【17】

氏名・(本籍)	永友清和（ながともきよかず）
学位の種類	理学博士
学位記番号	第 7625 号
学位授与の日付	昭和62年3月26日
学位授与の要件	理学研究科数学専攻 学位規則第5条第1項該当
学位論文題目	**定常軸対称アインシュタイン方程式の形式的冪級数解**
論文審査委員	(主査) 教授 池田 信行 (副査) 教授 田邊 廣城　教授 井川 満　助教授 辻下 徹 助教授 小松 玄

論文内容の要旨

本論文では，非線型微分方程式系

(1) $\partial_\rho(\rho\partial_\rho h\cdot h^{-1})+\partial_z(\rho\partial_z h\cdot h^{-1})=0$

を，条件

(2) $\det(h)=-\rho^2,\ {}^t h=h$

のもとで考える。ここで$\partial_\rho=\partial/\partial_\rho$, $\partial_z=\partial/\partial_z$, h は2次行列である。方程式系(1)と(2)は，真空での定常軸対称アインシュタイン方程式と呼ばれる。本論文の主な目的は，逆散乱法の枠内でRiemann－Hilbert問題を適用し，(1), (2)の形式的冪級数解を構成することである。このクラスに属する代表的な解にKerr解がある。

逆散乱法に基づく定常軸対称アインシュタイン方程式の研究は，1978年のBelinskii－Zakharovの仕事にはじまる。彼らは，ソリトン解の構成に成功し，一般の解の解析にRiemann－Hilbert問題が有効であることを示唆した。本論文では，彼らの方法を改良し，次の仮定

(3) $\rho\partial_\rho h\cdot h^{-1}$ と $\rho\partial_z h\cdot h^{-1}$ は形式的冪級数

をみたす全ての形式的冪級数解がRiemann－Hilbert問題を用いて得られることを示した。以下，より詳細に論文の内容について述べる。

方程式系(1)は，対応 $\rho\partial_\rho h\cdot h^{-1}=U$, $\rho\partial_z h\cdot h^{-1}=V$ で，2次行列 U, V に対する方程式系

(4) $\partial_\rho U+\partial_z V=0,\ \rho(\partial_z U-\partial_\rho V)+V+[U,V]=0$

と同値である。方程式系(4)は，パラメータwをもつある線型微分方程式系の可積分条件であり，(4)の形式的冪級数解 U, V は次の性質（P）をもつ形式的冪級数 $\Psi(z,\rho,w)=1+$

$\Sigma_{k=1}^{\infty}\Psi_k(z,\rho)w^{-k}$，から $U=\partial_z\Psi_1$，$V=-\partial_\rho\Psi_1$として得られる，

$$(\mathrm{P})\quad \begin{array}{l}(w\partial_z+\rho\partial_\rho+2w\partial_w)\Psi(z,\rho,w)\cdot[\Psi(z,\rho,w)]^{-1},\\ (\rho\partial_z-w\partial_\rho)\Psi(z,\rho,w)\cdot[\Psi(z,\rho,w)]^{-1}\end{array}$$

はwに無関係である。

本論文では，まず任意に与えられた形式的冪級数 $u(t)$（$u(t)$ は変数tをもつ2次行列）から性質（P）をもつ $\Psi[u]$ を構成した。微分方程式 $\rho\partial_\rho h=U[u]\cdot h$，$\rho\partial_z h=V[u]\cdot h$ は，方程式(1)の形式的冪級数解 $h[u]$ を定める，（本論文の定理1）。ここで構成された $h[u]$ は，$\det(u(t))=1$ かつ $u_{12}(t)=t^2u_{21}(t)$ の時，条件(2)をみたす，（本論文の定理2）。ただし，$u_{ij}(t)$ は $u(t)$ の (i,j) 成分である。さらに，対応 $u\to h[u]$ は可逆である。すなわち，定常軸対称アインシュタイン方程式の任意の形式的冪級数解 h で仮定(3)をみたすものに対して，$u[t]$ を適当に選べば，$h=h[u]$ である，（本論文の定理3）。実際，$h(z,o)$ の $(2,2)$ 成分 $-f(z)$ と $J(z,o)$ の $(2,1)$ 成分 $\chi(z)$ から $u_{11}(t)=1/f(-t/2)$，$u_{21}(t)=\chi(-t/2)/tf(-t/2)$ とすればよいことを明らかにした。ここで，$J(z,\rho)$ は $\rho\partial_\rho h\cdot h^{-1}=\partial_z J$，$\rho\partial_\rho h\cdot h^{-1}=-\partial_\rho J$ である形式的冪級数である。

論文の審査結果の要旨

真空の場合の定常軸対称アインシュタイン方程式

$$(1)\quad \begin{array}{l}\partial_\rho(\rho\partial_\rho h\cdot h^{-1})+\partial_z(\rho\partial_z h\cdot h^{-1})=0\\ {}^t h=h,\ \det(h)=-\rho^2\end{array}$$

を考える。ここで $h(z,\rho)$ は2変数z，ρについての 2×2 行列関数で，$\partial_\rho=\partial/\partial_\rho$，$\partial_z=\partial/\partial_z$ とする。Belinskii－Zakharovは逆散乱法を用い，この方程式のソリトン解を構成した。本論文において永友君はその考えを発展させ，方程式(1)の形式的冪級数解でそのtwist potentialが形式的冪級数の範囲で存在するもの全体の空間Voの構造を決定している。

方程式(1)は1つのパラメーターをもつ線型方程式の可積分条件と同値である。永友君はBelinskii－Zakharovが用いたものと同等な線型問題を基礎にして，2つの1変数形式的冪級数の組とVoの元の対応をRiemann－Hilbert問題を解いて構成した。

定常軸対称アインシュタイン方程式を形式的冪級数解の枠組で体系的に論じたものは本論文が最初である。またVoはKerr解等の典型的な厳密解をふくみ，解空間の重要な部分空間である。さらに本論文においてはVoの元の構造について精密な記述が与えられている。これらの成果はアインシュタイン方程式の数学的研究に対し顕著な貢献を与える業績として高く評価される。

以上のように本論文における永友君の研究は，非線型偏微分方程式の研究の進歩に寄与するところきわめて大きく，理学博士の学位論文として十分価値あるものと認められる。