Osaka University Knowledge Archive

Title	半線形∂ー方程式の解の関数論的性質
Author(s)	幸原, 昭
Citation	大阪大学, 1987, 博士論文
Version Type	
URL	https://hdl.handle.net/11094/35397
rights	
Note	著者からインターネット公開の許諾が得られていないため、論文の要旨のみを公開しています。全文のご利用をご希望の場合は、大阪大学の博士論文についてをご参照ください。

Osaka University Knowledge Archive : OUKA

https://ir.library.osaka-u.ac.jp/

Osaka University

氏名・（本籍）	幸(こう)　原(はら)　昭(あきら)
学位の種類	理　学　博　士
学位記番号	第　7586　号
学位授与の日付	昭和 62 年 3 月 18 日
学位授与の要件	学位規則第 5 条第 2 項該当
学位論文題目	**半線形 $\overline{\partial}$ －方程式の解の関数論的性質**
論文審査委員	（主査） 教 授 柴田 敬一 （副査） 教 授 田邊 廣城　教 授 井川 満　教 授 池田 信行

論文内容の要旨

この論文では（n＋1）次元開集合G×Cで定義された半線形連立$\overline{\partial}$－方程式（$z=(z_1, z_2, \cdots, z_n)$）

(1) $\partial_{\overline{z}_j} w = f_j(z, w),\ j=1, 2, \cdots, n,$

$f_j(z, w) \in C^{\infty}(G \times \mathbf{C}),\ f_j(z, 0) \equiv 0,\ z \in G,$

が研究の対象である。

まず方程式(1)が系であることにかんがみ，その解の満たすべき適合条件，積分可能条件を求めるのに便利な微分形式

(2) $\overline{\partial} w = f(z, w),$

$f(z, w) = \Sigma_{j=1}^{n} f_j(z, w)\, d\overline{z}_j,$

$f(z, 0) \equiv 0,\ z \in G,$

に書き直しておく。領域Ω⊂Gにおける(2)の非白明解w(z)は

(3) $[\overline{f}_w] \wedge \partial w = [\partial_z \overline{f} + \overline{f} \wedge \overline{f}_{\overline{w}}],$

を満たす。記号［　］はwに解w(z)を代入していることを示している。ここではG×Cで，（i）$f_{\overline{w}} \equiv 0$，（ii）$f_{\overline{w}} \fallingdotseq 0$ の場合について考察するが，場合（i）は取扱いが簡単で，方法論的に場合（ii）に含まれるので（ii）の場合のみを扱ってよいことがわかるから，以下において $f_{\overline{w}} \fallingdotseq 0$，$z \in G \times C$ を仮定する。

(4) $[f_{\overline{w}}] \wedge \overline{\partial} w = [-f \wedge f_{\overline{W}}],$

(5) $[f_{\overline{w}}] \wedge \overline{\partial}\, [\overline{f}_w] \wedge \partial w = \alpha \quad (\alpha \in C^{\infty}_{(2.2)}(\Omega)),$

が導かれる。特に断らない限りαは各型のΩにおけるzに関する微分形式を表す。

$[S] := \{\Omega$でのベクトル場の系$\Sigma_{j=1}^{n} \alpha_j \partial_{z_j} \mid \Sigma_{j=1}^{n} \alpha_j \partial_{z_j} w = \alpha$は適合条件$\}$,

$T_z^c := z \in \Omega$におけるΩの複素接空間,

$\mathrm{rank}_z[S] := \dim [S](z)$　（$[S](z)$は$[S]$がzにおいて張るT_z^cの複素ベクトル部分空間）

さらに次の仮定をおく。

$r := \mathrm{rank}_z[S] =$一定，$z \in U$（$U$は$z$の近傍），

このとき，zの各近傍Uで，（i）$r = n$か，（ii）$r = n-1$であるが，（i）の場合は関数論的には重要でないから，（ii）について調べると，この場合はベクトル場の系$\overline{f}_w \Lambda \partial$，$f_{\overline{w}} \Lambda \overline{\partial}$は“リー括弧”作用の下で閉じていることがわかり，これからUの点z^0を通るUの（$n-1$）次元複素多様体が存在し，この多様体はUにおける複素解析関数$h(z)$（$dh \neq 0$）により集合$\{z \in U \mid h(z) = h(z^0)\}$で表されることがいえる。$\partial h / \partial z_1 \neq 0$，$z \in U$，と考えてよいので，これから次の1－1解析的変換$\Phi : U \to C^n$（$z$から$\xi = (\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n)$への変換）

(6)　$\xi_1 = h(z),\ \xi_j = z_j,\ j = 2, \cdots, n,$

が定義され，この変換により(2),(3)は$\Phi(U)$において（$\upsilon := w \circ \Phi^{-1}(\xi)$，$\xi$での考察は「 ′ 」で示す）

$$\partial_{\overline{\xi}_1} \upsilon = f'_1(\xi, \overline{\upsilon}),\ \overline{\partial}' \upsilon \Lambda d \overline{\xi}_1 = f' \Lambda d \overline{\xi}_1,$$

(7)　$$b' \partial_{\xi_j} \upsilon = \partial_{\xi_1} \overline{f}'_j - \partial_{\xi_j} \overline{f}'_1 + \overline{f}'_1 \partial_{\overline{\upsilon}} \overline{f}'_j - \overline{f}'_j \partial_{\overline{\upsilon}} \overline{f}'_1,$$
$$j = 2, \cdots, n,$$

なる方程式系になる。

(6)と(7)を用いて，Ωにおける解$w(z)$の関数論的性質：1）解の零点集合はΩの解析的集合，2）$\overline{\Omega}$がコンパクトなGの部分集合で，境界$\partial \Omega$が十分滑らかならば有界な解wはΩで複素解析関数$\phi(z)$に相似である（即ち$w = \phi e^{\rho}$，ρは$\overline{\Omega}$でヘルダー連続な関数）等々が導き出される。

変換(6)は解に依存するので，この変換が解に無関係となる条件を仮定し，さらに(7)の積分可能条件を考慮することにより，方程式(1)の局所解の存在を次のようにして示す：1変数ξ_1の$\overline{\partial}$－方程式と，$\xi_2, \cdots, \xi_n$の全微分方程式（ξ_1を助変数と見做し完全積分可能条件を満たす）に(1)の方程式が分解している事を利用し，1変数ξ_1のみの方程式に帰着させる。

この存在定理により，局所相似原理の成立と，方程式(1)の解の族が一様に有界ならばコンパクト部分集合の上で一様収束する解の系列（極限関数は，また解である）を含む（即ち正規族である）という性質が証明される。

論文の審査結果の要旨

概複素多様体が複素多様体になるための条件を求める際に局所座標の変換式として

(1)　$\partial_{\overline{z}_j} w = \Sigma_{i=1}^{n} a_{ij} \partial_{z_i} w$　（$j = 1, 2, \cdots, n$）

の形の微分方程式が現れることはよく知られている。他方，$n=1$ の場合に著名なCauchy－Riemannの方程式を一般化した

(2) $\partial_{\bar{z}} w = A w + B \bar{w}$

も1950年頃からVekua等によって研究の対象とされて来た。これは2次元の亜音速流体や薄膜の変形理論などとの関連に於て定式化されたのである。右辺の形からわかるように(2)はR－線型である。

幸原君は(1)に動機づけられて，(2)よりも遙かに一般な方程式系

(3) $\partial_{\bar{z}_j} w = f_j(z, w) \quad (j=1, 2, \cdots, n)$

を導入して，その解を研究し続けてきた。ここで，C^n間の強擬凸領域Gに対して，$f_j \in C^\infty(G \times C, C)$, $f_j(z, 0)=0$ とし，$f=\sum_{j=1}^{n} f_j(z, w)\, d\bar{z}_j$ に対してGで$\partial_{\bar{w}} f \neq 0$ を仮定する。この論文で得られた主要な成果は次の通りである。

定理1．方程式系(3)の解の零点集合は解析集合をなす。

定理2．任意関数を含む一般解は，或る正則関数と，零点をもたないnice functionとの積の形で得られる。

定理3．方程式系(3)の局所解が存在する。

これら一連の命題に対する証明法は幸原君が独自に開発したところであって，その要点は或る適当な局所双正則な変数変換で(3)を見直すと，唯1個の変数については知られたapproximately analytic functionになり，他の変数については全微分方程式になるという事実に存すると言うことができる。より具体的には，(3)の両辺を微分してゆくことにより適合条件を見出し，そのときに生ずる付加方程式に対応して或る（1，0）型のベクトル場が現れるが，それとその共役との全体がLie algebraをなすことがわかり，それから求める変数変換が見出されるのである。

関連する問題を扱った研究として，1979年以降，米国のBuchanan，ソ連のMagomedov, Palamodov, Mikailov等の論文があるが，すべてR－線型の場合のみを取扱っているにすぎない。上述のような弱い仮定のもとでの研究は内外を通じて幸原君が最初であり，理学博士の学位論文として十分に価値があるものと認める。