The University of Osaka
Institutional Knowledge Archive

Title	Sur certains espaces fibrés principaux holomorphes dont le groupe est abélien connexe
Author(s)	Murakami, Shingo
Citation	Osaka Mathematical Journal. 1961, 13(1), p. 143-167
Version Type	VoR
URL	https://doi.org/10.18910/3538
rights	
Note	

The University of Osaka Institutional Knowledge Archive : OUKA

https://ir.library.osaka-u.ac.jp/

The University of Osaka

Murakami, Shingo
Osaka Math. J.
13 (1961), 143-167.

Sur Certains Espaces Fibrés Principaux Holomorphes dont le Groupe est Abélien Connexe

Par Shingo MURAKAMI

Dans cet article, on se propose d'étudier les espaces fibrés principaux holomorphes dont le groupe est abélien connexe et dont la base est un tore complexe. Lorsqu'ils admettent des connexions holomorphes, ces espaces fibrés ont été traités dans [5]. On généralise dans la première moitié de cet article quelques résultats principaux de [5], en utilisant, à la place des connexions holomorphes, des connexions de type (1, 0) dont la forme de courbure est harmonique. On étudie d'abord le groupe des classes d'espaces fibrés principaux holomorphes dont le groupe est un groupe de Lie abélien connexe A et dont la base est une variété compacte kaehlérienne, et dans le cas où la base est un tore complexe T, la structure de ce groupe est déterminée de manière analogue au cas de [5]. On montre de plus que tout espace fibré principal de groupe A et de base T peut se représenter comme quotient d'un groupe de Lie réel nilpotent, ayant une structure complexe invariante à gauche, par un sous-groupe discret.

On étudie ensuite les facteurs définissant les espaces fibrés de groupe A et de base T. Les facteurs de type thêta sont exprimés de manière explicite par les invariants des espaces fibrés qu'ils définissent. En fait, la question de classer les espaces fibrés linéaires de base T est abordée par plusieurs auteurs à l'aide des facteurs de type thêta et les résultats obtenus ici donnent une nouvelle présentation de ce qu'on connaît dans le cas classique où $A=C^*$ (le groupe multiplicatif des nombres complexes non nuls).

Comme application, on étudie enfin les espaces fibrés de groupe abélien connexe sur une variété compacte kaehlérienne X qui sont images réciproques des espaces fibrés sur la variété d'Albanese T_X de X par une application canonique $X \to T_X$. On démontre que ces espaces fibrés sont caractérisés par la propriété d'admettre des facteurs de type thêta vérifiant une condition remarquable[1].

---

1) Je suis conduit à ce travail grâce à une correspondence de M. J.-L. Koszul.

§ 1. Préliminaires.

On désigne par A un groupe de Lie complexe abélien connexe et par $\mathfrak{a}$ l'algèbre de Lie complexe des champs de vecteurs réels invariants sur A; la structure complexe de $\mathfrak{a}$ est définie par le tenseur de la structure complexe de A. L'algèbre de Lie $\mathfrak{a}$ est, en tant qu'un groupe abelien, le revêtement universel de A, la projection étant l'application exponentielle. On a ainsi la suite exacte

$$(1.1) \qquad (0) \to \Pi \xrightarrow{\iota} \mathfrak{a} \xrightarrow{\exp} A \to (0),$$

où Π est un sous-groupe discret de $\mathfrak{a}$.

Soit X une variété complexe[2]. On désigne par $\mathbf{A}$ (resp. $\boldsymbol{\mathfrak{a}}$) le faisceau des germes de fonctions holomorphes sur X à valeurs dans A (resp. $\mathfrak{a}$); le faisceau constant sur X de groupe Π (resp. $\mathfrak{a}$) sera encore noté Π (resp. $\mathfrak{a}$). Le groupe Π étant discret, de la suite exacte (1.1) résulte la suite exacte de faisceaux

$$(0) \to \Pi \to \boldsymbol{\mathfrak{a}} \to \mathbf{A} \to (0)$$

et ceci définit en cohomologie la suite exacte

$$\to H^1(X, \boldsymbol{\mathfrak{a}}) \to H^1(X, \mathbf{A}) \xrightarrow{\delta^1} H^2(X, \Pi) \xrightarrow{\iota^2} H^2(X, \boldsymbol{\mathfrak{a}}) \to .$$

D'autre part, les injections $\iota : \Pi \to \mathfrak{a}$ et $\iota_1 : \mathfrak{a} \to \boldsymbol{\mathfrak{a}}$ définissent en cohomologie les homomorphismes suivants.

$$\iota_0^2 : H^2(X, \Pi) \to H^2(X, \mathfrak{a}),$$
$$\iota_1^2 : H^2(X, \mathfrak{a}) \to H^2(X, \boldsymbol{\mathfrak{a}}).$$

Posons $\delta = \iota_0^2 \circ \delta^1$. On a le diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd}
H^1(X, \mathbf{A}) \arrow[r, "\delta^1"] \arrow[dr, "\delta"'] & H^2(X, \Pi) \arrow[r, "\iota^2"] \arrow[d, "\iota_0^2"] & H^2(X, \boldsymbol{\mathfrak{a}}), \\
& H^2(X, \mathfrak{a}) \arrow[ur, "\iota_1^2"'] &
\end{tikzcd}$$

où la première ligne est une suite exacte. Il en résulte que l'image de δ coïncide avec l'intersection de l'image de ι_0^2 et du noyau de ι_1^2. Or, d'après un théorème de de Rham, on peut canoniquement identifier le groupe $H^2(X, \mathfrak{a})$ au groupe des classes de d-cohomologie de formes

2) Pour les résultats employés ci-dessus concernant les variétés complexes et kaehlériennes, voir, par example [2].

différentielles de degré 2 sur X à valeur dans $\mathfrak{a}$. De même, d'après un théorème de Dolbeault, $H^2(X, \mathfrak{a})$ est canoniquement identifié au groupe des classes de d''-cohomologie de formes différentielles de type (0, 2) sur X à valeurs dans $\mathfrak{a}$. Cela fait, l'image par ι_1^2 de la classe de d-cohomologie représentée par une forme de degré 2 et d-fermée Ω est la classe de d''-cohomologie qui contient la composante de type (0, 2) de la forme Ω. Il en résulte que l'image de $H^1(X, \mathbf{A})$ par δ dans $H^2(X, \mathfrak{a})$ est l'ensemble des classes de d-cohomologie qui sont représentées par les formes de degré 2 et d-fermé Ω vérifiant les deux conditions suivantes.

(1. 2) Les périodes de Ω appartiennent à Π.

(1. 3) La composante de type (0, 2) de Ω est un d''-cobord.

On peut identifier le groupe $H^1(X, \mathbf{A})$ à l'ensemble des classes d'espaces fibrés principaux holomorphes de base X et de groupe A [2]. Supposons donné un élément de $H^1(X, \mathbf{A})$ par la classe $[P]$ d'un espace fibré P. Si une connexion sur P est définie par une forme ω de degré 1 sur P à valeurs dans $\mathfrak{a}$, la forme de courbure Ω sur X de cette connexion est la forme de degré 2 sur X à valeurs dans $\mathfrak{a}$ dont l'image reciproque Ωp par la projection $p: P \to X$ est $d\omega$[3]. On constate facilment que l'image $\delta(P)$ de la classe $[P]$ est la classe de d-cohomologie représentée par la forme Ω.

Supposons que la variété X soit compacte kaehlérienne. On sait qu'un élément de $H^2(X, \mathfrak{a})$ (resp. de $H^2(X, \mathfrak{a})$) est alors représentée par une forme harmonique, et une seule, de degré 2 (resp. de type (0, 2)) sur X à valeurs dans $\mathfrak{a}$.

Lemme 1. *Soit P un espace fibré principal holomorphe de group abelien connexe A et de base X compacte kaehlérienne. Alors, il existe une connexion sur P dont la forme ω est de type* (1, 0) *et dont la forme de courbure sur X est une forme harmonique; cette forme harmonique est bien déterminée par la classe $[P]$. De plus, pour qu'une autre forme ω' de type* (1, 0) *sur P définisse aussi une connexion dont la forme de courbure est harmonique, il faut et il suffit qu'il existe une forme holomorphe ζ de degré* 1 *sur X telle que*

$$\omega' = \omega + \zeta p ,$$

p étant la projection de P sur X.

3) Pour les notions concernant les connexions, on suivra [7] sauf pour la définition de la forme de courbure d'une connexion.

Une connexion dont la forme est de type (1, 0) et dont la forme de courbure est harmonique sera appelée *H-connexion* sur $\boldsymbol{P}$.

Démonstration. La composante de type (1, 0) d'une forme de connexion étant aussi une forme de connexion, il existe sur $\boldsymbol{P}$ une connexion dont la forme ω_0 est de type (1, 0). Soient Ω_0 la forme de courbure de cette connexion et Ω_0' sa composante de type (1, 1). La partie harmonique Ω' de Ω_0' est de type (1, 1) et d''-cohomologue à Ω_0'; il existe une forme ξ de type (1, 0) sur $\boldsymbol{X}$ telle que

$$\Omega' - \Omega_0' = d''\xi$$

La forme $\omega = \omega_0 + \xi p$ est alors de type (1, 0) et définit une connexion sur $\boldsymbol{P}$. Soit Ω la forme de courbure de cette connexion. Puisque $\Omega p = d\omega = d\omega_0 + d(\xi p) = (\Omega_0 + d\xi)p$, la composante de type (1, 1) de Ω est égale à la forme harmonique Ω'. La forme $\Omega - \Omega'$ étant alors de type (2, 0) et d-fermée, $\Omega - \Omega'$ est holomorphe et par suite harmonique. La forme $\Omega = \Omega' + (\Omega - \Omega')$ est ainsi harmonique, ce qui montre que la forme ω définit une H-connexion sur $\boldsymbol{P}$. Puisque la forme de courbure Ω représente la classe $\delta(\boldsymbol{P})$, la forme harmonique Ω est bien déterminée par la classe $[\boldsymbol{P}]$.

Pour qu'une autre forme ω' de type (1, 0) sur $\boldsymbol{P}$ définisse une connexion sur $\boldsymbol{P}$, il faut et il suffit qu'il existe une forme ζ de type (1, 0) sur $\boldsymbol{X}$ à valeurs dans $\mathfrak{a}$ telle que

$$\omega' = \omega + \zeta p .$$

Pour que la forme de courbure de la connexion ω' soit égale à celle de la connexion ω, il faut et il suffit que $d\omega = d\omega'$. Par conséquent, pour que la forme ω' définisse une H-connexion sur $\boldsymbol{P}$, il faut et il suffit que $d\zeta = 0$, c'est à dire que la forme ζ soit holomorphe. Cela démontre le lemme.

Théorème 1. *Soit $\boldsymbol{X}$ une variété compacte kaehlérienne et soit $\mathcal{H}^2(\boldsymbol{X}, \mathfrak{a})$ le groupe des formes harmoniques de degré 2 sur $\boldsymbol{X}$ à valeurs dans $\mathfrak{a}$. En faisant correspondre à la classe $[\boldsymbol{P}]$ d'un espace fibré $\boldsymbol{P}$ de groupe $\boldsymbol{A}$ et de base $\boldsymbol{X}$ la forme de courbure des H-connexions sur $\boldsymbol{P}$, on a un homomorphisme du groupe $H^1(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{A})$ dans le groupe $\mathcal{H}^2(\boldsymbol{X}, \mathfrak{a})$. De plus:*

(i) *L'image de $H^1(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{A})$ par θ dans $\mathcal{H}^2(\boldsymbol{X}, \mathfrak{a})$ est l'ensemble des formes harmoniques Ω ayant les propriétés suivantes:*

(*a*) *Les périodes de Ω appartiennent à Π.*

(*b*) *La composante de type (0. 2) de Ω est nulle.*

(ii) *L'ensemble des classes d'espaces fibrés admettant des connexions holomorphes intégrables coïncide avec le sous-groupe noyau de θ.*

(iii) *L'ensemble des classes d'espaces fibrés admettant des connexions holomorphes coïncide avec l'image réciproque par θ du sous-groupe $\mathcal{H}^{2,0}(\boldsymbol{X}, \mathfrak{a})$ des formes de type* (2. 0) *dans* $\mathcal{H}^2(\boldsymbol{X}. \mathfrak{a})$.

Démonstration. En faisant correspondre à une forme harmonique de degré 2 sur $\boldsymbol{X}$ l'élément de $H^2(\boldsymbol{X}, \mathfrak{a})$ qu'elle représente, on a un isomorphisme ε du groupe $\mathcal{H}^2(\boldsymbol{X}, \mathfrak{a})$ sur le groupe $H^2(\boldsymbol{X}, \mathfrak{a})$. On voit alors :

$$\varepsilon \circ \theta = \delta$$

Par conséquent, θ est un homomorphisme du groupe $H^1(\boldsymbol{X}, \mathbf{A})$ dans le groupe $\mathcal{H}^2(\boldsymbol{X}, \mathfrak{a})$. L'assertion (i) en résulte, puisque l'image de $H^1(\boldsymbol{X}, \mathbf{A})$ par θ consiste en les formes harmoniques de degré 2 vérifiant (1. 2) et (1. 3). Four voir (ii) et (iii), il suffit de remarquer qu'une connexion holomorphe intégrable (resp. une connexion holomorphe) n'est autre qu'une H-connexion dont la forme de courbure est nulle (resp. de type (2. 0)).

§ 2. Structure du groupe $H^1(\boldsymbol{T}, \boldsymbol{A})$.

On désigne par $\boldsymbol{T}$ un tore complexe de dimension n. Soit $\boldsymbol{H}$ le plus grand groupe connexe d'homéomorphismes holomorphes de $\boldsymbol{T}$ muni de la topologie compacts-ouverts ; c'est un groupe de Lie complexe abelien qui opère holomorphiquement dans $\boldsymbol{T}$ de manière simplement transitive [1]. L'algèbre de Lie de $\boldsymbol{H}$ étant notée $\mathfrak{h}$, on a la suite exacte

$$(0) \to \Delta \to \mathfrak{h} \xrightarrow{q} \boldsymbol{H} \to (0)\,,$$

où Δ est un sous-groupe discret de $\mathfrak{h}$ et est un groupe abelien libre de rang $2n$, et où q est l'application exponentielle.

On choisit une métrique kaehlérienne sur $\boldsymbol{T}$ invariante par les opérations de $\boldsymbol{H}$. On sait que les formes harmoniques de degré 2 sur $\boldsymbol{T}$ à valeurs dans $\mathfrak{a}$ sont alors les formes sur $\boldsymbol{T}$ invariantes par les opérations de $\boldsymbol{H}$ sur $\boldsymbol{T}$. Puisque $\boldsymbol{H}$ opère sur $\boldsymbol{T}$ de manière simplement transitive, ces formes sont considérées comme formes de degré 2 invarantes sur $\boldsymbol{H}$ à valeurs dans $\mathfrak{a}$. Au moyen de cette correspondence le groupe $\mathcal{H}^2(\boldsymbol{T}, \mathfrak{a})$ des formes harmoniques de degré 2 sur $\boldsymbol{T}$ est isomorphe au groupe $\bigwedge^2(\mathfrak{h}, \mathfrak{a})$ des formes bilinéaires réelles antisymétriques sur $\mathfrak{h}$ à valeurs dans $\mathfrak{a}$. Alors, comme on le voit facilement, une forme $\Omega \in \mathcal{H}^2(\boldsymbol{T}, \mathfrak{a})$ vérifiant les conditions (a) et (b) dans le théorème 1 est transformée par cet isomorphisme en une forme $\varphi \in \bigwedge^2(\mathfrak{h}, \mathfrak{a})$ qui vérifie les conditions suivantes.

(2. 1) $$\varphi(u, u') \in \Pi, \ \textit{si} \ u, u' \in \Delta$$

$$(2.2) \qquad i\varphi(y, y')-\varphi(iy, y')-\varphi(y, iy')-i\varphi(iy, iy') = 0\,,$$

quels que soient $y, y' \in \mathfrak{h}$, où i désigne les structures complexes de $\mathfrak{a}$ et de $\mathfrak{h}$. De plus, pour que la forme Ω soit de type (2. 0), il faut et il suffit que la forme φ qui lui correspond vérifie la condition :

(2. 3) *φ est bilinéaire complexe.*

Considérons maintenant le groupe $H^1(\boldsymbol{T}, \mathbf{A})$ des classes d'espaces fibrés principaux holomorphes de groupe $\boldsymbol{A}$ et de base $\boldsymbol{T}$. L'homomorphisme θ de $H^1(\boldsymbol{T}, \boldsymbol{A})$ dans $\mathcal{H}^2(\boldsymbol{T}, \mathfrak{a})$, défini au théorème 1, et l'isomorphisme ci-dessus définissent un homomorphisme du groupe $H^1(\boldsymbol{T}, \mathbf{A})$ dans le groupe $\bigwedge^2(\mathfrak{h}, \mathfrak{a})$; on le désignera encore par θ. Compte tenu de ce qu'on a vu plus haut, le théorème 1 implique le théorème suivant.

Théorème 2. *Dans le groupe $H^1(\boldsymbol{T}, \mathbf{A})$ des classes d'espaces fibrés principaux holomorphes de groupe $\boldsymbol{A}$ et de base $\boldsymbol{T}$, soit $\mathcal{P}^0$ (resp. $\mathcal{P}_h$) l'ensemble des classes d'espaces fibrés admettant des connexions holomorphes intégrables (resp. des connexions holomorphes). Soit d'autre part Φ (resp. Φ_h) le groupe des formes bilinéaires réelles antisymétriques sur $\mathfrak{h}$ à valeurs dans $\mathfrak{a}$ vérifiant les conditions* (2. 1) *et* (2. 2) (*resp.* (2. 1) *et* (2. 3)).

Alors, on a un homomorphisme canonique θ du groupe $H^1(\boldsymbol{T}, \mathbf{A})$ dans le groupe Φ tel que les suites

$$(0) \to \mathcal{P}^0 \to H^1(\boldsymbol{T}, \mathbf{A}) \xrightarrow{\theta} \Phi \to (0)\,,$$

$$(0) \to \mathcal{P}^0 \to \mathcal{P}_h \xrightarrow{\theta} \Phi_h \to (0)\,.$$

soient exactes. En particulier, $\mathcal{P}^0$ et $\mathcal{P}_h$ sont des sous-groupes de $H^1(\boldsymbol{T}, \mathbf{A})$.

REMARQUE. La seconde suite exacte coïncide avec celle qui est établie dans [5] théorème 7 ; on a aussi une nouvelle démonstration de [5] théorème 5.

Soit maintenant $\mathrm{Hom}(\Delta, \boldsymbol{A})$ le groupe abelien des homomorphismes de Δ dans $\boldsymbol{A}$; la somme des éléments γ, $\gamma' \in \mathrm{Hom}(\Delta, \boldsymbol{A})$ est définie par $(\gamma+\gamma')(u)=\gamma(u)\gamma'(u)(u \in \Delta)$. Les homomorphismes de Δ dans $\boldsymbol{A}$ qui sont restrictions à Δ des homomorphismes holomorphes de $\mathfrak{h}$ dans $\boldsymbol{A}$ forment un sous-groupe de $\mathrm{Hom}(\Delta, \boldsymbol{A})$; on le désignera par $\mathrm{Hom}_h(\Delta, \boldsymbol{A})$. D'autre part, on choisit un point $x \in \boldsymbol{T}$ et une base $\{u_1, \cdots, u_{2n}\}$ du groupe abelien libre Δ.

Définissons un homomorphisme τ du groupe $H^1(\boldsymbol{T}, \mathbf{A})$ dans le groupe quotient $\mathrm{Hom}(\Delta, \boldsymbol{A})/\mathrm{Hom}_h(\Delta, \boldsymbol{A})$. Soit $\boldsymbol{P}$ un espace fibré principal holomorphe de groupe $\boldsymbol{A}$ et de base $\boldsymbol{T}$. On choisit une H-connexion sur $\boldsymbol{P}$ (Lemme 1). Le groupe d'holonomie étant considéré par rapport à cette

connexion, la courbe fermée $q(tu_k)x$ $(0 \leqq t \leqq 1)$ dans $\boldsymbol{T}$ d'origine x définit un élement a_k du groupe d'holonomie d'origine un point z de la fibre audessus de x. Puisque le groupe structural $\boldsymbol{A}$ de $\boldsymbol{P}$ est abelien, les éléments $a_1, \cdots, a_{2n}$ sont bien déterminés par $x, u_1, \cdots, u_{2n}$, indépendemment du choix de z, et définissent un homomorphisme $\gamma : \Delta \to \boldsymbol{A}$ tel que $\gamma(u_k) = a_k$ $(1 \leqq k \leqq 2n)$. De plus, on voit que la classe $[\gamma]$ de γ mod. $\mathrm{Hom}_h(\Delta, \boldsymbol{A})$ ne dépend pas du choix de H-connexion, et est bien déterminée par $\boldsymbol{P}$. En effet, d'après le lemme 1, si deux H-connexions sont définies par les formes ω, ω', il existe une forme holomorphe ζ de degré 1 sur $\boldsymbol{T}$, à valeurs dans $\mathfrak{a}$, telle que $\omega' = \omega + \zeta p$. La forme holomorphe ζ est harmonique et donc invariante par les opérations de $\boldsymbol{H}$ sur $\boldsymbol{T}$; par conséquent, la forme ζ définit une forme invariante de type (1. 0) sur $\boldsymbol{H}$, à valeurs dans $\mathfrak{a}$, et par suite une forme linéaire complexe, notée encore ζ, sur $\mathfrak{h}$ à valeurs dans $\mathfrak{a}$. Soit ν l'homomorphime holomorphe de $\mathfrak{h}$ dans $\boldsymbol{A}$ défini par

$$\nu(y) = \exp(-\zeta(y))$$

pour $y \in \mathfrak{h}$. Alors, si $z_k(t)$ est une courbe dans $\boldsymbol{P}$ qui est horizontale par rapport à la connexion ω et qui se projette sur la courbe $q(tu_k)x$, la courbe $z'_k(t) = z_k(t)\nu(tu_k)$[4] est une courbe qui est horizontale par rapport à la connexion ω' et qui se projette sur la même courbe $q(tu_k)x$ $(0 \leqq t \leqq 1)$. Par conséquent, si la courbe $q(tu_k)x$ définit l'élément a_k du groupe d'holonomie de la connexion ω, la même courbe définit l'élément $a_k\nu(u_k)$ du groupe d'holonomie de la connexion ω' $(1 \leqq k \leqq 2n)$; si l'on part de la connexion ω' au lieu de la connexion ω, on obtient ainsi l'homomorphisme $\gamma + \nu_\Delta$ au lieu de l'homomorphisme γ, où ν_Δ est la restriction à Δ de l'homomorphisme $\nu : \mathfrak{h} \to \boldsymbol{A}$. L'espace fibré $\boldsymbol{P}$ définit ainsi un élément $\tau(\boldsymbol{P})$, représenté par l'homomorphisme γ, du groupe quotient $\mathrm{Hom}(\Delta, \boldsymbol{A})/\mathrm{Hom}_h(\Delta, \boldsymbol{A})$. Par ailleurs, compte tenu du lemme 1, ce raisonnement montre que, si $\tau(\boldsymbol{P}) = 0$, alors par un choix convenable de H-connexion, l'homomorphisme γ obtenu à partir de cette connexion est nul.

Il est clair que l'application $\boldsymbol{P} \to \tau(\boldsymbol{P})$ définit une application de $H^1(\boldsymbol{T}, \mathbf{A})$ dans $\mathrm{Hom}(\Delta, \boldsymbol{A})/\mathrm{Hom}_h(\Delta, \boldsymbol{A})$.

Théorème 3. *L'application τ définie ci-dessus est un homomorphisme du groupe $H^1(\boldsymbol{T}, \mathbf{A})$ dans le groupe quotient* $\mathrm{Hom}(\Delta, \boldsymbol{A})/\mathrm{Hom}_h(\Delta, \boldsymbol{A})$. *De plus, la restriction de τ au sous-groupe $\mathcal{P}^0$ est bijective; en particulier,*

$$\mathcal{P}^0 \cong \mathrm{Hom}(\Delta, \boldsymbol{A})/\mathrm{Hom}_h(\Delta, \boldsymbol{A}).$$

---

4) Pour un espace fibré principal, les opérations du groupe structural sont écrites à droite.

Démonstration. Soient $\boldsymbol{P}_1$ et $\boldsymbol{P}_2$ deux espaces fibrés de groupe $\boldsymbol{A}$ et de base $\boldsymbol{T}$ dont les projections sont p_1 et p_2. Le produit direct $\boldsymbol{P}_1\times\boldsymbol{P}_2$ est un espace fibré principal de groupe $\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{A}$ et de base $\boldsymbol{T}\times\boldsymbol{T}$ dont la projection est (p_1, p_2). Soit $\boldsymbol{P}_1\vee\boldsymbol{P}_2$ le sous-espace de $\boldsymbol{P}_1\times\boldsymbol{P}_2$ des éléments (z_1, z_2) tels que $p_1(z_1)=p_2(z_2)$; $\boldsymbol{P}_1\vee\boldsymbol{P}_2$ est un espace fibré principal de groupe $\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{A}$ et de base $\boldsymbol{T}$, la projection p' étant définie par $p'(z_1, z_2)=p_1(z_1)$. Soit $\boldsymbol{B}$ le sous-groupe de $\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{A}$ constitué par les éléments (a, a^{-1}) où $a\in\boldsymbol{A}$. L'espace quotient de $\boldsymbol{P}_1\vee\boldsymbol{P}_2$ par les opérations de $\boldsymbol{B}$ est alors un espace fibré principal $\boldsymbol{P}_1+\boldsymbol{P}_2$ de groupe $\boldsymbol{A}\cong(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{A})/\boldsymbol{B}$ et de base $\boldsymbol{T}$ dont la classe $[\boldsymbol{P}_1+\boldsymbol{P}_2]$ est la somme des classes $[\boldsymbol{P}_1]$, $[\boldsymbol{P}_2]$ pour la loi d'addition dans $H^1(\boldsymbol{T}, \mathrm{A})$.

Supposons maintenant qu'on ait des H-connexions sur $\boldsymbol{P}_1$ et $\boldsymbol{P}_2$ dont les formes sont ω_1 resp. ω_2. Les images réciproques de ω_1 et de ω_2 sur $\boldsymbol{P}_1\times\boldsymbol{P}_2$ par les projections de $\boldsymbol{P}_1\times\boldsymbol{P}_2$ sur $\boldsymbol{P}_1$ étant aussi notées ω_1 resp. ω_2, la forme $\omega_1+\omega_2$ sur $\boldsymbol{P}_1\times\boldsymbol{P}_2$ a pour restriction au sous-espace $\boldsymbol{P}_1\vee\boldsymbol{P}_2$ une forme qui est image réciproque $\omega p''$ d'une forme ω sur $\boldsymbol{P}_1+\boldsymbol{P}_2$ par la projection $p'':\boldsymbol{P}_1\vee\boldsymbol{P}_2\to\boldsymbol{P}_1+\boldsymbol{P}_2$. On constate facilement que ω est une forme de connexion de type (1. 0) sur $\boldsymbol{P}_1+\boldsymbol{P}_2$ et, de plus, que la forme de courbure sur $\boldsymbol{T}$ de la connexion ω est la somme des formes de courbure des connexions ω_1 et ω_2 ; par conséquent, la forme ω définit une H-connexion sur $\boldsymbol{P}_1+\boldsymbol{P}_2$. Or, soient $z_{1,k}(t)$ et $z_{2,k}(t)$ des courbes sur $\boldsymbol{P}_1$ resp. $\boldsymbol{P}_2$ qui sont horizontales par rapport aux connexions ω_1 resp. ω_2 et qui se projettent sur la courbe $q(tu_k)x$. La courbe $(z_{1,k}(t), z_{2,k}(t))$ est alors dans $\boldsymbol{P}_1\vee\boldsymbol{P}_2$ et se projette par p'' sur une courbe $z_k(t)$ dans $\boldsymbol{P}_1+\boldsymbol{P}_2$; cette courbe $z_k(t)$ est horizontale par rapport à la connexion ω et se projette sur la courbe $q(tu_k)x$ par la projection $p:\boldsymbol{P}_1+\boldsymbol{P}_2\to\boldsymbol{T}$ $(0\leqq t\leqq 1)$. Soient γ_1, γ_2 les homomorphismes représentant $\tau(\boldsymbol{P}_1)$ resp. $\tau(\boldsymbol{P}_2)$ qui sont définis au moyen des H-connexions ω_1 resp. ω_2 ; on a $z_{1,k}(1)=z_{1,k}(0)\gamma_1(u_k)$ et $z_{2,k}(1)=z_{2,k}(0)\gamma_2(u_k)$. On a $z_k(1)=z_k(0)(\gamma_1(u_k)\gamma_2(u_k))$, ce qui implique l'homomorphisme γ défini par la connexion ω sur $\boldsymbol{P}_1+\boldsymbol{P}_2$ est égale à la somme $\gamma_1+\gamma_2$. Ainsi, $\tau(\boldsymbol{P}_1+\boldsymbol{P}_2)=\tau(\boldsymbol{P}_1)+\tau(\boldsymbol{P}_2)$ et l'application τ est un homomorphisme du groupe $H^1(\boldsymbol{T}, \mathrm{A})$ dans le groupe $\mathrm{Hom}(\Delta, \boldsymbol{A})/\mathrm{Hom}_h(\Delta, \boldsymbol{A})$.

Pour voir la seconde partie du théorème, supposons que l'espace fibré $\boldsymbol{P}$ admette une connexion holomorphe intégrable et que $\tau(\boldsymbol{P})=0$. D'après la remarque faite plus haut, il existe une H-connexion sur $\boldsymbol{P}$ pour laquelle l'homomorphisme définissant $\tau(P)$ est nul. Puisque $\theta(P)=0$, cette connexion est holomorphe intégrable. Il en résulte facilement que le groupe d'holonomie en se réduit à l'élément neutre. Par suite, comme dans le cas différentiable [7], il existe une section holomorphe $\boldsymbol{T}\to\boldsymbol{P}$ dans l'espace fibré $\boldsymbol{P}$. L'espace fibré $\boldsymbol{P}$ est alors trivial, c'est à dire

$[\boldsymbol{P}]=0$. La restriction de l'homomorphisme τ au sous-groupe $\mathcal{P}^0$ est donc injectif.

Soit maintenant γ un homomorphisme du groupe Δ dans le groupe $\boldsymbol{A}$. L'espace $\mathfrak{h}$ se munit d'une structure d'espace fibré principal holomorphe de groupe Δ et de base $\boldsymbol{T}$ ayant pour projection l'application $y \to q(y)x$ $(y \in \mathfrak{h})$. À cet espace fibré est associé par γ un espace fibré principal $\boldsymbol{P}$ de groupe $\boldsymbol{A}$ et de base $\boldsymbol{T}$. On voit facilement que l'image $\tau(\boldsymbol{P})$ de la classe $[\boldsymbol{P}]$ est la classe $[\gamma]$ de γ mod. $\mathrm{Hom}_h(\Delta, \boldsymbol{A})$ et que $\boldsymbol{P}$ admet une connexion holomorphe intégrable ; en effet, le raisonnement dans le paragraphe suivant le montrera comme cas particulier. La restriction de l'homomorphisme τ au sous-groupe $\mathcal{P}^0$ est donc surjectif, et le théorème 3 est ainsi démontré.

Il résulte des théorème 2 et 3 le théorème suivant.

Théorème 4. *Les notations étant celles des théorèmes* 2 *et* 3, *l'application* $[\boldsymbol{P}] \to (\theta(\boldsymbol{P}), \tau(\boldsymbol{P}))$ *définit les isomorphismes* :

$$H^1(\boldsymbol{T}, \mathrm{A}) \cong \Phi \times \mathrm{Hom}(\Delta, \boldsymbol{A})/\mathrm{Hom}_h(\Delta, \boldsymbol{A}),$$
$$\mathcal{P}_h \cong \Phi_h \times \mathrm{Hom}(\Delta, \boldsymbol{A})/\mathrm{Hom}_h(\Delta, \boldsymbol{A}).$$

REMARQUE. Le second isomorphisme de ce théorème coïncide avec celui de [5] théorème 10, dans lequel on établit aussi la structure du groupe $\mathcal{P}^0 \cong \mathrm{Hom}(\Delta, \boldsymbol{A})/\mathrm{Hom}_h(\Delta, \boldsymbol{A})$.

§ 3. Représentation d'un espace fibré $\boldsymbol{P}$.

On conserve les notations dans les paragraphes précédents. Soit φ une forme appartenant à Φ et soit γ un homomorphisme du groupe Δ dans le groupe $\boldsymbol{A}$. Dans la suite, on construira un espace fibré principal holomorphe $\boldsymbol{P}$ de groupe $\boldsymbol{A}$ et de base $\boldsymbol{T}$, tel que $\theta(\boldsymbol{P})=\varphi$ et que $\tau(\boldsymbol{P})$ soit la classe $[\gamma]$ de γ mod. $\mathrm{Hom}_h(\Delta, \boldsymbol{A})$; $\boldsymbol{P}$ est en effect un espace homogène $\boldsymbol{G}/\Lambda$ d'un groupe de Lie réelle $\boldsymbol{G}$, admettant une structure complexe invariante à gauche, par un sous-groupe discret Λ. D'après le théorème 4, tout espace fibré de groupe $\boldsymbol{A}$ et de base $\boldsymbol{T}$ est isomorphe à un espace fibré ainsi construit.

Soit $\mathfrak{g}$ un espace vectoriel complexe pour lequel il existe la suite exacte d'espaces vectoriels complexes :

$$(0) \to \mathfrak{a} \xrightarrow{\lambda} \mathfrak{g} \xrightarrow{\pi} \mathfrak{h} \to (0) \tag{3.1}$$

On définit dans $\mathfrak{g}$ une structure d'algèbre de Lie réelle en posant

$$[X, Y] = -\lambda(\varphi(\pi(X), \pi(Y)) \tag{3.2}$$

pour $X, Y \in \mathfrak{g}$. La suite (3.1) est alors une suite exacte d'algèbres de Lie réelles et le centre de $\mathfrak{g}$ contient $\lambda(\mathfrak{a})$. Il en résulte que la sous-algèbre des commutateurs $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ est contenue dans le centre de $\mathfrak{g}$.

Soit $\boldsymbol{G}$ un groupe de Lie réel simplement connexe ayant $\mathfrak{g}$ pour algèbre de Lie des champs de vecteurs invariants à gauche. On observe que, dans le groupe $\boldsymbol{G}$, on a :

$$\begin{aligned} \exp X \exp Y &= \exp\left(X+Y+\frac{1}{2}[X, Y]\right) \\ &= \exp(X+Y)\exp\frac{1}{2}[X, Y], \end{aligned} \tag{3.3}$$

quels que soient $X, Y \in \mathfrak{g}$. En effet, cela résulte de la formule de Hausdorff et du fait que $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ est dans le centre de $\mathfrak{g}$. Or, la structure complexe i de l'espace vectoriel complexe $\mathfrak{g}$ définit une structure presque complexe sur $\boldsymbol{G}$ qui est invariante à gauche. Puisque λ, π sont des applications linéaires complexes, la condition (2.2) pour $\varphi \in \Phi$ implique que

$$i[X, Y]-[iX, Y]-[X, iY]-i[iX, iY] = 0$$

quels que soient $X, Y \in \mathfrak{g}$ et cela montre que la structure presque complexe est intégrable. Par conséquent, on a une structure complexe invariante à gauche sur $\boldsymbol{G}$.

Si l'on idenifie les algèbres de Lie abeliennes $\mathfrak{a}$ et $\mathfrak{h}$ aux groupes de Lie complexes simplement connexes ayant ces algèbres pour algèbres de Lie, il existe des homomorphismes $\tilde{\lambda} : \mathfrak{a} \to \boldsymbol{G}$ et $\tilde{\pi} : \boldsymbol{G} \to \mathfrak{h}$ tels que le diagramme

$$\begin{tikzcd} & \mathfrak{g} \arrow[dr, "\pi"] \arrow[dd, "\exp."] & \\ \mathfrak{a} \arrow[ur, "\lambda"] \arrow[dr, "\tilde{\lambda}"'] & & \mathfrak{h} \\ & \boldsymbol{G} \arrow[ur, "\tilde{\pi}"'] & \end{tikzcd} \tag{3.4}$$

soit commutatif. Puisque λ et π sont linéaires complexes, les homomorphismes $\tilde{\lambda}$ et $\tilde{\pi}$ sont des applications holomorphes. On voit de plus que la suite

$$(0) \to \mathfrak{a} \xrightarrow{\tilde{\lambda}} \boldsymbol{G} \xrightarrow{\tilde{\pi}} \mathfrak{h} \to (0) \tag{3.5}$$

est exacte (voir [5] p. 53).

Choisissons maintenant une application linéaire complexe $\mu : \mathfrak{h} \to \mathfrak{g}$ tel que $\pi(\mu(X)) = X$ quel que soit $X \in \mathfrak{g}$, et un homomorphisme $\tilde{\gamma} : \Delta \to \mathfrak{a}$ tel que $\exp(\tilde{\gamma}(u)) = \gamma(u)$ quel que soit $u \in \Delta$. Soit Λ le sous-ensemble de $\boldsymbol{G}$ constitué par les éléments de la forme

$$(\exp(\mu(u_1))^{m_1}\cdots(\exp(\mu(u_{2n}))^{m_{2n}}\tilde{\lambda}(\tilde{\gamma}(m_1u_1+\cdots+m_{2n}u_{2n}))^{-1}\tilde{\lambda}(v)$$

où $m_1, \cdots, m_{2n}$ sont des nombres entiers et où $v\in\Pi$. D'après (3.2), (3.3) et (3.4), on a:

$$(\exp\mu(u_k))(\exp\mu(u_{k'}))(\exp\mu(u_k))^{-1}(\exp\mu(u_{k'}))^{-1}=\tilde{\lambda}(\varphi(u_{k'}, u_k))$$

pour $1\leqq k,\ k'\leqq 2n$. Compte tunu de la condition (2.1) il en résulte que Λ est un sous-groupe de $\boldsymbol{G}$. De plus, il résulte de (3.4) et de (3.5).:

$$\tilde{\lambda}(\mathfrak{a})\cap\Lambda=\tilde{\lambda}(\Pi)\,, \tag{3.6}$$

$$\tilde{\pi}(\Lambda)=\Delta\,. \tag{3.7}$$

Par conséquent, le groupe Λ est discret et donc fermé dans $\boldsymbol{G}$.

Posons $\boldsymbol{P}=\boldsymbol{G}/\Lambda=\{\Lambda s\,;\,s\in\boldsymbol{G}\}$. Puisque les translations à gauche sur $\boldsymbol{G}$ conservent la structure complexe de $\boldsymbol{G}$, l'espace $\boldsymbol{P}$ se munit d'une structure de variété complexe telle que la projection $\boldsymbol{G}\to\boldsymbol{P}$ soit holomorphe. Comme $\tilde{\lambda}(\mathfrak{a})$ est dans le centre de $\boldsymbol{G}$, les translations de $\boldsymbol{G}$ par les éléments de $\tilde{\lambda}(\mathfrak{a})$ définissent les opérations holomorphes de $\mathfrak{a}$ dans $\boldsymbol{P}$; d'après (3.6), le groupe Π opère trivialement dans $\boldsymbol{P}$ et le groupe $A=\mathfrak{a}/\Pi$ opère dans $\boldsymbol{P}$ de manière simplement transitive sur chaque son orbite. D'autre part, d'après (3.5) et (3.7), l'application $s\to q(\tilde{\pi}(s))x$ de $\boldsymbol{G}$ dans $\boldsymbol{T}$ induit une application holomorphe $p:\boldsymbol{P}\to\boldsymbol{T}$ qui est partout de rang maximal. L'espace fibré $\boldsymbol{P}$ se munit ainsi d'une structure d'espace fibré principal holomorphe de groupe $\boldsymbol{A}$, de base $\boldsymbol{T}$ et dont la projection est p.

On montre que $\theta(\boldsymbol{P})=\varphi$ et que $\tau(\boldsymbol{P})=[\gamma]$. D'après la suite exacte (3.1) il existe une application linéaire complexe $\omega:\mathfrak{g}\to\mathfrak{a}$ telle que

$$X=\lambda(\omega(X))+\mu(\pi(X))$$

quel que soit $X\in\mathfrak{g}$. On peut considérer cette application comme forme de type (1.0) invariante à gauche sur $\boldsymbol{G}$ à valeurs dans $\mathfrak{a}$. Puisque Λ est un sous-groupe discret, cette forme ω est alors l'image réciproque par l'application canonique $\boldsymbol{G}\to\boldsymbol{P}$ d'une forme de type (1.0) sur $\boldsymbol{P}$ et on constate immédiatement que celle-ci définit une connexion sur $\boldsymbol{P}$. Puisque $d\omega(X, Y)=-\omega([X, Y])=\varphi(\pi(X), \pi(Y))$, la forme de courbure de cette connexion est la forme sur $\boldsymbol{T}$ invariante par $\boldsymbol{H}$ qui définit la forme φ sur $\mathfrak{h}$. Cela montre que la connexion est une H-connexion et de plus que $\theta(\boldsymbol{P})=\varphi$. D'autre part, la courbe $\exp t(\mu(u_k))$ mod. $\Lambda(0\leqq t\leqq 1)$ sur $\boldsymbol{P}$ est horizontale par rapport à la H-connexion et se projette sur la courbe $q(tu_k)x$ par la projection $p:\boldsymbol{P}\to\boldsymbol{T}$. On a

$$\exp\mu(u_k)\equiv\tilde{\lambda}(\tilde{\gamma}(u_k))\quad\text{mod.}\ \Lambda\quad(1\leqq k\leqq 2n)$$

Il en résulte que la H-connexion définit l'homomorphisme γ comme représentant de $\tau(\boldsymbol{P})$. L'espace fibré $\boldsymbol{P}$ construit ci-dessus est ainsi un espace fibré pour lequel $\theta(\boldsymbol{P})=\varphi$ et $\tau(\boldsymbol{P})=[\gamma]$.

REMARQUE. Dans cette construction de l'espace fibré $\boldsymbol{P}$, le groupe $\boldsymbol{G}$ muni de la structure complexe invariante à gauche devient un groupe de Lie complexe si la forme φ est bilinéaire complexe. D'après le théorème 2, c'est le cas où l'espace fibré $\boldsymbol{P}$ admet une connexion holomorphe ; dans ce cas, le groupe $\boldsymbol{G}$ opère sur $\boldsymbol{P}$ comme le plus grand groupe connexe d'automorphismes de l'espace fibré $\boldsymbol{P}$ (voir [5]).

§ 4. Facteurs de type thêta.

Soit $\boldsymbol{X}$ une variété complexe. Le revêtement universel $\boldsymbol{Y}$ de $\boldsymbol{X}$ est un espace fibre principal holomorphe de base $\boldsymbol{X}$ ayant pour groupe structural le groupe fondamental Γ de $\boldsymbol{X}$. Soit $\boldsymbol{P}$ un espace fibre principal holomorphe de groupe $\boldsymbol{A}$ et de base $\boldsymbol{X}$, $\boldsymbol{A}$ désignant toujours un groupe de Lie abelien connexe. Pour que l'image réciproque de $\boldsymbol{P}$ par la projection $q:\boldsymbol{Y}\to\boldsymbol{X}$ soit l'espace fibré trivial $\boldsymbol{Y}\times\boldsymbol{A}$ de base $\boldsymbol{Y}$, il faut et il suffit qu'il existe une application holomorphe $r:\boldsymbol{Y}\to\boldsymbol{P}$ telle que $pr=q$, où p et la projection $\boldsymbol{P}\to\boldsymbol{X}$. Dans ce cas, l'application r définit une fonction k sur $\boldsymbol{Y}$ à valeurs dans $\boldsymbol{A}$ telle que $r(ys)=r(y)k(y, s)$ pour $y\in\boldsymbol{Y}$ et $s\in\Gamma$; la fouction k est un *facteur* sur $\boldsymbol{Y}$ à valuers dans $\boldsymbol{A}$, c'est-à-dire une fonction $k(y, s)$, holomorphe en y, telle que

$$k(y, s)k(ys, s') = k(y, ss')$$

quels que soient $y\in\boldsymbol{Y}$ et $s, s'\in\Gamma$. On sait que tout facteur k sur $\boldsymbol{Y}$ à valeurs dans $\boldsymbol{A}$ est ainsi obtenu à partir d'un espace fibré $\boldsymbol{P}$ trivialisé par $q:\boldsymbol{Y}\to\boldsymbol{X}$ et, dans ce cas, on dit que le facteur k definit l'espace fibré $\boldsymbol{P}$. De plus, on voit que l'application qui fait correspondre à un facteur un espace fibré admettant ce facteur définit un homomorphisme du groupe des facteurs sur $\boldsymbol{Y}$, à valeurs dans $\boldsymbol{A}$, dans le groupe $H^1(\boldsymbol{X}, \mathbf{A})$ des classes d'espace fibrés principaux holomorphes de groupe $\boldsymbol{A}$ et de base $\boldsymbol{X}$. Par ailleurs, un facteur $f(s)=k(y, s)$ qui ne dépend que de $s\in\Gamma$ n'est autre qu'un homomorphisme du groupe Γ dans $\boldsymbol{A}$ et un espace fibré admettant ce facteur est l'espace fibré *associé* à $\boldsymbol{Y}$ par l'homomorphisme $f:\Gamma\to\boldsymbol{A}$ [3].

Soit $\boldsymbol{P}$ un espace fibré admettant un facteur k qui est défini par une application $r:\boldsymbol{Y}\to\boldsymbol{P}$. La différentielle $k(y, s)^{-1}k(dy, s)$ par rapport à y est, pour tout $s\in\Gamma$, une forme sur $\boldsymbol{Y}$ à valeurs dans $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{a}$ étant canoniquement identifiée à l'espace tangent à $\boldsymbol{A}$ en l'élément neutre. Si une connexion sur $\boldsymbol{P}$ est définie par une forme ω et si Ω est la forme de

courbure sur $\boldsymbol{X}$ de cette connexion, la forme $\eta=\omega r$ image réciproque de ω par r vérifie les conditions suivantes :

$$\Omega q = d\eta\,, \tag{4.1}$$

$$\eta(dy\cdot s)-\eta(dy) = k(y, s)^{-1}k(dy, s) \tag{4.2}$$

quels que soient $y\in \boldsymbol{Y}$ et $s\in\Gamma$, où dy désigne un vecteur tangent quelconque en y à $\boldsymbol{Y}$ [6] [3].

Un facteur k est dit *de type thêta* si sa différentielle $k(y, s)^{-1}k(dy, s)$ par rapport à y est, pour tout $s\in\Gamma$, une forme sur $\boldsymbol{Y}$ à valeurs dans $\mathfrak{a}$ invariants par les operations de Γ dans $\boldsymbol{Y}$ [4].[5]

Dans la suite, on montre que tout espace fibré principal holomorphe $\boldsymbol{P}$ de groupe $\boldsymbol{A}$ et de base $\boldsymbol{T}$ un tore complexe admet un facteur de type thêta[6] et on détermine les formes explicites des facteurs de type thêta définissant $\boldsymbol{P}$ au moyen des invariants $\theta(\boldsymbol{P})$ et $\tau(\boldsymbol{P})$.

On conserve les notations des paragraphe précédents et de plus on identifie le tore complexe $\boldsymbol{T}$ au groupe $\boldsymbol{H}$ par la bijection $q(y)x\to q(y)$ $(y\in\mathfrak{h})$; le revêtement universel de $\boldsymbol{T}$ est ainsi l'espace vectoriel $\mathfrak{h}$ muni de la projection $q:\mathfrak{h}\to\boldsymbol{T}$, et le groupe fondamental de $\boldsymbol{T}$, qui est isomorphe au groupe Δ, opère dans $\mathfrak{h}$ par les translations de $\mathfrak{h}$ par les éléments de Δ.

Soit $k(y, u)$ un facteur sur $\mathfrak{h}$ à valeurs dans $\boldsymbol{A}$. Puisque $\mathfrak{h}$ est simplement connexe, il existe une fonction $h(y, u)$, holomorphe en y, sur $\mathfrak{h}\times\Delta$ à valeurs dans $\mathfrak{a}$ telle que

$$k(y, u) = \exp h(y, u)$$

quels que soient $y\in\mathfrak{h}$, $u\in\Delta$. On a alors

$$h(y, u)+h(y+u, u')\equiv h(y, u+u') \quad \text{mod. } \Pi$$

quels que soient $y\in\mathfrak{h}$, $u, u'\in\Delta$. Supposons que le facteur k est de type thêta. Il en résulte facilement qu'on peut mettre la fonction h sous la forme

$$h(y, u) = L(y, u)+H(u) \tag{4.3}$$

---

5) Comme dans le cas classique [8], on a le théorème suivant. *Pur qu'un espace fibré de groupe $\boldsymbol{A}$ et de base $\boldsymbol{X}$ compacte kaehlérienne soit défini par un facteur de type thêta, il faut et il suffit que l'élément $\delta(\boldsymbol{P})\in H^2(\boldsymbol{X}, \mathfrak{a})$ soit décomposable* ; un élément de $H^2(\boldsymbol{X}, \mathfrak{a})$ est dit *décomposable* s'il appartient au sous-module engendré par l'image de l'application $H^1(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{C})\times H^1(\boldsymbol{X}, \mathfrak{a})\to H^2(\boldsymbol{X}, \mathfrak{a})$ définie en prenant le produit extérieure d'une forme complexe sur $\boldsymbol{X}$ par une forme sur $\boldsymbol{X}$ à valeurs dans $\mathfrak{a}$.

6) Cela résulte aussi du théorème cité dans la note 5).

où $L(y, y')$ est une forme bilinéaire réelle sur $\mathfrak{h}$ à valeurs dans $\mathfrak{a}$ qui est linéaire complexe en y et où H est une certaine fonction sur Δ à valeurs dans $\mathfrak{a}$.

Lemme 2[7]. *Supposons qu'un espace fibré* $\boldsymbol{P}$ *admette un facteur de type thêta* k. *Si* $\varphi=\theta(\boldsymbol{P})$ *et si* $k(y, u)=\exp h(y, u)$ *où* $h(y, u)$ *est de la forme* (4.3) *on a*

$$\varphi(y, y') = L(y', y)-L(y, y')$$

quels que soient $y, y' \in \mathfrak{h}$.

Démonstration. Puisque le sous-groupe Δ engendre $\mathfrak{h}$ sur les nombres réels, il suffit de montrer que

$$\varphi(u, u') = L(u', u)-L(u, u')$$

quels que soient $u, u' \in \Delta$. Soient $u, u' \in \Delta$ et Q le parallelogramme dans $\mathfrak{h}$ de sommets $(0, u, u+u', u')$. On choisit une H-connexion sur $\boldsymbol{P}$; la forme de courbure Ω de cette connexion définit la forme φ. Compte tenu de (4.1), (4.2), (4.3), on a:

$$\begin{aligned}
\varphi(u, u') &= \int_Q (\Omega q)(dy, dy') \\
&= \int_{\partial Q} \eta(dy) \quad \text{(d'après le théorème de Stokes)} \\
&= \int_0^u \eta(dy)+\int_u^{u+u'} \eta(dy)+\int_{u+u'}^{u'} \eta(dy)+\int_{u'}^0 \eta(dy) \\
&= \int_0^u (\eta(dy)-\eta(dy+u'))+\int_0^{u'} (\eta(dy+u)-\eta(dy)) \\
&= -\int_0^u h(dy, u')+\int_0^{u'} h(dy, u) \\
&= -L(u, u')+L(u', u)\,,
\end{aligned}$$

ce qui démontre le lemme.

Lemme 3. *Pour qu'un facteur de type thêta* $k(y, u)=\exp h(y, u)$ *définisse l'espace fibré trivial* $\boldsymbol{T}\times\boldsymbol{A}$ *de base* $\boldsymbol{T}$, *il faut et il suffit que, dans l'expression* (4.3) *de* $h(y, u)$, *la forme* $L(y, y')$ *soit une forme bilinéaire complexe symétrique et que*

$$H(u) \equiv \frac{1}{2} L(u, u)+\tilde{\nu}(u) \quad \text{mod. } \Pi$$

où $\tilde{\nu}$ *est une forme bilinéaire complexe sur* $\mathfrak{h}$ *à valeurs dans* $\mathfrak{a}$.

---

7) Les lemmes 2, 3, 4 sont connus dans le cas où $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{C}^*$; voir [8].

Démonstration. Comme on sait [3], pour qu'un facteur k définisse le fibré trivial $\boldsymbol{T}\times\boldsymbol{A}$, il faut et il suffit qu'il existe une fonction holomorphe ν sur $\mathfrak{h}$ à valeurs dans $\boldsymbol{A}$ telle que

$$k(y, u) = \nu(y+u)\nu(y)^{-1} \tag{4.4}$$

quels que soient $y\in\mathfrak{h}$, $u\in\Delta$. Si l'exposant h du facteur k vérifie les conditions du lemme, la fonction $\nu(y)=\exp\left(\frac{1}{2}L(y, y)+\tilde{\nu}(y)\right)$ vérifie la condition (4.4). Réciproquement, supposons qu'un facteur de type théta $k(y, u)=\exp h(y, u)$ définisse l'espace fibré trivial $\boldsymbol{T}\times\boldsymbol{A}$. Comme $\theta(\boldsymbol{T}\times\boldsymbol{A})=0$, il résulte du lemme 2 que la forme L dans l'expression (4.3) de h est symétrique et par suite complexe bilinéaire. Or, d'après ce qu'on vient de montrer, le facteur de type thêta k' donné par $k'(y, u) = \exp\left(L(y, u)+\frac{1}{2}L(u, u)\right)$ définit le fibré trivial $\boldsymbol{T}\times\boldsymbol{A}$. Alors, le facteur $k(y, u)k'(y, u)^{-1}=\exp\left(H(u)-\frac{1}{2}L(u, u)\right)$ définit aussi le fibré trivial et, appliquant la condition (4.4) à ce facteur, on voit qu'il existe une application holomorphe $\tilde{\nu}$ de $\mathfrak{h}$ dans $\mathfrak{a}$ telle que

$$H(u)-\frac{1}{2}L(u, u)\equiv\tilde{\nu}(y+u)-\tilde{\nu}(y) \quad \text{mod. } \Pi$$

La différentielle $d\tilde{\nu}$ est alors une forme holomorphe sur $\mathfrak{h}$ invariante par les opérations de Δ dans $\mathfrak{h}$. On peut donc supposer que $\tilde{\nu}$ est une application linéaire complexe sur $\mathfrak{h}$ à valeurs dans $\mathfrak{a}$. Par conséquent,

$$H(u)\equiv\frac{1}{2}L(u, u)+\tilde{\nu}(u) \quad \text{mod. } \Pi\,,$$

ce qui démontre le lemme.

Lemme 4. *Soit $\mathcal{L}$ le module des formes bilinéaires réelles $L(y, y')$ sur $\mathfrak{h}$ à valerus dans $\mathfrak{a}$ qui sont linéaires complexes en y. Soit $\overline{\Phi}$ le module des formes bilinéaires réelles antisymétriques φ sur $\mathfrak{h}$, à valeurs dans $\mathfrak{a}$, satisfaisant à la condition:*

$$i\varphi(y, y')-\varphi(iy, y')-\varphi(y, iy')-i\varphi(iy, iy') = 0 \tag{4.5}$$

quels que soient $y, y'\in\mathfrak{h}$, i étant la structure complexe dans $\mathfrak{a}$ et $\mathfrak{h}$; soit $\overline{\Phi}_h$ le sous-module de $\overline{\Phi}$ des formes bilinéaires complexes. En faisant correspondre à une forme L la forme bilinéaire réelle $\alpha(L)$ définie par

$$\alpha(L)(y, y') = L(y', y)-L(y, y')$$

pour $y, y' \in \mathfrak{h}$, on a un homomorphisme α de $\mathcal{L}$ dans $\overline{\Phi}$. De plus, on a les suites exactes

$$(0) \to \mathcal{L}_s \to \mathcal{L} \xrightarrow{\alpha} \overline{\Phi} \to (0)$$

$$(0) \to \mathcal{L}_s \to \mathcal{L}_h \xrightarrow{\alpha} \overline{\Phi}_h \to (0)$$

où $\mathcal{L}_s$ (resp. $\mathcal{L}_h$) est le sous-module des formes symétriques (resp. bilinéaires complexes) appartenant à $\mathcal{L}$.

Démonstration. Considérons le complexifié $\mathfrak{h}^c$ de l'espace vectoriel réel $\mathfrak{h}$ et soit I l'automorphisme de $\mathfrak{h}^c$ prolongation linéaire complexe de la multiplication par i dans $\mathfrak{h}$. L'espace vectoriel complexe $\mathfrak{h}^c$ se décompose en somme directe des sous-espaces $\mathfrak{h}_+ = \{y\,;\, Iy = \sqrt{-1}\,y\}$ et $\mathfrak{h}_- = \{y\,;\, Iy = -\sqrt{-1}\,y\}$; pour un élément $y \in \mathfrak{h}$ on désignera par y_+ resp y_- les composantes de y en $\mathfrak{h}_+$ et en $\mathfrak{h}_-$. Toute forme bilinéaire réelle sur $\mathfrak{h}$ à valeurs dans $\mathfrak{a}$ étant prolongée en forme bilinéaire complexe sur $\mathfrak{h}^c$, la condition (4.5) pour $\varphi \in \overline{\Phi}$ signifie que

$$\varphi(y_-, y'_-) = 0 \tag{4.6}$$

quels que soient $y, y' \in \mathfrak{h}$. Il en résulte immédiatement que si $L \in \mathcal{L}$ alors $\alpha(L) \in \overline{\Phi}$; il est clair que si $L \in \mathcal{L}_h$ alors $\alpha(L) \in \overline{\Phi}_h$. On a ainsi l'homomorphisme α.

Pour voir que les suites dans le lemme sont exactes, il suffit de montrer que l'homomorphisme α est surjectif dans chacune d'elles. On définit l'homomorphisme $\beta : \overline{\Phi} \to \mathcal{L}$ en posant pour $\varphi \in \overline{\Phi}$

$$\beta(\varphi)(y, y) = -\varphi\left(y_+, \frac{1}{2}y'_+ + y'_-\right)$$

quels que soient $y, y' \in \mathfrak{h}$. Il est clair que $\beta(\varphi) \in \mathcal{L}$; si $\varphi \in \overline{\Phi}_h$, $\varphi(y_+, y_-) = 0$ et $\beta(\varphi)(y, y') = -\frac{1}{2}\varphi(y_+, y'_+)$, par suite $\beta(\varphi) \in \mathcal{L}_h$. D'autre part, il résulte de (4.6) que $\alpha(\beta(\varphi)) = \varphi$ pour tout $\varphi \in \overline{\Phi}$. Ainsi l'homomorphisme α applique $\mathcal{L}$ et $\mathcal{L}_h$ sur $\overline{\Phi}$ et $\overline{\Phi}_h$ respectivement.

Théorème 5. *Tout espace fibré principal holomorphe $\boldsymbol{P}$ de groupe $\boldsymbol{A}$ et de base $\boldsymbol{T}$ admet des facteurs de type thêta. Tout facteur de type thêta k définissant l'espace fibré $\boldsymbol{P}$ est de la forme suivante ; lorsque $y \in \mathfrak{h}$, $u \in \Delta$ et que $u = m_1 u_1 + \cdots + m_{2n} u_{2n}$ par rapport à la base $\{u_1, \cdots, u_{2n}\}$ de Δ,*

$$k(y, u) = \gamma(u) \exp\left(L(y, u) + \frac{1}{2}L(u, u) + \frac{1}{2}\sum_{i>j} m_i m_j \varphi(u_i, u_j)\right),$$

où $\varphi = \theta(\boldsymbol{P})$ et L est une forme appartenant au module $\mathcal{L}$ (défini dans le

lemme 4) *telle que* $\alpha(L)=\varphi$ *et où* γ *est un homomorphisme de* Δ *dans* $\boldsymbol{A}$ *qui représente la classe* $\tau(\boldsymbol{P})$.

Démonstration. On peut supposer que l'espace fibré $\boldsymbol{P}$ est celui qui est construit au § 3 comme espace homogène $\boldsymbol{G}/\Lambda$. La forme $\varphi=\theta(\boldsymbol{P})$ appartient au groupe $\Phi\subset\bar{\Phi}$ et, d'après le lemme 4, il existe une forme $L\in\mathcal{L}$ telle que $\alpha(L)=\varphi$. Posons

$$S(y, y') = \frac{1}{2}(L(y, y')+L(y', y))$$

et

$$S(y) = S(y, y) = L(y, y)$$

pour $y, y'\in\mathfrak{h}$. Alors, S est une forme bilinéaire réelle symétrique sur $\mathfrak{h}$ à valeurs dans $\mathfrak{a}$ et

$$L(y, y') = -\frac{1}{2}\varphi(y, y')+S(y, y')$$

L'application $\mu:\mathfrak{h}\to\mathfrak{g}$ étant celle qui est prise au § 3, on définit l'application $r^*:\mathfrak{h}\to\boldsymbol{G}$ en posant

$$r^*(y) = \exp\left(\mu(y)+\lambda\left(\frac{1}{2}S(y)\right)\right)$$

pour $y\in\mathfrak{h}$. On montre que l'application r^* est holomorphe. D'après (3. 2) et (3. 3), si $y,y'\in\mathfrak{h}$, on a

$$\begin{aligned}
r^*(y)^{-1}r^*(y+y') &= \exp\left(-\mu(y)-\lambda\left(\frac{1}{2}S(y)\right)\right)\exp\left(\mu(y+y')+\lambda\left(\frac{1}{2}S(y+y')\right)\right)\\
&= \exp\left(\mu(y')+\lambda\left(\frac{1}{2}S(y+y')-\frac{1}{2}S(y)\right)-\frac{1}{2}[\mu(y),\ \mu(y+y')]\right)\\
&= \exp\left(\mu(y')+\lambda\left((S(y, y')+\frac{1}{2}S(y')+\frac{1}{2}\varphi(y, y+y')\right)\right)\\
&= \exp\left(\mu(y')+\lambda\left(L(y', y)+\frac{1}{2}S(y')\right)\right).
\end{aligned}$$

Lorsque on identifie un vecteur tangent à $\mathfrak{h}$ en 0 à un élément w de $\mathfrak{h}$, il en résulte que:

$$r^*(y)^{-1}r^*(y+w) = \mu(w)+\lambda(L(w, y)).$$

Puisque le membre à droite est linéaire complexe en w, on voit que r^* est une application holomorphe.

On définit l'application $r:\mathfrak{h}\to\boldsymbol{P}=\boldsymbol{G}/\Lambda$ en posant

$$r(y) = r^*(y) \mod. \Lambda$$

pour tout $y \in \mathfrak{h}$; c'est une application holomorphe telle que $pr = q$. Par conséquent, r définit un facteur k sur $\mathfrak{h}$ à valeurs dans $\boldsymbol{A}$ tel que $r(y+u) = r(y)k(y,u)$ quels que soient $y \in \mathfrak{h}$, $u \in \Delta$. Posons

$$k(y, u) = \exp h(y, u)$$

où $h(y, u)$ est und fonction, holomorphe en y, sur $\mathfrak{h} \times \Delta$ à valeurs dans $\mathfrak{a}$. Les homomorphismes $\gamma : \Delta \to \boldsymbol{A}$ et $\tilde{\gamma} : \Delta \to \mathfrak{a}$ étant ceux qui sont utilisés au § 3, on montre que pour tout $k = 1, \cdots, 2n$,

$$h(y, u_k) \equiv \tilde{\gamma}(u_k) + L(y, u_k) + \frac{1}{2} S(u_k) \mod. \Pi \tag{4.7}$$

quel que soit $y \in \mathfrak{h}$. En effet, puisque $\lambda(\mathfrak{a})$ (resp. $\tilde{\lambda}(\mathfrak{a})$) est dans le centre de $\mathfrak{g}$ (resp. de $\boldsymbol{G}$), d'après (3.2), (3.3), (3.4) et le calcul ci-dessus, on a:

$$\begin{aligned} r^*(y+u_k) &= r^*(y) \exp\left(\mu(u_k) + \lambda\left(L(u_k, y) + \frac{1}{2} S(u_k)\right)\right) \\ &= r^*(y) \exp \mu(u_k) \exp \lambda\left(L(u_k, y) + \frac{1}{2} S(u_k)\right) \\ &= \exp \mu(u_k) r^*(y) \exp \lambda\left(-\varphi(y, u_k) + L(u_k, y) + \frac{1}{2} S(u_k)\right) \\ &\equiv \tilde{\lambda}\tilde{\gamma}(u_k)) r^*(y) \tilde{\lambda}\left(L(y, u_k) + \frac{1}{2} S(u_k)\right) \mod. \Lambda \\ &= r^*(y) \tilde{\lambda}\left(\tilde{\gamma}(u_k) + L(y, u_k) + \frac{1}{2} S(u_k)\right). \end{aligned}$$

Par conséquent,

$$r(y+u_k) = r(y_k) \exp\left(\tilde{\gamma}(u_k) + L(y, u_k) + \frac{1}{2} S(u_k)\right).$$

d'où résulte (4.7). Il en résulte que

$$h(y, u) \equiv \tilde{\gamma}(u) + L(y, u) + \frac{1}{2} S(u) + \frac{1}{2} \sum_{i>j} m_i m_j \varphi(u_i, u_j) \mod. \Pi, \tag{4.8}$$

si $u = m_1 u_1 + \cdots + m_{2n} u_{2n}$. En effet, cela se démontre par récurrence sur $m_1 + \cdots + m_{2n}$ utilisant la formule $h(y, u) + h(y+u, y) = h(y, u+u')$ mod. Π ($y \in \mathfrak{h}$, $u, u' \in \Delta$). La formule (4.8) implique que le facteur k est de la forme donnée dans le théorème et en particulier que c'est un facteur de type thêta définissant $\boldsymbol{P}$.

On montre maintenant que tout facteur de type thêta définissant $\boldsymbol{P}$ est de la forme donnée dans le théorème. Le facteur k étant celui qui vient d'être construit, pour qu'un facteur k' sur $\mathfrak{h}$ à valeurs dans $\boldsymbol{A}$ soit

un facteur de type thêta définissant $\boldsymbol{P}$, il faut et il suffit que le facteur $k(y, u)^{-1}k'(y, u)$ soit un facteur de type thêta définissant l'espace fibré trivial. D'après le lemma 3, il en résulte que tout facteur de type thêta k' définissant $\boldsymbol{P}$ est de la forme

$$k'(y, u) = k(y, u) \exp\left(L'(y, u)+\frac{1}{2}L'(u, u)+\tilde{\nu}(u)\right)$$

où L' est une forme appartenant à $\mathcal{L}_s$ et où $\tilde{\nu}$ est une forme linéaire complexe sur $\mathfrak{h}$ à valeurs $\mathfrak{a}$. Soit l'homomorphisme holomorphe de $\mathfrak{h}$ dans $\boldsymbol{A}$ défini par $\nu(y)=\exp\tilde{\nu}(y)$ $(y\in\mathfrak{h})$ et soit ν_Δ sa restriction à Δ. Compte tenu de (4. 8) on a alors

$$k'(y, u) = (\gamma+\nu_\Delta)(u) \exp\Big(((L+L')(y, u)+\frac{1}{2}(L+L')(u, u) + \frac{1}{2}\sum_{i>j} m_i m_j \varphi(u_i, u_j)\Big),$$

lorsque $y\in\mathfrak{h}$ et que $u=m_1u_1+\cdots+m_{2n}u_{2n}\in\Delta$. Puisque $\alpha(L+L')=\varphi=\theta(\boldsymbol{P})$ et que $\gamma+\nu_\Delta$ représente la classe $\tau(\boldsymbol{P})$, cela montre que le facteur k' est aussi de la forme donnée dans le théorème. De plus, compte tenu des lemmes 3 et 4, ce raisonnement implique le fait suivant: pour toute forme $L\in\mathcal{L}$ telle que $\alpha(L)=\theta(\boldsymbol{P})$ et tout homomorphisme $\gamma:\Delta\to\boldsymbol{A}$ représentant $\tau(\boldsymbol{P})$, il existe un facteur de type thêta k qui s'écrit sous la forme du théorème avec la forme L et l'homomorphisme γ. Cela démontre le théoreme.

Corollaire. *Les notations étant celles du théorème* 2 *et du lemme* 4, *soit k un facteur de type thêta définissant un espace fibré $\boldsymbol{P}$. On écrit k sous la forme*

$$k(y, u) = \exp(L(y, u)+H(u)) \qquad (y\in\mathfrak{h},\ u\in\Delta)$$

avec une forme $L\in\mathcal{L}$. Alors, pour que $[\boldsymbol{P}]\in\mathcal{P}^0$, il faut et il suffit que $L\in\mathcal{L}_s$; pour que $[\boldsymbol{P}]\in\mathcal{P}_h$, il faut et il suffit que $L\in\mathcal{L}_h$.

En effet, cela résulte du théorème 2 et des lemmes 2 et 4. Par ailleurs, ce corollaire est une nouvelle forme d'un théorème de Koszul [4], puisqu'on sait qu'un espace fibré de base $\boldsymbol{T}$ est préassocié (resp. associé) si et seulement si $\boldsymbol{P}$ admet une connexion holomorphe (resp. holomorphe intégrable) [3].

§ 5. Espaces fibrés ayant des facteurs de type theta.

On utilise les notations au début du § 4. Soient $\boldsymbol{X}$ une variété complexe et $\boldsymbol{Y}$ son revêtement universel, la projection $\boldsymbol{Y}\to\boldsymbol{X}$ étant notée

q. On désigne toujours par $\boldsymbol{A}$ un groupe de Lie abelien connexe.

Lemme 6. *Soit $\boldsymbol{P}$ un espace fibré principal holomorphe de groupe $\boldsymbol{A}$ et de base $\boldsymbol{X}$ trivialié par $q:\boldsymbol{Y}\to\boldsymbol{X}$, et soit k le facteur défini par une application $r:\boldsymbol{Y}\to\boldsymbol{P}$; $r(ys)=r(y)k(y, s)$. Supposons qu'une connexion sur $\boldsymbol{P}$ est définie par une forme ω et soit $\eta=\omega r$. On se donne une courbe $y(t)$ $(0\leqq t\leqq 1)$, différentiable par morceaux, dans $\boldsymbol{Y}$ telle que $y(0)=y_0$ et $y(1)=y_0 s$ avec un élément $s\in\Gamma$. Alors, l'élément du groupe d'holonomie d'origine au point $r(y_0)$ déterminé par la courbe fermée $q(y(t))$ sur $\boldsymbol{X}$ est $k(y_0, s)\left(\exp\int_{y_0}^{y_0 s}\eta\right)^{-1}$, où l'integrale est prise le long de la courbe $y(t)$.*

Démonstration. On montre que la courbe $z(t)=r(y(t))\left(\exp\int_{y(0)}^{y(t)}\eta\right)^{-1}$ dans $\boldsymbol{P}$ est horizontale par rapport à la connexion ω. Les images d'un vecteur tangent dt en t par les applications $t\to y(t)$ et $t\to z(t)$ étant notées $y(dt)$ resp. $z(dt)$, on a:

$$z(dt) = r(y(dt))\left(\exp\int_{y(0)}^{y(t)}\eta\right)^{-1}+r(y(t))(-\eta(y(dt)))\,.$$

Par conséquent,

$$\omega(z(dt)) = \omega(r(y(dt))-\eta(y(dt)) = 0\,,$$

ce qui montre que la courbe $z(t)$ est une courbe horizontale. On a $p(z(t))=q(y(t))$; d'autre part, $z(0)=r(y_0)$ et $z(1)=r(y_0 s)\left(\exp\int_{y_0}^{y_0 s}\eta\right)^{-1}$ $=r(y_0)k(y_0, s)\left(\exp\int_{y_0}^{y_0 s}\eta\right)^{-1}$. Le lemme en résulte.

Soit k un facteur de type thêta sur $\boldsymbol{Y}$ à valeurs dans le groupe $\boldsymbol{A}$. Pour tout $s\in\Gamma$, la forme $k(y, s)^{-1}k(dy, s)$ sur $\boldsymbol{Y}$ étant invariante par les opérations de Γ dans $\boldsymbol{Y}$, il existe une forme holomorphe ζ_s de degré 1 sur $\boldsymbol{X}$ à valeurs dans $\mathfrak{a}$ telle que

$$k(y, s)^{-1}k(dy, s) = (\zeta_s q)(dy) \tag{5.1}$$

quels que soient $y\in\boldsymbol{Y}$ et dy vecteur tangent en $y\in\boldsymbol{Y}$. Soit $\boldsymbol{P}$ un espace fibré qui admet le facteur k défini par une application $r:\boldsymbol{Y}\to\boldsymbol{P}$. Si ω est une forme de connexion sur $\boldsymbol{P}$ et si $\eta=\omega r$, (4.1) et (5.1) impliquent:

$$\eta s-\eta = \zeta_s q\,, \tag{5.2}$$

où ηs est la forme telle que $(\eta s)(dy)=\eta(dy\cdot s)$. Il en résulte que:

$$\zeta_s+\zeta_{s'} = \zeta_{ss'}$$

quels que soient $s, s'\in\Gamma$, ce qui montre que l'application $s\to\zeta_s$ est un

homomorphisme du groupe Γ dans l'espace vectoriel $\mathcal{H}^{1,0}(\boldsymbol{X}, \mathfrak{a})$ des formes holomorphes de degré 1 sur $\boldsymbol{X}$. Soit Γ_0 le sous-groupe de Γ constituté par les éléments qui sont d'ordre fini modulo le sous-groupe des commutateurs Γ' de Γ. Si $s \in \Gamma_0$, alors $\zeta_s = 0$ et par suite, $k(y, s)$ a une valeur $k_0(s)$ independente de y. Il est clair que l'application $s \to k_0(s)$ est un homomorphisme du groupe Γ_0 dans le groupe $\boldsymbol{A}$.

On suppose maintenant que la variété $\boldsymbol{X}$ est compacte kaehlérienne. Rappelons la notion de variété d'Albanese associée à $\boldsymbol{X}$ [1]. Soit $\mathfrak{h}$ l'espace vectoriel complexe dual de l'espace $\mathcal{H}^{1,0}(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{C})$ des formes holomorphes de degré 1 sur $\boldsymbol{X}$ à valeurs complexes. On choisit un point $y_0 \in \boldsymbol{Y}$ et on définit l'application $\tilde{j} : \boldsymbol{Y} \to \mathfrak{h}$ en faisant correspondre à un point $y \in \boldsymbol{Y}$ la fonction linéaire complexe $\tilde{j}(y)$ sur $\mathcal{H}^{1,0}(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{C})$ définie par

$$\langle \tilde{j}(y), \zeta \rangle = \int_{y_0}^{y} \zeta q ,$$

quel que soit $\zeta \in \mathcal{H}^{1,0}(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{C})$, où l'intégrale est prise le long d'un chemin quelconque joignant y_0 et y[8]. On pose $\tilde{j}(s) = \tilde{j}(y_0 s)$ pour tout $s \in \Gamma$. Alors,

$$\tilde{j}(ys) = \tilde{j}(y) + \tilde{j}(s) \tag{5.3}$$

quels que soient $y \in \boldsymbol{Y}$, $s \in \Gamma$. On sait que l'application $s \to \tilde{j}(s)$ est un homomorphisme du groupe Γ dans le groupe $\mathfrak{h}$ dont le noyau coïncide avec le noyau de l'homomorphisme canonique du groupe fondamental Γ dans le premier groupe d'homologie de $\boldsymbol{X}$ à coefficients réels ; le noyau de $\tilde{j} : \Gamma \to \mathfrak{h}$ coincïde donc avec le sous-groupe Γ_0. D'autre part, l'image Δ de Γ par $\tilde{j}$ est un sous-groupe discret de $\mathfrak{h}$ et le quotient $\boldsymbol{T}_{\boldsymbol{X}} = \mathfrak{h}/\Delta$ est un tore complexe qu'on appelle *la variété d'Albanese* associée à $\boldsymbol{X}$. De plus, on a *l'application canonique* $j : \boldsymbol{X} \to \boldsymbol{T}_{\boldsymbol{X}}$ telle que $q_T \tilde{j} = jq$, q_T étant la projection $\mathfrak{h} \to \boldsymbol{T}_{\boldsymbol{X}}$. En faisant correspondre à une forme holomorphe ζ' de degré 1 sur $\boldsymbol{T}_{\boldsymbol{X}}$, à valeurs complexes, la forme $\zeta = \zeta' j$ image réciproque de ζ' par j, on a un isomorphisme du groupe $\mathcal{H}^{1,0}(\boldsymbol{T}_{\boldsymbol{X}}, \boldsymbol{C})$ sur le groupe $\mathcal{H}^{1,0}(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{C})$; il en est de même des formes à valeurs dans $\mathfrak{a}$. Pour les formes ζ et ζ' en question, on a :

$$\int_0^{j(y)} \zeta' q_T = \int_{y_0}^{y} \zeta q_T \tilde{j} = \int_{y_0}^{y} \zeta' jq = \int_{y_0}^{y} \zeta q \tag{5.4}$$

Théorème 6. *Soient $\boldsymbol{X}$ une variété compacte kaehlérienne et $\boldsymbol{Y}$ son revêtement universel ; le groupe fondamental de $\boldsymbol{X}$ étant désigné par Γ, soient Γ' le sous-groupe des commutateurs de Γ et Γ_0 le sous-groupe de Γ*

8) La valeur de cette intégrale ne dépend pas du choix de chemin, puisque l'espace $\boldsymbol{Y}$ est simplement connexe.

constitué par les éléments d'ordre fini modulo Γ'. *Soit, d'autre part,* $\boldsymbol{T_X}$ *la variété d'Albanese associée à* $\boldsymbol{X}$ *munie de l'application canonique* $j: \boldsymbol{X} \to \boldsymbol{T_X}$. *Dans le groupe* $H^1(\boldsymbol{X}, \mathbf{A})$ *des classes d'espaces fibrés principaux de base* $\boldsymbol{X}$ *et de groupe* $\boldsymbol{A}$, *on considère le sous-groupe* $\mathcal{P}_0(\boldsymbol{X})$ *des classes d'espaces fibrés associés à* $\boldsymbol{Y}$ *par les homomorphismes de* Γ *dans* $\boldsymbol{A}$ *et le sous-groupe* $\mathcal{P}_a(\boldsymbol{X})$ *constitué par les classes qui contiennent les images réciproques par* j *des espaces fibrés de base* $\boldsymbol{T_X}$.

Alors, $[\boldsymbol{P}]$ *désignant la classe d'un espace fibré* P, *pour que* $[\boldsymbol{P}]$ *appartienne à* $\mathcal{P}_a(\boldsymbol{X})$ *(resp. à* $\mathcal{P}_a(\boldsymbol{X})+\mathcal{P}_0(\boldsymbol{X})$*) il faut et il suffit que* $\boldsymbol{P}$ *admette un facteur de type thêta* k *sur* $\boldsymbol{Y}$, *à valeurs dans* $\boldsymbol{A}$, *vérifiant la condition*:

Si $s \in \Gamma_0$ *(resp. si* $s \in \Gamma'$*),* $k(y, s) = e$ *(l'élément neutre de* $\boldsymbol{A}$*) quel que soit* $y \in \boldsymbol{Y}$.

Démonstration. Soit $\boldsymbol{P}$ l'image réciproque par $j: \boldsymbol{X} \to \boldsymbol{T_X}$ d'un espace fibré principal holomorphe $\boldsymbol{P_X}$ de base $\boldsymbol{T_X}$ et de groupe $\boldsymbol{A}$. On a une application canonique $j_P: \boldsymbol{P} \to \boldsymbol{P_X}$ qui commute avec les opérations de $\boldsymbol{A}$ et qui se projette suivant $j: \boldsymbol{X} \to \boldsymbol{T_X}$. Les notations $\mathfrak{h}$, Δ, $\tilde{j}$ étant celles qui sont définies plus haut pour la variété $\boldsymbol{T_X}$, d'aprés le théorème 5, $\boldsymbol{P_X}$ admet un facteur de type thêta k_T sur le revêtement universal $\mathfrak{h}$ de $\boldsymbol{T_X}$ à valeurs dans $\boldsymbol{A}$. On a donc une application $r_T: \mathfrak{h} \to \boldsymbol{P_X}$ telle que $r_T(y'+u) = r_T(y')k_T(y', u)$ pour $y' \in \mathfrak{h}$, $u \in \Delta$. On voit facilement qu'il existe alors une application $r: \boldsymbol{X} \to \boldsymbol{P}$ compatible avec la projection $q: \boldsymbol{Y} \to \boldsymbol{X}$ et telle que $r_T\tilde{j} = j_P r$; l'espace fibré $\boldsymbol{P}$ admet donc un facteur k sur $\boldsymbol{Y}$, à valeurs dans $\boldsymbol{A}$, défini par $r(ys) = r(y)k(y, s)$ pour $y \in \boldsymbol{Y}$, $s \in \Gamma$. Compte tenu de (5.3), il en résulte que:

$$k(y, s) = k_T(\tilde{j}(y), \tilde{j}(s)) \tag{5.5}$$

quels que soient $y \in Y$, $s \in \Gamma$, et par suite que k est un facteur de type thêta. Puisque la classe $[\boldsymbol{P}]$ est bien déterminée par le facteur k, cela démontre le fait suivant: Soit $\boldsymbol{P}$ un espace fibré principal holomorphe de base $\boldsymbol{X}$ et de groupe $\boldsymbol{A}$. Pour que $[\boldsymbol{P}] \in \mathcal{P}_a(\boldsymbol{X})$, il faut et il suffit que $\boldsymbol{P}$ admette un facteur de type thêta k sur $\boldsymbol{Y}$ pour lequel il existe un facteur de type thêta k_T sur $\mathfrak{h}$ vérifiant la condition (5.5). De plus, il existe un homomorphisme canonique de groupe des facteurs sur $\boldsymbol{Y}$ à valeurs dans $\boldsymbol{A}$ dans le groupe $H^1(\boldsymbol{X}, \mathbf{A})$; ainsi, pour que $[P] \in \mathcal{P}_a(\boldsymbol{X}) + \mathcal{P}_0(\boldsymbol{X})$, il faut et il suffit que $\boldsymbol{P}$ soit défini par un facteur de type thêta qui est produit d'un facteur de type thêta vérifiant (5.5) par un homomorphisme $f: \Gamma \to \boldsymbol{A}$. Or, (5.5) implique $k(y, s) = k_T(\tilde{j}(y), 0) = e$ si $s \in \Gamma' \subset \Gamma_0$ et, d'autre part, la restriction d'un homomorphisme $f: \Gamma \to \boldsymbol{A}$ au sous-groupe Γ' est trivial. Il en résulte que les deux conditions du théorème

sont nécessaires pour que $[\boldsymbol{P}]\in\mathcal{P}_a(\boldsymbol{X})$ et $[\boldsymbol{P}]\in\mathcal{P}_a(\boldsymbol{X})+\mathcal{P}_0(\boldsymbol{X})$ respectivement.

Soit maintenant $k(y, s)$ un facteur de type thêta sur $\boldsymbol{Y}$ à valeurs dans $\boldsymbol{A}$. Pour tout $s\in\Gamma$, la forme holomorphe ζ_s étant définie par (5.1), il existe un élément $K(s)\in\mathfrak{a}$ telle que

$$k(y, s) = \exp\left(\int_{y_0}^{y} \zeta_s q+K(s)\right) \tag{5.6}$$

quels que soient $y\in\boldsymbol{Y}$, $s\in\Gamma$, où l'intégrale est prise le long d'un chemin quelconque joignant y_0 et y. Comme on l'a déjà vu, l'application $s\to\zeta_s$ est un homomorphisme de Γ dans $\mathcal{H}^{1,0}(X, \mathfrak{a})$ et $\zeta_s=0$ si s appartient au noyau Γ_0 de l'homomorphisme $\tilde{j}:\Gamma\to\Delta$. On peut donc définir une forme $\zeta_u\in\mathcal{H}^{1,0}(\boldsymbol{X}, \mathfrak{a})$ pour tout $u\in\Delta$ en posant $\zeta_u=\zeta_s$ où s est un élément de Γ tel que $\tilde{j}(s)=u$. On a:

$$\zeta_u+\zeta_{u'} = \zeta_{u+u'}$$

quels que soint $u, u'\in\Delta$. D'après la propriété rappelée plus haut de l'application canonique $j:\boldsymbol{X}\to\boldsymbol{T}_{\boldsymbol{X}}$, la forme ζ_u $(u\in\Delta)$ est l'image réciproque $\zeta'_u j$ d'une forme holomorphe ζ'_u de degré 1 sur $\boldsymbol{T}_{\boldsymbol{X}}$ à valeurs dans $\mathfrak{a}$ par l'application j: $\boldsymbol{X}\to\boldsymbol{T}_{\boldsymbol{X}}$, et la forme ζ'_u est bien déterminé par ζ_u. On a donc:

$$\zeta'_u+\zeta'_{u'} = \zeta'_{u+u'} \tag{5.7}$$

quels que soient $u, u'\in\Delta$. Posons

$$L(y', u) = \int_0^{y'} \zeta'_u q_T$$

pour $y'\in\mathfrak{h}$ et $u\in\Delta$. La fonction $L(y', u)$ est linéaire complexe en y' puisque sa différentille par rapport à y' est la forme holomorphe $\zeta'_u q_T$ invariante par les opérations de Δ dans $\mathfrak{h}$. D'autre part, d'après (5.7), $L(y', u)+L(y', u')=L(y', u+u')$ quels que soient $y'\in\mathfrak{h}$, $u, u'\in\Delta$. On peut ainsi prolonger L en une fonction bilinéaire réelle sur $\mathfrak{h}\times\mathfrak{h}$ à valeurs dans $\mathfrak{a}$. Utilisant la formule (5.4), on voit que (5.6) s'écrit sous la forme

$$k(y, s) = \exp\left(L(\tilde{j}(y), \tilde{j}(s))+K(s)\right) \tag{5.8}$$

Soit $\boldsymbol{P}$ un espace fibré admettant le facteur k; on a une application r; $\boldsymbol{Y}\to\boldsymbol{P}$ telle que $r(ys)=r(y)k(y, s)$ pour $y\in\boldsymbol{Y}$ et $s\in\Gamma$. Soit ω une forme de connexion sur $\boldsymbol{P}$ et soit $\eta=\omega r$. Si $u, u'\in\Delta$, chosissons les éléments $s, s'\in\Gamma$ tels que $u=\tilde{j}(s)$, $u'=\tilde{j}(s')$; alors utilisant (5.2) et (5.4), on a:

$$\begin{aligned} L(u, u')-L(u', u) &= \int_0^u \zeta'_{u'} q_T - \int_0^{u'} \zeta'_u q_T \\ &= \int_{y_0}^{y_0 s} \zeta_{s'} q - \int_{y_0}^{y_0 s'} \zeta_s q \\ &= \int_{y_0}^{y_0 s} (\eta s' - \eta) - \int_{y_0}^{y_0 s'} (\eta s - \eta) \\ &= \int_{y_1(t) s'} \eta - \int_{y_1(t)} \eta - \int_{y_2(t) s} \eta + \int_{y_2(t)} \eta \end{aligned}$$

où $y_1(t)$ resp. $y_2(t)$ $(0 \leqq t \leqq 1)$ sont les courbes différentiables joignant les points y_0 et $y_0 s$ resp. y_0 et $y_0 s'$. Si l'on considère la courbe c qui joint les points $y_0 s' s$, $y_0 s$, y_0, $y_0 s'$, $y_0 s s'$ successivement par les courbes $y_2(-t)s$, $y_1(-t)$, $y_2(t)$, $y_1(t)s'$ $(0 \leqq t \leqq 1)$, on a :

$$L(u, u')-L(u', u) = \int_c \eta$$

Or, la projection $q(c)$ de c sur $\boldsymbol{X}$ est une courbe fermée d'origine $q(y_0)$. Puisque $q(y_1(t))=q(y_1(t)s')$, $q(y_2(t))=q(y_2(t)s)$ et que le groupe structural $\boldsymbol{A}$ de $\boldsymbol{P}$ est abelien, l'élément du groupe d'holonomie d'origine le point $r(y_0 s' s)$, défini par la courbe $q(c)$ sur $\boldsymbol{X}$ est l'élément neutre de $\boldsymbol{A}$. D'après le lemme 6, il en résulte que :

$$\exp \int_c \eta = k(y_0 s' s,\ s^{-1} s'^{-1} s s')$$

On a ainsi :

$$\exp (L(u, u')-L(u', u)) = k(y_0 s' s,\ s^{-1} s'^{-1} s s') .$$

Supposons maintenant que le facteur k vérifie la condition : si $s \in \Gamma'$, $k(y, s)=e$ quel que soit $y \in \boldsymbol{Y}$. Alors, la formule qu'on vient d'obtenir implique que

$$L(u, u') - L(u', u) \in \Pi$$

quels que soient $u. u' \in \Delta$. Cela démontre que $\alpha(L) \in \Phi$ (notations du théorème 2 et du lemme 4). D'après les théorèmes 4 et 5, on voit alors qu'il existe un facteur de type thêta k_T sur $\mathfrak{h}$, à valeurs dans $\boldsymbol{A}$. tel que

$$k_T(y', u) = \exp (L(y, u)+H(u))$$

pour $y' \in \mathfrak{h}$, $u \in \Delta$, où H est une certaine fonction sur Δ à valeurs dans $\mathfrak{a}$, D'aprés (5. 8), on a alors

$$k(y, s) = k_T(\tilde{j}(y),\ \tilde{j}(s)) f(s) \tag{5. 9}$$

quels que soient $y \in \boldsymbol{Y}$, $s \in \Gamma$, où f est une fonction sur Γ à valeurs dans

$\boldsymbol{A}$. Comme k et k_T sont des facteurs, f est aussi un facteur et ainsi un homomorphisme du groupe Γ dans le groupe $\boldsymbol{A}$.

Considérons le cas où le facteurs k verifie la condition : si $s \in \Gamma_0$, $k(y, s) = e$ quel que soit $y \in \boldsymbol{Y}$. Puisque $\Gamma' \subset \Gamma_0$, k est aussi de la forme (5. 9) et l'hypothèse implique que l'homomorphisme f est alors tel que $f(s) = e$ quel que soit $s \in \Gamma_0$. Puisque $\Gamma/\Gamma_0 \cong \Delta$, il existe un homomorphisme f_T du groupe Δ dans $\boldsymbol{A}$ tel que $f(s) = f_T(\tilde{j}(s))$ quel que soit $s \in \Gamma$. Définissons le facteur de type thêta k'_T sur $\mathfrak{h}$ à valeurs dans $\boldsymbol{A}$ en posant

$$k'_T(y', u) = k_T(y', u) f_T(u)$$

pour $y' \in \mathfrak{h}$, $u \in \Delta$. On a ainsi

$$k(y, s) = k'_T(\tilde{j}(y), \tilde{j}(s)) \tag{5. 10}$$

quels que soient $y \in Y$, $s \in \Gamma$.

Un facteur de type thêta k sur $\boldsymbol{Y}$ à valeurs dans $\boldsymbol{A}$ qui vérifie l'une des conditions du théorème s'écrit ainsi sous la forme (5. 9) ou (5. 10). D'après ce qu'on a vu au début de cette démonstration, cela démontre le théorème.

(Reçu le 15 Mars, 1961)

Bibliographie

[1] A. Blanchard: Sur les variétés analytiques complexes, Annales École Normale Sup. **76** (1956), 157–202.

[2] F. Hirzebruch: Neue topologischen Methoden in der algebraischen Geometrie. Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete (N. F.) 9, Berlin, 1956.

[3] J.-L. Koszul: Espaces fibrés associés et pré-associés, Nagoya Math. J. **15** (1959), 155–169.

[4] J.-L. Koszul: Complexes d'espaces topologiques. Bull. Soc Math. France **87** (1959), 403–408.

[5] S. Murakami: Sur certains espaces fibrés principaux holomorphes admettant des connexions holomorphes, Osaka Math. J. **11** (1959), 43–62.

[6] S. Murakami: Sur certains espaces fibrés principaux différentiables et holomorphes, Nagoya Math. J. **15** (1959), 171–199.

[7] K. Nomizu: Lie groups and differential geometry. Publication of the Math. Soc. Japan No. 2, Tokyo, 1956.

[8] Séminaire Henri Cartan 1951–52, Exp. II–III.