【16】

氏名・（本籍）	西岡久美子（にしおか くみこ）
学位の種類	理学博士
学位記番号	第 6994 号
学位授与の日付	昭和 60 年 9 月 26 日
学位授与の要件	学位規則第5条第2項該当
学位論文題目	**代数的数からなる巾級数値の代数的独立性**
論文審査委員	（主査）教授 宮西 正宜 （副査）教授 永尾 汎　教授 井川 満　助教授 山本 芳彦

論文内容の要旨

$f(z)=\sum_{n=1}^{\infty} z^{n!}$ のように非常に速く収束する級数の代数的数における値が超越数であるか否かという問題は古くから研究されており，一応の解決が得られているが，いくつかの代数的数における値の代数的独立性について近年，興味が高まり研究が進められている。例えばBundschuhとWylegala は，代数的数α_1，…，α_nで，$0<|\alpha_i|<1$ $(1\leqq i\leqq n)$，$|\alpha_i|\neq|\alpha_j|$ $(i\neq j)$ をみたすものについて，$f(\alpha_1)$，…，$f(\alpha_n)$が代数的独立であることを証明している。しかし$|\alpha_i|$が相異なるという条件は強すぎるものであり，α_i/α_j $(i\neq j)$が1の巾根でないという条件だけで十分であろうと予想されている。私はこの問題に関し次の様な結果を得た。先ず，記号を説明しよう。素数pに対してp一進体Q_pの代数的閉包の完備化をC_p, そこでのノルムを$|\,|_p$ で表わし，級数$f(z)$のC_pでの代数的数αにおける値を$f(\alpha)_p$であらわす。複素数体をC_∞,通常の絶対値を$|\,|_\infty$で表わし，C_∞での代数的数αにおける値を$f(\alpha)_\infty$で表わす。1の巾根全体の集合をWで，$f(z)$のzに関するℓ回微分を$f^{(\ell)}(z)$で表わす。

以下に述べる結果はより一般的な巾級数について成り立つが，簡単のため，$f(z)=\sum_{n=1}^{\infty} z^{n!}$ に限って述べることにする。

定理1. pは素数とする。代数的数α_1，…，α_nは$0<|\alpha_i|_p<1$ $(1\leqq i\leqq n)$，$\alpha_i/\alpha_j\notin W$ $(i\neq j)$をみたすとする。この時，$\{f^{(\ell)}(\alpha_i)_p\}_{1\leq i\leq n,\,0\leq\ell}$ は代数的独立である。

定理2. 代数的数α_1，…，α_n は$0<|\alpha_i|_\infty<1$ $(1\leqq i\leqq n)$，$\alpha_i/\alpha_j\notin W$ $(i\neq j)$をみたし，ある素数p に対して$0<|\alpha_i|_p<1$ $(1\leqq i\leqq n)$をみたすとする。この時$\{f^{(\ell)}(\alpha_i)_\infty\}_{1\leq i\leq n,\,0\leq\ell}$ は代数的独立である。

定理3. 代数的数α_1，α_2は$0<|\alpha_i|_\infty<1$，$(i=1,2)$，$\alpha_1/\alpha_2\notin W$をみたすとする。この時，

$f(\alpha_1)_\infty$, $f(\alpha_2)_\infty$ は代数的独立である。

次に，級数 $f(z)=\sum_{n=1}^{\infty} a^{n!} z^{n!}$ を考えよう。ここで，aは代数的数で，$0<|a|_p<1$をみたすとする。

定理4. pは素数または∞を表わす。$\alpha_1, \cdots, \alpha_n$ は0でない代数的数で，$\alpha_i \neq \alpha_j\ (i \neq j)$ をみたすとする。この時，$\{f^{(\ell)}(\alpha_i)_p\}_{1 \leq i \leq n,\ 0 \leq \ell}$ は代数的独立である。

論文の審査結果の要旨

$f(z)=\sum_{k=0}^{\infty} a_k z^{e_k}$ $(e_1<e_2<e_3<\cdots\cdots)$を代数的数を係数にもつ，非常に早く収束する級数とし，その収束半径をRとする。例えば $f(z)=\sum_{k=0}^{\infty} z^{k!}$. CijsouwとTijdemanは，$0<|\alpha|<R$をみたす代数的数$\alpha$について，級数値$f(\alpha)$が（有理数体**Q**上の）超越数になることを示した。また，BundschuhとWylegalaは代数的数$\alpha_1, \cdots, \alpha_n$が条件$0<|\alpha_1|<\cdots<|\alpha_n|<R$をみたせば，$f(\alpha_1), \cdots, f(\alpha_n)$は**Q**上互いに代数的独立であることを示した。しかし，最後の条件は強すぎるので，“α_i/α_jは，$i \neq j$ならば，1の巾根ではない”という条件に置きかえて，同じ結果が成立することが予想されている。

本論文は，この予想をp進体上で考えて，それを肯定的に解決している。すなわち，絶対値$|\ |$をp進付値$|\ |_p$でおきかえ,その収束級数値（$f(z)_p$とかく）を複素p進体C_p（＝p進体Q_pの代数的閉包の完備化）のなかで考える。上記級数$f(z)$の収束半径をR_pとして,代数的数$\alpha_1, \cdots, \alpha_n$が条件“$0<|\alpha_i|_p<R_p(\forall_i)$かつ$\alpha_i/\alpha_j$は，$i \neq j$ならば，1の巾根でない”をみたせば，$\{f^{(\ell)}(\alpha_i)_p;\ 1 \leqq i \leqq n,\ \ell \geqq 0\}$は**Q**上代数的独立である。ただし，$f^{(\ell)}(z)$は$f(z)$の$\ell$次導関数である。以上のp進体上の結果を利用して，本来の予想を$n=2$の場合に解決している。

以上のごとく，級数値として得られる超越数の代数的独立性について，明確な結果を与えており超越数論に寄与するところ大である。よって本論文は理学博士の学位論文として十分価値あるものと認める。