【19】

氏名・（本籍）	朴（ぱく）　東（どん）　根（ぐん）
学位の種類	理学博士
学位記番号	第 7627 号
学位授与の日付	昭和62年3月26日
学位授与の要件	理学研究科数学専攻 学位規則第5条第1項該当
学位論文題目	**L^1空間での放物型初期境界値問題の解の時間変数に関する正則性について**
論文審査委員	（主査） 教授 田邊 廣城 （副査） 教授 井川 満　助教授 小松 玄

論文内容の要旨

この論文では次の線形放物型偏微分方程式

(1.1)　$\partial u(x,t)/\partial t+A(x,t,D)u(x,t)=f(x,t)$,　　$\Omega\times(0,T]$,

(1.2)　$B_j(x,t,D)\,u(x,t)=0$, $j=1,\cdots,m/2$,　　$\partial\Omega\times(0,T]$,

(1.3)　$u(x,0)=u_0(x)$,　　Ω

の初期境界値問題の t に関する $L^1(\Omega)$ での正則性について考える。

ΩはR^Nの領域，一様にC^m級，局所的にC^{2m}級とする。$\partial\Omega$はΩの境界である。各$t\in[0,T]$に対して

$$A(x,t,D)=\sum_{|\alpha|\leq m}a_\alpha(x,t)D^\alpha$$

は強楕円型微分作用素で

$$B_j(x,t,D)=\sum_{|\beta|\leq m_j}b_{j,\beta}(x,t)D^\beta$$

は正規境界作用素である。

境界条件$B_j(x,t,D)u|_{\partial\Omega}=0$, $j=1,\cdots,m/2$の下で$L^p(\Omega)$の中での$-A(x,t,D)$の実現$-A_p(t)$は$1<p<\infty$に対し，$L^p(\Omega)$の中で解析的半群を生成すると仮定する。

$A(x,t,D)$, $\{B_j(x,t,D)\}$の係数とxに関するそれらのある微分はtの関数としてGevrey's Class $\{M_k\}$に属すると仮定する。

以上の仮定の下で任意の初期値$u_0\in L^1(\Omega)$に対して$L^1(\Omega)$の中の発展方程式と考えた(1.1)～(1.3)の解も同じGevrey's Classに属することを示す。上に述べた結果を証明するために

(1, 4) $\exists K_o > 0$, $\exists K > 0$ such that

$\|(\partial / \partial t)^n (A(t) - \lambda)^{-1}\|_{B(L^1, L^1)} \leqq K_o K^n M_n / |\lambda|$

がすべての$n = 0, 1, \cdots$, $t \in [0, T]$, $\lambda \in \Sigma = \{\lambda : |\arg \lambda| \geqq \theta_o\}$, $(0 < \theta_o < \pi / 2)$ に対して成立することを示す。ただし，$A(t)$ は境界条件$B_j(x, t, D)u \mid \partial\Omega = 0$, $j = 1, \cdots, m/2$の下での作用素$A(x, t, D)$の$L^1(\Omega)$の中での実現である。H.Tanabe［1］の結果を適用することにより（1．4）が示されたならば正の数L_o, Lが存在しすべての非負整数n, m, kに対し

(1．5) $\|(\partial / \partial t)^n (\partial / \partial t + \partial / \partial s)^m (\partial / \partial s)^k U(t, s)\|_{B(L^1, L^1)}$

$\leqq L_o L^{n+m+k} M_{n+m+k} (t - s)^{-n-k}$

が方程式

(1．6) $du(t)/dt + A(t)u(t) = f(t)$, $0 < t \leqq T$

の発展作用素$U(t, s)$に対して成立することが分かる。

初期条件$u(0) = u_0$を満足する（1．6）の解$u(t)$に対してもしu_0は$L^1(\Omega)$の任意の元および$f(t)$は$L^1(\Omega)$に値をもつ無限回微分可能関数で正の数F_0, Fが存在しすべての非負整数nに対し，$0 \leqq t \leqq T$で

$\|d^n f(t) / dt^n\| \leqq F_0 F^n M_n$

をみたすならば正の数L_0, L, $\overline{F}_0$, $\overline{F}$が存在し

$\|d^n u(t) / dt^n\| \leqq L_0 L^n M_n \|u_o\| t^{-n} + \overline{F}_o \overline{F}^n M_n t^{1-n}$

が成立する。

［1］ H.Tanabe: On regularity of solutions of abstract differential eguations of parabolic type in Banach space, J. Math. Soc. Japan, 19(1967), 521−542.

論 文 の 審 査 結 果 の 要 旨

本論文は一般な線形放物型方程式の適切な初期境界値問題

(1) $\partial u / \partial t + A(t, x, D)u = f$ $\qquad \Omega \times (0, T]$

(2) $B_j(x, t, D)u = 0$, $j = 1, \cdots, m/2$ $\qquad \partial\Omega \times (0, T]$

(3) $u(x, 0) = u_0(x)$ $\qquad \Omega$

の解の時間変数tに関する正則性を論じたものである。ここに$A(x, t, D)$はm階強楕円型作用素，$B_j(x, t, D)$はmより小さい次数の微分作用素，ΩはN次元空間の中の滑らかな境界$\partial\Omega$を持つ領域である。

$A(x, t, D)$, $B_j(x, t, D)$, $j = 1, \cdots, m/2$およびその共役境界値問題の作用素の係数とそのxに関するある階数迄の偏導関数がtの関数としてGevreyのクラス$\{M_k\}$に属するならば，初期値u_oが$L^1(\Omega)$の任意の元，fが$L^1(\Omega)$の値をとる同じGevreyのクラスに属する関数であるとき(1)−(3)の解も$L^1(\Omega)$の値をとる関数として同じGevreyのクラスに属することを示すことが本論文の

の主目的である。そのために(1)−(3)を$L^1(\Omega)$の中の方程式

$$du(t)/dt+A(t)u(t)=f(t)$$

$$u(0)=u_0$$

の形に表わす。$-A(t)$は解析的半群を生成するので，ある角$\theta_0\in(0,\pi/2)$と正の数K_0が存在して角領域$\Sigma=\{\lambda:|\arg\lambda|\geqq\theta_0\}\cup\{0\}$は$A(t)$のresolvent集合に含まれ，$\lambda\in\Sigma$，$t\in[0,T]$に対して不等式

$$\|(A(t)-\lambda)^{-1}\|\leqq K_0/|\lambda|$$

が成立する。更に正の数Kが存在してすべての自然数nに対して，

(4) $$\|(\partial/\partial t)^n(A(t)-\lambda)^{-1}\|\leqq K_0K^nM_n/|\lambda|$$

が成立することが示されれば，発展方程式の一般論より所要の結果が得られる。$1<p<\infty$ならば$L^p(\Omega)$の中の方程式と見た(1)−(3)に対して同様のことが成立することは既に知られている。$p=1$の時はAgmon−Douglis−Nirenderg型の評価式が成立しないので別の方法が必要になる。そのために朴君は自己共役楕円型作用素のresolventの積分核，スペクトル関数のRiesz平均の漸近行動を求める際の，それぞれR.Beals, L. Hörmanderの方法を用いて$A(t)$のresolventの積分核及びそのtに関する逐次導関数を評価することにより(4)が成立することを示した。

朴君の論文は一般な線形放物型方程式に対して取扱の困難なL^1空間の中でも$L^p(1<p<\infty)$空間の場合と同様のことが成立することを明らかにしたものであり、積分核を用いて目指す結果を導いた点は注目に価する。よってこの論文は理学博士の学位論文として十分価値があるものと認める。