



Title	L1空間での放物型初期境界値問題の解の時間変数に関する正則性について
Author(s)	朴, 東根
Citation	大阪大学, 1987, 博士論文
Version Type	
URL	<a href="https://hdl.handle.net/11094/35323">https://hdl.handle.net/11094/35323</a>
rights	
Note	著者からインターネット公開の許諾が得られていないため、論文の要旨のみを公開しています。全文のご利用をご希望の場合は、<a href=" <a href="https://www.library.osaka-u.ac.jp/thesis/#closed">https://www.library.osaka-u.ac.jp/thesis/#closed</a> ">大阪大学の博士論文について</a>をご参照ください。

*The University of Osaka Institutional Knowledge Archive : OUKA*

<https://ir.library.osaka-u.ac.jp/>

The University of Osaka

氏名・(本籍)	朴 東 根
学位の種類	理 学 博 士
学位記番号	第 7627 号
学位授与の日付	昭和 62 年 3 月 26 日
学位授与の要件	理学研究科数学専攻 学位規則第 5 条第 1 項該当
学位論文題目	$L^1$ 空間での放物型初期境界値問題の解の時間変数に関する正則性について
論文審査委員	(主査) 教授 田邊 廣城 (副査) 教授 井川 満 助教授 小松 玄

## 論文内容の要旨

この論文では次の線形放物型偏微分方程式

$$(1.1) \quad \partial u(x, t) / \partial t + A(x, t, D)u(x, t) = f(x, t), \quad \Omega \times (0, T],$$

$$(1.2) \quad B_j(x, t, D)u(x, t) = 0, \quad j = 1, \dots, m/2, \quad \partial \Omega \times (0, T],$$

$$(1.3) \quad u(x, 0) = u_0(x), \quad \Omega$$

の初期境界値問題の  $t$  に関する  $L^1(\Omega)$  での正則性について考える。

$\Omega$  は  $R^n$  の領域、一様に  $C^\infty$  級、局所的に  $C^{2m}$  級とする。 $\partial \Omega$  は  $\Omega$  の境界である。各  $t \in [0, T]$  に対して

$$A(x, t, D) = \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha(x, t) D^\alpha$$

は強楕円型微分作用素で

$$B_j(x, t, D) = \sum_{|\beta| \leq m} b_{j,\beta}(x, t) D^\beta$$

は正規境界作用素である。

境界条件  $B_j(x, t, D)u|_{\partial\Omega} = 0, j = 1, \dots, m/2$  の下で  $L^p(\Omega)$  の中の  $-A(x, t, D)$  の実現  $-A_p(t)$  は  $1 < p < \infty$  に対し、 $L^p(\Omega)$  の中で解析的半群を生成すると仮定する。

$A(x, t, D), \{B_j(x, t, D)\}$  の係数と  $x$  に関するそれらのある微分は  $t$  の関数として Gevrey's Class  $\{M_k\}$  に属すると仮定する。

以上の仮定の下で任意の初期値  $u_0 \in L^1(\Omega)$  に対して  $L^1(\Omega)$  の中の発展方程式と考えた (1.1) ~ (1.3) の解も同じ Gevrey's Class に属することを示す。上に述べた結果を証明するために

(1. 4)  $\exists K_0 > 0, \exists K > 0$  such that

$$(1. 4) \quad \|(\partial/\partial t)^n(A(t) - \lambda)^{-1}\|_{B(L^1, L^1)} \leq K_0 K^n M_n / |\lambda|$$

がすべての  $n = 0, 1, \dots, t \in [0, T]$ ,  $\lambda \in \Sigma = \{\lambda : |\arg \lambda| \geq \theta\}$ ,  $(0 < \theta_0 < \pi/2)$  に対して成立することを示す。ただし,  $A(t)$  は境界条件  $B_j(x, t, D) u + \partial \Omega = 0, j = 1, \dots, m/2$  の下での作用素  $A(x, t, D)$  の  $L^1(\Omega)$  の中での実現である。H.Tanabe [1] の結果を適用することにより (1. 4) が示されたならば正の数  $L_0$ ,  $L$  が存在しすべての非負整数  $n, m, k$  に対し

$$(1. 5) \quad \|(\partial/\partial t)^n (\partial/\partial t + \partial/\partial s)^m (\partial/\partial s)^k U(t, s)\|_{B(L^1, L^1)} \\ \leq L_0 L^{n+m+k} M_{n+m+k} (t-s)^{-n-k}$$

が方程式

$$(1. 6) \quad d u(t) / d t + A(t) u(t) = f(t), \quad 0 < t \leq T$$

の発展作用素  $U(t, s)$  に対して成立することが分かる。

初期条件  $u(0) = u_0$  を満足する (1. 6) の解  $u(t)$  に対しても  $u_0$  は  $L^1(\Omega)$  の任意の元および  $f(t)$  は  $L^1(\Omega)$  に値をもつ無限回微分可能関数で正の数  $F_0, F$  が存在しすべての非負整数  $n$  に対し,  $0 \leq t \leq T$  で

$$\|d^n f(t) / d t^n\| \leq F_0 F^n M_n$$

をみたすならば正の数  $L_0, L, \bar{F}_0, \bar{F}$  が存在し

$$\|d^n u(t) / d t^n\| \leq L_0 L^n M_n \|u_0\| t^{-n} + \bar{F}_0 \bar{F}^n M_n t^{1-n}$$

が成立する。

[1] H.Tanabe: On regularity of solutions of abstract differential equations of parabolic type in Banach space, J. Math. Soc. Japan, 19(1967), 521-542.

### 論文の審査結果の要旨

本論文は一般な線形放物型方程式の適切な初期境界値問題

$$(1) \quad \partial u / \partial t + A(t, x, D) u = f \quad \Omega \times (0, T]$$

$$(2) \quad B_j(x, t, D) u = 0, \quad j = 1, \dots, m/2 \quad \partial \Omega \times (0, T]$$

$$(3) \quad u(x, 0) = u_0(x) \quad \Omega$$

の解の時間変数  $t$  に関する正則性を論じたものである。ここに  $A(x, t, D)$  は  $m$  階強楕円型作用素,  $B_j(x, t, D)$  は  $m$  より小さい次数の微分作用素,  $\Omega$  は  $N$  次元空間の中の滑らかな境界  $\partial \Omega$  を持つ領域である。

$A(x, t, D)$ ,  $B_j(x, t, D)$ ,  $j = 1, \dots, m/2$  およびその共役境界値問題の作用素の係数とその  $x$  に関するある階数迄の偏導関数が  $t$  の関数として Gevrey のクラス  $\{M_k\}$  に属するならば, 初期値  $u_0$  が  $L^1(\Omega)$  の任意の元,  $f$  が  $L^1(\Omega)$  の値をとる同じ Gevrey のクラスに属する関数であるとき (1)-(3) の解も  $L^1(\Omega)$  の値をとる関数として同じ Gevrey のクラスに属することを示すことが本論文の

の主目的である。そのために(1)–(3)を  $L^1(\Omega)$  の中方程式

$$d u(t) / d t + A(t) u(t) = f(t)$$

$$u(0) = u_0$$

の形に表わす。 $-A(t)$  は解析的半群を生成するので、ある角  $\theta_0 \in (0, \pi/2)$  と正の数  $K_0$  が存在して角領域  $\Sigma = \{\lambda : |\arg \lambda| \geq \theta_0\} \cup \{0\}$  は  $A(t)$  の resolvent 集合に含まれ、 $\lambda \in \Sigma$ ,  $t \in [0, T]$  に対して不等式

$$\|(A(t) - \lambda)^{-1}\| \leq K_0 / |\lambda|$$

が成立する。更に正の数  $K$  が存在してすべての自然数  $n$  に対して、

$$(4) \quad \|(\partial / \partial t)^n (A(t) - \lambda)^{-1}\| \leq K_0 K^n M_n / |\lambda|$$

が成立することが示されれば、発展方程式の一般論より所要の結果が得られる。 $1 < p < \infty$  ならば  $L^p(\Omega)$  の中方程式と見た(1)–(3)に対して同様のことが成立することは既に知られている。 $p = 1$  の時は Agmon–Douglis–Nirenberg 型の評価式が成立しないので別の方法が必要になる。そのために朴君は自己共役楕円型作用素の resolvent の積分核、スペクトル関数の Riesz 平均の漸近行動を求める際の、それぞれ R. Beals, L. Hörmander の方法を用いて  $A(t)$  の resolvent の積分核及びその  $t$  に関する逐次導関数を評価することにより(4)が成立することを示した。

朴君の論文は一般な線形放物型方程式に対して取扱の困難な  $L^1$  空間の中でも  $L^p$  ( $1 < p < \infty$ ) 空間の場合と同様のことが成立することを明らかにしたものであり、積分核を用いて目指す結果を導いた点は注目に値する。よってこの論文は理学博士の学位論文として十分価値があるものと認める。