



|              |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                             |
|--------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| Title        | 定常軸対称アインシュタイン方程式の形式的冪級数解                                                                                                                                                                                                                                                                                                                    |
| Author(s)    | 永友, 清和                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                      |
| Citation     | 大阪大学, 1987, 博士論文                                                                                                                                                                                                                                                                                                                            |
| Version Type |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                             |
| URL          | <a href="https://hdl.handle.net/11094/35326">https://hdl.handle.net/11094/35326</a>                                                                                                                                                                                                                                                         |
| rights       |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                             |
| Note         | 著者からインターネット公開の許諾が得られていないため、論文の要旨のみを公開しています。全文のご利用をご希望の場合は、 <a href="https://www.library.osaka-u.ac.jp/thesis/#closed">＜a href="https://www.library.osaka-u.ac.jp/thesis/#closed"&gt;https://www.library.osaka-u.ac.jp/thesis/#closed</a> >大阪大学の博士論文について <a href="https://www.library.osaka-u.ac.jp/thesis/#closed">&lt;/a&gt;</a> をご参照ください。 |

*The University of Osaka Institutional Knowledge Archive : OUKA*

<https://ir.library.osaka-u.ac.jp/>

The University of Osaka

|         |                                                                      |
|---------|----------------------------------------------------------------------|
| 氏名・(本籍) | なが 友 清 和                                                             |
| 学位の種類   | 理 学 博 士                                                              |
| 学位記番号   | 第 7 6 2 5 号                                                          |
| 学位授与の日付 | 昭 和 62 年 3 月 26 日                                                    |
| 学位授与の要件 | 理学研究科数学専攻<br>学位規則第5条第1項該当                                            |
| 学位論文題目  | 定常軸対称アインシュタイン方程式の形式的冪級数解                                             |
| 論文審査委員  | (主査)<br>教 授 池田 信行<br>(副査)<br>教 授 田邊 廣城 教 授 井川 満 助教授 辻下 徹<br>助教授 小松 玄 |

### 論 文 内 容 の 要 旨

本論文では、非線型微分方程式系

$$(1) \partial_\rho(\rho \partial_\rho h \cdot h^{-1}) + \partial_z(\rho \partial_z h \cdot h^{-1}) = 0$$

を、条件

$$(2) \det(h) = -\rho^2, {}^1h = h$$

のもとで考える。ここで  $\partial_\rho = \partial/\partial\rho$ ,  $\partial_z = \partial/\partial z$ ,  $h$  は 2 次行列である。方程式系(1)と(2)は、真空での定常軸対称アインシュタイン方程式と呼ばれる。本論文の主な目的は、逆散乱法の枠内で Riemann-Hilbert 問題を適用し、(1), (2)の形式的冪級数解を構成することである。このクラスに属する代表的な解に Kerr 解がある。

逆散乱法に基づく定常軸対称アインシュタイン方程式の研究は、1978年の Belinskii-Zakharov の仕事にはじまる。彼らは、ソリトン解の構成に成功し、一般の解の解析に Riemann-Hilbert 問題が有効であることを示唆した。本論文では、彼らの方法を改良し、次の仮定

$$(3) \rho \partial_\rho h \cdot h^{-1} \text{ と } \rho \partial_z h \cdot h^{-1} \text{ は形式的冪級数}$$

をみたす全ての形式的冪級数解が Riemann-Hilbert 問題を用いて得られることを示した。以下、より詳細に論文の内容について述べる。

方程式系(1)は、対応  $\rho \partial_\rho h \cdot h^{-1} = U$ ,  $\rho \partial_z h \cdot h^{-1} = V$  で、2 次行列  $U, V$  に対する方程式系

$$(4) \partial_\rho U + \partial_z V = 0, \rho(\partial_z U - \partial_\rho V) + V + [U, V] = 0$$

と同値である。方程式系(4)は、パラメータ  $w$  をもつある線型微分方程式系の可積分条件であり、(4)の形式的冪級数解  $U, V$  は次の性質 (P) をもつ形式的冪級数  $\Psi(z, \rho, w) = 1 +$

$\sum_{k=1}^{\infty} \Psi_k(z, \rho) w^{-k}$ , から  $U = \partial_z \Psi_1$ ,  $V = -\partial_\rho \Psi_1$  として得られる,

$$(P) \quad \begin{aligned} & (w \partial_z + \rho \partial_\rho + 2w \partial_w) \Psi(z, \rho, w) \cdot [\Psi(z, \rho, w)]^{-1}, \\ & (\rho \partial_z - w \partial_\rho) \Psi(z, \rho, w) \cdot [\Psi(z, \rho, w)]^{-1} \text{ は } w \text{ に無関係である。} \end{aligned}$$

本論文では, まず任意に与えられた形式的冪級数  $u(t)$  ( $u(t)$  は変数  $t$  をもつ 2 次行列) から性質 (P) をもつ  $\Psi[u]$  を構成した。微分方程式  $\rho \partial_\rho h = U[u] \cdot h$ ,  $\rho \partial_z h = V[u] \cdot h$  は, 方程式(1)の形式的冪級数解  $h[u]$  を定める, (本論文の定理 1)。ここで構成された  $h[u]$  は,  $\det(u(t)) = 1$  かつ  $u_{12}(t) = t^2 u_{21}(t)$  の時, 条件(2)をみたす, (本論文の定理 2)。ただし,  $u_{ij}(t)$  は  $u(t)$  の  $(i, j)$  成分である。さらに, 対応  $u \rightarrow h[u]$  は可逆である。すなわち, 定常軸対称アインシュタイン方程式の任意の形式的冪級数解  $h$  で仮定(3)をみたすものに対して,  $u[t]$  を適当に選べば,  $h = h[u]$  である, (本論文の定理 3)。実際,  $h(z, 0)$  の  $(2, 2)$  成分  $-f(z)$  と  $J(z, 0)$  の  $(2, 1)$  成分  $\chi(z)$  から  $u_{11}(t) = 1/f(-t/2)$ ,  $u_{21}(t) = \chi(-t/2)/t f(-t/2)$  とすればよいことを明らかにした。ここで,  $J(z, \rho)$  は  $\rho \partial_\rho h \cdot h^{-1} = \partial_z J$ ,  $\rho \partial_\rho h \cdot h^{-1} = -\partial_\rho J$  である形式的冪級数である。

## 論文の審査結果の要旨

真空の場合の定常軸対称アインシュタイン方程式

$$(1) \quad \begin{aligned} & \partial_\rho(\rho \partial_\rho h \cdot h^{-1}) + \partial_z(\rho \partial_z h \cdot h^{-1}) = 0 \\ & h = h, \det(h) = -\rho^2 \end{aligned}$$

を考える。ここで  $h(z, \rho)$  は 2 変数  $z, \rho$  についての  $2 \times 2$  行列関数で,  $\partial_\rho = \partial/\partial_\rho$ ,  $\partial_z = \partial/\partial_z$  とする。Belinskii-Zakharov は逆散乱法を用い, この方程式のソリトン解を構成した。本論文において永友君はその考えを発展させ, 方程式(1)の形式的冪級数解でその twist potential が形式的冪級数の範囲で存在するもの全体の空間  $V_0$  の構造を決定している。

方程式(1)は 1 つのパラメーターをもつ線型方程式の可積分条件と同値である。永友君は Belinskii-Zakharov が用いたものと同等な線型問題を基礎にして, 2 つの 1 変数形式的冪級数の組と  $V_0$  の元の対応を Riemann-Hilbert 問題を解いて構成した。

定常軸対称アインシュタイン方程式を形式的冪級数解の枠組で体系的に論じたものは本論文が最初である。また  $V_0$  は Kerr 解等の典型的な厳密解をふくみ, 解空間の重要な部分空間である。さらに本論文においては  $V_0$  の元の構造について精密な記述が与えられている。これらの成果はアインシュタイン方程式の数学的研究に対し顕著な貢献を与える業績として高く評価される。

以上のように本論文における永友君の研究は, 非線型偏微分方程式の研究の進歩に寄与するところきわめて大きく, 理学博士の学位論文として十分価値あるものと認められる。