forall i$ ) かつ  $\alpha_i / \alpha_j$  は、 $i \neq j$  ならば、1 の巾根でない” をみたせば、 $\{f^{(\ell)}(\alpha_i)_p; 1 \leq i \leq n, \ell \geq 0\}$  は  $\mathbb{Q}$  上代数的独立である。ただし、 $f^{(\ell)}(z)$  は  $f(z)$  の  $\ell$  次導関数である。以上の  $p$  進体上の結果を利用して、本来の予想を  $n=2$  の場合に解決している。

以上のごとく、級数値として得られる超越数の代数的独立性について、明確な結果を与えており超越数論に寄与するところ大である。よって本論文は理学博士の学位論文として十分価値あるものと認める。