【4】

氏名・（本籍）	西岡啓二（にしおか けいじ）
学位の種類	理学博士
学位記番号	第 6931 号
学位授与の日付	昭和60年6月24日
学位授与の要件	理学研究科数学専攻 学位規則第5条第1項該当
学位論文題目	**初等関数及び楕円関数を含む超越関数の1つのクラス**
論文審査委員	（主査） 教授 田辺 広城 （副査） 教授 松田 道彦　教授 永尾 汎　助教授 山本 芳彦

論文内容の要旨

以下Kを標数0，常微分Dをもつ常微分体であるとする。Kの万有微分拡大体Uを固定し，以下で現れる微分体はUを万有微分拡大体とするものと仮定する。

FをUの部分微分体とせよ。F係数常微分作用素全体からなる環をF〔D〕とかく。F〔D〕の元L≠0に対し，自然数$\mu_F(L)$を次によって定義する：

$\mu_F(L)=\min\{\mathrm{t.d.}F\langle x\rangle/F \mid x\notin\overline{F},\ Lx=0\}$。

Kから始め，代数的演算及びprimitive, exponential, weierstrassianを添加する操作を有限回ほどこして得られる，Kの常微分拡大体をKのH―拡大という。

定理：LをK〔D〕の元とし，各$x\in\overline{K}^{\times}$に対し$Lx\neq 0$が成立すると仮定する。このとき，Kの任意のH―拡大Wに対して，$\mu_K(L)=\mu_W(L)$が成立する。

F〔D〕の元Lは，もし各$x\in\overline{K}^{\times}$に対し，$Lx\neq 0$がなりたち，かつ$\mu_F(L)$がLの階数に等しいならば，F上微分既約とよばれる。上定理より次を得る。

系：もし$L\in K$〔D〕がK上微分既約ならばKの任意のH―拡大Wに対し，LはW上微分既約である。

F〔D〕の元Lは，Lのそれより低い階数をもつF〔D〕の2元の積で表されるとき，F上可約とよばれ，もしそうでなければF上既約とよばれる。上定理の導出と類似の方法によって次を得る。

定理：$L\in K$〔D〕はK上既約であると仮定する。このとき，Kの任意のH―拡大Wに対し，LはW上既約である。

第1の定理の証明は2つの部分にわかれる。1つは，添加する元がprimitive, exponential の場合，他は，添加する元がweierstrassianの場合である。前者を扱うには付値論ですむが，後者に対しては，

Kolchin の Picard−Vessiot 理論を併用せねばならない。

論文の審査結果の要旨

常微分体Kの元を係数とする線形常微分方程式の解がKのどの様な拡大の中に存在するかという問題は1839年のリウヴィルの論文にはじまり，ジーゲル，ゴールドマン，オレイニコフ，ローゼンリヒト，ジンガー等の研究が続いた。西岡君の論文はこの問題を微分代数的方法により研究して新事実を明らかにしたものである。

Kを標数0の常微分体，Dを微分とする。以下常にKの万有拡大Uの中で考える。FをKの微分拡大体，LをF係数線形微分作用素環F〔D〕の元とする時，LのF上最小許容階数$\mu_F(L)$を次の様に定義する。

$\mu_F(L)=\min\{\mathrm{t.d.}F\langle x\rangle/F\ ;\ x\in U\setminus\overline{F},\ Lx=0\}$。

ここにt.d.は超越次数，$F\langle x\rangle$はxによって生成されるFの拡大，$\overline{F}$はFの代数的閉包である。

$L\in F[D]$が次を満足する時F上微分既約であると定義する。

すべての$x\in\overline{F}^{\times}$に対し$Lx\neq 0$，$\mu_F(L)=$Lの次数。

次の条件を満足するKの拡大体WをKのH−拡大という：微分体の鎖

$K=W_0\subset W_1\subset\cdots\subset W_m=W$

が存在し，各jに対してW_{j-1}上原始的，又は指数的，又はワイアストラシアンである元t_jが存在してW_jは$W_{j-1}(t_j)$上有限代数的である。即ちH−拡大は初等関数と楕円関数を含む拡大体である。

西岡君の論文の主な結果は，LをK〔D〕の元，すべての$x\in\overline{K}^{\times}$に対して$Lx\neq 0$とするとKの任意のH−拡大Wに対して$\mu_K(L)=\mu_W(L)$が成立すること，K〔D〕の元Lが$\overline{K}$上既約ならばLはKの任意のH−拡大上でも既約であることの二つの定理である。はじめの定理の系としてK〔D〕の元がK上微分既約ならばKの任意のH−拡大でも微分既約であること，LをK〔D〕の元，$k\in K$とすると非斉次線形方程式$Ly=k$がKのあるH−拡大に属する解を持てば$Lx=0$の$\overline{K}$上指数的な解が存在するという二つの事実が得られる。これらの結果はローゼンリヒト，ジンガーがそれぞれ1973年，1976年に証明した定理の拡張をなし，証明の要点は，オレイニコフが1971年に解析的方法で証明した同様の定理の微分代数的証明を与えてローゼンリヒトの結果と結合することに在る。

以上の様に西岡君の論文は常微分方程式論に重要な貢献をしたものであり，理学博士の学位論文として十分価値があると認める。