The University of Osaka
Institutional Knowledge Archive

Title	回帰分析の漸近理論
Author(s)	前川, 功一
Citation	大阪大学, 1986, 博士論文
Version Type	VoR
URL	https://hdl.handle.net/11094/35447
rights	
Note	

The University of Osaka Institutional Knowledge Archive : OUKA

https://ir.library.osaka-u.ac.jp/

The University of Osaka

広島大学経済研究双書 4

回帰分析の漸近理論

前 川 功 一 著

広 島 大 学 経 済 学 部

はしがき

本書は，回帰分析の漸近理論に関する著者のこれまでの研究をまとめたものである．回帰分析は，多くの研究分野でデータ解析の方法として広く応用されており，また各分野に固有の回帰モデルが存在する．本書は，主として計量経済学の分野でよく用いられる回帰モデルに関する推定，検定，および予測の問題を，漸近展開を分析手段として用いながら分析をおこなう．したがって本書は「回帰分析の漸近理論」という題から連想される全ての分野を系統的に網羅するものではない．

本書の構成は第1章で詳しく述べられているが，大きく分ければ，一般線型回帰モデルとその特殊な場合であるゼルナー・モデルを主として扱う前半（第2～6章）と，時系列回帰モデルを扱う後半（第7～10章）の2つの部分から成り立っている．第6，7，8章を除く全ての章は，著者がこれまでに著わした論文にもとづいているが，一冊の書物としてのまとまりを持たせるために，1つの論文を2つの章に分けて収録したり，数式の導出過程を追加した箇所もある．また第1章と第7章では，漸近展開の計算法についての簡単な解説をも加えたので，この種の計算を試みようとされる読者の参考になれば幸いである．

本書を上梓することができたのは，多くの方々の御指導のお蔭である．なかでもロンドン・スクール・オブ・エコノミックスの J. D. Sargan 教授とエール大学の P. C. B. Phillips 教授からは直接に，また論文を通して間接的に非常に多くのことを学ばせていただいた．また本書に収めた論文のほとんどは，まず始めに広島大学統計学研究グループのセミナーにおいて発表したが，セミナーの主催者の塩谷實教授を始めとする出席者の方々，とくに藤越康祝教授と谷口正信助教授からは，論文の成立には，不可欠な多くの有益なコメントをいただいた．また一橋大学の刈屋武昭，田中勝人の両氏には，それぞれ別の共同研究をつうじて大いに啓発された．本書の第2章と第8章は，それらの研究から深い影響を受けている．さらに大阪大学の畠中道雄教授から，折にふれていただいた御教示は，著者が時

系列分析に向うきっかけとなり，またその後の遅々として進まぬ研究を前進させるうえで大きな励みとなった。他方，学会やシンポジウムなどにおける著者の報告に対して出席者の方々から多くのコメントをいただいた．ことに佐和隆光，森棟公夫，山本　拓，赤平昌文，豊岡康行，杉原左右一の諸先生方からいただいたご助言によって，論文を改善することができた．広島大学経済学部の森田成美学部長を始めとする諸先生，ことに著者の所属する理論・計量経済学大講座の横山和典教授には，自由に研究に専念できるよう格別の御配慮をいただいた．以上の先生方に心から感謝の意を表したい．

最後に，著者に広島大学政経学部，および一橋大学大学院を通じて統計学の手ほどきをして下さった(故)広島大学名誉教授北林琢男先生，および一橋大学名誉教授伊大知良太郎先生に，ここに深く感謝します．

1985年1月15日

前　川　功　一

目　　次

はしがき

第1章　序説

1　本書の構成……1
2　Sargan のアルゴリズム……4
3　同時分布への拡張……11
4　Validity について……17

第2章　SURモデルにおける制約なしゼルナー推定量の漸近展開

1　モデルおよび推定量……21
2　$\hat{\beta}$ の漸近展開……23
3　他の漸近展開との関連……26
4　むすび……30
補論　補題の証明……31

第3章　ゼルナー推定量における非直交的説明変数の影響

1　はじめに……33
2　制約なしゼルナー推定量の漸近展開
——正準相関係数による表現——……34
3　モンテカルロ実験……39
4　むすび……42

第4章　単純化されたテルサー推定量の特性

1　モデルと推定量……45
2　推定量の分布の漸近展開……47
3　推定量の精密標本分布……50
4　数値解析……54

第5章　SURモデルにおける t-検定量の漸近展開

1　はじめに……57
2　モデルと t-検定量……57
3　単一方程式における t 検定との比較……64

4　数値解析……70

第6章　一般線型回帰モデルにおける
3次漸近有効推定量

1　はじめに……75
2　3次漸近有効性……75
3　一般線型回帰モデル……80
4　G-クラス推定量の分布の比較 ……83
5　推定量の比較……87
例1　SUR モデルにおける制約付，制約なし
ゼルナー推定量と最尤推定量……88
例2　撹乱項が1階の自己回帰過程に従う回帰モデル……91
例3　不均一分散モデル……92
例4　パネルデータの回帰分析……93
6　むすび……97
補論　$\hat{\beta}$ の3次 AMU 条件について……98

第7章　AR(1)モデルにおける最尤推定量の
分布の漸近展開

1　はじめに……101
2　最尤推定量の確率展開……102
3　$\sqrt{T}(\tilde{\alpha}_{ML}-\alpha)$ の確率展開 ……105
4　エッジワース係数の導出……107
5　σ^2 が既知の場合 ……112
補論(A)　トレースの評価……114
(B)　行列 $A_{..}$, $A_{...}$, $A_{....}$ の評価……116

第8章　AR(1)モデルにおける予測量の比較

1　はじめに……119
2　モデルと予測量……121
3　予測誤差の分布の展開(1)
——"独立でない場合"——……125
4　予測誤差の分布の展開(2)
——"独立な場合"——……132
5　最尤予測量について……134
補論　特性関数 $\phi(\theta_1, \theta_2|y_T)$ の導出……136

第9章　ARMAXモデルにおける最小2乗推定量の漸近展開（Ⅰ）
——想定誤差の分析——

1　はじめに…… 139
2　$\hat{\alpha}$ と $\hat{\beta}$ の漸近展開 …… 141
3　キュムラントのスペクトル表現…… 145
4　偏りと確率極限…… 149
5　数値計算とそのグラフ…… 152
6　むすび…… 155
補論(A)　誤差関数 $e(q)$ の偏微係数…… 160
(B)　キュムラントの計算…… 161
(C)　補題の応用例…… 163

第10章　ARMAXモデルにおける最小2乗推定量の漸近展開（Ⅱ）
——2次形式の比の分布としてみた場合——

1　はじめに…… 167
2　モデルと推定量…… 168
3　分布の漸近展開…… 170
4　結果の解釈…… 174
5　むすび…… 182
補論(A)　補題1の証明…… 184
(B)　補題2の証明…… 186
参考文献 …… 189

第1章　序　　説

1　本書の構成

はじめに本書の構成と扱われる問題の範囲を述べておこう．統計学における漸近展開に関する研究は，長い歴史と広範な研究領域を抱えており，その全容を展望することは，本書のよくなしうるところではない．しかし視野を計量経済学とその隣接する分野に限定すると，その歴史は比較的浅い（この分野が本格的に発展し始めたのは，ようやく1970年代に入ってからのことである）ので，ある程度の展望を得ることができる．事実，展望論文も2～3著わされていて，たとえば，Phillips (1980) の第3節，Anderson (1980), Mariano (1982), Taylor (1983) などがある．Taylor の論文は，批判的な展望であるが，それには，いくつかの反批判的コメントと多数の参考文献が付随しており計量経済学における漸近展開の最近の研究動向を知るためのひとつの情報源ともなっている．歴史が浅いとはいえ，この分野における研究論文はかなりの数にのぼり，現在もその数は増加しつつある．それらは大別すると同時方程式に関連したものと，他の計量経済学的モデルに関連したものとに分けることができよう．この2分法に従えば，本書は後者に属することになる．

第1章2節では，以下の章においてしばしば使用される，エッジワース展開を得るためのスカラー統計量に対する Sargan (1976) のアルゴリズムを述べる．それは，$O(T^{-1})$ までのエッジワース展開式に現われる多数の項を，エッジワース係数と呼ばれる係数にまとめ，その係数を機械的に計算すればよいように導出をルーチン化したものである．次いで3節においてこのアルゴリズムを，ベクトル統計量の場合に拡張した型を導出する．さらに4節では，漸近展開におけるいわゆる妥当性 (Validity) の最近の研究動向についても簡単に言及する．

第2章では，Zellner (1962) が提示した見かけ上無相関な回帰モデル (Seemingly unrelated regression model, 以下では SUR モデルと略記す

る）として知られるモデルにおいて，回帰方程式が2つの場合：

$$y_1 = X_1\beta_1 + u_1$$

$$y_2 = X_2\beta_2 + u_2$$

を扱う（これは行列によって表現されているが，その詳細な定義は第2章で示される）．ここに第1式は k_1 個の，第2式は k_2 個の説明変数をもち，観察値の数は両式とも T 個とする．この2つの式は見かけ上無相関であるが，撹乱項ベクトル u_1 と u_2 の同期の値 u_{1t} と u_{2t} は相関を持つと仮定される．そして，ゼルナーの制約なし推定量（ベクトルの場合）の分布の漸近展開を与える．2章では他の論文で得られている結果との関連についても述べる予定である．さらに Kariya and Maekawa (1982) によって得られた漸近展開による分布の近似誤差の限界を紹介する．また第2章の補論において特性関数の反転に必要な2，3の公式を示す．

第3章では SUR モデルにおける異なる方程式に現われる説明変数 X_1 と X_2 の相関が制約なしゼルナー推定量に与える影響を論じる．初期の SUR モデルに関する研究においては X_1 と X_2 は直交すると仮定されていたが，その仮定の及ぼす影響を調べることでもある．

第4章においては，SUR モデルに対する Telser (1964) の推定量を単純化したものを扱う．ゼルナー推定量は，u_{1t} と u_{2t} の相関が高いときに有効性を増すことが知られており，その相関が低いときは単一方程式に対する最小2乗推定量のほうが効率が良いことが知られている．単純化された Telser 推定量は，その相関の大きさが両極端の中間にあるときに有効性が高いことが，漸近展開の結果にもとづく数値計算によって示される．

第5章では，SUR モデルにおける係数の1次結合の有意性検定のための t-検定量を，標準回帰モデルにおけるそれとのアナロジーにより定義し，その分布の漸近展開を求める．その結果にもとづいて数値計算を行う．そうして方程式間の撹乱項の相関が，検定に与える影響と推定に与える影響が必ずしも並行的でないことを示す．

第6章は，一般線型回帰モデルにおける一般化最小2乗推定量の3次漸

近有効性について論じる．そこでは，攪乱項の分散共分散行列の推定法の相違は，係数の推定値の3次の有効性に効果を持たないことが示される．一般論を述べた後に，いくつかの計量経済的な回帰モデルにおける最尤推定量を含む代表的な推定量の比較を行う．

第7章～第10章においては，Sargan のアルゴリズムによる時系列的回帰モデルにおける漸近展開が扱われる．第7章では AR(1) モデル

$$y_t=\alpha y_{t-1}+u_t,\ u_t\sim iidN(0,\ \sigma_u{}^2)$$

を扱う．この章では，Sargan のアルゴリズムを最尤推定量へ適用する方法 (Tanaka (1984a)) を紹介した後，次の2つの場合における漸近展開を求める．まず最初に α と $\sigma_u{}^2$ を未知パラメータとする場合の α の最尤推定量 $\tilde{\alpha}$ の分布の3次までの漸近展開を求める．次いで $\sigma_u{}^2$ を既知とした場合の α の最尤推定量についても同じオーダーまで分布を求める．この計算の副産物として2つの分布はこのオーダーまで一致することが示される．このモデルにおける α の各種推定量の漸近展開は，すでにいくつかの論文で，それぞれの方法によって導かれている．この章では，それらの諸結果のあいだの関連について言及する．さらにこの章の補論において，時系列モデルにおける漸近展開においてしばしば必要とされる留数計算の例題による解説が付加されている．

第8章では AR(1) モデルにおけるいくつかの予測量の分布の漸近展開を導出し，予測量の比較を行う．その際，時系列分析における慣用的な仮定，すなわち推定に使われるサンプルと予測に使われるサンプルは独立であるという仮定は用いない．実際にはこの2つのサンプルは独立ではないことが多いからである．

第9章では，ARMA(1, 1) モデルに外生変数が1つ追加されたモデル

$$y_t=\alpha y_{t-1}+\beta x_t+u_t+\gamma u_{t-1},\ u_t\sim iidN(0,\ \sigma_u{}^2)$$

を扱う．そして α と β の最小2乗推定量の分布の漸近展開を求める．その結果は非常に複雑なので，数値計算とそのグラフによって，また上のモデルをさらに次数の低い ARMA モデルに単純化することによって結果の解釈を行う．

ARMAX モデルに関する漸近展開においては，外生変数 X がエッジワース係数に含まれる．そのためエッジワース係数をモデルのパラメータのみを用いて明示的に表現することはできない．しかし X の生成過程にパラメトリックな仮定を置けば，エッジワース係数をある程度まで明示的に書き表わすことができる．そのために必要なある種のキュムラントのスペクトル表現に関する補題が，この章の2節において提示される．

第10章においては，ARMA(1, 1) モデルに一般に k 個の外生変数が追加された場合を扱う．このモデルにおける y_{t-1} の係数 α の最小2乗推定量 $\hat{\alpha}$ は，ある種の2次形式の比として表わされることに着目して，$\hat{\alpha}$ の分布の3次までの漸近展開を求める．$\hat{\alpha}$ を2次形式の比と見なすことによって，エッジワース係数の式を書き下すことが可能になる．しかしその式は複雑であるので，ここでも数値計算とそのグラフ化およびモデルの単純化などをとおして結果の解釈を試みる．

2　Sargan のアルゴリズム

Sargan (1975) は，極限分布が正規分布であるようなかなり一般的な推定量のクラスに対し，その標本分布のエッジワース展開のアルゴリズムとそれに対する Validity をかなり一般的な状況のもとで論じている．ふつうあるパラメータ β の推定量 $\hat{\beta}$ と真値との誤差 $\hat{\beta}-\beta$ は，いくつかの基本的な標本モーメント $q_1, q_2, \cdots, q_m$ の関数として表わすことができる．以下ではそれを $e_T(q)$ で表わし，誤差関数と呼ぶことにする．ここに T は標本サイズ，また $q=(q_1, q_2, \cdots, q_m)'$ である．Sargan (1975) は，ベクトル q が $q=(p, w)$ という型に分割され，p は w とは統計的に独立に正規分布に従う場合を扱っている．さらに $\sqrt{T}w$ は全ての次数の有界なモーメントを持つことが仮定される．通常 p は1次の，w は2次の標本モーメントである場合が多い．さらにその論文では $e_T(q)$ に関するいくつかの正則条件が仮定されているが，その中で Validity の証明において重要な役割を果す仮定は，$e_T(q)$ は $q=0$ の近傍で十分なめらかであること (smoothness の仮定) とその逆関数が存在すること (invertibility の仮定)

の2つである．この論文の特徴的な点は $e_T(q)$ のモーメントが存在しない場合にも，漸近展開が成立することを示している点である．さらにこの論文は応用例として，ラグ付内生変数を含まない場合の同時方程式における2段階最小2乗推定量に対する t-検定量の標本分布のグラム＝シェリエ展開を求めている．誤差関数が $e_T(p, w)$ という型に書くことができる例は，他にラグ付内生変数を含まない2段階最小2乗推定量，第2章で扱われる制約なしゼルナー推定量など多数の例が存在する．

上の論文は，Sargan (1980) によって極限分布が χ^2 分布に従う場合の検定統計量の漸近展開へ発展させられている．しかし本書ではその問題は扱わない．

ところが，ラグ付内生変数を含む同時方程式や，時系列モデルに関連する推定量の場合には，誤差関数における確率ベクトル q を，統計的に独立な2つのグループに分割することが，一般にはできない．Sargan (1976) は Chambers (1967) の結果を応用することにより，そのような場合における $e_T(q)$ の分布のエッジワース型漸近展開の公式を与えた．Chambers は多次元の統計量を扱っているが，Sargan (1976) は1変量統計 $\sqrt{T}e_T(q)$ に限定したうえで，その $O(T^{-1})$ までの分布の展開公式を表わした．そこでは，エッジワース展開に現われる多くの項が10個の係数に公式としてまとめられており，それらの公式を計算することによってエッジワース展開が計算される．Sargan 自身は，このアルゴリズムの Validity に関しては，ごく簡単にしか述べていないが，Phillips (1977c) はかなり一般的な条件のもとで，それを数学的に厳密に証明している．その証明は Sargan (1975) の枠組に依拠しており難解であるが，要点は次の3つの仮定にあるといえよう．すなわち第1は $e_T(q)$ の smoothness と invertibility を仮定すること，第2は $\sqrt{T}q$ の k 次 $(k\geqslant 2)$ のキュムラントの大きさのオーダー (order of magnitude) を $O(T^{1-\frac{k}{2}})$ とすること，第3は q の分布自身 Valid なエッジワース展開を持つとすることの3点である．しかし具体的な問題に即して，その証明の前提となるいくつかの正則条件が満たされるかどうかを検証することは容易ではないかもしれない．

Sargan (1976) はエッジワース展開を次のように求めた（以下，$e_T(q)$ の添字 T を省略する）．誤差関数 $e(q)$ において $e(0)=0$, $E(q)=0$ となるように調整されているとする．$e(q)$ を $q=0$ の回りでテイラー展開すれば

$$\sqrt{T}e(q)=\sqrt{T}\left(e_iq_j+\frac{1}{2}e_{jk}q_jq_k+\frac{1}{6}e_{jkl}q_jq_kq_l\right)+O_p(T^{-3/2})$$

$$=e_j\bar{q}_j+\frac{1}{2\sqrt{T}}e_{jk}\bar{q}_j\bar{q}_k+\frac{1}{6T}e_{jkl}\bar{q}_j\bar{q}_k\bar{q}_l+O_p(T^{-3/2}) \tag{1}$$

を得る．ここにテンソル和の慣用表現が用いられている．すなわち同じ添字を持つ要素はその添字に関して和がとられている．たとえば，e_jq_j は $\sum_{j=1}^{m}e_jq_j$ を意味している．ただし

$$e_j=\frac{\partial e(0)}{\partial q_j},\quad e_{jk}=\frac{\partial^2 e(0)}{\partial q_j\partial q_k},\quad e_{jkl}=\frac{\partial^3 e(0)}{\partial q_j\partial q_k\partial q_l}$$

($e(q)$ の q_j, q_k, q_l に関する偏微係数の $q=0$ における値)である．また $\bar{q}_j=\sqrt{T}q_j$ と定義され，$\bar{q}_j=O(1)$ でかつ $\bar{q}_j$ のキュムラントは上に述べた大きさを持っていると仮定されている．

いま $\bar{q}$ の分布関数を $F(\bar{q})$ とし，$\sqrt{T}e(q)$ の特性関数を $\lambda(t)$ とすると，定義より

$$\lambda(t)=E\{\exp[it\sqrt{T}e(q)]\}$$

である．$\lambda(t)$ に(1)を代入し，級数展開 $e^{x+y}=e^x\left(1+y+\frac{1}{2}y^2\cdots\right)$ を用い

$$\lambda(t)=\int\exp(ite_j\bar{q}_j)\left[1+\frac{it}{2\sqrt{T}}e_{jk}\bar{q}_j\bar{q}_k+\frac{it}{6T}e_{ikl}\bar{q}_j\bar{q}_k\bar{q}_l\right.$$

$$\left.-\frac{t^2}{8T}\left(e_{jk}\bar{q}_j\bar{q}_k\right)^2\right]dF(\bar{q})+O(T^{-3/2})$$

$$=\phi(te_0)-\frac{it}{2\sqrt{T}}e_{jk}\phi_{jk}-\frac{t}{6T}e_{jkl}\phi_{jkl}-\frac{t^2}{8T}e_{jk}e_{lm}e_{jklm}+O(T^{-3/2}) \tag{2}$$

と展開される．ここに $e_0=(e_1, e_2, \cdots, e_m)'$ である．またここで，

$$\phi(te_0)=\int\exp(ite_i\bar{q}_j)dF(\bar{q}),\quad \theta_j=te_j$$

$$\phi_{jk}=\frac{\partial^2\phi(te_0)}{\partial\theta_j\partial\theta_k},\quad \phi_{jkl}=\frac{\partial^3\phi(te_0)}{\partial\theta_j\partial\theta_k\partial\theta_l},\quad \phi_{jklm}=\frac{\partial^4\phi(te_0)}{\partial\theta_j\partial\theta_k\partial\theta_l\partial\theta_m}$$

を定義する．このとき，$\psi(\theta)=\log\phi(\theta)$ とおけば
$\phi(\theta)=\exp\{\log\phi(\theta)\}=\exp\{\psi(\theta)\}$ であるから，

$$\begin{aligned}\phi(\theta)&=\exp\{\psi(\theta)\}\\&=\exp\left(\frac{1}{2}\psi_{jk}\theta_j\theta_k+\frac{1}{6}\psi_{jkl}\theta_j\theta_k\theta_l+\frac{1}{24}\psi_{jklm}\theta_j\theta_k\theta_l\theta_m+\cdots\right)\\&=\exp\left(\frac{1}{2}\psi_{jk}\theta_j\theta_k\right)\left[1+\frac{1}{6}\psi_{jkl}\theta_j\theta_k\theta_l+\frac{1}{24}\psi_{jklm}\theta_j\theta_k\theta_l\theta_m\right.\\&\quad\left.+\frac{1}{72}(\psi_{jkl}\theta_j\theta_k\theta_l)^2\right]+O(T^{-3/2})\end{aligned}$$

と展開される．したがって $\phi(\theta)$ の偏微係数は

$$\begin{aligned}\frac{1}{\sqrt{T}}\ \frac{\partial^2\phi(\theta)}{\partial\theta_a\partial\theta_b}&=\exp\left(\frac{1}{2}\psi_{jk}\theta_j\theta_k\right)\left[\psi_{ab}+\psi_{aj}\theta_j\psi_{bk}\theta_k+\right.\\&\quad\frac{1}{6}(\psi_{ab}+\psi_{aj}\theta_j\psi_{bk}\theta_k)\psi_{jkl}\theta_j\theta_k\theta_l+\psi_{abj}\theta_j+\\&\quad\left.\frac{1}{2}(\psi_{aj}\theta_j\psi_{bkl}\theta_k\theta_l+\psi_{bj}\theta_j\psi_{akl}\theta_k\theta_l)\right]/\sqrt{T}+O(T^{-3/2})\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{1}{T}\ \frac{\partial^3\phi(\theta)}{\partial\theta_a\partial\theta_b\partial\theta_c}&=\exp\left(\frac{1}{2}\psi_{jk}\theta_j\theta_k\right)[\psi_{aj}\theta_j\psi_{bk}\theta_k\psi_{cl}\theta_l+\psi_{ab}\psi_{cj}\theta_j+\\&\quad\psi_{bc}\psi_{aj}\theta_j+\psi_{ac}\psi_{bj}\theta_j]/T+O(T^{-3/2})\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{1}{T}\ \frac{\partial^4\phi(\theta)}{\partial\theta_a\partial\theta_b\partial\theta_c\partial\theta_d}&=\exp\left(\frac{1}{2}\psi_{jk}\theta_j\theta_k\right)[\psi_{aj}\theta_j\psi_{bk}\theta_k\psi_{cl}\theta_l\psi_{dm}\theta_m+\\&\quad\psi_{ab}\psi_{cj}\theta_j\psi_{dk}\theta_k+\psi_{ac}\psi_{bj}\theta_j\psi_{dk}\theta_k+\\&\quad\psi_{ad}\psi_{bj}\theta_j\psi_{ck}\theta_k+\psi_{bc}\psi_{aj}\theta_j\psi_{dk}\theta_k+\\&\quad\psi_{bd}\psi_{aj}\theta_j\psi_{ck}\theta_k+\psi_{cd}\psi_{aj}\theta_j\psi_{bk}\theta_k+\psi_{ab}\psi_{cd}+\\&\quad\psi_{ac}\psi_{bd}+\psi_{ad}\psi_{bc}]/T+O(T^{-3/2})\end{aligned}$$

によって近似される．ここに

$$\psi_{jk}=\frac{\partial^2\psi(0)}{\partial\theta_j\partial\theta_k},\quad \psi_{jkl}=\frac{\partial^3\psi(0)}{\partial\theta_j\partial\theta_k\partial\theta_l},\quad \psi_{jklm}=\frac{\partial^4\psi(0)}{\partial\theta_j\partial\theta_k\partial\theta_l\partial\theta_m}\tag{3}$$

である．これらの偏微係数は，言うまでもなく，キュムラントに $(i)^k$ を乗じたもので，キュムラントそのものではない．しかし本書では，便宜的にこれらをもキュムラントと呼ぶことがある．もちろん $\psi(\theta)$ が，q の積率母関数によって定義されるときは，上の偏微係数はキュムラントそのものである．これらの偏微係数を(2)式に代入して整理すれば，$\lambda(t)$ は

$$\lambda(t)=e^{-\frac{1}{2}t^2\omega^2}\left\{1-\frac{i\alpha_4}{2\sqrt{T}}t-t^2\left(\frac{i\alpha_5}{2\sqrt{T}}+\frac{\alpha_7}{2T}+\frac{\alpha_4{}^2}{8T}+\frac{\alpha_9}{4T}\right)\right.$$

$$+t^3\left(\frac{\alpha_1}{6}-\frac{i\alpha_3}{2\sqrt{T}}\right)$$

$$+t^4\left(\frac{\alpha_2}{24}-\frac{i\alpha_{10}}{2\sqrt{T}}-\frac{i\alpha_1\alpha_4}{12\sqrt{T}}-\frac{\alpha_6}{6T}-\frac{\alpha_3\alpha_4}{4T}-\frac{\alpha_8}{2T}\right)$$

$$\left.+t^6\left(\frac{\alpha_1{}^2}{72}-\frac{i\alpha_1\alpha_3}{12\sqrt{T}}-\frac{\alpha_3{}^2}{8T}\right)\right\}+o(T^{-1})$$

と展開される．ここに ω^2, α_1, ..., α_{10} は次のように定義される係数で，以下これらの係数をエッジワース係数と呼ぶ．

$$\omega^2=-\phi_{jk}e_je_k \qquad \alpha_2=\phi_{jklm}e_je_ke_le_m$$

$$\alpha_1=\phi_{jkl}e_je_ke_l \qquad \alpha_4=\phi_{jk}e_{jk}$$

$$\alpha_3=\gamma_je_{jk}\gamma_k \qquad \alpha_6=e_{jkl}\gamma_j\gamma_k\gamma_l$$

$$\alpha_5=\delta_{jk}e_{jk} \qquad \alpha_8=\gamma_je_{jk}\phi_{kl}e_{lm}\gamma_m$$

$$\alpha_7=e_{jkl}\phi_{jk}\gamma_l \qquad \alpha_{10}=\gamma_je_{jk}\beta_k$$

$$\alpha\ =\phi_{jm}e_{jk}\phi_{kl}e_{lm}$$

$$\gamma_a=\phi_{aj}e_j, \qquad \beta_a=\phi_{ajk}e_je_k, \qquad \delta_{ab}=\phi_{abj}e_j.$$

ここで標準正規分布の密度関数とその r 次の導関数をそれぞれ $i(z)$ $i^{(r)}(z)$ とすれば

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\frac{it\omega^2}{2}}e^{-itx}dt=i\left(\frac{x}{\omega}\right) \qquad \text{(反転公式)}$$

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}(it)^re^{-\frac{it\omega^2}{2}}e^{-itx}dt=(-1)^r\left(\frac{1}{\omega}\right)^{r+1}i^{(r)}\left(\frac{x}{\omega}\right)$$

(反転公式の両辺を x で微分)

が成立するから，これらを用いて $\lambda(t)$ を反転すれば $\sqrt{T}e(q)$ の分布関数の $O(T^{-1})$ までの近似は

$$p(\sqrt{T}e(q)<x)=I\left(\frac{x}{\omega}\right)+\left(\frac{\alpha_4}{2\sqrt{T}}\right)\left(\frac{1}{\omega}\right)i\left(\frac{x}{\omega}\right)$$

$$+\left(\frac{i\alpha_5}{2\sqrt{T}}+\frac{\alpha_7}{2T}+\frac{\alpha_4{}^2}{8T}+\frac{\alpha_9}{4T}\right)\left(\frac{1}{\omega^2}\right)i^{(1)}\left(\frac{x}{\omega}\right)$$

$$-\left(\frac{i\alpha_1}{6}+\frac{\alpha_3}{2\sqrt{T}}\right)\left(\frac{1}{\omega^3}\right)i^{(2)}\left(\frac{x}{\omega}\right)$$

$$+\left(\frac{\alpha_2}{24}-\frac{i\alpha_{10}}{2\sqrt{T}}-\frac{i\alpha_1\alpha_4}{12\sqrt{T}}-\frac{\alpha_6}{6T}-\frac{\alpha_3\alpha_4}{4T}-\frac{\alpha_8}{2T}\right)$$

$$\cdot\left(\frac{1}{\omega^4}\right)i^{(3)}\left(\frac{x}{\omega}\right)$$

$$-\left(\frac{\alpha_1{}^2}{72}-\frac{-i\alpha_1\alpha_3}{12\sqrt{T}}-\frac{\alpha_3{}^2}{8T}\right)\left(\frac{1}{\omega^6}\right)i^{(5)}\left(\frac{x}{\omega}\right) \quad (4)$$

として得られる．ここに $I(\cdot)$ は標準正規分布の分布関数である．これが Sargan (1976) が求めた $\sqrt{T}e(q)$ の分布のエッジワース展開の一般公式である．この式に虚数単位 i が現われているが，それらは ψ_j, ψ_{jk}, ψ_{jklm} に含まれる i との積になっているので，展開式の右辺は実数値をとる．ここでさらに Phillips (1977b) に従ってエッジワース係数を次のようにまとめる．

$$c_0=\frac{\alpha_4}{2\omega\sqrt{T}}+\frac{i\alpha_1}{6\omega^3}+\frac{\alpha_3}{2\omega^3\sqrt{T}}$$

$$c_1=-\frac{1}{\omega^2}\left(\frac{i\alpha_5}{2\sqrt{T}}+\frac{\alpha_7}{2T}+\frac{\alpha_4{}^2}{8T}+\frac{\alpha_9}{4T}\right)$$

$$+\frac{3}{\omega^4}\left(\frac{\alpha^2}{24}-\frac{i\alpha_{10}}{2\sqrt{T}}-\frac{i\alpha_1\alpha_4}{12\sqrt{T}}-\frac{\alpha_6}{6T}-\frac{\alpha_3\alpha_4}{4T}-\frac{\alpha_8}{2T}\right)$$

$$+\frac{15}{\omega^6}\left(\frac{\alpha_1{}^2}{72}-\frac{i\alpha_1\alpha_3}{12\sqrt{T}}-\frac{\alpha_3{}^2}{8T}\right)$$

$$c_2=-\frac{1}{\omega^3}\left(\frac{i\alpha_1}{6}+\frac{\alpha_3}{2\sqrt{T}}\right)$$

$$c_3=-\frac{1}{\omega^4}\left(\frac{\alpha_2}{24}-\frac{i\alpha_{10}}{2\sqrt{T}}-\frac{i\alpha_1\alpha_4}{12\sqrt{T}}-\frac{\alpha_6}{6T}-\frac{\alpha_3\alpha_4}{4T}-\frac{\alpha_8}{2T}\right)$$

$$-\frac{10}{\omega^6}\left(\frac{\alpha_1{}^2}{72}-\frac{i\alpha_1\alpha_3}{12\sqrt{T}}-\frac{\alpha_3{}^2}{8T}\right)$$

$$c_5=\frac{1}{\omega^6}\left(\frac{\alpha_1{}^2}{72}-\frac{i\alpha_1\alpha_3}{12\sqrt{T}}-\frac{\alpha_3{}^2}{8T}\right). \quad (5)$$

これらの c_0, c_1, $\cdots$, c_5 を用いると(4)は，次のようになる．

$$p(\sqrt{T}e(q)<x)=I\left(\frac{x}{\omega}\right)+i\left(\frac{x}{\omega}\right)\cdot\left\{c_0+c_1\left(\frac{x}{\omega}\right)+c_2\left(\frac{x}{\omega}\right)^2+c_3\left(\frac{x}{\omega}\right)^3\right.$$

$$\left.+c_5\left(\frac{x}{\omega}\right)^5\right\}+O(T^{-3/2}). \quad (6)$$

上の結果を用いれば，考察の対象となる統計量が与えられたとき，その分布のエッジワース展開は，エッジワース係数を計算することによって求めることができる．具体的にその手続きを箇条書きすれば

〔1〕 誤差関数 $e(q)$ を構成する基本的な確率変数ベクトル q を定義する．そのとき $E(q)=0$, $e(0)=0$ となるように調整しておく．

〔2〕 $e(q)$ を $q=0$ の回りでテイラー展開して e_i, e_{ij}, e_{ijk}, を求める．

〔3〕 q_1, q_2, …, q_m のキュムラント母関数 $\phi(\theta)$ を導出し，ϕ_{jk}, ϕ_{jkl}, ϕ_{jklm} を計算する．

〔4〕 〔2〕と〔3〕の結果を使ってエッジワース係数を計算する．

過程〔4〕において一般には e_{jk}, e_{jkl} と ϕ_{jk}, ϕ_{jkl}, ϕ_{jklm} の積和を明示的に計算できないことが少なくない．そのような場合には，積和をとるところは数値計算に頼ることになる．特殊な場合には，第7章におけるようにキュムラントを留数計算を用いて近似することによって，エッジワース係数をパラメータによって明示的に表わすことができることもある．そのような近似を行う場合，$O(T^{-1})$ までのエッジワース展開を得るためには，α_1, …, α_{10} の計算においては，キュムラントは最高次数の項だけを計算すればよいが，ω^2 の計算にあたっては ϕ_{ij} の第2次近似の項（$O(T^{-1})$ の項）まで計算しなくてはならない（第7章参照）．

なお以上の議論において，q の特性関数が用いられているので，虚数単位 i が表現の中に付きまとう．実際にエッジワース係数を計算する場合には，q の積率母関数にもとづくキュムラント母関数 $\phi(\theta)$ を用いてもよい．その場合，ϕ_{jk}, ϕ_{jkl}, ϕ_{jklm} はキュムラントそのものである．またそのときエッジワース係数 ω^2 は，$\omega^2=\phi_{jk}e_je_k$ と変更される．また係数 c_0, c_1, …, c_5 は次のように改められる．

$$c_0=\frac{-\alpha_4}{2\omega\sqrt{T}}+\frac{\alpha_1}{6\omega^3}+\frac{\alpha_3}{2\omega^3\sqrt{T}}$$

$$c_1=-\frac{1}{\omega^2}\left(\frac{\alpha_5}{2\sqrt{T}}+\frac{\alpha_7}{2T}+\frac{\alpha_4{}^2}{8T}+\frac{\alpha_9}{4T}\right)$$

$$+\frac{3}{\omega^4}\left(\frac{\alpha_2}{24}+\frac{\alpha_{10}}{2\sqrt{T}}+\frac{\alpha_1\alpha_4}{12\sqrt{T}}+\frac{\alpha_6}{6T}+\frac{\alpha_3\alpha_4}{4T}+\frac{\alpha_8}{2T}\right)$$

$$-\frac{15}{\omega^6}\left(\frac{\alpha_1^2}{72}+\frac{\alpha_1\alpha_3}{12\sqrt{T}}+\frac{\alpha_3^2}{8T}\right)$$

$$c_2=-\frac{1}{\omega^3}\left(\frac{\alpha_1}{6}+\frac{\alpha_3}{2\sqrt{T}}\right)$$

$$c_3=-\frac{1}{\omega^4}\left(\frac{\alpha_2}{24}+\frac{\alpha_{10}}{2\sqrt{T}}+\frac{\alpha_1\alpha_4}{12\sqrt{T}}+\frac{\alpha_6}{6T}+\frac{\alpha_3\alpha_4}{4T}+\frac{\alpha_8}{2T}\right)$$

$$+\frac{10}{\omega^6}\left(\frac{\alpha_1^2}{72}+\frac{\alpha_1\alpha_3}{12\sqrt{T}}+\frac{\alpha_3^2}{8T}\right)$$

$$c_5=-\frac{1}{\omega^6}\left(\frac{\alpha_1^2}{72}+\frac{\alpha_1\alpha_3}{12\sqrt{T}}+\frac{\alpha_3^2}{8T}\right). \tag{7}$$

本書では，以上[1]～[4]の計算を Sargan のアルゴリズムと呼ぶことにしたい．本書の第7～第10章において，このアルゴリズムが具体的問題に応用される．ところでこの方法は，スカラー統計量に対して提案されているが，それを多変量の場合に対して形式的に拡張することができる．次節にその拡張を示そう．

3　同時分布への拡張

この節では，Sargan のアルゴリズムを同時分布の場合に形式的に拡張する．いま n 次元確率変数 $p'=(p_1, p_2, \cdots, p_n)$ の m 個の関数を $g_i(p)$, $(i=1, \cdots, m)$ とする．ここで $E(p)=0$ とする．さらに $g_i(p)$ を要素にもつベクトルを

$$G'(p)=(g_1(p), g_2(p), \cdots, g_m(p))$$

とおき，$G(0)=0$ であるとする．この関数 $G(p)$ として，後に推定量の真値からの差 $\hat{\theta}-\theta$ を対応させる．すなわち $G(p)=\hat{\theta}-\theta$. このとき，しばしば，$\sqrt{T}G(p)=\sqrt{T}(\hat{\theta}-\theta)$ のテイラー展開が必要になる．ここで g_i の p に関する導関数を $p=0$ で評価したものを要素とするベクトルを

$$G_i'=\left(\frac{\partial g_1}{\partial p_i}, \frac{\partial g_2}{\partial p_i}, \cdots, \frac{\partial g_m}{\partial p_i}\right)_{p=0}$$

$$G_{ij}'=\left(\frac{\partial^2 g_1}{\partial p_i\partial p_j}, \frac{\partial^2 g_2}{\partial p_i\partial p_j}, \cdots, \frac{\partial^2 g_m}{\partial p_i\partial p_j}\right)_{p=0}$$

$$G_{ijk}{}'=\left(\frac{\partial^3 g_1}{\partial p_i\partial p_j\partial p_k},\ \frac{\partial^3 g_2}{\partial p_i\partial p_j\partial p_k},\ \cdots,\ \frac{\partial^3 g_m}{\partial p_i\partial p_j\partial p_k}\right)_{p=0}$$

$$i,\ j,\ k=1,\ 2,\ \cdots,\ n$$

と表わす．そうするとベクトル値関数 $\sqrt{T}G(p)$ の原点 $p=0$ の回りでのテイラー展開は，

$$\sqrt{T}G(p)=\sqrt{T}\left\{\sum_i G_i p_i+\frac{1}{2}\sum_{i,j} G_{ij}p_ip_j+\frac{1}{6}\sum_{i,j,k} G_{ijk}p_ip_jp_k+\cdots\right\}$$

$$=\left\{\sum_i G_i x_i+\frac{1}{2\sqrt{T}}\sum_{i,j} G_{ij}x_ix_j+\frac{1}{6T}\sum_{i,j,k} G_{ijk}x_ix_jx_k+\cdots\right\}$$

と表わされる．ただしここで $x_i=\sqrt{T}p_i$ とおいた．ここでも $\sum$ 記号を省略したテンソル和表現を用いれば $\sqrt{T}G(x)$ の特性関数は，

$$\phi(s)=E\{\exp(is'\sqrt{T}G(x))\}$$

$$=E\left\{\exp is'(G_ix_i+\frac{1}{2}G_{ij}x_ix_j/\sqrt{T}+\frac{1}{6}G_{ijk}x_ix_jx_k/T+\cdots)\right\}$$

$$=E\left\{\exp(is'G_ix_i)\left[1+\frac{is'}{2\sqrt{T}}G_{ij}x_ix_j+\frac{is'}{6T}G_{ijk}x_ix_jx_k\right.\right.$$

$$\left.\left.-\frac{1}{8T}(s'G_{ij}x_ix_j)^2+\cdots\right]\right\}$$

のように書くことができる．ここで

$$\Phi(z)=\int\exp(is'G_ix_i)\,dF=\int\exp(iz_ix_i)\,dF$$

とおく．ただし $z'=(s'G_1,\ s'G_2,\ \cdots,\ s'G_m)$ である．このとき

$$\frac{\partial^2\Phi(z)}{\partial z_i\partial z_j}=-\int\exp(iz_ix_i)x_ix_j\,dF$$

$$\frac{\partial^3\Phi(z)}{\partial z_i\partial z_j\partial z_k}=\int\exp(iz_ix_i)(-i)x_ix_jx_k\,dF$$

等の関係を用いれば，

$$\phi(s)=\Phi(z)-\frac{is'}{2\sqrt{T}}\frac{\partial^2\Phi(z)}{\partial z_i\partial z_j}G_{ij}-\frac{s'}{6T}\frac{\partial^3\Phi(z)}{\partial z_i\partial z_j\partial z_k}G_{ijk}$$

$$-\frac{1}{8T}\frac{\partial^4\Phi(z)}{\partial z_i\partial z_j\partial z_k\partial z_l}s'G_{ij}s'G_{kl}+O(T^{-3/2}) \tag{8}$$

と表わされる．さらに $\psi(z)=\log(\Phi(z))$ とおけば

$$\Phi(z)=\exp(\log\Phi(z))$$

$$=\exp\left(\frac{1}{2}\psi_{ij}z_iz_j+\frac{i}{6}\psi_{ijk}z_iz_jz_k+\frac{1}{24}\psi_{ijkl}z_iz_jz_kz_l+\cdots\right)$$

と展開される．ここに ψ_{ij}, ψ_{ijk} 等は ψ の偏微係数を原点で評価したものである．したがって $\Phi(z)$ の微係数は，キュムラントによって次のように表現できる．

$$\frac{\partial^2\Phi(z)}{\sqrt{T}\partial z_a\partial z_b}=\exp\left(\frac{1}{2}\psi_{jk}z_jz_k\right)\Big\{-\psi_{ab}+\psi_{aj}z_j\psi_{bk}z_k$$

$$+\frac{i}{6}(\psi_{ab}+\psi_{aj}z_j\psi_{bk}z_k)\psi_{jkl}z_jz_kz_l-i\psi_{abj}z_j$$

$$+\frac{i}{2}(\psi_{aj}z_j\psi_{bkl}z_kz_l+\psi_{bj}z_j\psi_{akl}z_kz_l)\Big\}/\sqrt{T}+O(T^{-3/2})$$

$$\frac{1}{T}\ \frac{\partial^3\Phi(z)}{\partial z_a\partial z_b\partial z_c}=\exp\left(-\frac{1}{2}\psi_{jk}z_jz_k\right)\{(\psi_{aj}z_j)(\psi_{bk}z_k)(\psi_{cm}z_m)$$

$$-\psi_{ab}(\psi_{cj}z_j)-\psi_{ac}(\psi_{bj}z_j)-\psi_{bc}(\psi_{aj}z_j)\}/T+O(T^{-\frac{3}{2}})$$

$$\frac{1}{T}\ \frac{\partial^4\Phi(z)}{\partial z_a\partial z_b\partial z_c\partial z_d}=\exp\left(-\frac{1}{2}\psi_{jk}z_jz_k\right)\{(\psi_{aj}z_j)(\psi_{bk}z_k)(\psi_{cm}z_m)(\psi_{dl}z_l)$$

$$-\psi_{ab}(\psi_{bj}z_j)(\psi_{ck}z_k)-\psi_{bc}(\psi_{aj}z_j)(\psi_{dk}z_k)$$

$$-\psi_{ac}(\psi_{bj}z_j)(\psi_{kd}z_k)-\psi_{bd}(\psi_{aj}z_j)(\psi_{ck}z_k)$$

$$-\psi_{ab}(\psi_{cj}z_j)(\psi_{dk}z_k)-\psi_{cd}(\psi_{aj}z_j)(\psi_{bk}z_k)$$

$$+\psi_{ab}\psi_{cd}+\psi_{ac}\psi_{bd}+\psi_{ad}\psi_{bc}\}/T+O(T^{-\frac{3}{2}}).$$

上の表現は，2節における表現と形式的には全く同一であるが，本質的な相違は，ここでは，同時分布を扱っているので，z_a の意味が異なっている点である．z_a に関する上の表現を s_a に関する表現に直せば，

$$\psi_{ij}z_iz_j=\sum_{a,b}s_as_b\psi_{ij}G_i^{(a)}G_j^{(b)}$$

$$\psi_{ijk}z_iz_jz_k=\sum_{a,b,c}s_as_bs_c\psi_{ijk}G_i^{(a)}G_j^{(b)}G_k^{(c)}$$

のように書ける．ただし $G_i^{(a)}$ は G_i の第 a 要素である．ここで $\Phi(z)$ の微係数を上のように，キュムラント ψ_{ij}, ψ_{ijk}, ψ_{ijkl} によって表現した結果を(8)に代入して整理すれば，最終的に

$$\phi(s)=\exp\left(-\frac{1}{2}\sum_{a,b}s_as_b\omega_{(a,b)}\right)\Big[1+\frac{i}{2\sqrt{T}}\sum_a s_a\alpha_{4(a)}$$

$$-\sum_{a,b}s_as_b\left\{\frac{\alpha_{5(a,b)}}{2\sqrt{T}}+\frac{\alpha_{7(a,b)}}{2T}+\frac{\alpha_{4(a)}\alpha_{4(b)}}{8T}+\frac{\alpha_{9(a,b)}}{4T}\right\}$$

$$
\begin{aligned}
&-i\sum_{a,b,c} s_a s_b s_c\left\{\frac{\alpha_{1(a,b,c)}}{6}+\frac{\alpha_{3(a,b,c)}}{2\sqrt{T}}\right\}\\
&+\sum_{a,b,c,d} s_a s_b s_c s_d\left(\frac{1}{24}\alpha_{2(a,b,c,d)}+\frac{1}{2\sqrt{T}}\alpha_{10(a,b,c,d)}\right.\\
&+\frac{1}{12\sqrt{T}}\alpha_{1(a,b)}\alpha_{4(c,d)}+\frac{1}{6T}\alpha_{6(a,b,c,d)}\\
&\left.+\frac{1}{4T}\alpha_{3(a,b)}\alpha_{4(c,d)}+\frac{1}{2T}\alpha_{8(a,b,c,d)}\right)\\
&-\sum_{\substack{a,b,c\\d,e,f}}\left(\frac{1}{72}\alpha_{1(a,b,c)}\alpha_{1(d,e,f)}+\frac{1}{12\sqrt{T}}\alpha_{1(a,b,c)}\alpha_{3(d,e,f)}\right.\\
&\left.\left.+\frac{1}{8T}\alpha_{3(a,b,c)}\alpha_{3(d,e,f)}\right)\right]+O(T^{-3/2})
\end{aligned}
$$

となる．この式を反転することによって，$\sqrt{T}G(x)$ の密度関数の $O(T^{-1})$ までの展開式が次のように得られる．すなわち

$$
\begin{aligned}
&i(\theta)+\frac{1}{2\sqrt{T}}\sum\alpha_{4(a)}H_{(a)}\\
&+\sum_{a,b}H_{(a,b)}\left\{\frac{\alpha_{5(a,b)}}{2\sqrt{T}}+\frac{\alpha_{7(a,b)}}{2T}+\frac{\alpha_{4(a)}\alpha_{4(b)}}{8T}+\frac{\alpha_{9(a,b)}}{4T}\right\}\\
&+\sum_{a,b,c}H_{(a,b,c)}\left\{\frac{\alpha_{1(a,b,c)}}{6}+\frac{\alpha_{3(a,b,c)}}{2\sqrt{T}}\right\}\\
&+\sum_{a,b,c,d}H_{(a,b,c,d)}\left\{\frac{1}{24}\alpha_{2(a,b,c,d)}+\frac{1}{2\sqrt{T}}\alpha_{10(a,b,c,d)}\right.\\
&+\frac{1}{12\sqrt{T}}\alpha_{1(a,b)}\alpha_{4(c,d)}+\frac{1}{6T}\alpha_{6(a,b,c,d)}+\frac{1}{4T}\alpha_{3(a,b)}\alpha_{4(c,d)}\\
&\left.+\frac{1}{2T}\alpha_{8(a,b,c,d)}\right\}\\
&+\sum_{a,b,c,d,e,f}H_{(a,b,c,d,e,f)}\left\{\frac{1}{72}\alpha_{1(a,b,c)}\alpha_{1(d,e,f)}\right.\\
&\left.+\frac{1}{12\sqrt{T}}\alpha_{1(a,b,c)}\alpha_{3(d,e,f)}+\frac{1}{8T}\alpha_{3(a,b,c)}\alpha_{3(d,e,f)}\right\}+O(T^{-\frac{3}{2}}).\qquad(9)
\end{aligned}
$$

ここに $\Omega=[\omega^2(i,\ j)]$，$i(\theta)$ は共分散行列Ωをもつ多次元正規分布の密度関数，すなわち，

$$
i(\theta)=\frac{1}{(\sqrt{2\pi})^m|\Omega|}\exp\left(-\frac{1}{2}\theta'\Omega^{-1}\theta\right).
$$

また，$H_{(a)}=\dfrac{\partial i(\theta)}{\partial\theta_a}$，$H_{(a,b)}=\dfrac{\partial^2 i(\theta)}{\partial\theta_a\partial\theta_b}$，$H_{(a,b,c)}=\dfrac{\partial^3 i(\theta)}{\partial\theta_a\partial\theta_b\partial\theta_c}$

等である．また $\omega_{(\cdot,\ \cdot)}$，$\alpha_{i\ (\cdots)}$ は，次のように定義される係数である．

$$\alpha_{1(a,b,c)}=\psi_{ijk}G_i^{(a)}G_j^{(b)}G_k^{(c)},\qquad \alpha_{2(a,b,c,d)}=\psi_{ijkl}G_i^{(a)}G_j^{(b)}G_k^{(c)}G_l^{(d)}$$

$$\alpha_{3(a,b,c)}=G_i^{(a)}\psi_{ij}G_{jk}^{(b)}\psi_{kl}G_l^{(c)},\qquad \alpha_{4(a)}=G_{ij}^{(a)}\psi_{ij}$$

$$\alpha_{5(a,b)}=\psi_{ijk}G_{ij}^{(a)}G_k^{(b)},\qquad \alpha_{6(a,b,c,d)}=G_{ijk}^{(a)}\upsilon_i^{(b)}\upsilon_i^{(c)}\upsilon_k^{(d)}$$

$$\alpha_{7(a,b)}=G_{ijk}^{(a)}\psi_{ij}\upsilon_k^{(b)},\qquad \alpha_{8(a,b,c,d)}=\upsilon_i^{(a)}G_{ij}^{(b)}\psi_{jk}G_{kl}^{(c)}\upsilon_l^{(d)}$$

$$\alpha_{9(a,b)}=\psi_{ij}G_{jk}^{(a)}\psi_{kl}G_l^{(b)},\qquad \alpha_{10(a,b,c,d)}=\upsilon_i^{(a)}G_{ij}^{(b)}\psi_{jkl}G_k^{(c)}G_l^{(d)}$$

$$\upsilon_{i(b)}=\psi_{ij}G_j^{(b)},\qquad \omega^2_{(a,b)}=\psi_{ij}G_i^{(a)}G_j^{(b)}.$$

ここに $G_i^{(a)}$，$G_{ij}^{(a)}$ は，それぞれ G_i，G_{ij} の第 a 要素である．Tanaka (1984a) は，上の α_1，α_3，α_4，ω^2 と同様な表現を与え，MA$(1|\mu)$ モデル

$$y_t=\mu+u_t-\alpha u_{t-1},\ u_t\sim iidN(0,\ \sigma^2)$$

におけるパラメータ $\theta=(\alpha,\ \sigma^2,\ \mu)'$ の最尤推定量 $\tilde{\theta}$ の同時分布の $O(T^{-1/2})$ までのエッジワース展開を明示的に計算している．しかし一般的には $O(T^{-1})$ までの展開を，上の公式を用いて明示的に求めることは容易ではない．次に簡単なモデルにおける計算例を示しておく．

例　AR(1) モデルにおける最尤推定量〔Maekawa (1985)〕

1階の自己回帰モデル　$y_t=\alpha y_{t-1}+u_t,\ u_t\sim iidN(0,\ \sigma^2)$

における未知パラメータ α，σ^2 の最尤推定量 $\tilde{\alpha}$，$\tilde{\sigma}^2$ の同時分布の $O(T^{-1/2})$ までのエッジワース展開を求める．観測値 $y'=(y_1,\ y_2,\ \cdots,\ y_T)$ が得られたとき，その対数尤度は

$$l=\text{const.}-\frac{T}{2}\log\sigma^2-\frac{1}{2}\log|\Sigma|-\frac{1}{2\sigma^2}y'\Sigma^{-1}y$$

である．ここに $\sigma^2\Sigma$ は，y の分散共分散行列で，その第 $(i,\ j)$ 要素は $\sigma^2\alpha^{|i-j|}/(1-\alpha^2)$ で与えられる．ここで第7章(6)式を応用すれば，

$$\tilde{\theta}\equiv\sqrt{T}\begin{pmatrix}\tilde{\alpha}-\alpha\\ \tilde{\sigma}^2-\sigma^2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}(1-\alpha^2)\bar{q}_1+\dfrac{1}{\sqrt{T}}(1-\alpha^2)\bar{q}_1\bar{q}_3+O_p\left(\dfrac{1}{T}\right)\\ 2\sigma^2\bar{q}_2-\dfrac{2}{\sqrt{T}}(1-\alpha^2)\sigma^2\bar{q}_1^2+O_p\left(\dfrac{1}{T}\right)\end{pmatrix}$$

と確率展開される．ここに $\bar{q}_i$ は，次式によって定義される確率変数である．

$$\bar{q}_1=\frac{\partial l}{\partial \alpha}=\text{const.}+\frac{y'\Sigma^{-1}\dot{\Sigma}\Sigma^{-1}y}{2\sigma^2}$$

$$\bar{q}_2/\sigma^2=\frac{\partial l}{\partial \sigma^2}/\sigma^2=\text{const.}+\frac{y'\Sigma^{-1}y}{2\sigma^4}$$

$$\bar{q}_3=\frac{\partial^2 l}{\partial \alpha^2}-E\left(\frac{\partial^2 l}{\partial \alpha^2}\right)$$

$$=\frac{1}{2\sigma^2}y'\{-2\Sigma^{-1}\dot{\Sigma}\Sigma\Sigma^{-1}+\Sigma^{-1}\ddot{\Sigma}\Sigma^{-1}\}y.$$

ここに $\dot{\Sigma}=\frac{\partial}{\partial \alpha}\Sigma$，$\ddot{\Sigma}=\frac{\partial^2}{\partial \alpha^2}\Sigma$ である．なおこの微分演算は Σ の全ての要素に対して行なわれる．したがって，エッジワース係数に現われる偏微係数は

$$G_1^{(1)}=1-\alpha^2,\ G_{13}^{(1)}=(1-\alpha^2)^2$$

$$G_2^{(2)}=2\sigma^2,\qquad G_{11}^{(2)}=-2(1-\alpha^2)\sigma^2$$

である．その他の $G_i^{(a)}$, $G_{ij}^{(a)}$ は，全て0である．他方，$\bar{q}_1$, $\bar{q}_2$, $\bar{q}_3$ に関するキュムラントは，

$$\psi_{11}=1/(1-\alpha^2),\ \psi_{12}=0,\ \ \psi_{22}=1/2,\ \psi_{13}=-2\alpha/(1-\alpha^2)^2$$

$$\psi_{23}=-3/2\sigma^2(1-\alpha^2),\qquad \psi_{33}=2(1+\alpha^2)/(1-\alpha^2)^3$$

$$\psi_{111}=6\alpha/\sqrt{T}(1-\alpha^2)^2,\ \ \psi_{222}=1/\sqrt{T}\sigma^6,\ \psi_{122}=0$$

$$\psi_{112}=2/\sqrt{T}\sigma^2(1-\alpha^2),\qquad \psi_{113}=-4(1+2\alpha^2)/\sqrt{T}(1-\alpha^2)^3$$

となる（これらのキュムラントの計算法は，第7章で詳しく解説する）．以上の偏微係数とキュムラントを用いてエッジワース係数を計算すれば，

$$\omega^2_{(1,1)}=1-\alpha^2,\ \omega^2_{(2,2)}=2\sigma^4,\ \omega^2_{(1,2)}=0,$$

$$\alpha_{1(111)}=6\alpha(1-\alpha^2)/\sqrt{T},\ \alpha_{1(112)}=\alpha_{1(121)}=\alpha_{1(211)}=4\alpha^2/\sqrt{T}(1-\alpha^2)$$

$$\alpha_{1(122)}=\alpha_{1(212)}=\alpha_{1(221)}=0,\ \alpha_{1(222)}=8\sigma^6/\sqrt{T},\ \alpha_{3(111)}=-4\alpha(1-\alpha^2)$$

$$\alpha_{3(112)}=-2(1-\alpha^2)\sigma^2,\ \alpha_{3(222)}=0,\ \alpha_{3(121)}=\alpha_{3(211)}=-3\sigma^2(1-\alpha^2)$$

$$\alpha_{3(122)}=\alpha_{3(212)}=\alpha_{3(221)}=0,\ \alpha_{4(1)}=-4\alpha,\ \alpha_{4(2)}=-2\sigma^2$$

を得る．これらのエッジワース係数と，エルミート多項式 $H_{(a)}$, $H_{(a,b)}$, $H_{(a,b,c)}$ を(9)式に代入すれば，$\tilde{\theta}=(\tilde{\theta}_1,\ \tilde{\theta}_2)=\sqrt{T}(\tilde{\alpha}-\alpha,\ \tilde{\sigma}^2-\sigma^2)$ の同時密

度関数 $p(\tilde{\theta})$ の $O(T^{-1/2})$ までの近似は,

$$p(\tilde{\theta})=i(\tilde{\theta})-\frac{1}{\sqrt{T}}\left\{-\frac{\alpha\tilde{\theta}_1}{1-\alpha^2}+\frac{\alpha\tilde{\theta}_1^3}{(1-\alpha^2)^2}+\frac{5\tilde{\theta}_2}{12\sigma^2}\right.$$

$$\left.-\frac{\tilde{\theta}_2^3}{6\sigma^2}+\frac{13\tilde{\theta}_1^2\tilde{\theta}_2}{12(1-\alpha^2)\sigma^2}\right\}+O\left(\frac{1}{T}\right)$$

となることが示される．ここに

$$i(\tilde{\theta})=\frac{1}{2\pi(\omega^2{}_{(11)}\omega^2{}_{(22)})^{1/2}}\exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\frac{\tilde{\theta}_1^2}{\omega^2{}_{(11)}}+\frac{\tilde{\theta}_2^2}{\omega^2{}_{(22)}}\right)\right\}$$

である．$p(\tilde{\theta})$ を $\tilde{\theta}_i$ に関して積分すれば，周辺密度関数

$$p(\tilde{\theta}_1)=i(\tilde{\theta}_1)-\frac{i(\tilde{\theta}_1)}{\sqrt{T}}\left\{\frac{-\alpha\tilde{\theta}_1}{1-\alpha^2}+\frac{\alpha\tilde{\theta}_1^3}{(1-\alpha^2)^2}\right\}+O\left(\frac{1}{T}\right)$$

$$p(\tilde{\theta}_2)=i(\tilde{\theta}_2)-\frac{i(\tilde{\theta}_2)}{\sqrt{T}}\left\{\frac{3\tilde{\theta}_2}{2\sigma^2}-\frac{\tilde{\theta}_2^3}{6\sigma^6}\right\}+O\left(\frac{1}{T}\right)$$

を得る．ここに

$$i(\tilde{\theta}_a)=\frac{1}{\sqrt{2\pi\omega^2{}_{(a,a)}}}\exp\left\{-\frac{\tilde{\theta}_a^2}{2\omega^2{}_{(a,a)}}\right\}$$

である．

4 Validity について

分布の漸近展開を求める方法は，前節に示された方法以外にも多くの方法がある．その方法は大別すると次の2つに分けられる．1つは考察の対象となる統計量 (d) の精密分布を求め，それを近似する方法，他の1つは統計量 d の確率展開 (stochastic expansion) $d=d_0+\frac{1}{\sqrt{T}}d_1+\frac{1}{T}d_2+R$ を求め，この展開式を d の特性関数 $E\{e^{-itd}\}$ に代入し，反転公式を項別に適用することによって d の密度関数の近似を求める方法である．(特性関数の反転を用いない方法もある)．ここに R は剰余項でその確率的大きさは $O_p(T^{-3/2})$ 又は $o_p(T^{-1})$ である．本書では前者は全く扱わない．この節では，後者に話題を限定し，その方法の Validity に関する2～3のコメントを述べる．この方法の問題点は，統計量を確率展開したときの

剰余項 R の扱いである．この方法によって得られた分布の漸近展開の剰余項の大きさが，R の確率的な大きさに対応して $O(T^{-3/2})$ または $o(T^{-1})$ になるかどうかは，自明なことではない．したがって漸近展開において，いわゆる Validity の問題の中心はこの剰余項のオーダーの証明である．

観測値が *iid* の場合の漸近展開に関して，Feller (1966) や Bhattacharya and Ghosh (1978) などが Validity の証明を与えている．また Feller の結果を Durbin (1980) および Taniguchi (1984a) は *iid* でない場合に拡張し，それを循環的な時系列モデルにおける漸近展開に応用している．さらに *iid* でない場合のより一般的な統計量に対する Validity については前節で述べた Chambers (1967), Sargan (1975), Phillips (1977c) 等の論文がある．そこでは状況が一般化されたのに応じて，正則条件も複雑化している．Chambers のあげた正則条件に対して，Battacharya and Ghosh (1978) はコメントを加えている．また Fujikoshi et. al. (1982) はラグ付内生変数を含まない同時方程式モデルにおける，2段階最小2乗法と制限情報最尤法の分布の漸近展開に関する Validity の証明を与えている．

以上の論文は，漸近展開における剰余項の大きさのオーダーを証明しようとするものである．これに対し，漸近展開による近似の誤差，すなわち真の分布（未知であってもかまわない）と近似分布の差の限界を明示的に求める形で Validity を証明しようという試みもいくつかある．このような試みにおいては，いずれも考察の対象となるモデルの構造にふくまれる固有な制約を十分に利用することによって証明がなされている．

Kariya and Maekawa (1982) は，一般線型回帰モデル $y=X\beta+u$, $u\sim N(0,\ \Omega)$ における一般化最小2乗推定量 $\hat{\beta}=[X'\hat{\Omega}^{-1}X]^{-1}X'\hat{\Omega}^{-1}y$ において，Ω のサンプルサイズ T の推定量 $\hat{\Omega}$ が与えられたときの $\hat{\beta}$ の分布が

$$\hat{\beta}|\hat{\Omega}\sim N\left(\beta,\ \frac{1}{T}H\right)$$

$$H=T(X'\hat{\Omega}^{-1}X)^{-1}X'\hat{\Omega}^{-1}\Omega\hat{\Omega}^{-1}X(X'\hat{\Omega}^{-1}X)^{-1}$$

で与えられる場合に限定して $d=\sqrt{T}(\hat{\beta}-\beta)$ の密度関数のエッジワース近似の誤差の限界 $\sup_x|f(x)-f_0(x)|\leqq K/T^r$; ($f$ は精密密度関数，f_0 は

エッジワース近似）を与えている．ここに $\hat{\beta}|\hat{\Omega}$ は $\hat{\Omega}$ が与えられたという条件付であることを意味している．このクラスの推定量は一見かなり制限されているように見えるが，計量経済学に現われるいくつかの推定量を含んでいる．2章においてわれわれは，この方法をゼルナーの SUR モデルにおける制約なし推定量の分布に応用し，近似誤差の明示的な限界を与える．

Fujikoshi (1984b) は，統計量を独立な2つの部分 z と δ（δ は確率オーダーが小さいとする）に分けて $d=z-\delta$ と書き表わすことができる場合の近似誤差の限界を明示的に表わす公式を導き，さらにその結果を成長曲線モデルにおける推定量の漸近展開に応用している．$d=z-\delta$ という形に表わされる統計量の例はいろいろある．たとえば上に述べた一般化最小2乗推定量はその例である(Rothenberg (1984))．そしてこの場合の Fujikoshi の近似誤差の限界を計算することは興味ある問題である．

この他に Taniguchi (1984c) は Berry-Esseen の定理を応用することにより，定常時系列過程の実現値（X_1, X_2, $\cdots$, X_T）に関する統計量

$$z_j=\frac{1}{\sqrt{T}}\left\{\sum_{t=1}^{T-j+1}(X_tX_{t+j-1}-E(X_tX_{t+j-1})\right\},\ j=1,\ \cdots,\ p$$

の周辺分布と同時分布の $O(T^{-1/2})$ までの近似誤差の限界を求めている．

以上にあげた，限られた場合における例を除けば，漸近展開による近似誤差の限界については（特に時系列の分野においては）あまり多くのことは知られていない．今後の研究の発展が待たれる分野である．

第2章　SURモデルにおける制約なしゼルナー推定量の漸近展開

1　モデルおよび推定量

前章で紹介した，SUR モデルにおけるゼルナーの，制約付および制約なし推定量に関する漸近展開の論文は，すでにいくつか刊行されている．本章ではまず Maekawa (1982) による制約なしゼルナー推定量 (Unrestricted Zellner Estimator, UZE) の同時分布の漸近展開を示し，その後，他の UZE に関する漸近展開の結果との関連に言及する．

われわれは，以下において次の2方程式 SUR モデル

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X_1 & 0 \\ 0 & X_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} \tag{1}$$

を扱う．ここに $i=1, 2$ に対してそれぞれの行列のサイズは，$y_i : (T\times 1)$, $X_i : (T\times k_i)$, $u_i : (T\times 1)$, $\beta_i : (k_i\times 1)$ である．また k_i は各式に含まれる説明変数の数である．撹乱項 u_{it} は独立に平均0，分散 σ_{ii} の正規分布に従うものとし，さらに

$$\begin{bmatrix} u_{1t} \\ u_{2t} \end{bmatrix} \sim N(0,\ \Sigma),\ \Sigma = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} \end{bmatrix}$$

という2次元正規分布にしたがうと仮定する．このとき $u' = (u_1'\ u_2')$ は

$$u \sim N(0, \Psi),\ \Psi = \Sigma \otimes I_T = \begin{bmatrix} \sigma_{11} I_T & \sigma_{12} I_T \\ \sigma_{21} I_T & \sigma_{22} I_T \end{bmatrix} \tag{2}$$

という多次元正規分布に従う．次に，X_1 と X_2 に関しては，初期の SUR モデル関係の論文で用いられた単純化の仮定 $X_1'X_2=0$ の代りに，より一般的な，またより現実的な仮定 $X_1'X_2 \neq 0$ を設ける．

このモデルに対する β_1, β_2 の UZE は

$$\hat{\beta} = [X'(S^{-1}\otimes I_T)X]^{-1}[X'(S^{-1}\otimes I_T)y]$$

と表わされる．ここに

$$X=\begin{bmatrix} X_1 & 0 \\ 0 & X_2 \end{bmatrix},\ y=\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}$$

である．S は Σ の推定量であり，その要素 s_{ij} は，y_i を $(X_1,\ X_2)$ に回帰させたときの最小2乗残差 $\hat{u}_i$ を用いて $s_{ij}=\hat{u}_i'\hat{u}_j/(T-k_1-k_2)$ で定義される推定量である．以上の定義を用いれば，簡単な計算により

$$\begin{aligned}\hat{\beta}&=\left[\frac{1}{|S|}\begin{pmatrix} s_{22}X_1'X_1, & -s_{12}X_1'X_2 \\ -s_{21}X_2'X_1, & s_{11}X_2'X_2 \end{pmatrix}\right]^{-1}\left[\frac{1}{|S|}\begin{pmatrix} s_{22}X_1'u_1-s_{12}X_1'u_2 \\ -s_{21}X_2'u_1+s_{11}X_2'u_2 \end{pmatrix}\right] \\ &=\begin{pmatrix} s_{22}X_1'X_1, & -s_{12}X_1'X_2 \\ -s_{21}X_2'X_1, & s_{11}X_2'X_2 \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} s_{22}X_1'u_1-s_{12}X_1'u_2 \\ -s_{21}X_2'u_1+s_{11}X_2'u_2 \end{pmatrix} \qquad (3)\end{aligned}$$

となる．ここで S の行列式 $|S|$ が相殺されるため，以下の漸近展開の過程がかなり簡単になる．しかし方程式の数 n が3以上になると，$|S|$ は相殺されないので展開は複雑になる（本質的な差異は生じないけれども）．ところでよく知られているように，$X_i'u_j$ と $(T-k)S$ とは互いに独立に分布し，前者は正規分布 $N(0,\ \sigma_{jj}X_i'X_i)$，後者はウイッシャート分布 $W_2(T-k,\ \Sigma)$ に従う．この独立性こそは，UZE の漸近展開を制約付ゼルナー推定量 (Restricted Zellner Estimator; RZE) のそれより扱いやすいものにする本質的な理由である．

さて，$\hat{\beta}$ を確率オーダー (stochastic order) の順に展開するために，

$$w_{ij}=s_{ij}-\sigma_{ij}$$

と定義し，$\hat{\beta}-\beta$ を

$$\hat{\beta}-\beta=[A+\Delta A]^{-1}[B^*+\Delta B^*] \qquad (4)$$

と表現し直しておく．ここに，各記号の意味は

$$A=\frac{1}{T}\begin{bmatrix} \sigma_{22}X_1'X_1, & -\sigma_{12}X_1'X_2 \\ -\sigma_{21}X_2'X_1, & \sigma_{11}X_2'X_2 \end{bmatrix}$$

$$\Delta A=\frac{1}{T}\begin{bmatrix} w_{22}X_1'X_1, & -w_{12}X_1'X_2 \\ -w_{21}X_2'X_1, & w_{11}X_2'X_2 \end{bmatrix}$$

$$B^*=\frac{1}{T}\begin{bmatrix} \sigma_{22}X_1'u_1 & -\sigma_{12}X_1'u_2 \\ -\sigma_{21}X_2'u_1 & +\sigma_{11}X_2'u_2 \end{bmatrix}$$

$$\Delta B^* = \frac{1}{T}\begin{bmatrix} w_{22}X_1u_1 - w_{12}X_1'u_2 \\ -w_{21}X_2'u_1 + w_{11}X_2'u_2 \end{bmatrix}$$

である．さらに後に使用するために，記号

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} A^{11} & A^{12} \\ A^{21} & A^{12} \end{bmatrix}, \quad \Omega = |\Sigma| A^{-1}$$

を用意しておこう．行列 A^{-1} の分割は A の分割と整合的になされているものとする．定義間の関係より Ω の分割は，

$$\Omega = \left[\frac{1}{T}\begin{pmatrix} \sigma^{11}X_1'X_1 & \sigma^{12}X_1'X_2 \\ \sigma^{21}X_2'X_1 & \sigma^{22}X_2'X_2 \end{pmatrix}\right]^{-1}$$

となる．ただし σ^{ij} は Σ^{-1} の (i, j) 要素である．

2　$\hat{\beta}$ の漸近展開

$\hat{\beta}-\beta$ を $1/\sqrt{T}$ のオーダーで展開するために，$B=\sqrt{T}B^*$, $\Delta B=\sqrt{T}\Delta B^*$ とおけば

$$\begin{aligned}\sqrt{T}(\hat{\beta}-\beta) &= A^{-1}B - A^{-1}\Delta AA^{-1}B + A^{-1}\Delta AA^{-1}\Delta AA^{-1}B + A^{-1}\Delta B \\ &\quad - A^{-1}\Delta AA^{-1}\Delta B + O_p(T^{-3/2}) \qquad (5)\end{aligned}$$

と展開される．各項のオーダーが，明示的に示されていないが，結果的には Δ を1つ含む項は $O_p(1/\sqrt{T})$，2つ含む項は $O_p(1/T)$ である．

他方 $\sqrt{T}(\hat{\beta}-\beta)$ の特性関数は

$$\varphi(t) = E\{\exp[it'\sqrt{T}(\hat{\beta}-\beta)]\}$$

である．ここに t は $k\times 1$ の特性関数の引数ベクトルである．これに (5) の展開式を代入して整理すれば，

$$\begin{aligned}\varphi(t) &= E\{\exp[it'(A^{-1}B - A^{-1}\Delta AA^{-1}B + A^{-1}\Delta AA^{-1}\Delta AA^{-1}B \\ &\quad + A^{-1}\Delta B - A^{-1}\Delta AA^{-1}\Delta B)]\} + O(T^{-3/2}) \\ &= \mathrm{E}\{\exp(it'A^{-1}B)[1 - it'A^{-1}\Delta AA^{-1}B + it'A^{-1}\Delta AA^{-1}\Delta AA^{-1}B \\ &\quad + it'A^{-1}\Delta B - it'A^{-1}\Delta AA^{-1}\Delta B + \frac{1}{2}(i^2t'A^{-1}\Delta B\Delta B'A^{-1}t \\ &\quad - 2i^2t'A^{-1}\Delta AA^{-1}B\Delta B'A^{-1}t + i^2t'A^{-1}\Delta AA^{-1}BB'A^{-1}\Delta AA^{-1}t)] \\ &\quad + O(T^{-3/2}) \qquad (6)\end{aligned}$$

を得る．次に上式の右辺の各項の期待値を評価してやらなければならな

い．その計算を行うためには，次の補題が役立つ．

〔補題1〕 u を $p\times 1$ の多次元正規分布 $N(0,\ \Omega)$ に従う確率ベクトルとするとき

(A.1)　$E\{it'Cu\exp[it'Du]\}=-it'C\Omega D't\exp\left[-\frac{1}{2}t'D\Omega D't\right]$,

(A.2)　$E\{i^2t'Cuu'C't\exp[it'Du]\}$

$$=-i^2t'C\Omega C't\exp\left[-\frac{1}{2}t'D\Omega D't\right]$$

$$+\frac{i^2}{2}(t'C\Omega D't)^2\exp\left[-\frac{1}{2}t'D\Omega D't\right].$$

ここに，C と D は上式において整合的なある定数行列である．

証明　(A.1) の場合．$v=Du$ とおくと $v\sim N(0,\ D\Omega D')$ である．$F=D\Omega D'$ とおけば

$$E\{it'Cu\exp(it'Du\}=E\{it'CD^{-1}v\exp(it'v)\}.$$

他方 $E\{\exp(it'v)\}=\exp\left(-\frac{1}{2}t'Ft\right)$ であるが，この式の両辺を t_j で微分すると，

$$E\{iv_j\exp(it'v)\}=(-\sum_j f_{ij}t_j-\sum_k f_{kj}t_k)\exp\left[-\frac{1}{2}t'Ft\right]$$

となる．ここに v_j は v の j 番目の要素，f_{ij} は F の $(i,\ j)$ 要素である．これはベクトル表示すれば

$$E\{iv\exp(it'v)\}=-Ft\exp\left[-\frac{1}{2}t'Ft\right]$$

と書くことができる．上式の両辺に左から $t'C\ D^{-1}$ をかければ(A.1)が得られる．(A.2)も同様の方法によって導出することができる．

(A.1)，(A.2)を適用することによって，(6)の右辺の期待値は次のように計算される．

$$E\{\exp(it'A^{-1}B)\}=\exp\left(-\frac{1}{2}t'\Omega t\right)\equiv\phi(t) \tag{7}$$

$$E\{A^{-1}\Delta AA^{-1}B\exp(it'A^{-1}B)\}=0 \tag{8}$$

$$E\{A^{-1}\Delta B\exp(it'A^{-1}B)\}=0 \tag{9}$$

$$E\{t'A^{-1}\Delta AA^{-1}\Delta AA^{-1}B\exp(it'A^{-1}B)\}=-t'Qt\phi(t) \tag{10}$$

$$E\{t'A^{-1}\Delta AA^{-1}\Delta B\exp(it'A^{-1}B)\}=-t'Qt\phi(t) \tag{11}$$

$$E\{t'A^{-1}\Delta AA^{-1}BB'A^{-1}\Delta AA^{-1}t\ \exp(it'A^{-1}B)\}=-t'Qt\phi(t)+\frac{1}{2}G \tag{12}$$

$$E\{t'A^{-1}\Delta B\Delta B'A^{-1}t\exp(it'A^{-1}B)\}=-3|\Sigma|t'A^{-1}t\phi(t)+\frac{1}{2}G \tag{13}$$

$$E\{t'A^{-1}\Delta AA^{-1}B\Delta B'A^{-1}t\exp(it'A^{-1}B)\}=-t'Qt\phi(t)+\frac{1}{2}G \tag{14}$$

ここに新たに導入された記号の定義は

$$Q=|\Sigma|A^{-1}+|\Sigma|^2A^{-1}PA^{-1}$$

$$P=\begin{bmatrix}P_{11} & P_{12}\\ P_{21} & P_{22}\end{bmatrix}$$

$$P_{11}=\sigma_{22}X_1'X_1-\sigma_{12}\sigma_{22}X_1'X_2A^{21}X_1'X_1+\sigma_{11}\sigma_{22}X_1'X_2A^{22}X_2'X_1$$

$$P_{12}=-\sigma_{12}\sigma_{22}X_1'X_1A^{11}X_1'X_2+\sigma_{11}\sigma_{22}X_1'X_2A^{21}X_1'X_2$$
$$+2\sigma_{12}{}^2X_1'X_1A^{12}X_2'X_2-\sigma_{11}\sigma_{22}X_1'X_2A^{22}X_2'X_2$$

$$P_{21}=P_{12}'$$

$$P_{22}=\sigma_{11}X_2'X_2+\sigma_{11}\sigma_{22}X_2'X_1A^{11}X_1'X_2-\sigma_{11}\sigma_{12}X_2'X_1A^{12}X_2'X_2$$

$$G=\underset{w_{ij}}{E}\left\{(t'A^{-1}\Delta AA^{-1}t)^2\exp\left(-\frac{1}{2}t'A^{-1}t\right)\right\}$$

である．これらの期待値の計算は長くなるので，2，3 例示するに止める．たとえば，(10)式は次のように計算される．まず

$$p'=\left(\frac{u_1'X_1}{T},\ \frac{u_1'X_2}{T},\ \frac{u_2'X_1}{T},\ \frac{u_2'X_2}{T}\right)$$

$$\Sigma^*=\begin{pmatrix}\sigma_{22}I_{k1} & 0 & -\sigma_{12}I_{k1} & 0\\ 0 & -\sigma_{21}I_{k2} & 0 & \sigma_{11}I_{k2}\end{pmatrix}$$

という記号を導入すれば，$A^{-1}B=A^{-1}\Sigma^*P$ と書けて，これは正規分布 $N(0,\ \Omega)$ に従うことに注意する．さらに p と w_{ij} は独立だから

$$E\{t'A^{-1}\Delta AA^{-1}\Delta AA^{-1}B\exp(it'A^{-1}B)\}$$
$$=\underset{w_{ij}}{E}\ \{\underset{p}{E}[t'A^{-1}\Delta AA^{-1}\Delta AA^{-1}B\exp(it'A^{-1}B)\,|\,w_{ij}]\}$$

となる．ここで p に関する期待値のところで(A.1)を適用すれば，

$$=\underset{w_{ij}}{E}\left\{-t'A^{-1}\Delta AA^{-1}\Delta A\Omega\ \exp\left(-\frac{1}{2}t'\Omega t\right)\right\}$$

となり，最後に w_{ij} に関する期待値をとれば，$E(A^{-1}\Delta AA^{-1}\Delta A\Omega)=Q$ となり，結局(10)を得る．もう1つ(A.2)を適用する例として，(12)式の計

算を示す．(12)の左辺は，p と w の期待値を別々にとれば

$$E\{t'A^{-1}\Delta AA^{-1}BB'A^{-1}\Delta AA^{-1}t\exp(it'A^{-1}B)\}$$
$$=\underset{w_{ij}}{E}\{E_p[t'A^{-1}\Delta AA^{-1}BB'A^{-1}\Delta AA^{-1}t\exp(it'A^{-1}B)\,|\,w_{ij}]\}$$

となる．ここで(A.2)を適用すれば

$$=\underset{w_{ij}}{E}\left\{-t'A^{-1}\Delta A\Omega\Delta AA^{-1}t\exp\left(-\frac{1}{2}t'\Omega t\right)\right.$$
$$\left.+\frac{1}{2}t'A^{-1}\Delta A\Omega tt'A^{-1}\Delta A\Omega t\ \exp\left(-\frac{1}{2}t'\Omega t\right)\right\}$$

を得る．ここで w_{ij} に関して期待値をとることによって(12)の右辺が導出される．なお(12)の右辺の G の中には，w_{ij} に関する期待値の計算が残されているが，幸いなことに G は最終的には相殺されるので，評価する必要はない．(7)～(14)式を(6)に代入して整理すれば，$\sqrt{T}(\hat{\beta}-\beta)$ の特性関数は

$$\varphi(t)=\phi(t)\left\{1-\frac{3}{2T}|\Sigma|t'A^{-1}t+\frac{1}{2T}t'Qt\right\}+O(T^{-3/2}) \tag{15}$$

となる．これを章末の補題2の反転公式(B.1)，(B.2)を用いて反転すれば，$\sqrt{T}(\hat{\beta}-\beta)$ の同時密度関数の漸近展開式

$$f(x)\left\{1+\frac{1}{2T}x'A(2|\Sigma|A^{-1}-|\Sigma|^2A^{-1}PA^{-1})Ax\right.$$
$$\left.+\frac{1}{2T}\mathrm{tr}[2|\Sigma|A^{-1}-|\Sigma|^2A^{-1}PA^{-1}]A\right\}+O(T^{-3/2}) \tag{16}$$

が得られる．ここに $f(x)$ は，平均ベクトル0，共分散行列 $|\Sigma|A^{-1}$ をもつ多次元正規分布の密度関数である．

3　他の漸近展開との関連

前章で述べたように，UZE に関連する漸近展開を扱った論文は，いくつか発表されている．この節では，上に求められたわれわれの結果と，他の論文における結果とを比較する．

3.1　Srivastava (1970) との関連

Srivastava (1970) は，n 方程式 ($n>2$) SUR モデルにおける UZE の共分散行列の漸近展開を与えている．さらに注目すべきことは UZE と RZE の共分散行列は，$O(T^{-1})$ まで等しいということを，従ってまた両者の推定効率は $O(T^{-1})$ まで等しいということを述べている．そして後に Srivastava & Upadhyaya (1978) は，RZE の共分散の展開式を実際に示した．

ところでわれわれの結果(16)を用いて $\hat{\beta}$ の共分散行列を $O(T^{-1})$ まで求めることができる．すなわち

$$
\begin{aligned}
&E(\hat{\beta}-\beta)(\hat{\beta}-\beta)' \\
&=\int_{-\infty}^{\infty}\cdots\int_{-\infty}^{\infty} xx'f(x)\Big\{1+\frac{1}{2T}x'A(2|\Sigma|A^{-1}-|\Sigma|^2A^{-1}PA^{-1})Ax \\
&\quad+\frac{1}{2T}\mathrm{tr}[2|\Sigma|A^{-1}-|\Sigma|^2A^{-1}PA^{-1}]A\Big\}dx \\
&=\left(1+\frac{2}{T}\right)\Omega-\frac{1}{T}\Omega P\Omega+O(T^{-2})
\end{aligned}
$$

を得る．上の計算は正規分布に従う確率ベクトル $u\sim N(0,\Omega)$ の期待値の公式 $E(uu'u'Au)=\Omega\,\mathrm{tr}(A\Omega)+2\Omega A\Omega$，を用いれば簡単に求められる．この結果は，Srivastava (1970) の結果と同等であることが確かめられる．この式において $T\to\infty$ とすれば，Ω は $\hat{\beta}$ の極限共分散であることが分る．

3.2 Phillips (1977a) との関連

Phillips (1977a) は，$\hat{\beta}-\beta$ の1次結合 $\sqrt{T}h'(\hat{\beta}-\beta)$ の分布の漸近展開を求めた．この統計量の分布に対する漸近展開は，前節のわれわれの導出プロセスに少し修正を加えることによっても得られる．それによると，まず特性関数の展開は

$$
\begin{aligned}
\varphi(s)=&\exp\left[-\left(\frac{s^2}{2}\right)|\Sigma|h'A^{-1}h\right]\times \\
&\frac{1}{T}\left\{1-\frac{s^2}{2}[3|\Sigma|h'A^{-1}h-h'(|M|A^{-1}+|\Sigma|^2A^{-1}PA^{-1})h]\right\} \\
&+O(T^{-3/2}) \qquad (17)
\end{aligned}
$$

となる．また分布は

$$P(\sqrt{T}h'(\hat{\beta}-\beta)\leq x)=I\left(\frac{x}{w}\right)-\frac{1}{T}i\left(\frac{x}{w}\right)\left(\frac{x}{w}\right)$$
$$\times\left\{3-\frac{|\sum|h'A^{-1}h+|\sum|^2h'A^{-1}PA^{-1}h}{w^2}\right\}+O(T^{-3/2}) \qquad (18)$$

となることが，容易に示される．ここに $\omega^2=|\sum|h'A^{-1}h$ である．また $I(\cdot)$ と $i(\cdot)$ は標準正規分布の cdf と pdf である．この結果は，記号の対応を調べれば Phillips の結果と一致していることが確かめられる (Maekawa (1982) を見よ)．

3.3　Kariya and Maekawa (1982) との関連

Kariya and Maekawa (1982) は2方程式 SUR モデル(1)式における制約なしゼルナー推定量 $\hat{\beta}$ の分布の漸近展開を与えている．そこで用いられた導出方法は一見エッジワース展開のように見えないが，実際にはエッジワース展開である．両者の記号を対応づけることによって同一の結果に到達していることは，容易に検証できる (Maekawa (1982))．さらにこの論文は $d=\sqrt{T}(\hat{\beta}-\beta)$ の分布の $O(T^{-1})$ までのエッジワース近似の誤差の限界に関し，次の定理を与えた．

〔**定理**〕 (Kariya and Maekawa 1982, p. 291～292)

d の密度関数と分布関数を $f(x)$, $G(x)$ で，またそれらの $O(T^{-1})$ までのエッジワース近似を $f_0(x)$, $G_0(x)$ で表わす．このとき

$$\sup_x|f(x)-f_0(x)|\leq(2\pi)^{-k/2}2^{-3}|A|^{\frac{1}{2}}\left[\frac{4k(k+2)}{(q-3)^2}+\frac{15k}{(q+1)(q+3)}\right]$$

および

$$\sup_z|G(z)-G_0(z)|\leq 2\pi^{-1}\left[\frac{2}{(q-3)^2}+\frac{4}{(q+1)(q+3)}\right]$$

が成立する．ここに $k=k_1+k_2$, $q=T-l$, $l=\mathrm{rank}\,(X_1, X_2)$ である．また A は前節で定義された行列である．

3.4　Sargan (1976) との関連

Sargan (1976) は，計量経済学に比較的よく現われる，2段階最小2

乗法，制限情報最尤法，完全情報最尤法，一般化最小2乗法などを含むあるクラスの統計量（スカラー）の分布の漸近展開の一般的公式とその正当性を示し，その公式を，同時方程式の2段階最小2乗法に対する t 比の漸近展開に適用している．その方法は，一般には複雑になりがちな漸近展開の計算を効率化する方法であると思われるにもかかわらず，説明が難解なため，あまり利用されることがないようである．UZE の漸近展開は，彼の計算方法を用いれば，非常に簡単に計算できるのでその方法の例示という意味もかねて，以下その計算法を示そう．

p を，正規分布 $N(0,\ \Omega)$ に従う $r\times 1$ の確率ベクトル，w を p とは独立な $s\times 1$ の確率ベクトルとする．T はサンプルサイズである．また $\sqrt{T}w$ は，$T\to\infty$ のとき，全ての次数の有界なモーメントを持ち $E(w)=0$ と仮定する．そして，$p,\ w,\ T$ の関数で表わされるスカラー統計量を $e(p,\ w,\ T)$ とする．e は $e(0,\ 0,\ T)=0$ を満たすようなものを考える．このとき $\sqrt{T}e$ の分布の漸近展開における係数は，e の $p,\ w$ に関する微係数と $p,\ w$ のモーメントの積和で表わさる．その結果の式は Sargan (1975 p. 335) の「定理2」に与えられている．ここにその公式を引用することはしないが，たとえば極限分散は $\sum_{i,j} e_i w_{ij} e_j$ で与えられる．ここに w_{ij} は Ω の要素，e_k は $\dfrac{\partial}{\partial p_k}e$ を原点で評価したものである．前節で定義された $p,\ w$(互いに独立)を用いて $\hat{\beta}$ の第 j 要素に関して $\hat{\beta}_j-\beta_j=e(p,\ w,\ T)$ とおけば，この e は「定理2」の条件を満たすことが分る．したがって，その定理に示されている公式に従って係数の計算を機械的に行なえばよい．その係数は，彼の記号を用いれば $\sigma,\ \alpha_0,\ \alpha_1\cdots\alpha_{18}$ の計19個ある．各係数は上で述べたように微係数とモーメントの積和で表現されているため，計算がとてつもなく大変なように見える．しかし行列表現を用いれば，それらの係数の計算は見かけほど複雑ではない．たとえば先の $\sum e_i w_{ij} e_j$ は，前節(p.25)の $B=\sum^* p$ という関係を用いれば

$$\begin{aligned}\sigma=\sum e_i w_{ij} e_j &= E(a_i' BB' a_i) \quad (a_i \text{ は } A^{-1} \text{ の第 } i \text{ 列})\\ &= E(a_i'\textstyle\sum^* pp' \sum^{*\prime} a_i)\\ &= a_i'\textstyle\sum^* E(pp')\sum^{*\prime} a_i\end{aligned}$$

$$=a_i'|\Sigma|\begin{pmatrix}\sigma_{22}X_1'X_1, & -\sigma_{21}X_1'X_2\\ -\sigma_{12}X_2'X_1, & \sigma_{11}X_2'X_2\end{pmatrix}a_i$$

となる．他の係数についても同様な計算を行なえば，最終的に α_{14} を除く全ての α_i は0になることが示される．そしてその α_{14} は，

$$\sigma^2\alpha_{14}=2|\Sigma|a^{ii}-|\Sigma|a_i'Fa_i$$

と計算される．左辺の σ^2 は，上に与えられた σ の2乗である．また a^{ij} は A^{-1} の (i, j) 要素を表わす．また行列 F は，$E(\Delta AA^{-1}\Delta A)=A+|\Sigma|F$ より計算される．$|\Sigma|F$ の内容は，

$$|\Sigma|F=\begin{pmatrix}F_{11}^* & F_{12}^*\\ F_{21}^* & F_{22}^*\end{pmatrix}$$

と分割したとき，

$$F_{11}^*=\sigma_{22}X_1'X_1-\sigma_{12}\sigma_{22}X_1'X_2A^{21}X_1'X_1+\sigma_{11}\sigma_{22}X_1'X_2A^{22}X_2'X_1$$

$$F_{12}^*=-\sigma_{12}\sigma_{22}X_1'X_1A^{11}X_1'X_2+\sigma_{11}\sigma_{22}X_1'X_2A^{21}X_1'X_2$$
$$+2\sigma_{12}^2X_1'X_1A^{12}X_2'X_2-\sigma_{11}\sigma_{22}X_1'X_2A^{22}X_2'X_2$$

$$F_{21}^*=F_{12}^*$$

$$F_{22}^*=\sigma_{11}X_2'X_2+\sigma_{11}\sigma_{22}X_2'X_1A^{11}X_1'X_2-\sigma_{11}\sigma_{12}X_2'X_1A^{12}X_2'X_2$$

で与えられる（すなわち $F=P$ である）．ここに A^{ij} は A^{-1} の部分行列で，その分割は F_{ij}^* に対応するものである．

以上の係数計算の結果を用いれば，$\sqrt{T}(\hat{\beta}_i-\beta)$ の分布の漸近展開は，

$$P(\sqrt{T}(\hat{\beta}_i-\beta_i)\leqq x)=I\left(\frac{x}{\sigma}\right)-i\left(\frac{x}{\sigma}\right)\left[\frac{\alpha_{14}x}{2\sigma T}\right]+O(T^{-3/2})$$

となる．この結果は，(18)において $h'=(0, \cdots, 0, 1, 0, \cdots, 0)$ とおいたものに等しいことが確かめられる．ただし h' は，第 i 要素は1に等しく，他は全て0である．

4　む す び

以上において，われわれは UZE の同時分布の漸近展開を求め，その結果を利用して求められる UZE の共分散行列と線型結合の分布の漸近展開が，すでに求められている結果に一致することを見た．ところでこのよう

にして求められた分布や共分散行列の近似の精度は，どの程度であろうか．Phillips (1977a) は，Zellner (1962) に用いられたデータにもとづいて，UZE 漸近展開式の数値計算を行なっている．そこでの結論は，「UZE の分布は，正規分布によってかなり良く近似されるが，単一方程式に適用された最小2乗推定量の分布よりも中央に集中している」というものである．この結論は，特定のデータに依存しているのでどの程度一般性があるかは不明である．モデルのパラメータや，説明変数の特性が UZE の分布にどのような効果を及ぼすかなどに関して，さらに検討の余地がある．われわれは，次章で別の角度からこの点を調べる予定である．

補論　補題の証明

この節では，(15)を反転して(16)を導くときに使われた反転公式を示す．

〔**補題2**〕 m 次元正規分布 $N(0, \Omega)$ に従う確率変数を u, その密度関数と特性関数をそれぞれ $f(u)$, $\phi(t)$ とするとき，適当な行列 A, B, H に対し，次のフーリエ (Fourier) 逆変換が成立する．

$$(\mathrm{B}.1)\quad \int_{-\infty}^{\infty}\cdots\int_{-\infty}^{\infty}\exp[-it'u]t'Ht\phi(t)dt_1\cdots dt_p$$
$$=(u'\Omega^{-1}u-\mathrm{tr}\,\Omega^{-1})f(u)$$

$$(\mathrm{B}.2)\quad \int_{-\infty}^{\infty}\cdots\int_{-\infty}^{\infty}\exp[-it'u](t'At)(t'Bt)\phi(t)dt_1\cdots dt_p$$
$$=(u'\Omega^{-1}A\Omega^{-1}u-\mathrm{tr}(A\Omega^{-1}))(u'\Omega^{-1}B\Omega^{-1}u-\mathrm{tr}(B\Omega^{-1}))$$
$$-4u'\Omega^{-1}A\Omega^{-1}B\Omega^{-1}u+2\,\mathrm{tr}(A\Omega^{-1}B\Omega^{-1}).$$

証明．正規分布 $N(0, \Omega)$ の特性関数 $\phi(t)$ と密度関数 $f(u)$ との間の反転公式

$$\int_{-\infty}^{\infty}\cdots\int_{-\infty}^{\infty}\exp(-it'u)\phi(t)dt_1\cdots dt_m=f(u)=K\exp\left(-\frac{1}{2}u'\Omega^{-1}u\right)$$

において，両辺を u_j, u_k で微分すれば，

$$\int_{-\infty}^{\infty}\cdots\int_{-\infty}^{\infty}\exp(-it'u)t_jt_k\phi(t)dt_1\cdots dt_m=(g_jg_k-\omega^{jk})f(u)$$

を得る．ここに

$$g_i=\frac{\partial}{\partial u_j}\left(-\frac{1}{2}u'\Omega^{-1}u\right),\ \Omega^{-1}=(\omega^{ij})$$

である．この式の両辺に，行列 H の要素 h_{jk} をかけて合計すれば

$$\int_{-\infty}^{\infty}\cdots\int_{-\infty}^{\infty}\exp(-it'u)t'Ht\phi(t)\,dt_1\cdots dt_m=(g'Hg-\mathrm{tr}\,H\Omega^{-1})f(u)$$

となる．ここに $g'=(g_1,\ g_2,\cdots g_m)$ である．定義より $g'=u'\Omega^{-1}$ であるから，これを上式に代入すれば(B.1)が得られる．

(B.2)の証明も同様であるから省略する．

第3章　ゼルナー推定量における非直交的説明変数の影響

1　は　じ　め　に

前章で導入した UZE の分布の漸近展開は説明変数 X_1 と X_2 を含んだ形の表現になっている．この章では，X_1 と X_2 の間の正準相関係数を用いて展開式をより簡潔に表現することができることを示す．そのような表現を用いることの利点として，次の2つをあげることができる．第一に，展開式の数値計算を行う場合，正準相関係数を与えてやるだけでよく，具体的な X_1 と X_2 の値を与えてやる必要がない．したがって X_1 と X_2 にかかわる複雑な行列の計算を行なわなくてすむ．第2に，説明変数 X_1 と X_2 の展開式に与える影響を調べることが容易になる．

Zellner (1963) は $X_1'X_2=0$ のときの UZE の精密標本分布を求め，数値計算により，それは正規分布にかなり近いことを示している．他方 Kariya and Maekawa (1982) は，$X_1'X_2\neq 0$ のとき，UZE の分布は正規分布に近くない場合もあるかもしれないという予想を出している．そこでこの章では $X_1'X_2\neq 0$ のとき，はたして UZE の分布は，正規分布に近いのか，あるいは X_1 と X_2 が直交しないということが，その分布にどのような影響を与えるのか，という点を吟味する．そのためには，2つの方法が考えられる．ひとつは，$X_1'X_2\neq 0$ のときの UZE の精密分布を導出し，それを数値的に評価することによって正規分布と比較する方法である．精密分布は Phillips (1984) によって導かれているが，その結果は非常に複雑なものになっているから，数値計算は容易ではないであろう．ましてや，解析的な比較などは，不可能に近いものとなろう．そこでここでは第2の方法として，$O(T^{-1})$ までの漸近展開を利用する方法をとることにする．展開式の $O(T^{-1})$ の項は，近似的に正規分布との乖離を表わすものと見なすことができる．以下では Maekawa (1983a) に従って展開式を，X_1 と X_2 の正準相関係数を用いて表わすことによって，X_1 と X_2 が直交し

ないということの，UZE の分布と正規分布との乖離に与える影響を，近似的に調べる．

正準相関係数による表現に到達するためには，Phillips (1977a) の表現を変形するのが，いちばん近道であろう．そこでまず，以下の議論の出発点として彼の結果を再現しておこう．

2. 制約なしゼルナー推定量の漸近展開
——正準相関係数による表現——

2.1 Phillips (1977a) の表現

$n=2$ のときの SUR モデルの係数ベクトル β の UZE $\hat{\beta}$ の1次結合を $h'\hat{\beta}$ と表わそう．ここに h' は $k\times 1$ 定数ベクトルである．Phillips (1977a) は，$h'\hat{\beta}$ の分布の $O(T^{-1})$ までの漸近展開を次のように与えた．cdfは

$$p\{\sqrt{T}h'(\hat{\beta}-\beta)\leq x\}=I\left(\frac{x}{w}\right)+i\left(\frac{x}{w}\right)g+O(T^{-\frac{3}{2}})$$
$$=I\left(\frac{x}{w}+\frac{x}{w}g\right)+O(T^{-\frac{3}{2}}), \tag{1}$$

pdf は

$$i\left(\frac{x}{w}\right)\left\{(1+g)-\left(\frac{x}{w}\right)^2 g\right\}+O(T^{-\frac{3}{2}}) \tag{2}$$

である．$I(\cdot)$, $i(\cdot)$ は，前章で定義されている．他の記号の定義は，次のとおりである．

$$g=-\left(\frac{1}{2(T-k)}\right)\left\{3-\frac{h'\Phi h}{w^2}\right\}\equiv-\left(\frac{1}{2(T-k)}\right)g^*$$
$$w^2=h'\left[\frac{1}{T}\begin{pmatrix}\sigma^{11}X_1'X_1 & \sigma^{12}X_1'X_2\\ \sigma^{21}X_2'X_1 & \sigma^{22}X_2'X_2\end{pmatrix}\right]^{-1}h. \tag{3}$$

ただし σ^{ij} は Σ^{-1} の要素である．ここで，この式の逆行列の部分を F^{-1} で表わし，

$$F^{-1}=\begin{pmatrix}C_{11} & C_{12}\\ C_{21} & C_{22}\end{pmatrix}$$

と分割しておく．この F^{-1} を用いて Φ は

$$\Phi=F^{-1}DF^{-1}=F^{-1}\begin{pmatrix}D_{11} & D_{12}\\ D_{21} & D_{22}\end{pmatrix}F^{-1}$$

と定義される．ここに D_{ij} は以下のような行列である．

$$D_{11}=2(\sigma^{11})^2\left(\frac{X_1'X_1}{T}\right)C_{11}\left(\frac{X_1'X_1}{T}\right)+2\sigma^{11}\sigma^{12}\left(\frac{X_1'X_2}{T}\right)C_{21}\left(\frac{X_1'X_1}{T}\right)$$
$$+2\sigma^{11}\sigma^{12}\left(\frac{X_1'X_1}{T}\right)C_{12}\left(\frac{X_2'X_1}{T}\right)$$
$$+\{(\sigma^{12})^2+\sigma^{11}\sigma^{22}\}\left(\frac{X_1'X_2}{T}\right)C_{22}\left(\frac{X_2'X_1}{T}\right)$$
$$D_{12}=2\sigma^{11}\sigma^{12}\left(\frac{X_1'X_1}{T}\right)C_{12}\left(\frac{X_2'X_1}{T}\right)$$
$$+\{(\sigma^{12})^2+\sigma^{11}\sigma^{22}\}\left(\frac{X_1'X_2}{T}\right)C_{21}\left(\frac{X_1'X_2}{T}\right)$$
$$+2(\sigma^{12})^2\left(\frac{X_1'X_1}{T}\right)C_{12}\left(\frac{X_2'X_2}{T}\right)$$
$$+2\sigma^{12}\sigma^{22}\left(\frac{X_1'X_2}{T}\right)C_{22}\left(\frac{X_2'X_2}{T}\right)$$
$$D_{21}=D_{12}'$$
$$D_{22}=\{(\sigma^{12})^2+\sigma^{11}\sigma^{22}\}\left(\frac{X_2'X_1}{T}\right)C_{11}\left(\frac{X_1'X_2}{T}\right)$$
$$+2\sigma^{12}\sigma^{22}\left(\frac{X_2'X_2}{T}\right)C_{21}\left(\frac{X_1'X_2}{T}\right)$$
$$+2\sigma^{12}\sigma^{22}\left(\frac{X_2'X_1}{T}\right)C_{12}\left(\frac{X_2'X_2}{T}\right)$$
$$+2(\sigma^{22})^2\left(\frac{X_2'X_2}{T}\right)C_{22}\left(\frac{X_2'X_2}{T}\right).$$

(2)式より，近似分布の相対誤差は

$$\frac{\left|i\left(\frac{x}{w}\right)-\text{pdf of (2)}\right|}{i\left(\frac{x}{w}\right)}=\left|1-\left\{(1+g)-\left(\frac{x}{w}\right)^2 g\right\}\right|$$
$$=\left|g^*\left\{1+\left(\frac{x}{w}\right)^2\right\}\right|/2(T-k) \tag{4}$$

と計算される．したがって正規分布からの乖離は，任意の $\left(\frac{x}{w}\right)$ に対して，g^* に比例していることが分る．

2.2 正準相関係数による表現

前小節の結論からわれわれは，次の段階として g^* が $X_1'X_2\neq 0$ とい

う事実によってどのような影響を受けるかを調べなければならない．そのために以下では，モデルの第一式の係数 β_1 のみに着目しよう．したがって1次結合の係数行列 h は，$h'=(h_1', 0')$ のように書ける．ここに h_1' は $1\times k_1$ の定数ベクトル，$0'$ は $1\times k_2$ の0ベクトルである．g^* は，w^2 と $h'\Phi h$ とによって X_1 と X_2 の影響を受けているから，それらを正準相関係数を用いて書き換えよう．まず定義から $h'\Phi h=h'F^{-1}DF^{-1}h$ であるから

$$
\begin{aligned}
h'\Phi h&=(h_1'0')\begin{bmatrix}C_{11} & C_{12}\\ C_{21} & C_{22}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}D_{11} & D_{12}\\ D_{21} & D_{22}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}C_{11} & C_{12}\\ C_{21} & C_{22}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}h_1\\ 0\end{bmatrix}\\
&=h_1'(C_{11}D_{11}C_{11}+C_{12}D_{21}C_{11}+C_{11}D_{12}C_{21}+C_{12}D_{22}C_{21})h_1,\\
&\equiv h_1'\Phi_{11}h_1
\end{aligned}
$$

と変形できる．最後の等式によって Φ_{11} の定義が与えられている．ここに C_{ij} は，行列 F の逆行列F^{-1}（w^2 の定義式のところで定義されている）を，D_{ij} の分割と整合的になるように分割したとき得られる部分行列である．たとえば

$$C_{11}=\left[\sigma^{11}X_1'X_1-\frac{(\sigma^{12})^2}{\sigma^{22}}X_1'X_2(X_2'X_2)^{-1}X_2'X_1\right]^{-1}$$

となる．ここで

$$X_1'X_1=PP'$$

とするような P が存在し

$$P=(X_1'X_1)^{\frac{1}{2}},\ G=P^{-1},\ H=P'^{-1}$$

と表わすことにすれば，正準相関係数の定義より C_{11} は次のように書き表わすことができる．

$$
\begin{aligned}
C_{11}&=\left(\sigma^{11}X_1'X_1-\frac{(\sigma^{12})^2}{\sigma^{22}}X_1'X_2(X_2'X_2)^{-1}X_2'X_1\right)^{-1}\\
&=[\sigma^{11}P(I-\rho^2G(X_1'X_2)(X_2'X_2)^{-1}(X_2'X_1)H)P']^{-1}\\
&=\frac{1}{\sigma^{11}}H(I-\rho^2\Lambda)^{-1}G\\
&=\frac{1}{\sigma^{11}}H\Gamma G.
\end{aligned}
$$

ここに最後の等式は Γ の定義を与えるものとする．ただし Λ は X_1, X_2 の正準相関係数 $\lambda_1, \lambda_2\cdots\lambda_{k*}(k_*=\min(k_1, k_2))$ を対角要素にもつ対角行列

$$\Lambda = diag(\lambda_1,\ \lambda_2 \cdots \lambda_{k*})$$

であり

$$\Gamma^{-1} = diag(1-\rho^2\lambda_1,\ 1-\rho^2\lambda_2,\ \cdots,\ 1-\rho^2\lambda_{k*})$$

である．同様な計算により

$$C_{12} = -\frac{\sigma^{12}}{\sigma^{11}\sigma^{12}} H\Gamma G X_1' X_2 (X_2' X_2)^{-1}$$

$$C_{22} = \frac{(X_2' X_2)^{-1}}{\sigma^{22}}$$

$$+\frac{\sigma^{21}\sigma^{12}}{(\sigma^{22})^2\sigma^{11}} (X_2' X_2)^{-1} (X_2' X_1) H\Gamma G X_1' X_2 (X_2' X_2)^{-1}$$

を得る．これらを Φ_{11} に代入すれば

$$\Phi_{11} = \frac{1}{\sigma^{11}} \{2H\Gamma^3 G + (1-\rho^2) H\Gamma\Lambda\Gamma G - 4\rho^2(2-\rho^2) H\Gamma^2\Lambda\Gamma G$$

$$+2\rho^2(2-\rho^2) H\Gamma\Lambda\Gamma\Lambda\Gamma G\}$$

となる．また同様に，上の C_{ij} を w^2 に代入すれば

$$w^2 = h_1' H\Gamma G h_1 / \sigma^{11}$$

となる．したがって

$$\frac{h_1'\Phi h_1}{w^2} = \frac{h_1'}{\sigma^{11}} \{2H\Gamma^3 G + (1-\rho^2) H\Gamma\Lambda\Gamma G$$

$$-4\rho^2(2-\rho^2) H\Gamma^2\Lambda\Gamma G + 2\rho^2(2-\rho^2) H\Gamma\Lambda\Gamma\Lambda\Gamma G\} h_1 / \sigma^{11} a^{11}$$

を得る．ただし a^{11} は $(X_1' X_1)^{-1}$ の第 (1, 1) 要素である．以上より，われわれは UZE の分布の正規分布からの乖離を表わす鍵となるパラメータ g^* を ρ, λ_i, X_1 によって表わすことができた．これで，ある X_1 に対して，それとは直交しない X_2 が，UZE の分布に与える影響を調べる準備ができたわけである．λ_i は X_2 がX_1 と直交しない程度—広義の相関—を表わしているから，λ_i の値をいろいろ変えることによって数値的に乖離の様子を見ることができる．その様子を解析的に調べることは，λ_i は一般に k_* 個存在するので簡単ではないであろう．しかし次のような単純な場合には，解析的に調べることが可能である．

（i）　λ_i が全て重根の場合 $(\lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_{k*})$.

この場合容易に確かめられるように

$$g^*(\lambda,\ \rho)=3-\frac{1}{(1-\rho^2\lambda)^2}\{2+\lambda(1-9\rho^2+4\rho^4)+\lambda^2\rho^2(3-\rho^2)\} \qquad (5)$$

となる．また $w^2=1/\sigma^{11}a_{11}(1-\rho^2\lambda)$，ただし a_{11} は $X_1'X_1$ の(1, 1)要素である．ここで特別な場合として $\lambda=1$ および0のとき

$$g^*(1,\ \rho)=0,\ g^*(0,\ \rho)=1$$

となることに注意したい．特に前者すなわち X_1 と X_2 との間に正準相関の意味で完全に相関があるときは，(1)，(2)式の $O(T^{-1})$ の項まで0になる．すなわちその分布は，正規分布に非常に近いということを意味している．ところでこのことは，完全相関の場合は UZE の精密分布は，実は正規分布である*という事実の反映である．

（ii）　$k_1=k_2=1$ の場合（2式とも説明変数が1つ）．

この場合は，正準相関係数（すなわち相関係数）は1つしか存在しないので g^* は(5)式と同型となる．

以上の2つの特殊な場合は，正規分布からの乖離はともに(5)式の g^* によって表わされることが分った．g^* は ρ と λ の非線型な関数であるから，この型からただちに λ の影響を見ることはむずかしい．そこで g^* の値をいろいろな ρ と λ に対して計算してみると表1のような結果が得られた．

表1　UZE の分布の正規分布から乖離の指標 g^*

λ \ ρ	0.1	0.3	0.5	0.7	0.9
0.1	.9045	.9382	.9941	1.0458	1.0449
0.2	.8080	.8690	.9751	1.0835	1.0949
0.3	.7105	.7921	.9408	1.1091	1.1503
0.4	.6120	.7070	.8889	1.1174	1.2109
0.5	.5125	.6134	.8163	1.1007	1.2750
0.6	.4120	.5107	.7197	1.0479	1.3374
0.7	.3106	.3985	.5950	.9429	1.3824
0.8	.2081	.2764	.4375	.7616	1.3631
0.9	.1045	.1437	.2414	.4668	1.1234

* この点は日本統計学会誌のレフリーの指摘による．

表1から観察されることは，(1) $\rho \leqq 0.5$ の範囲では，g^* は $\lambda=0$ において最大値をとり，λ の増加とともに単調に減少している．(2) $\rho \geqq 0.6$ の範囲では，g^* は λ の増加に対して単峰性の曲線を描き，ピークに到達した後は，極限値 $g^*(1, \rho)=0$ に近づく．そして g^* のピークをもたらす λ の値は，ρ が大きいときほど大きな値をとる．(3) 表1における g^* の最大値は $\lambda=0.7$, $\rho=0.9$ のところで実現されている．(4) g^* の大きさは λ よりもむしろ ρ に大きく依存している．

以上の観察から，UZE の分布は，極限 ($\lambda=1$) では正規分布に一致するものの，正規分布への近づき方は，λ の増加に対応して単調に近づくものではないことを示している．そして $(\lambda, \rho)=(0.7, 0.9)$ のあたりで正規分布からの乖離が最も大きくなる可能性を示している．しかしこれらの推論は，T が十分大きいときに妥当することが期待できても，十分大きくない T に対してこの推論を適用することには，慎重でなければならないであろう．そのような T に対して，漸近展開の精度があまり良くないかもしれないからである．そこで次節では，$T=20$ に対してモンテカルロ実験を行なって，小標本における λ の影響および漸近展開式の精度を検討してみよう．

3　モンテカルロ実験

この節では，最も単純化された2方程式 SUR モデル

$$y_{1t}=\beta_1 x_{1t}+u_{1t}$$

$$y_{2t}=\beta_2 x_{2t}+u_{2t}, \quad (t=1, 2, \cdots, 20)$$

$$(u_{1t}, u_{2t})' \sim N(0, \Sigma)$$

$$\Sigma=\begin{pmatrix} 1 & \sigma_{12} \\ \sigma_{21} & 1 \end{pmatrix}, \ \sigma_{12}=\sigma_{21}$$

を用いて，10,000回のくりかえし実験による UZE $\hat{\beta}$ の経験分布を求める．β_1 と β_2 の真の値は，実験をつうじて1に固定しておく．われわれの実験目的は，ρ と λ の分布に与える影響を調べることであるから，この2つのパラメータを制御できるような実験でなければならない．ρ の制御

は簡単であるが，λ の制御には工夫がいる．λ の制御とは，λ にある値を与えたとき，その値を相関係数としてもつ2つの説明変数の系列（X_{1t}, X_{2t}), $t=1, 2, \cdots, 20$ を発生させることを意味する．それは次のようにして行なわれた．まず2つの20×1のベクトル（1, 1, …, 1）と（1, 2, …, 20）をグラム＝シュミット (Gram-Schmidt) の直交化法によって2つの正規直交化されたベクトル Z_1, Z_2 を作る．次に Z_1, Z_2 に対して

$$X_1=Z_1$$

$$X_2=Z_1\cos\theta+Z_2$$

という変換をほどこす．ここで θ は，与えられた λ に対して $\arccos\theta=\lambda$ となるように選べば，X_1 と X_2 の相関係数を λ に等しくすることができる．このようにして，$\lambda=0.1(0.1)0.9$ に対して各々10,000づつ $\hat{\beta}_1$ を計算した．このようにして得られた $\hat{\beta}_1$ の経験分布は，相当正確に精密分布をシミュレートしていると考えられる．次に掲げる表2，3は，これらの経験分布と漸近展開式で近似された分布，それに極限分布（正規分布）を比較したものである．ここでは $\rho=0.3$ と0.9と $\lambda=0.3(0.2)0.9$ に対して計算された結果のみが示されている．

表2～3を詳しく見ていこう．まず精密分布の代理としての経験分布の特徴を記述する．表2 ($\rho=0.3$) の場合，$Z<0$ の範囲では，前節で観察された点，すなわち λ が1に近づくにつれて単調に正規分布に近づいていくということが確認される．しかし $Z\geqq 0$ の範囲では，逆に λ の増加にともない $\lambda=0.9$ においてさえ正規分布から離れる場合もみられるが，その程度は無視しうる場合が少なくない．しかしこのことは $\lambda\to 1$ にともなう正規分布への接近は，ある場合にはゆるやかで，$\lambda=0.9$ を越えたところで急速に接近することがあることを意味しているのかもしれない．表3（$\rho=0.9$）の場合，$Z<0$ において経験分布は，λ が1に近づくにつれ単調に正規分布に接近するという点は，やはり観察される．しかし，表2とは異なり全般に正規分布からの乖離は大きい．ここには掲載しなかったが，ρ が大きいほど正規分布からの乖離が大きくなる傾向が見られた．$Z>0$ の範囲においても，この単調性は見られる．$Z=0$ のときにのみ，前節で観察

表2　UZE ($\hat{\beta}_1$) の 分 布：$\rho=0.3$

Z	$\lambda=0.3$		$\lambda=0.5$		$\lambda=0.7$		$\lambda=0.9$		正規分布
	a	b	a	b	a	b	a	b	
−2.8	.0032	.0030	.0030	.0028	.0030	.0026	.0027	.0024	.0026
−2.4	.0100	.0092	.0095	.0088	.0094	.0084	.0084	.0079	.0086
−2.0	.0261	.0248	.0260	.0241	.0248	.0232	.0234	.0221	.0228
−1.6	.0568	.0582	.0561	.0569	.0558	.0555	.0551	.0538	.0548
−1.2	.1186	.1195	.1176	.1179	.1168	.1160	.1153	.1137	.1151
−0.8	.2146	.2163	.2145	.2147	.2138	.2127	.2139	.2105	.2119
−0.4	.3486	.3474	.3498	.3464	.3480	.3451	.3465	.3437	.3446
0.0	.5062	.5000	.5034	.5000	.5035	.5000	.5057	.5000	.5000
0.4	.6582	.6526	.6588	.6536	.6602	.6549	.6635	.6563	.6554
0.8	.7885	.7837	.7901	.7853	.7930	.7873	.7941	.7895	.7881
1.2	.8862	.8805	.8861	.8821	.8862	.8840	.8875	.8863	.8849
1.6	.9425	.9418	.9427	.9431	.9448	.9445	.9465	.9462	.9452
2.0	.9765	.9752	.9760	.9759	.9763	.9768	.9761	.9779	.9773
2.4	.9912	.9908	.9915	.9912	.9918	.9916	.9922	.9921	.9918
2.8	.9971	.9970	.9972	.9972	.9973	.9974	.9978	.9976	.9974

a：経験分布 b：近似分布

表3　UZE ($\hat{\beta}_1$) の 分 布：$\rho=0.9$

Z	$\lambda=0.3$		$\lambda=0.5$		$\lambda=0.7$		$\lambda=0.9$		正規分布
	a	b	a	b	a	b	a	b	
−2.8	.0000	.0031	.0001	.0028	.0001	.0020	.0003	−.0014	.0026
−2.4	.0003	.0094	.0003	.0088	.0003	.0068	.0007	−.0014	.0082
−2.0	.0006	.0252	.0007	.0240	.0012	.0200	.0026	.0035	.0228
−1.6	.0042	.0589	.0045	.0568	.0057	.0503	.0127	.0231	.0548
−1.2	.0213	.1204	.0223	.1177	.0271	.1091	.0446	.0735	.1151
−0.8	.0873	.2172	.0894	.2145	.0976	.2060	.1281	.1705	.2119
−0.4	.2457	.3480	.2491	.3462	.2543	.3408	.2833	.3183	.3446
0.0	.5036	.5000	.5070	.5000	.5052	.5000	.5042	.5000	.5000
0.4	.7557	.6520	.7554	.6538	.7482	.6592	.7163	.6817	.6554
0.8	.9125	.7828	.9100	.7855	.9032	.7940	.8759	.8295	.7881
1.2	.9778	.8796	.9766	.8823	.9735	.8909	.9543	.9265	.8849
1.6	.9955	.9411	.9951	.9432	.9942	.9497	.9877	.9769	.9452
2.0	.9997	.9784	.9995	.9760	.9991	.9800	.9971	.9965	.9973
2.4	1.0000	.9906	1.0000	.9912	1.0000	.9932	.9998	1.0014	.9918
2.8	1.0000	.9969	1.0000	.9972	1.0000	.9980	1.0000	1.0014	.9974

a：経験分布　b：近似分布

された単峰性が見られる．2つの表の中で経験分布と正規分布が最大の乖離を示す点は $(\rho, \lambda)=(0.9, 0.3)$ である　これは前節の結果と一致しない．

次に漸近展開による近似の精度を，近似分布と精密分布の代理としての経験分布を比較することによって検討しよう．表2 $(\rho=0.3)$ の場合，全般的に近似の精度は，$T=20$ にもかかわらず，十分に良いといえよう．他方，表3 $(\rho=0.9)$ の場合は，反対に全般にわたって近似の精度はかなり悪く，ことに $\lambda=0.9$ のときは，分布関数の値域〔0,1〕を越える現象さえ見られる．エッジワース近似におけるこのような現象は，パラメータの値が，その理論的値域の境界値に近い場合によく観察される現象である．ここでは $\rho=0.3$ と $\rho=0.9$ の場合の数値しか示さなかったが，いろいろな ρ に対して計算された結果から見ると，ρ が1に近くなるにつれ近似の精度は，悪くなる傾向が見られた．全般的に言えることは，近似の精度は，λ に対してよりも ρ に対していっそう敏感であった．ほとんど ρ によって精度が決まってくるといっても過言ではない．

4　む す び

われわれは本章において説明変数が直交しない $(X_1'X_2\neq 0)$ ということが，UZE の分布にどのような影響を及ぼすかということを分析した．X_1 と X_2 が，正準相関の意味で完全に相関がある $(\lambda_1=\lambda_2=\cdots=\lambda_{k*}=1)$ ときは UZE は正規分布に帰着するから，$\lambda\to 1$ のとき UZE の分布は，次第に正規分布に接近するであろうことは容易に想像される．しかしわれわれの分析結果から，正規分布への接近の仕方は必ずしも単調なものではないことを見いだした．このことは，UZE の分布と正規分布との乖離を，UZE の分布の漸近展開式の $O(T^{-1})$ の大きさの項を調べることによって知りえた．しかしやや皮肉なことには，正規分布からの乖離は，λ よりもむしろ ρ に影響される程度のほうが大きいことが数値計算によって確かめられた．さらに漸近展開による近似の精度もまた，λ よりも ρ に依存していることが見い出された．すなわち ρ が1に近いと，UZE の分布の正

規分布からの乖離は大きくなり，かつ漸近展開による近似の精度も悪くなるのである．

最後に，いまひとつ別の観点から，若干の補足を述べてこの章をしめくくろう．Kariya and Maekawa (1982) は，第2章で述べたように UZE の同時分布の漸近展開の bound を与えた．ではこの bound は，X_1 と X_2 が直交するかしないかで，どのように変ってくるであろうか．彼らの bound を，正準相関係数を用いて表わせば簡単な計算により

$$\sup_x |f(x)-\phi_A(x)| \leqq C_0(|\sigma^{22}X_2'X_2| \times |P| \times |I-\rho^2\Lambda| \cdot |P|)^{\frac{1}{2}}$$

となる．ここに $f(x)$ は UZE の，$\phi_A(x)$ は正規分布の pdf である．また C_0 は k_1, k_2, T によって定められる定数である．すべての i に対して $\lambda_i=1$ のとき，この右辺は0にはならないが，これは bound を求めるに際して常に大きめの不等式で押えていったことによる．しかしこの式は，ある ρ に対して，全ての λ_i が1に近いほど bound は小さくなることを意味している．

第4章　単純化されたテルサー推定量の特性[1)]

1　モデルと推定量

Conniffe (1982) は，次のような推定量の小標本特性を調べている．以下では2次方程式 SUR モデル

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X_1 & 0 \\ 0 & X_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} \tag{1}$$

を扱う．ここに y_i は $(T\times 1)$ 観察値列ベクトル，X_i は $(T\times k_i)$ 説明変数行列とし，その階数は k_i とする．β_i は $(k_i\times 1)$ 係数列ベクトル，u_i は $(T\times 1)$ 撹乱項列ベクトルである．ここで撹乱項ベクトルは，多次元正規分布 $N(0, \Sigma\otimes I_T)$ に従うものと仮定する．共分散行列は，前節までと同様

$$\Sigma\otimes I_T = \begin{pmatrix} \sigma_{11}I_T & \sigma_{12}I_T \\ \sigma_{21}I_T & \sigma_{22}I_T \end{pmatrix} \tag{2}$$

という構造をもつ．いうまでもなく $\Sigma=(\sigma_{ij})$ $i, j=1, 2$ である．このとき u_1 と u_2 のあいだに回帰関数を用いれば

$$u_1=\theta_1 u_2+v_1 \tag{3}$$

が常に成立する（回帰関数については，例えば Anderson (1958, p. 29) を見よ）．ここに $\theta_1=\sigma_{21}/\sigma_{22}$ であり v_1 は平均ベクトル0，共分散行列 $\sigma^{11}I_T$ をもつ多次元正規分布に従う．$\theta_1 u_2$ は，(u_1, u_2) の正規分布において，u_2 を与えたときの u_1 の条件付分布の平均ベクトルである．(3) を用いれば，モデル(1)の第1式は

$$y_1=X_1\beta_1+\theta_1 u_2+v_1 \tag{4}$$

と書き直すことができる．ここで θ_1 と u_2 を，それらの推定量 $\hat{\theta}_1$ と $\hat{u}_2$ に置きかえ，$y_1-\hat{\theta}_1\hat{u}_2$ を X_1 に回帰させることによって β_1 の推定量として

$$\tilde{\beta}_1=(X_1'X_1)^{-1}X_1'(y_1-\hat{\theta}_1\hat{u}_2)$$

$$=\hat{\beta}_1-(X_1'X_1)^{-1}X_1'\hat{\theta}_1\hat{u}_2$$

を得る．ここに $\hat{\beta}_1$ は第1式における β_1 の最小2乗推定量である．Conniffe (1982) は u_2 の推定値として第2式の最小2乗残差

$$\hat{u}_2=y_2-X_2\hat{\beta}_2$$

を，θ_1 の推定値として，

$$\hat{\theta}_1=s_{12}/s_{22}$$

を用いている．ここに s_{ij} は σ_{ij} の「制約なし推定量」である．すなわち

$$s_{ij}=y_i'My_j/(T-k_1-k_2)$$

$$M=I-Z(Z'Z)^{-1}Z'$$

$$Z=(X_1,\ X_2)$$

である．この推定法は，Telser (1964) のくりかえし推定法の第1段階に相当するものである．したがって，$\tilde{\beta}_1$ は「単純化されたテルサー推定量」と呼ぶことができる．以下これを単に「テルサー推定量」と呼ぶことにする．β_2 の推定も同様に行うことができ，その結果は行列表示で

$$\begin{pmatrix}\tilde{\beta}_1-\beta_1\\ \tilde{\beta}_2-\beta_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}s_{22}X_1'X_1 & 0\\ 0 & s_{11}X_2'X_2\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}s_{22}X_1'u_1-s_{12}X_1'\hat{u}_2\\ -s_{21}X_2'\hat{u}_1+s_{11}X_2'u_2\end{pmatrix} \tag{5}$$

と表わすことができる．

他方ゼルナーの制約なし推定量の行列表現は

$$\begin{pmatrix}\tilde{\tilde{\beta}}_1-\beta_1\\ \tilde{\tilde{\beta}}_2-\beta_2\end{pmatrix}=[X'(S\otimes I)^{-1}X]^{-1}[X'(S\otimes I)^{-1}y]$$

$$=\begin{pmatrix}s_{22}X_1'X_1, & -s_{12}X_1'X_2\\ -s_{21}X_2'X_1, & s_{11}X_2'X_2\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}s_{22}X_1'u_1-s_{12}X_1'u_2\\ -s_{21}X_2'u_1+s_{11}X_2'u_2\end{pmatrix} \tag{6}$$

となることはすでに見た．ここに $S=[s_{ij}]$, $y'=(y_1',\ y_2')$, $X'=(X_1',\ X_2')$ であった．2方程式モデルの場合，行列式 $det(S)$ は(6)式から消去されたことを想起しよう．また $(T-k)S$ は，ウィッシャート分布 $W_2(T-k,\ \Sigma)$, $k=k_1+k_2$, に従い $X_i'u_j$ と独立に分布する．

ここで以下の記号を導入する．

$$w_{ij}=s_{ij}-\sigma_{ij},\ \bar{X}_1=M_2X_1,\ \bar{X}_2=M_1X_2,\ M_i=I-X_i(X_i'X_i)^{-1}X_i'$$

$$A=\frac{1}{T}\begin{pmatrix}\sigma_{22}X_1'X_1 & 0\\ 0 & \sigma_{11}X_2'X_2\end{pmatrix},\quad \Delta A=\frac{1}{T}\begin{pmatrix}w_{22}X_1'X_1 & 0\\ 0 & w_{11}X_2'X_2\end{pmatrix}$$

$$B^*=\frac{1}{T}\begin{pmatrix}\sigma_{22}X_1'u_1-\sigma_{12}\bar{X}_1'u_2\\ -\sigma_{21}\bar{X}_2'u_1+\sigma_{11}X_2'u_2\end{pmatrix},\quad \Delta B^*=\frac{1}{T}\begin{pmatrix}w_{22}X_1'u_1-w_{12}\bar{X}_1'u_2\\ -w_{21}\bar{X}_2u_1+w_{11}X_2'u_2\end{pmatrix}.$$

これらの記号を用いれば(5)は

$$\begin{pmatrix}\tilde{\beta}_1-\beta_1\\ \tilde{\beta}_2-\beta_2\end{pmatrix}=(\tilde{\beta}-\beta)=[A+\Delta A]^{-1}[B^*+\Delta B^*] \tag{7}$$

と書き表わすことができる．ここで $\frac{1}{T}X_i'X_i=O(1)$ を仮定すれば $\sqrt{T}(\tilde{\beta}-\beta)$ の分布のエッジワース展開が，第2章と全く同様に導出される．

2　推定量の分布の漸近展開

まず $B=\sqrt{T}B^*$, $\Delta B=\sqrt{T}\Delta B^*$ とおいて，$\sqrt{T}(\tilde{\beta}-\beta)$ の確率展開を求めよう．それは第2章と同様に

$$\begin{aligned}\sqrt{T}(\tilde{\beta}-\beta)=&A^{-1}B-A^{-1}\Delta AA^{-1}B+A^{-1}\Delta AA^{-1}\Delta AA^{-1}B+A^{-1}\Delta B\\ &-A^{-1}\Delta AA^{-1}\Delta B+O_p(T^{-3/2})\end{aligned} \tag{8}$$

で与えられる．ここに ΔA, ΔB の確率的大きさは $O_p(T^{-1/2})$ である．$\sqrt{T}(\tilde{\beta}-\beta)$ の特性関数

$$\phi(t)=E\{\exp[it'\sqrt{T}(\tilde{\beta}-\beta)]\} \tag{9}$$

に(8)を代入することにより，特性関数の展開式は

$$\begin{aligned}\phi(t)=&E\{\exp(it'A^{-1}B)[1-it'A^{-1}\Delta AA^{-1}B+it'A^{-1}\Delta AA^{-1}\Delta AA^{-1}B\\ &+it'A^{-1}\Delta B-it'A^{-1}\Delta AA^{-1}\Delta B+1/2(i^2t'A^{-1}\Delta B\Delta B'A^{-1}t\\ &-2i^2t'A^{-1}\Delta AA^{-1}B\Delta B'A^{-1}t+i^2t'A^{-1}\Delta AA^{-1}BB'A^{-1}\Delta AA^{-1}t)]\}\\ &+O(T^{-3/2})\end{aligned} \tag{10}$$

となる．ここで第2章と同様に，(10)式の中の期待値を項別に評価する．各項の期待値は，

$$E\{\exp(it'A^{-1}B)\}=\exp\left\{-\frac{1}{2}t'\Omega t\right\}\equiv\phi(t).$$

ここにΩは，次式で与えられる．

$$\Omega=\begin{pmatrix}\sigma_{11}(X_1'X_1)^{-1}-\dfrac{\sigma^2_{12}}{\sigma_{22}}(X_1'X_1)^{-1}X_1'M_2X_1(X_1'X_1)^{-1}, & \sigma_{12}(X_1'X_1)^{-1}(X_1'X_2)(X_2X_2)^{-1}\\ \sigma_{12}(X_2'X_2)^{-1}(X_1'X_2)(X_1'X_1)^{-1}, & \sigma_{22}(X_2'X_2)^{-1}-\dfrac{\sigma^2_{12}}{\sigma_{11}}(X_2'X_2)^{-1}X'_2M_1X_2(X_2'X_2)^{-1}\end{pmatrix} \tag{11}$$

$$iE\{A^{-1}\Delta AA^{-1}B\exp(it'A^{-1}B)\}=0$$

$$iE\{A^{-1}\Delta B\exp(it'A^{-1}B)\}=0$$

$$iE\{t'A^{-1}\Delta AA^{-1}\Delta AA^{-1}B\exp(it'A^{-1}B)\}=-2t'\Omega t\phi(t)$$

$$iE\{t'A^{-1}\Delta AA^{-1}\Delta B\exp(it'A^{-1}B)\}=-2t'\Omega t\phi(t)$$

$$i^2E\{t'A^{-1}\Delta AA^{-1}BB'A^{-1}\Delta AA^{-1}t\exp(it'A^{-1}B)\}=-2t'\Omega t\phi(t)+\frac{1}{2}G$$

$$i^2E\{t'A^{-1}\Delta B\Delta B'A^{-1}t\exp(it'A^{-1}B)\}=-2t'\Omega t-t'Rt+\frac{1}{2}G$$

$$i^2\mathrm{E}\{t'A^{-1}\Delta AA^{-1}B\Delta B'A^{-1}t\exp(it'A^{-1}B)\}=-2t'\Omega t+\frac{1}{2}G.$$

ここに

$$G=E\{(it'A^{-1}\Delta A\Omega t)^2\}\phi(t)$$

$$R=(\sigma_{11}\sigma_{22}-\sigma_{12}{}^2)\begin{pmatrix}(X_1'X_1)^{-1}X_1'M_2X_1(X_1'X_1)^{-1}/\sigma_{22} & 0\\ 0 & (X_2'X_2)^{-1}X_2'M_1X_2(X_2'X_2)^{-1}/\sigma_{11}\end{pmatrix} \tag{12}$$

である．上の期待値の計算は第2章で用いた基本的公式を応用することによって得られる．ここで幸いなことに G の中に現われる期待値は，(10)式の中で消去されるので，計算する必要がない．これらの項を(10)に代入して整理すると最終的に

$$\phi(t)=\phi(t)\left\{1-\frac{1}{2}t'Rt\right\} \tag{13}$$

となる．さらに(13)を反転することにより，$\sqrt{T}(\tilde{\beta}-\beta)$ の確率密度関数の漸近展開が次のように得られる．

$$i(x)\left\{1+\frac{1}{2}(x'\Omega^{-1}R\Omega^{-1}x-\mathrm{tr}(R\Omega^{-1})\right\}+O(T^{-3/2}). \tag{14}$$

ここに $i(x)$ は，平均ベクトル0，共分散行列 Ω をもつ正規分布の密度関数である．さらに簡単な計算により $\sqrt{T}(\tilde{\beta}_1-\beta_1)$ の周辺分布は

$$i(x)\left\{1+\frac{1}{2}(z'\Omega_{11}{}^{-1}R_{11}\Omega_{11}{}^{-1}z-\mathrm{tr}(R_{11}\Omega_{11}{}^{-1})\right\}+O(T^{-3/2}) \tag{14'}$$

となることが分る．ここに Ω_{11}^{-1} と R_{11} は Ω^{-1} と R の $\tilde{\beta}_1-\beta_1$ に対応する部分である．(14)を使えば共分散行列の近似式は次のようになる．

$$E(\tilde{\beta}-\beta)(\tilde{\beta}-\beta)'=\Omega+\frac{R}{T}+O\left(\frac{1}{T^2}\right) \tag{15}$$

$$E(\tilde{\beta}_1-\beta_1)(\tilde{\beta}_1-\beta_1)'=\Omega_{11}+\frac{R_{11}}{T}+O\left(\frac{1}{T^2}\right). \tag{15'}$$

ここから先は $\tilde{\beta}_1$ についてのみ考察する．ところで次のような直交行列Aが存在する．すなわち

$$A(X_1'X_1)^{-1/2}(X_1'X_2)(X_2'X_2)^{-1}(X_2'X_1)(X_1'X_1)^{-1/2}A=\Lambda,$$
$$\Lambda=diag(\lambda_1^2,\ \cdots,\ \lambda_{k_1}^2).$$

上式に現われた λ_i はよく知られているように X_1 と X_2 の正準相関係数である．このΛと Ω の構造を利用すれば，(15′)は

$$(15')=H'\left\{\left(\sigma_{11}-\frac{\sigma_{12}}{\sigma_{22}}\right)I+\frac{\sigma_{12}^2}{\sigma_{22}}\Lambda+\frac{1}{T}\left(\sigma_{11}-\frac{\sigma_{12}}{\sigma_{22}}\right)(I-\Lambda)\right\}H$$
$$+O\left(\frac{1}{T^2}\right) \tag{16}$$

と書きかえられる．ここに $H=A^{-1}(X_1'X_1)^{-1/2}$ である．モデル(1)の両式において説明変数が1つしかない場合 $(k_1=k_2=1)$ を考えれば(16)は

$$(16)=\frac{\sigma_{11}}{\sum x_{it}^2}\left\{(1-\rho^2)+\rho^2\lambda^2+\frac{1}{T}(1-\rho^2)(1-\lambda^2)\right\}+O\left(\frac{1}{T^2}\right) \tag{17}$$

となる．ここで $\rho^2=\sigma_{12}^2/\sigma_{11}\sigma_{22}$ で，λ は x_1 と x_2 の相関係数である．

この単純化された場合の分布関数と密度関数の漸近展開は，それぞれ

$$P\{\sqrt{T}(\tilde{\beta}_1-\beta_1)<x\}=I\left(\frac{x}{\omega_{11}}\right)+i\left(\frac{x}{\omega_{11}}\right)\left(\frac{x}{\omega_{11}}\right)g+O(T^{-3/2}) \tag{18}$$

$$i\left(\frac{x}{\omega_{11}}\right)\left(\frac{1}{\omega_{11}}\right)\left\{(1+g)-\left(\frac{x}{\omega_{11}}\right)^2g\right\}+O(T^{-3/2}) \tag{19}$$

と計算される．ここに $I(\cdot)$ は標準正規分布の分布関数である．また g と ω_{11} は

$$g=-\frac{(1-\rho^2)(1-\lambda^2)}{2(T-2)\{1-(1-\lambda^2)\rho^2\}},\ \omega_{11}=\{(1-\rho^2)+\rho^2\lambda^2\}\frac{\sigma_{11}}{\sum x_{it}^2}$$

で与えられる．この2つの量に対応する量はゼルナー推定量では

$$g^*=3-\frac{1}{(1-\rho^2\lambda^2)}\{2+\lambda(1-9\rho^2+4\rho^4)+\lambda^2(3-\rho^2)\}$$

$$\omega_{11}{}^*=\frac{\sigma_{11}(1-\rho^2)}{\sum x_{it}{}^2(1-\rho^2\lambda^2)}$$

であった．ω_{11} と $\omega_{11}{}^*$ は，それぞれの推定量における漸近分散を表わしているから，差をとることによって

$$\omega_{11}-\omega_{11}{}^*=\rho^4\lambda^2(1-\lambda^2)\sigma_{11}/\sum x_{it}{}^2(1-\rho^2\lambda^2)\geqq 0$$

を得る．したがってゼルナー推定量は，単純化されたテルサー推定量より，漸近的な意味で優れていることが分る．しかし次節では，標本数 T が小さいときはゼルナー推定量が常に優れているとは言えないことが示される．なお上式における等号は，$\lambda=0$ または $\lambda=1$ のとき成立する．このことから，容易に分るように $\lambda=1$ のときテルサー推定量とゼルナー推定量の漸近分散は最小2乗推定量のそれに一致する．また $\lambda=0$ のとき（X_1 と X_2 が直交するとき）はテルサー推定量とゼルナー推定量は等しいので，やはり等号が成立するのは自然である．

3　推定量の精密標本分布

Zellner (1963) におけるゼルナー推定量の精密分散の導出法を直接適用することによって，$\tilde{\beta}_1$ の精密分散は次のように求めることができる．

$$\begin{aligned}
&E(\tilde{\beta}_1-\beta_1)(\tilde{\beta}_1-\beta_1)'\\
&=\underset{s_{ij}}{E}\Big\{\underset{X_i'u_j}{E}\Big[(X_1'X_1)^{-1}X_1'u_1u_1'X_1(X_1'X_1)^{-1}\\
&\quad-2(X_1'X_1)^{-1}X_1'M_2u_1u_2'M_2X_1(X_1'X_1)^{-1}\left(\frac{s_{12}}{s_{22}}\right)\\
&\quad+(X_1'X_1)^{-1}X_1'M_2u_2u_2'M_2X_1(X_1'X_1)^{-1}\left(\frac{s_{12}}{s_{22}}\right)^2\Big|\,s_{11},\ s_{12}\Big]\Big\}\\
&=\sigma_{11}(X_1'X_1)^{-1}-2\sigma_{12}(X_1'X_1)^{-1}X_1'M_2X_1(X_1'X_1)^{-1}E\left(\frac{s_{12}}{s_{22}}\right)\\
&\quad+\sigma_{22}(X_1'X_1)^{-1}X_1'M_2X_1(X_1'X_1)^{-1}E\left(\frac{s_{12}}{s_{22}}\right)^2.
\end{aligned}$$

ここで Zellner (1963, p. 981) の次の結果

$$E\left(\frac{s_{12}}{s_{22}}\right)=\rho\sqrt{\sigma_{11}/\sigma_{22}}$$

$$E\left(\frac{s_{12}}{s_{22}}\right)^2=\frac{1}{2}\ \frac{\sigma_{11}}{\sigma_{22}}(1-\rho^2)\frac{\Gamma[(n+1)/2]\Gamma[(n-2)/2]}{\Gamma(1/2)\Gamma^2(n/2)}+\frac{\sigma_{11}}{\sigma_{22}}\rho^2$$

$$=\left(\frac{\sigma_{11}}{\sigma_{22}}\right)\left\{\frac{1-\rho^2}{n-2}+\rho^2\right\}\ ;\ n=T-k_1-k_2$$

を用いれば，$k_1=k_2=1$のとき

$$E(\tilde{\beta}_1-\beta_1)(\tilde{\beta}_1-\beta_1)'$$

$$=\sigma_{11}(X_1'X_1)^{-1}-2\sigma_{12}H'(I-\Lambda)H\rho\left(\frac{\sigma_{11}}{\sigma_{22}}\right)^{1/2}$$

$$+\sigma_{22}H'(I-\Lambda)H\left(\frac{\sigma_{11}}{\sigma_{22}}\right)\left(\rho^2+\frac{1-\rho^2}{n-2}\right)$$

$$=(\sigma_{11}/\sum x_{it}^2)\{1-(1-\lambda^2)\rho^2+(1-\lambda^2)(1-\rho^2)/(n-2)\} \tag{20}$$

を得る[2]．この結果を前節で求めた近似分散(17)と比較すると，両者は$O(T^{-1})$のオーダまで一致していることが分る．このことから$O(T^{-1})$までの分布の漸近展開も，精密分布に非常に近いことが予想される．

次に$\tilde{\beta}_1$の精密分布を求めよう[3]．ただしここでは$k_1=k_2=1$という単純化された状況でその分布を求める．

その導出もZellner(1963)におけるゼルナー推定量の精密分布の導出と全く並行して行うことができるので以下導出の概略のみを示す．まず最小2乗推定量$\hat{\beta}_1$と$\hat{\beta}_*=(X_1'X_1)^{-1}X_1\hat{u}_2$は，2次元正規分布に従い，共分散行列

$$E\begin{pmatrix}\hat{\beta}_1-\beta_1\\ \hat{\beta}_*\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\hat{\beta}_1-\beta_1\\ \hat{\beta}_*\end{pmatrix}'=\begin{pmatrix}\sigma_{11} & \sigma_{12}(1-\lambda^2)\\ \sigma_{21}(1-\lambda^2) & \sigma_{22}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\gamma_{11} & \gamma_{12}\\ \gamma_{21} & \gamma_{22}\end{pmatrix} \tag{21}$$

をもつ．そしてまた，$\hat{\beta}_1$と$\hat{\beta}_*$は$v=s_{12}/s_{22}$と独立に分布する．したがって$\hat{\beta}_1$, $\hat{\beta}_*$, vの同時分布は

$$f(\hat{\beta}_1,\ \hat{\beta}_*,\ v)d\hat{\beta}_1d\hat{\beta}_*dv=g(\hat{\beta}_1,\ \hat{\beta}_*)h(v)\,d\hat{\beta}_1d\hat{\beta}_*dv \tag{22}$$

と表わされる．ここに$g(\cdot)$と$h(\cdot)$は次のように定義される関数である．

$$g(\hat{\beta}_1,\ \hat{\beta}_*)=\frac{1}{\sqrt{2\pi(1-r^2)\gamma_{11}\gamma_{22}}}\exp\left\{-\frac{1}{2}[(\hat{\beta}_1-\beta_1)^2\gamma^{11}\right.$$

$$\left.+2\gamma^{12}(\hat{\beta}_1-\beta_1)\hat{\beta}_*+\hat{\beta}_*\gamma^{22}]\right\}$$

$$h(v)=(1-\rho^2)^{n/2}\left(\frac{\sigma_{22}}{\sigma_{11}}\right)^{\frac{1}{2}}\frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}\times$$

$$\frac{1}{\left[1-2v\rho\left(\frac{\sigma_{22}}{\sigma_{11}}\right)^{\frac{1}{2}}+\frac{\sigma_{22}}{\sigma_{11}}v^2\right]^{(n+1)/2}}.$$

ここに γ^{ij} は共分散行列(21)の逆行列の(i, j)要素，また $r^2=\gamma_{12}^2/\gamma_{11}\gamma_{22}$ である〔Zellner (1963, p. 981)〕．いま

$$z_1=\hat{\beta}_1-\beta_1-v\hat{\beta}_*,\ z_2=\hat{\beta}_*,\ z_3=v$$

とおくと同時分布(22)は

$$g(z_1+z_2z_3,\ z_2)h(z_3)dz_1dz_2dz_3$$

$$=\frac{k_0\exp\left\{-\frac{1}{2}[(z_1+z_2z_3)^2\gamma^{11}+2z_2(z_1+z_2z_3)\gamma^{12}+z_2^2\gamma^{22}]\right\}}{\left[1-2\rho\left(\frac{\sigma_{22}}{\sigma_{11}}\right)^{\frac{1}{2}}z_3+\frac{\sigma_{22}}{\sigma_{11}}z_2^2\right]^{(n+1)/2}}dz_1dz_2dz_3 \tag{23}$$

と書き改めることができる．ここに

$$k_0=\frac{(1-\rho^2)^{n/2}\left(\frac{\sigma_{22}}{\sigma_{11}}\right)^{\frac{1}{2}}\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{2\pi[\gamma^{11}\gamma^{12}-(\gamma^{12})^2]^{1/2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}$$

である．次に(23)式を次のように書き直す．

$$k_0\left(-\frac{z_1^2\gamma^{11}}{2}\right)\exp\left\{-\frac{1}{2}[z_2^2(z_3^2\gamma^{11}+2z_3\gamma^{12}+\gamma^{22})+2z_2(z_1\gamma^{12}+z_1z_2\gamma^{11})]\right\}/$$

$$\left\{1-2\rho\left(\frac{\sigma_{22}}{\sigma_{11}}\right)^{1/2}z_3+\frac{\sigma_{22}}{\sigma_{11}}z_3^2\right\}^{(n+1)/2}dz_1dz_2dz_3$$

と書き直し，これを z_2 に関して積分すると

$$\sqrt{2\pi}k_0\exp\left\{-\frac{z_1^2}{2}(z_3^2\gamma_{22}-2z_3\gamma_{12}+\gamma_{11})^{-1}\right\}/\left\{[\gamma^{11}\gamma^{22}-(\gamma^{12})^2]^{1/2}\times\right.$$

$$\left.(z_3^2\gamma_{22}-2z_3\gamma_{12}+\gamma_{11})^{1/2}\left(1-2\rho\left(\frac{\sigma_{22}}{\sigma_{11}}\right)^{1/2}z_3+\frac{\sigma_{22}}{\sigma_{11}}z_3^2\right)^{(n+1)/2}\right\}dz_1dz_3$$

となる．ここで exp{　} の部分を級数展開すると

$$=\frac{\sqrt{2\pi}k_0}{[\gamma^{11}\gamma^{22}-(\gamma^{12})^2]^{1/2}}\sum_{t=0}^{\infty}\frac{(-1)^t}{t!}\times$$

$$\frac{\left(\frac{z_1^2}{2}\right)^t\sigma_{11}^{(n+1)/2}dz_1dz_3}{(z_3^2\gamma_{22}-2z_3\gamma_{12}+\gamma_{11})^{t+1/2}(z_3^2\sigma_{22}-2z_3\sigma_{12}+\sigma_{11})^{(n+1)/2}} \tag{24}$$

となる．ここで(21)を用いれば

$$(z_3{}^2\gamma_{22}-2z_3\gamma_{12}+\gamma_{11})^{t+1/2}$$
$$=\left[(1-\lambda^2)\left(z_3{}^2\sigma_{22}-2z_3\sigma_{12}+\sigma_{11}+\frac{\sigma_{11}\lambda^2}{1-\lambda^2}\right)\right]^{t+1/2}$$

を得る．この表現を(24)式に代入して整理すれば

$$\frac{1}{(1-\lambda^2)^{t+1/2}\sigma_{22}{}^{t+1/2+(n+1)/2}}\times$$
$$\left\{\frac{1}{\left[\left(z_3-\frac{\sigma_{12}}{\sigma_{22}}\right)^2+k_1\right]^{t+1/2}\left[\left(z_3-\frac{\sigma_{12}}{\sigma_{22}}\right)^2+k_2{}^{(n+1)/2}\right]}\right\}dz_3 \tag{25}$$

と計算される．ここに

$$k_1=-\left(\frac{\sigma_{12}}{\sigma_{22}}\right)^2+\frac{\sigma_{11}}{\sigma_{22}}+\frac{\sigma_{11}\lambda^2}{\sigma_{22}(1-\lambda^2)},\quad k_2=-\left(\frac{\sigma_{12}}{\sigma_{22}}\right)^2+\frac{\sigma_{11}}{\sigma_{22}}$$

である．さらに $w=(z_3-\sigma_{12}/\sigma_{22})/\sqrt{k_1}$ とおけば

$$(25)=\frac{1}{2}c_3(1+w^2)^{-t+n/2}\left(1-\frac{k_3}{1+w^2}\right)^{-(n+1)/2}w^{-1}dw^2$$

となり，さらに $y=w^2/(1+w^2)$, $k_3=k_2/k_1$ とおけば

$$=\frac{1}{2}c_3(1-y)^{t-n/2}(1-k_3(1-y))^{-(n+1)/2}(1-y)^{1/2}y^{-1/2}dy$$
$$=\frac{1}{2}c_3s^{\beta-1}(1-s)^{\gamma-\beta-1}(1-k_3s)^{-\alpha}ds \tag{26}$$

が得られる．ここで $s=1-y$, $\alpha=\frac{n+1}{2}$, $\beta=t-\frac{n-3}{2}$, $\gamma=t-\frac{n}{2}+2$ である．次に(26)を(24)に代入し，s に関して項別に積分する．このとき

$$F(\alpha,\ \beta,\ \gamma\ ;\ x)=\frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\beta)\,\Gamma(\gamma-\beta)}\int_0^1 t^\beta(1-t)^{\gamma-\beta-1}(1-xt)^{-\alpha}dt$$

という超幾何関数の表現を用いれば，最終的に

$$f(z_1)=\frac{\sqrt{2\pi}k_0\sigma_{11}{}^{(n+1)/2}}{[\gamma^{11}\gamma^{22}-(\gamma^{12})^2]^{1/2}}\sum_{t=0}^{\infty}\frac{(-1)^t}{t!}\left(\frac{z_1{}^2}{2}\right)^t\frac{c_3}{2}\times$$
$$\frac{\Gamma(\beta)\,\Gamma(\gamma-\beta)}{\Gamma(\gamma)}F(\alpha,\ \beta,\ \gamma\ ;\ \delta) \tag{27}$$

が得られる．ここに

$$\alpha=(n+1)/2,\ \beta=t-(n-3)/2,\ \gamma=t-n/2+2$$

$$\delta=-\frac{\sigma_{11}{}^2}{\sigma_{22}{}^2}\left\{\frac{\lambda^2}{1-\lambda^2}+(1-\rho^2)\right\}(1-\rho^2)+1$$

$$c_3=\frac{k_1{}^{t+1}}{(1-\lambda^2)^{t+1/2}(\sigma_{22})^{t+(n+2)/2}},\ k_1=\left(\frac{\sigma_{12}}{\sigma_{22}}\right)^2+\frac{\sigma_{11}}{\sigma_{22}}+\frac{\sigma_{11}\lambda^2}{\sigma_{22}(1-\lambda^2)}.$$

この精密密度関数を数値的に評価することによって，近似密度関数(19)の近似の精度を調べることができる．これらの数値計算による評価については他の機会に譲りたい．

4　数　値　解　析

前節の結果を用いて，最小2乗推定量(OLS)，テルサー推定量およびゼルナー推定量の推定効率の比較を行うことができる．(20)式の第一項，すなわち $\sigma_{11}/\sum x_{it}{}^2$ は，OLS 推定量 $\hat{\beta}_1$ の精密分散を表わしている．したがって $\tilde{\beta}_1$ の $\hat{\beta}_1$ に対する分散比（効率）は，精密に

$$\mathrm{eff}=\frac{\mathrm{var}(\hat{\beta}_1)}{\mathrm{var}(\tilde{\beta}_1)}=\{(1-\rho^2)+\rho^2\lambda^2+\frac{1}{n-2}(1-\rho^2)(1-\lambda^2)\} \tag{28}$$

と表わすことができる．(28)式を数値的に評価した結果が表1に示されている．表1から，次のことを読み取ることができる．すなわち $\rho\geqq 0.4$ のとき，テルサー推定量は OLS 推定量より効率がよく，ρ の値が大きいほど，また λ の値が小さいほどその効率はいっそう良くなる．

表1　$n=8$ のときの $\mathrm{eff}=\mathrm{var}(\hat{\beta}_1)/\mathrm{var}(\tilde{\beta}_1)$

$\pm\lambda$ \ $\pm\rho$	.1	.2	.3	.4	.5	.6	.7	.8	.9
.1	.866	.893	.941	1.019	1.140	1.333	1.667	2.345	4.352
.2	.867	.893	.940	1.015	1.132	1.316	1.629	2.247	3.941
.3	.870	.895	.940	1.011	1.120	1.291	1.573	2.104	3.409
.4	.876	.899	.941	1.007	1.107	1.258	1.502	1.934	2.870
.5	.884	.905	.943	1.002	1.090	1.220	1.421	1.753	2.386
.6	.895	.914	.947	.997	1.071	1.177	1.333	1.574	1.979
.7	.909	.924	.951	.992	1.050	1.130	1.243	1.404	1.647
.8	.925	.937	.957	.986	1.027	1.081	1.153	1.250	1.380
.9	.946	.952	.964	.981	1.003	1.031	1.067	1.111	1.166

他方 Kunitomo (1977)は，ゼルナーの制約なし推定量 $\tilde{\tilde{\beta}}_1$ の精密分散の式を導出し，その結果を数値計算することによって $k_1=k_2=1$ の場合にお

表2 $n=8$ のときの $\mathrm{eff}=\mathrm{var}(\tilde{\tilde{\beta}}_1)/\mathrm{var}(\tilde{\beta}_1)$

$\pm\lambda$ \ $\pm\rho$	.1	.2	.3	.4	.5	.6	.7	.8	.9
.1	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	.99	1.00	.99	.97
.2	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	.99	.97	.90
.3	1.00	1.01	1.00	1.00	1.00	.99	.98	.94	.82
.4	1.01	1.01	1.00	1.01	1.01	.99	.97	.91	.74
.5	1.01	1.02	1.01	1.01	1.01	1.00	.96	.88	.67
.6	1.02	1.02	1.03	1.03	1.02	1.01	.96	.86	.63
.7	1.02	1.02	1.03	1.03	1.03	1.02	.97	.86	.62
.8	1.03	1.03	1.04	1.05	1.05	1.04	.99	.89	.65
.9	1.02	1.02	1.03	1.04	1.04	1.05	1.04	.97	.77

ける $\tilde{\tilde{\beta}}_1$ と $\hat{\beta}_1$ の分散比 $\mathrm{var}(\hat{\beta}_1)/\mathrm{var}(\tilde{\tilde{\beta}}_1)$ を求めている．彼の結果とわれわれの表1の結果を組み合せることによって，$\tilde{\beta}_1$ と $\tilde{\tilde{\beta}}_1$ の分散比 $\mathrm{var}(\tilde{\tilde{\beta}}_1)/\mathrm{var}(\tilde{\beta}_1)$ を求めることができる．その結果は表2に示されている．表2から，$\rho<0.7$ のとき $\tilde{\beta}_1$ は $\tilde{\tilde{\beta}}_1$ より効率が良いと結論してよいであろう．この結論は，Conniffe (1982) のそれと極めてよく符合している．さらに ρ と λ が0.5より小さいとき $\tilde{\beta}_1$ と $\tilde{\tilde{\beta}}_1$ の効率の差はほとんど無いといってよい．この数値結果は $k_1=k_2=1$ という最も単純な場合に対するものではあるが，小標本においては，テルサー推定量がゼルナー推定量に優る状況がありうることを示すものとして興味深い．

1）この章は Maekawa (1984b) にもとづいている．

2）(20)式は，Satchell (1983) の結果と一致している．

3）本稿を準備中に，Hillier and Satchell (1984) は，$\tilde{\beta}_1$ の1次結合 $c'\tilde{\beta}_1$ の精密分布を導出した．

第5章　SURモデルにおける t- 検定量の漸近展開

1　は　じ　め　に

この章ではゼルナーモデルにおける，線型仮説の検定問題を扱う．Zellner (1962) 自身，SUR モデルの異なる方程式のあいだの係数に関して，仮説　$H_0: \beta_1=\beta_2=\cdots=\beta_n$ を検定するための F 検定統計量を扱っている（同論文 355 頁）．彼はその中に含まれる σ_{ij} の代りに，その一致推定量を代入した統計量（それを $\tilde{F}$ としよう）を，$\tilde{F}=F+O(n^{-1/2})$ と展開し，$\tilde{F}$ が漸近的に F 分布に従うことを示している．しかし彼自身も述べているように，小標本においても $\tilde{F}$ の分布を F 分布によって近似することには当然問題がある．$\tilde{F}$ の小標本における性質の研究はなされておらず，今後に残された問題といえよう．

このような F 比にもとづく検定のほかに，t 比にもとづく検定も当然考えられてよい．そこで以下では，上の H_0 よりやや一般的な仮説すなわち $\beta_i(i=1, \cdots, n)$ の間に線型関係があるという仮説の t 比による検定を考えてみたい．この問題に対して，われわれは Phillips (1977a) の中に，有効なアプローチを見い出すことができる．彼は，その論文において検定問題ではなく，係数の1次結合の推定量の分布を扱っているが，そこでのアプローチを，Maekawa (1980) は次節以下で見るように，t-検定量の分布の問題に発展させた．

2　モデルと t-検定量

ここで再び SUR モデル

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & X_2 & & \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & & & X_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix} \tag{1}$$

を考えよう．まえと同じように y_i は $T\times 1$, X_i は $T\times m_i$, β_i は $m_i\times 1$ の行列である．これを

$$Y=X\alpha+u \tag{2}$$

と表わすことにしよう．ここに，$Y'=(y_1', y_2', \cdots y_n')$, $\alpha'=(\beta_1', \beta_2', \cdots, \beta_n')$, $u=(u_1', u_2', \cdots, u_n')$ であり，X は SUR モデル(1)の右辺の説明変数の行列を表わしている．また撹乱項に関する仮定も，従来どおりとする．すなわち

$$E(uu')=\Omega=\begin{bmatrix}\sigma_{11}I & \cdots & \sigma_{1n}I\\ \vdots & & \\ \sigma_{n1}I & \cdots & \sigma_{nn}I\end{bmatrix}=\Sigma\otimes I \tag{3}$$

とする．ここに I は，次数 T の単位行列，Σ は (i, j) 要素として σ_{ij} をもつ $n\times n$ の行列である．Ω が既知の場合，一般化最小2乗推定量 GLS は

$$\hat{\alpha}_{\mathrm{GLS}}=[X'\Omega^{-1}X]^{-1}X'\Omega^{-1}Y\equiv\hat{\alpha}$$

である．ここで Ω の中に含まれる σ_{ij} を，その一致推定量で置きかえたものを2段階一般化最小2乗推定量（略して 2SGLS）と呼ぶことにし，

$$\hat{\alpha}_{2\mathrm{SGLS}}=[X'\hat{\Omega}^{-1}X]^{-1}X'\hat{\Omega}^{-1}Y\equiv\tilde{\alpha} \tag{4}$$

と書くことにしよう．ここに $\hat{\Omega}$ は，Ω に σ_{ij} の一致推定量を代入したものである．σ_{ij} の一致推定量として，この章では制約なしのゼルナー推定量 (UZE) における残差の2乗和を用いる．すなわち，SUR モデルにおける各々の y_i を，$X_1, X_2, \cdots, X_n$ 全てに回帰させて得られる残差の2乗和を用いる．そのとき Σ の推定量は

$$\hat{\Sigma}=\frac{1}{T-m}\tilde{Y}'[I-\tilde{X}(\tilde{X}'\tilde{X})\tilde{X}']\tilde{Y} \tag{5}$$

と書くことができる．ただし

$$\tilde{X}=[X_1, X_2, \cdots X_n],\quad \tilde{Y}=[y_1, y_2, \cdots, y_n]$$

である．また $m=\sum_{i=1}^{n}m_i$ である．ここで$\tilde{X}$は，階数 m を持ち，$T>m+n$ と仮定する．このときよく知られているように $\hat{\Sigma}$ は，ウィッシャート分布 $W(\Sigma, T-m)$ に従う．この $\hat{\Sigma}$ を用いれば

$$\tilde{\alpha}=[X'(\hat{\Sigma}^{-1}\otimes I)X]^{-1}X'(\hat{\Sigma}^{-1}\otimes I)Y \tag{6}$$

と表わされる．Phillips (1977a) は，これを次のように表現している．

$$\tilde{\alpha}=[S'(\hat{\Sigma}^{-1}\otimes X'X)S]^{-1}[S'(\hat{\Sigma}^{-1}\otimes I)p]. \tag{7}$$

ここに，S は 0 又は 1 を要素に持つ $m\times n$ の行列，p は

$$p=\frac{X'u}{T}$$

で定義される．S は，一般的に表現するかわりに，$n=3$ の場合を例示すれば，

$$S'=\begin{bmatrix} I_{m_1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & I_{m_2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & I_{m_3} \end{bmatrix}$$

と表わされるような行列である．

ここで次の仮定をおく．すなわち　$M=X'X/T$ とおくと

$$\lim_{T\to\infty}M=\bar{M}.$$

ここに $\bar{M}$ は，有界な要素をもつ非特異行列である．この仮定は，$\sqrt{T}(\tilde{\alpha}-\alpha)$ の極限分布が，正規分布 $N(0,\ [S'(\Sigma^{-1}\otimes\bar{M})S]^{-1})$ となり，また漸近展開を成立させるためのひとつの十分条件である．Phillips (1977a) は，$\tilde{\alpha}$ の線型結合 $h'\tilde{\alpha}$ の分布の漸近展開を $O(T^{-1})$ まで求めている．その結果によれば，$\sqrt{T}h'(\tilde{\alpha}-\alpha)$ の極限分布は $N(0,\ h'[S'(\Sigma^{-1}\otimes\bar{M})S]^{-1}h)$ である．このことからわれわれは，α に関する線型仮説 H_0 ; $h'\alpha=0$ に対して，標準的な t 検定の類推から，疑似 t 統計量

$$t^*=\frac{\sqrt{T}h'(\tilde{\alpha}-\alpha)}{\sqrt{h'[S'(\hat{\Sigma}^{-1}\otimes M)S]^{-1}h}} \tag{8}$$

を用いて，自由度 $T-m$ の t 分布にもとづく検定方式をとりたくなるのは自然であろう．しかしながら，この統計量 t^* の分布は未知であるから，上のような検定方式が近似的にせよ許されるかどうかを見極めるためには，t^* の分布について調べる必要がある．そのための手段として，t^* の分布を漸近展開によって $O(T^{-1})$ のオーダーまで，近似的に求めてみよう．

まず次のことに着目しよう．いま $\Delta\Sigma=\hat{\Sigma}-\Sigma$ と定義すれば，t^* は p と $\Delta\Sigma$ の関数になっている．さらに p と $\Delta\Sigma$ は，容易に分るように統計的に独立である．t^* のこのような性質は，以下の漸近展開を非常に容易なものにするのである．ここでも統計量を確率オーダーに展開し，それを特性関数に代入し項別に反転するという常套手段を踏襲する．第1段階として

$$\begin{aligned}\hat{\Sigma}^{-1}&=(\Sigma+\Delta\Sigma)^{-1}\\&=\Sigma^{-1}-\Sigma^{-1}(\Delta\Sigma)\Sigma^{-1}+\Sigma^{-1}(\Delta\Sigma)\Sigma^{-1}(\Delta\Sigma)\Sigma^{-1}+O_p(T^{-\frac{3}{2}})\\&=\Sigma^{-1}+(\Delta\Sigma^{-1})+O_p(T^{-3/2})\end{aligned}\tag{9}$$

と展開しておく．最後の等式は $\Delta\Sigma^{-1}$ の定義を与えている．(9)と p を用いれば (8)の分子は，$\bar{p}=\sqrt{T}p$ とおくことにより

$$\begin{aligned}h'(\tilde{\alpha}-\alpha)=&h'F^{-1}S'(\Sigma^{-1}\otimes I)\bar{p}+h'F^{-1}S'((\Delta\Sigma^{-1})\otimes I)\bar{p}\\&-h'F^{-1}S'((\Delta\Sigma^{-1})\otimes M)G(\Sigma^{-1}\otimes I)\bar{p}\\&-h'F^{-1}S'((\Delta\Sigma^{-1})\otimes M)G((\Delta\Sigma^{-1})\otimes I)\bar{p}\\&+h'F^{-1}S'((\Delta\Sigma')\otimes M)G((\Delta\Sigma^{-1})\otimes M)G(\Sigma^{-1}\otimes I)\bar{p}\\&+O_p(T^{-3/2})\end{aligned}$$

と展開される．他方分母は $F^*=S'(\hat{\Sigma}^{-1}\otimes M)S$ とおけば

$$\begin{aligned}h'F^{*-1}h=&h'F^{-1}h-h'F^{-1}S'((\Delta\Sigma^{-1})\otimes M)SF^{-1}h\\&+h'F^{-1}S'((\Delta\Sigma^{-1})\otimes M)SF^{-1}S((\Delta\Sigma^{-1})\otimes M)SF^{-1}h\\&+O_p(T^{-\frac{3}{2}})\end{aligned}$$

と展開される．これらを(8)式の分母，分子に代入し，さらに分母を $1/\sqrt{1+x}=1-\frac{1}{2}x+\frac{8}{3}x^2+\cdots$ という形に展開したものを分子とかけ合せて，確率オーダーの順に整理すれば，最終的な t^* の展開式が得られる．結果を少し見やすくするために，次のような記号を導入しよう．

$$F=S'(\Sigma^{-1}\otimes M)S,\quad G=S'F^{-1}S,\ \omega^2=h'F^{-1}h.$$

これらの記号を用いれば，t^* の展開式は

$$\begin{aligned}t^*=\frac{1}{\sqrt{\omega^2}}\{&h'F^{-1}S'(\Sigma^{-1}\otimes I)\bar{p}+h'F^{-1}S((\Delta\Sigma^{-1})\otimes I)\bar{p}\\&-h'F^{-1}S'((\Delta\Sigma^{-1})\otimes M)G(\Sigma^{-1}\otimes I)\bar{p}\\&-h'F^{-1}S'((\Delta\Sigma^{-1})\otimes M)G((\Delta\Sigma^{-1}\otimes I)\bar{p}\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&+h'F^{-1}S'((\Delta\Sigma^{-1})\otimes M)G((\Delta\Sigma^{-1})\otimes M)G(\Sigma^{-1}\otimes I)\bar{p}\\
&+\frac{1}{2\omega^2}h'F^{-1}S'((\Delta\Sigma^{-1})\otimes M)SF^{-1}hh'F^{-1}S'(\Sigma^{-1})\otimes I)\bar{p}\\
&+\frac{1}{2\omega^2}h'F^{-1}S'((\Delta\Sigma^{-1})\otimes M)SF^{-1}hh'F^{-1}S'((\Delta\Sigma^{-1})\otimes I)\bar{p}\\
&-\frac{1}{2\omega^2}h'F^{-1}((\Delta\Sigma^{-1})\otimes M)SF^{-1}hh'F^{-1}S'((\Delta\Sigma^{-1})\otimes M)G\\
&\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\cdot(\Sigma^{-1}\otimes I)\bar{p}\\
&-\frac{1}{2\omega^2}h'F^{-1}S'((\Delta\Sigma^{-1})\otimes M)SF^{-1}S((\Delta\Sigma^{-1})\otimes M)SF^{-1}\\
&\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\cdot hh'F^{-1}S'(\Sigma^{-1}\otimes I)\bar{p}\\
&+\frac{3}{8\omega^4}h'F^{-1}S'((\Delta\Sigma^{-1})\otimes M)SF^{-1}hh'F^{-1}S((\Delta\Sigma^{-1})\otimes M)SF^{-1}\\
&\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\cdot hh'F^{-1}S'(\Sigma^{-1}\otimes I)\bar{p}\}\\
&+O_p(T^{-\frac{3}{2}})\\
&=\frac{1}{\sqrt{\omega^2}}\{h'B\bar{p}+h'C\bar{p}\}+O_p(T^{-\frac{3}{2}})
\end{aligned}
\tag{10}
$$

となる．ここで最後の等式は B と C の定義を与えている．すなわち $h'B\bar{p}$ は，左辺の最初の5つの項を，$h'C\bar{p}$ は残りの項をまとめたものとして定義されている．$h'B\bar{p}$ は，Phillips (1977a) の $h'(\tilde{\alpha}-\alpha)$ の展開に現われる項と同じであり，$h'C\bar{p}$ は t^* の展開に固有のものである．なお上の展開の各項の確率オーダーは，一見しただけでは分りにくいが，機械的には $\Delta\Sigma^{-1}$ を1つ含む項は $O_p(T^{-1/2})$，2つ含む項は $O_p(T^{-1})$ と判定される．

次に分布の展開に移ろう．$w=vec(\Delta\Sigma)$ とおき，$\bar{p}$ と w の確率密度関数をそれぞれ $f_1(\bar{p})$, $f_2(w)$ としよう．このとき t^* の特性関数は

$$
\phi(s)=E\left\{\int\exp\left[ih'\left(\frac{B+C}{\omega}\right)\bar{p}s\right]f_1(\bar{p})d\bar{p}\right\}+O(T^{-\frac{3}{2}})
$$

と表わされる．ここに期待値 E は w に関するものである．$\bar{p}$ が正規分布に従うことから

$$
\begin{aligned}
&\int\exp[ih'(B+C)\bar{p}s/\omega]f_1(\bar{p})d\bar{p}\\
&\quad=\exp\left[-\left(\frac{s^2}{2}\right)h'(B+C)'(\Sigma\otimes M)(B+C)h/\omega^2\right]
\end{aligned}
\tag{11}
$$

と計算される．上式の[　]の中の h の2次形式の部分は，展開すれば，

$$
\begin{aligned}
&h'(B+C)'(\Sigma\otimes M)(B+C)h/\omega^2\\
&\quad=[h'F^{-1}h+h'F^{-1}S'((\Delta\Sigma^{-1})\Sigma(\Delta\Sigma^{-1})\otimes M)SF^{-1}h\\
&\qquad-h'F^{-1}S'((\Delta\Sigma^{-1})\otimes M)G((\Delta\Sigma^{-1})\otimes M)SF^{-1}h\\
&\qquad+h'F^{-1}S'((\Delta\Sigma^{-1})\otimes M)SF^{-1}h\\
&\qquad-h'F^{-1}S'((\Delta\Sigma^{-1})\otimes M)G((\Delta\Sigma^{-1})\otimes M)SF^{-1}h\\
&\qquad+h'F^{-1}S'((\Delta\Sigma^{-1})\otimes M)SF^{-1}hh'F^{-1}S'((\Delta\Sigma^{-1})\otimes M)SF^{-1}h/\omega^2]/\omega^2\\
&\qquad+O_p(T^{-\frac{3}{2}})
\end{aligned}
\tag{12}
$$

となる．また

$$
\begin{aligned}
\Delta\Sigma^{-1}&=-\Sigma^{-1}(\Delta\Sigma)\Sigma^{-1}+\Sigma^{-1}(\Delta\Sigma)\Sigma^{-1}(\Delta\Sigma)\Sigma^{-1}\\
&=-\Sigma_a+\Sigma_b
\end{aligned}
$$

と展開される．ここに最後の等式は Σ_a と Σ_b の定義を与えるものとする．この定義から容易に，$\Sigma_a\Sigma\Sigma_a=\Sigma_b$ を得る．この関係と，(12)を(11)に代入することにより，(11)の右辺は

$$
\begin{aligned}
&\exp\left[-\left(\frac{s^2}{2}\right)h'(B+C)'(\Sigma\otimes M)(B+C)h/\omega^2\right]\\
&\quad=\exp\left(-\frac{s^2}{2}\right)\left[1-\left(\frac{s^2}{2}\right)\{-h'F^{-1}S'(\Sigma_a\otimes M)SF^{-1}/\omega^2\right.\\
&\qquad+2h'F^{-1}S'(\Sigma_b\otimes M)SF^{-}h/\omega^2\\
&\qquad-2h'F^{-1}S'(\Sigma_a\otimes M)G(\Sigma_a\otimes M)SF^{-}h/\omega^2\\
&\qquad+h'F^{-1}S'(\Sigma_a\otimes M)SF^{-1}hh'F^{-1}S'(\Sigma_a\otimes M)SF^{-1}h/\omega^2\}\\
&\qquad\left.+\frac{s^4}{8}h'F^{-1}S'(\Sigma_a\otimes M)SF^{-1}hh'F^{-1}S(\Sigma_a\otimes M)SF^{-1}h/\omega^4\right]\\
&\qquad+O_p(T^{-\frac{3}{2}})
\end{aligned}
\tag{13}
$$

と書くことができる．最後に期待値をとれば，t^* の特性関数の展開式は

$$
\begin{aligned}
\phi(s)=&\exp\left(-\frac{s^2}{2}\right)\left[1-\left(\frac{s^2}{2}\right)\{-h'F^{-1}S'E(\Sigma_a\otimes M)SF^{-1}h/\omega^2\right.\\
&+2h'F^{-1}S'E(\Sigma_b\otimes M)SF^{-1}h/\omega^2\\
&-2h'F^{-1}S'E((\Sigma_a\otimes M)G(\Sigma_a\otimes M))SF^{-1}h/\omega^2\\
&+h'F^{-1}S'E((\Sigma_a\otimes M)SF^{-1}hh'F^{-1}S'(\Sigma_a\otimes M))SF^{-1}h/\omega^2\}\\
&\left.+\frac{s^4}{8}h'F^{-1}S'E((\Sigma_a\otimes M)SF^{-1}hh'F^{-1}S(\Sigma_a\otimes M))SF^{-1}h/\omega^4\right]\\
&+O_p(T^{-\frac{3}{2}}).
\end{aligned}
\tag{14}
$$

さて次に，(14)式に含まれる期待値を評価しなければならない．[　]の中の第1の期待値は，$\Delta\Sigma$ の定義からただちに

$$E(\Sigma_a)=-\Sigma^{-1}E(\Delta\Sigma)\Sigma^{-1}=0 \tag{15}$$

となる．第2，第3の期待値は Phillips (1977a, pp. 154～155) によってすでに評価されている．それらは

$$E(\Sigma_b)=\frac{1+n}{T-m}\Sigma^{-1} \tag{16}$$

$$E(S'(\Sigma_a\otimes M)G(\Sigma_a\otimes M)S)=\left(\frac{1}{T-m}\right)D \tag{17}$$

である．ここに D は，第3章で定義されたものと同じである．(14)の最後の2つの期待値は(17)と同様に計算すれば，容易に

$$E\{(\Sigma_a\otimes M)SF^{-1}hh'F^{-1}S(\Sigma_a\otimes M)\}=\left(\frac{1}{T-m}\right)D^* \tag{18}$$

となる．ここに

$$D^*=\sum_{j,l}\sum_{r,p}\{\sigma^{jr}\sigma^{lp}+\sigma^{jp}\sigma^{lr}\}(S_jMS_l')F^{-1}hh'F^{-1}(S_rMS_p')$$

である．(16)，(17)，(18)を(14)に代入すれば，t^* の特性関数の $O(T^{-1})$ までの展開は

$$\begin{aligned}\phi(s)&=\exp\left[-\frac{s^2}{2}\right]\left[1-\left(\frac{s^2}{2}\right)\left\{\left(\frac{1+n}{T-m}\right)-2\left(\frac{1}{T-m}\right)\frac{h'\Phi h}{\omega^2}\right.\right.\\&\qquad\left.\left.+\left(\frac{1}{T-m}\right)\frac{h'\Phi^*h}{\omega^4}\right\}+\left(\frac{s^4}{8}\right)\left(\frac{1}{T-m}\right)\frac{h'\Phi^*h}{\omega^4}\right]+O(T^{-\frac{3}{2}})\\&=\exp\left(-\frac{s^2}{2}\right)\left(1-\frac{s^2}{2}A+\frac{s^4}{8}B\right)+O(T^{-\frac{3}{2}})\end{aligned} \tag{19}$$

となることが分る．ここに $\Phi=F^{-1}DF^{-1}$, $\Phi^*=F^{-1}D^*F^{-1}$ である．(19) を反転することにより，t^* の密度関数の $O(T^{-1})$ までの展開式として

$$f(x)=i(x)\left\{1+\frac{A}{2}(x^2-1)+\frac{B}{8}(x^4-6x^2+3)\right\}+O(T^{-\frac{3}{2}}) \tag{20}$$

を得る．ここに $i(x)$ は標準正規分布の密度関数である．さらに，(20)から t^* の分布関数の展開式を求めれば

$$P(t^*\leq x)=I(x)-\frac{i(x)}{6}x\left\{A-\frac{(3-x^2)}{4}B\right\}+O(T^{-\frac{3}{2}}) \tag{21}$$

を得る．ここに $I(\cdot)$ は標準正規分布の分布関数である．(20)の右辺は書

き換えて

$$I(x)-i(x)\,x\left(\frac{1}{T-m}\right)\left\{(1+n)-\frac{h'\Phi h}{\omega^2}+\frac{(1+x^2)}{8}\cdot\frac{h'\Phi^* h}{\omega^4}\right\}$$
$$+O(T^{-\frac{3}{2}}) \tag{22}$$

とすることができるし，また

$$I(x+gx)+O(T^{-\frac{3}{2}}) \tag{23}$$

とすることもできる．ただし

$$g=\frac{1}{T-m}\left\{(1+n)-\frac{h'\Phi h}{\omega^2}+\frac{(1+x^2)h'\Phi^* h}{8\omega^4}\right\} \tag{24}$$

である．(22)は(23)をテイラー展開したものになっていることに気が付けば，(23)の展開の根拠が理解される．(21)や(22)のようなタイプの近似を実際に行った場合，しばしば近似された分布関数の値が区間(0, 1)からはみだしたり，単調非減少でなくなったりすることがある．しかし(23)のような型に直した近似式を用いれば，そのような不都合を防ぐことができる．

ところで(22)において，$x=0$ とおけば，右辺は $I(0)+O(T^{-\frac{3}{2}})$ となるから，$O(T^{-1})$ まで原点に対して左右対称であることが分かる．

3　単一方程式における t 検定との比較

この節では，SUR モデルにおける個々の式に対して，標準的な回帰分析における t 検定と，われわれの検定の比較を試みる．

3.1　一般の場合

個々の式に対して最小2乗法を適用する方法をここでは単一方程式最小2乗法（以下 SELS と記す）と呼ぶことにする．(2)における α の SELS 推定量は，偏差の型で表わせば

$$\alpha^+-\alpha=\begin{pmatrix}(X_1'X_1)^{-1}X_1'u_1\\(X_2'X_2)^{-1}X_2'u_2\\\vdots\\(X_n'X_n)^{-1}X_n'u_n\end{pmatrix}$$
$$=\{S'(I\otimes M)S\}^{-1}S'p=K^{-1}S'p \tag{25}$$

となる．ここに最後の等式は K の定義を与えるものとする．$\sqrt{T}(\alpha^+-\alpha)$ は正規分布 $N(0,\ K^{-1}\{S'(\sum\otimes M)S\}K^{-1})$ に従う．このことから H_0：$h'\alpha=0$ に対する t^* に対応する統計量として

$$t^+=\frac{\sqrt{T}h'(\alpha^+-\alpha)}{\sqrt{h'K^{-1}\{S'(\hat{\sum}\otimes M)S\}K^{-1}h}}$$

$$=\frac{\sqrt{T}h'(\alpha^+-\alpha)}{\sqrt{h'\Psi^*h}} \tag{26}$$

を考えよう．ここに Ψ^* の定義は，最後の等式によって与えられる．t^+ の分布は，前節と同様に $O(T^{-1})$ まで漸近展開すると，途中の計算は省くが，結局

$$P(t^+\leq x)=I(x)-i(x)\,x\frac{(4+x^2)}{8(T-m)}\cdot\frac{h'\Phi^+h}{\omega_1{}^4}+O(T^{-\frac{3}{2}}) \tag{27}$$

となる．または，前節と同様に(27)の右辺は

$$I(x+fx)+O(T^{-\frac{3}{2}}) \tag{28}$$

と書くこともできる．ここに

$$\Phi^+=G^{-1}D^+G^{-1}$$

$$D^+=\sum_{j,l}\sum_{r,p}\{\sigma_{jr}\sigma_{lp}+\sigma_{jp}\sigma_{lr}\}\{S_jMS_l'\}(G^{-1}hh'G^{-1})(S_rMS_p')$$

$$f=\frac{(4+x^2)}{8(T-m)}\ \frac{h'\Phi^+h}{\omega_1{}^4}$$

$$\omega_1{}^2=h'K^{-1}\{S'(\sum\otimes M)S\}K^{-1}h$$

である．(28)もまた，この分布は $O(T^{-1})$ まで原点に対して左右対称であることを示している．

さて t^* と t^+ の分布の相違を見るためには，なんらかの尺度を必要とする．その尺度として，原点を中心とする区間における分布の集中度を用いることにする．すなわち，これら2つの分布の相違を

$$P\left\{\left|\frac{\sqrt{T}h'(\alpha^*-\alpha)}{\sqrt{h'F^{*-1}h}}\right|\leq x\right\}-P\left\{\left|\frac{\sqrt{T}h'(\alpha^+-\alpha)}{\sqrt{h'\Psi^*h}}\right|\leq x\right\}$$

$$=\{I(x(1+g))-I(-x(1+g))\}$$

$$-\{I(x(1+f))-I(-x(1+f))\}+O(T^{-\frac{3}{2}})$$

$$=2\{I(x(1+g))-I(x(1+f))\}+O(T^{-\frac{3}{2}})$$

$$=2i(x^*)\{x(g-f)\}+O(T^{-\frac{3}{2}}) \tag{29}$$

によって測ることにする．ここに最後の辺に現われる x^*は，$x(1+g)$ と $x(1+f)$ の中間の点である．この尺度を用いれば，$O(T^{-1})$ までの両分布の差は，$d=f-g$ によって測られることになる．

ところで推定量の比較においては，分布が中央に集中しているほど，その推定量は有効である．しかし検定統計量の場合は，分布が中央に集中していれば良いというわけのものではない．なぜならば，検定方式の良さは，本来ならば検出力によって測られるべき性質のものだからである．しかしながら上述のような比較は，「d によって測られたこれら2つの分布の差が小さければ，2つの検定方式から導かれる決定は，ほとんど差がないであろう」という型の議論を行うためには有効であろう．とはいってもそれは容易ではないように見える．というのは，f と g は Φ, Φ^*, Φ^+ といったきわめて複雑な行列を含んでいるからである．しかしいくつかの特殊なケースでは，g は非常に簡単になる．

3.2　説明変数が直交する2方程式モデル

簡単化のために2つの方程式から成るゼルナーモデルを考えよう．そしてそれぞれの式の説明変数 X_1；$T\times m$, X_2；$T\times m_2$ は互いに直交しているとしよう．すなわち $X'_1X_2=0$. このとき

$$S'=\begin{bmatrix} I_{m_1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I_{m_2} \end{bmatrix}$$

であるから，Phillips (1977a, pp. 158–159) に示されているように

$$\{S'(\Sigma^{-1}\otimes M)S\}^{-1}=\begin{bmatrix} \dfrac{1}{\sigma^{11}}\left(\dfrac{X_1'X_1}{T}\right)^{-1} & 0 \\ 0 & \dfrac{1}{\sigma^{22}}\left(\dfrac{X_2'X_2}{T}\right)^{-1} \end{bmatrix}$$

$$\Phi=\begin{bmatrix} \dfrac{2}{\sigma^{11}}\left(\dfrac{X_1'X_1}{T}\right)^{-1} & 0 \\ 0 & \dfrac{2}{\sigma^{22}}\left(\dfrac{X_2'X_2}{T}\right)^{-1} \end{bmatrix}$$

を得る．われわれはさらに Φ^* と Φ^+ を求める必要がある．その計算は長くて複雑であるので省略するが，結果は

$$\Phi^*=\begin{bmatrix} \frac{2}{(\sigma^{11})^2}\left(\frac{X_1'X_1}{T}\right)^{-1}h_1h_1'\left(\frac{X_1'X_1}{T}\right)^{-1}, & \frac{2\rho^2}{\sigma^{11}\sigma^{22}}\left(\frac{X_1'X_1}{T}\right)^{-1}h_1h_2'\left(\frac{X_2'X_2}{T}\right)^{-1} \\ \frac{2\rho^2}{\sigma^{11}\sigma^{22}}\left(\frac{X_2'X_2}{T}\right)^{-1}h_2h_1'\left(\frac{X_1'X_1}{T}\right)^{-1}, & \frac{2}{(\sigma^{22})^2}\left(\frac{X_2'X_2}{T}\right)^{-1}h_2h_2'\left(\frac{X_2'X_2}{T}\right)^{-1} \end{bmatrix}$$

および

$$\Phi^+=\begin{bmatrix} \left(\frac{X_1'X_1}{T}\right)^{-1} & 0 \\ 0 & \left(\frac{X_2'X_2}{T}\right)^{-1} \end{bmatrix} hh' \begin{bmatrix} \left(\frac{X_1'X_1}{T}\right)^{-1} & 0 \\ 0 & \left(\frac{X_2'X_2}{T}\right)^{-1} \end{bmatrix}$$

となる．ここに $\rho=\sigma_{12}/\sqrt{\sigma_{11}\sigma_{22}}$ である．

これらの行列は，まだ複雑なので，係数間の線型制約を第1式の係数だけに課すことによって，さらに簡単化を計ろう．そのためには，$h'=(h_1'0')$ とすればよい．ここに h_1' は $1\times m_1$, $0'$ は $1\times m_2$ のベクトルである．こうすることにより

$$h'\Phi h=\frac{2}{\sigma^{11}}h_1'\left(\frac{X_1'X_1}{T}\right)^{-1}h_1$$

$$h'\Phi^*h=\frac{2}{(\sigma^{11})^2}h_1'\left(\frac{X_1'X_1}{T}\right)^{-1}h_1h_1'\left(\frac{X_1'X_1}{T}\right)^{-1}h_1$$

$$h'\Phi^+h=\left[\sigma_{11}h_1'\left(\frac{X_1'X_1}{T}\right)^{-1}h_1\right]^2$$

$$\omega^2=h_1'\frac{1}{\sigma^{11}}\left(\frac{X_1'X_1}{T}\right)^{-1}h_1$$

$$\omega^2{}_1=h_1'\sigma_{11}\left(\frac{X_1'X_1}{T}\right)^{-1}h_1$$

と簡単化できる．これらを f と g に代入すれば

$$g=\frac{1}{T-\mathrm{m}}\left\{3-2+\frac{1}{4}(1+x^2)\right\}$$

$$=\frac{1}{4(T-m)}(5+x^2)$$

$$f=\frac{1}{8(T-m)}(4+x^2)$$

を得る．複雑な行列が全て消えてしまったのは，例えば g の中の $h'\Phi h/\omega^2$ では，

$$\frac{h'\Phi h}{\omega^2}=\frac{\dfrac{2}{\sigma^{11}}\ h_1'\left(\dfrac{X_1'X_1}{T}\right)^{-1}h_1}{\dfrac{1}{\sigma^{11}}\ h_1'\left(\dfrac{X_1'X_1}{T}\right)^{-1}h_1}=2$$

となるように約分されてしまうからである．このようにして f と g が簡単になったので，それらの差を見ることは容易である．たとえば，実際にありそうな場合として，$T=20$, $m=6$, $x=2$ とすれば $d=g-f=0.093$, $i(2)=0.05399$ であるから(29)で表わされる2つの確率の差は0.0048と計算される．この値は，2つの検定統計量 t^* と t^+ の分布はかなり近いことを示唆している．

ところで $h'=(h'_1\ 0')$ のときは，標準的な t 検定が可能である．すなわち

$$t=\frac{\sqrt{T}h_1'(\alpha_1{}^+-\alpha_1)}{\sqrt{h_1's_{11}\left(\dfrac{X_1'X_1}{T}\right)^{-1}h_1}}$$

は，自由度 $T-m_1$ の t 分布に従う．ここに α_1 は，第1式に係る係数である．また $\alpha_1{}^+$ は

$$\alpha_1{}^+=(X_1'X_1)^{-1}X_1'y_1,\ s_{11}=\frac{1}{T-m_1}y_1'[I-X_1(X_1'X_1)^{-1}X_1']y_1$$

である．t の精密分布は，分っているのであるが，t^* および t^+ と比較するために，t も $O(T^{-1})$ まで漸近展開しておこう．結果だけ示せば t の分布は

$$\begin{aligned}P(t\leq x)&=I(x)\ -i\ (x)\ x\ (4+x^2)/(T-m_1)+O(T^{-\frac{3}{2}})\\&=I(x(1+f'))+O(T^{-\frac{3}{2}})\end{aligned}$$

と近似される．ここに $f'=(4+x^2)/(T-m_1)$ である．例えば $m_1=3$, $T=20$, $x=2$ とすれば $f'-g=0.0294$ である．やはり t^* と t の分布は近いと見なしてよい．

以上のように，単純なモデルを想定すれば，t^* の分布と t^+ および t の分布を比較することは可能である．しかし上の例は，単純化しすぎているといえるかもしれない．なぜならば $X_1'X_2=0$ と仮定したために，u_1 と

u_2 の相関係数 ρ—ゼルナーモデルにおいて本質的に重要—が消去されてしまい，上で述べた比較の中に ρ が現われていないからである．そこで ρ の役割を見るために，次の場合を考えよう．

3.3　説明変数が直交しない2方程式モデル

2つの式の説明変数が直交しないとするほうが，経済モデルにおいては現実的な仮定である．ただしそうすることによって，問題は複雑になる．説明変数が直交しない2方程式ゼルナーモデルにおける UZE の漸近展開は，Phillips (1977a) によって扱われており，その中で $h'\Phi h$ の表現が与えられている．われわれの場合は，Φ の代わりに Φ^* を用いたものを表現しなければならないが，その導出は Phillips (1977a) と全く同様である．まず D^* は部分行列

$$
\begin{aligned}
D_{11}^* = {} & 2(\sigma^{11})^2\left(\frac{X_1'X_1}{T}\right)C_{11}^*\left(\frac{X_1'X_1}{T}\right) \\
& +2\sigma^{11}\sigma^{12}\left(\frac{X_1'X_2}{T}\right)C_{21}^*\left(\frac{X_1'X_1}{T}\right) \\
& +2\sigma^{11}\sigma^{12}\left(\frac{X_1'X_1}{T}\right)C_{12}^*\left(\frac{X_2'X_1}{T}\right) \\
& +\{(\sigma^{12})^2+\sigma^{11}\sigma^{22}\}\left(\frac{X_1'X_2}{T}\right)C_{22}^*\left(\frac{X_2'X_1}{T}\right) \\
D_{12}^* = {} & 2\sigma^{11}\sigma^{12}\left(\frac{X_1'X_1}{T}\right)C_{11}^*\left(\frac{X_1'X_2}{T}\right) \\
& +\{(\sigma^{12})^2+\sigma^{11}\sigma^{22}\}\left(\frac{X_1'X_2}{T}\right)C_{21}^*\left(\frac{X_1'X_2}{T}\right) \\
& +2(\sigma^{12})^2\left(\frac{X_1'X_1}{T}\right)C_{12}^*\left(\frac{X_2'X_2}{T}\right) \\
& +2\sigma^{12}\sigma^{22}\left(\frac{X_1'X_2}{T}\right)C_{22}^*\left(\frac{X_2'X_2}{T}\right) \\
D_{21}^* = {} & D_{12}^{*\prime} \\
D_{22}^* = {} & \{(\sigma^{12})^2+\sigma^{11}\sigma^{22}\}\left(\frac{X_2'X_1}{T}\right)C_{11}^*\left(\frac{X_1'X_2}{T}\right) \\
& +2\sigma^{12}\sigma^{22}\left(\frac{X_2'X_2}{T}\right)C_{21}^*\left(\frac{X_1'X_2}{T}\right)
\end{aligned}
$$

$$+2\sigma^{12}\sigma^{22}\left(\frac{X_2'X_1}{T}\right)C_{12}^*\left(\frac{X_2'X_2}{T}\right)$$

$$+2(\sigma^{22})^2\left(\frac{X_2'X_2}{T}\right)C_{22}^*\left(\frac{X_2'X_2}{T}\right)$$

に分解できる．ここに

$$C^*=F^{-1}hh'F^{-1}=\begin{bmatrix}C_{11}^* & C_{12}^*\\ C_{21}^* & C_{22}^*\end{bmatrix}$$

である．次に再び第1式に限定して考える．すなわち $h'=(h_1'0')$ のとき

$$h'\Phi h=h_1'\Phi_{11}h_1 \text{ および } h'\Phi^*h=h_1'\Phi_{11}^*h_1$$

となる．ここに

$$\Phi_{11}=C_{11}D_{11}C_{11}+C_{12}D_{21}C_{11}+C_{11}D_{12}C_{21}+C_{12}D_{22}C_{21}$$

$$\Phi_{11}^*=C_{11}D_{11}^*C_{11}+C_{12}D_{21}^*C_{11}+C_{11}D_{12}^*C_{21}+C_{12}D_{22}^*C_{21}$$

である．これらは行列の積を直接計算することによって容易に得られる．ところで上の式を見て分るように，$X_1'X_2\neq 0$ のときは，t^* の分布の特徴を式の上から判断することは，もはや不可能に近いと言わざるを得ない．そこで，次節ではこれらの行列表現による複雑な結果を，実例を用いた数値計算によって検討してみよう．

4　数　値　解　析

Zellner (1962) は，SUR モデルの具体例として Boot and de Witt(1960) が行った，ゼネラル・エレクトリック (General Electric)社 とウェスティングハウス(Westinghouse) 社との設備投資の分析例を取り上げた．両社の設備投資関数は

$$I(t)=\alpha_0+\alpha_1F(t-1)+\alpha_2C(t-1)+u(t),\ t=1,\ 2,\cdots,\ T$$

と特定化された．ここに $I(t)$ は，t 期における総設備投資を，$F(t-1)$ は期首における outstanding shares を，$C(t-1)$ は期首における資本ストックを表わしている．これらの経済変量の両社の20年間にわたる ($T=20$) データは， Boot and de Witt (1960) に与えられている．そのデータから推定された共分散行列は，

$$\begin{bmatrix}777.4465 & 234.5889\\ 234.5889 & 107.1342\end{bmatrix}$$

である．これより u_1 と u_2 の相関係数は0.8128とかなり高い値を示し，SUR モデルの例としてはうってつけである．このデータを用いて，両社それぞれの α_1 および α_2 のみに関する有意性の検定統計量 t^* の分布を(21)によって計算したものが表1に示されている．この表の第1列は，極限分布としての正規分布の引数，$-3.0(0.2)-0.2$，が示されている．(21)は $O(T^{-1})$ まで $x=0$ に対して左右対称であるから $x \geqq 0$ の範囲については省略した。第2列は t^* の極限分布である標準正規分布が，第3列は自由度17の t 分布が示されている．この自由度17の t 分布は，いうまでもなく標準的な回帰分析における係数の有意検定に用いられる分布である．その他の列は，たとえばゼネラル・エレクトリック社の α_2 の欄は $h'=(0,0,1,0,0,0)$ に対応する t^* の分布を，またウェスティング社の α_1 の欄は $h'=(0,0,0,0,1,0)$ に対応する t^* の分布を表わしている．

表1　t^*, t, $N(0,1)$ の比較

x	Asymptotic Normal	SELS t $df=17$*	General Electric SUR t^* for α_1	General Electric SUR t^* for α_2	Westinghouse SUR t^* for α_1	Westinghouse SUR t^* for α_2
−3.0	0.00135	0.00403	0.00390	0.00378	0.00390	0.00382
−2.8	0.00256	0.00615	0.00649	0.00622	0.00649	0.00632
−2.6	0.00466	0.00934	0.01045	0.00992	0.01045	0.01014
−2.4	0.00820	0.01406	0.01633	0.01539	0.01632	0.01582
−2.2	0.01390	0.02096	0.02480	0.02327	0.02480	0.02400
−2.0	0.02275	0.03087	0.03669	0.03434	0.03668	0.03550
−1.8	0.03593	0.04481	0.05291	0.04956	0.05290	0.05125
−1.6	0.05480	0.06400	0.07449	0.07000	0.07448	0.07230
−1.4	0.08076	0.08975	0.10243	0.09682	0.10241	0.09973
−1.2	0.11507	0.12330	0.13763	0.13110	0.13762	0.13453
−1.0	0.15866	0.16567	0.18075	0.17370	0.18073	0.17743
−0.8	0.21186	0.21737	0.23196	0.22500	0.23195	0.22871
−0.6	0.27425	0.27821	0.29089	0.28475	0.29088	0.28803
−0.4	0.34458	0.34707	0.35647	0.35187	0.35646	0.35434
−0.2	0.42074	0.42193	0.42693	0.42447	0.42693	0.42579
			$\rho=0.8128$			

*自由度17の t 分布は統計数値表（日本規格協会，山内二郎編 (1972)）の公式B (2.3) を用いて計算した．

表2　$h'=(1,0,0,0,0,0)$ のときの t^* の分布

x	ρ	0.0	0.25	0.5	0.75
−0.3		0.00386	0.00386	0.00386	0.00388
−2.8		0.00629	0.00625	0.00632	0.00642
−2.6		0.00992	0.00995	0.01004	0.01030
−2.4		0.01525	0.01530	0.01549	0.01604
−2.2		0.02286	0.02295	0.02331	0.02430
−2.0		0.03352	0.03368	0.03427	0.03588
−1.8		0.04818	0.04842	0.04930	0.05172
−1.6		0.06794	0.06827	0.06751	0.07285
−1.4		0.09403	0.09446	0.09605	0.10035
−1.2		0.12766	0.12818	0.13007	0.13518
−1.0		0.16983	0.17040	0.17248	0.17807
−0.8		0.22107	0.22164	0.22372	0.22930
−0.6		0.28120	0.28170	0.28356	0.28852
−0.4		0.34917	0.34955	0.35095	0.35469
−0.2		0.42301	0.42322	0.42397	0.42598

表3　$h'=(0,0,1,0,0,-1)$ に対する t^* の分布

x	ρ	0.0	0.25	0.5	0.75
−3.0		0.00349	0.00347	0.00350	0.00368
−2.8		0.00572	0.00569	0.00577	0.00609
−2.6		0.00912	0.00909	0.00922	0.00977
−2.4		0.01416	0.01412	0.01434	0.01523
−2.2		0.02146	0.02142	0.02177	0.02314
−2.0		0.03181	0.03178	0.03231	0.03429
−1.8		0.04619	0.04618	0.04693	0.04963
−1.6		0.06575	0.06577	0.06676	0.07026
−1.4		0.09176	0.09182	0.09304	0.09730
−1.2		0.12544	0.12554	0.12694	0.13180
−1.0		0.16779	0.16792	0.16943	0.17458
−0.8		0.21932	0.21947	0.22095	0.22596
−0.6		0.27982	0.27997	0.28127	0.28565
−0.4		0.34823	0.34835	0.34932	0.35258
−0.2		0.42254	0.42260	0.42312	0.42486

次に ρ の値を人工的に変化させながら，同じデータを用いて t^* の近似分布を計算した結果を表2，3に掲げる．表2では，$h=(1,0,0,0,0)$，す

なわち $H_0:\alpha_0=0$ の場合を，表3では，$h=(0,0,1,0,0,-1)$，すなわち $H_0:\alpha_2=\alpha_2'$（ゼネラルエレクトリック社の F の係数とウェスティング社のそれは等しい）という帰無仮説の場合を扱っている．

これらの表から観察される特徴的な点は，（i）t^* の分布は，正規分布にあまり近いとは言えず，むしろ t 分布に近い，（ii）ρ が小さくなるにつれて t^* の分布は中央に集中していく傾向が見られ，$\rho=0$ のときは t_{17} に非常に近い．上記（i）は $T-m$ が十分大きくないので，正規分布近似はあまり精度が良くないことを反映している．さらにわれわれが直観的に構成した統計量 t^* は，t 分布に近い分布であることをも示しているように思われる．他方このことはまた，標準的な単一方程式に対する t 検定による係数の有意性の検定は，2つの方程式間の攪乱項の相関を考慮した検定方式 t^* とあまり大差がないということでもある．上記（ii）からは，ρ が0に近いときは t^* にもとづく検定は t_{17} にもとづく検定と大差がないことを意味している．このことは，$\rho=0$ のとき UZE の分布は正規分布に帰着するという事実に対応しているのであろう．

これらの観察結果を，SUR モデルにおける推定問題における結果と比較してみると興味深い．推定問題においては，ρ が0に近いとき（$|\rho|<0.3$）ゼルナー推定量はむしろ効率が悪くなることが，Metha and Swamy (1976) と Kunitomo (1977) らによって指摘されている．ところが検定問題の場合には，上に述べたように，ρ が低い場合にも，この相関を考慮した検定統計量 t^* は悪くないように見える．ここに SUR モデルにおける推定問題と検定問題の相違がある．

第6章　一般線型回帰モデルにおける 3次漸近有効推定量

1　は　じ　め　に

これまで SUR モデルに関してみてきたように，推定量の分布の漸近展開を $O(T^{-1})$ の項まで求めるためには，かなりの計算量が必要である．ところで分析の目的が，推定量の有効性や分布の形状の比較である場合には，前川 (1983 d, 1984c) に示されるように，分布の漸近展開の最終的な形を導出する必要のない場合がある．すなわち，その比較における「差」をもたらす可能性のある項だけを計算するだけでよい場合がある．このように漸近的な「差異の源泉」を追求していく接近法は，Akahira and Takeuchi (1981) の高次漸近有効性の理論および Akahira (1981, 1982) の推定における漸近的 defficiency の理論の中で，より洗練された型において見ることができる．そこでこの章では，上記の2つの拙稿を，高次漸近有効性の立場から，全面的に書き改めることにする．

2節において，準備として必要な範囲で，3次漸近有効性の理論を要約する．3節において，一般線型回帰モデルに関して，よく用いられる自然な推定量を含むような推定量のクラスとして G-クラス推定量を定義する．4節において，G-クラス推定量の比較を行ない，それらの3次漸近有効性を示す．5節において，SUR モデルを始めとするいくつかの回帰モデルにおける G-クラス推定量の3次漸近有効性を示す．

2　3次漸近有効性

この節は，次節以下の準備として，Akahira and Takeuchi (1981) によって導入された高次漸近有効性の概念を，必要な範囲において要約する．以下の要約は，Akahira and Takeuchi (1981)，竹内 (1974, 1981)，

Taniguchi (1984b) 等にもとづいているが，原論文の数学的に厳密な記述を省略したところもあり，直観的な記述になっている．

確率変数のベクトル $\underset{\sim}{X}_n=(X_1, \cdots, X_n)'$ は，確率測度 $P_{n,\theta}(\cdot)$ をもつとし，未知母数 θ（スカラー）の推定量 $\hat{\theta}=\hat{\theta}(X_1, \cdots, X_n)$ に対して

$$\lim_{n\to\infty} n^{\frac{k-1}{2}}\left|P_{n,\theta}\{\sqrt{n}(\hat{\theta}-\theta)\leq 0\}-\frac{1}{2}\right|=0$$

が成立するとき，$\hat{\theta}$ は k 次漸近中央不偏 (Asymptotically Median Unbiased, 略して AMU) であるという．いま $\hat{\theta}$ を k 次 AMU 推定量とし，$\sqrt{n}(\hat{\theta}-\theta)$ の分布関数が

$$F_n(x, \theta)=F_0(x, \theta)+\frac{1}{\sqrt{n}}F_1(x, \theta)+\cdots+\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^k F_k(x, \theta)$$

によって近似できたとしよう．このとき

$$\lim_{n\to\infty} n^{\frac{k-1}{2}}|P_{n,\theta}\{\sqrt{n}(\hat{\theta}-\theta)\leq x\}-F_n(x, \theta)|=0$$

となるならば，$F_n(x, \theta)$ を $\sqrt{n}(\hat{\theta}-\theta)$ の k 次漸近分布ということにする．そして k 次 AMU 推定量の中で k 次漸近分布が最も中央に集中しているような推定量を，k 次漸近有効推定量と定義する．すなわち $\hat{\theta}_n{}^*$ を k 次漸近有効推定量とし，$\hat{\theta}_n$ を任意の k 次 AMU 推定量とするとき

$$\begin{aligned}&\lim inf\, n^{\frac{k-1}{2}}[P_{n,\theta}\{-a<\sqrt{n}(\hat{\theta}_n{}^*-\theta)<b\}\\&\quad -P_{n,\theta}\{-a<\sqrt{n}(\hat{\theta}-\theta)<b\}]\geqq 0\ ;\ \forall\theta\in\Theta,\ \ a>0, b>0\end{aligned}$$

である．このように推定量の有効性を漸近分布の集中度で定義する方法は，モーメントが存在しないような推定量の有効性を比較する場合にも適用できるという利点がある．

2次 AMU 推定量 $\hat{\theta}_n$ の2次漸近分布の限界（集中確率を最大にする分布）は，ネイマン＝ピアソンの基本定理を巧みに応用することによって得られる．すなわち，

帰無仮説　$H: \theta=\theta_0+\dfrac{x}{\sqrt{n}}\ (x>0)$

対立仮説　$K: \theta=\theta_0$

を考えると，H のもとでは，$A_n=\{\sqrt{n}(\hat{\theta}-\theta)<x\}$ とすると

$$P_{\theta_0+x/\sqrt{n}}\{A_n\}=P_{\theta_0+x/\sqrt{n}}\left\{\sqrt{n}\left(\hat{\theta}-\theta_0-\frac{x}{\sqrt{n}}\right)<0\right\}$$

$$=\frac{1}{2}+o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$$

である．最後の等号は2次 AMU 条件である．いま求めたいのは

$$P_\theta\{A_n\}=p_\theta\{\sqrt{n}(\hat{\theta}-\theta)\leq x\}$$

の限界であるが，これは対立仮説（有意水準$=\frac{1}{2}+o(n^{-1/2})$）のもとでの A_n の確率，すなわち検出力である．したがってこの検出力を最大にするような棄却域は，ネイマン＝ピアソンの基本定理によって求められる．その結果 $P_\theta\{\sqrt{n}(\hat{\theta}-\theta)\leq x\}$ の限界は

$$\Phi(x\sqrt{I})+\phi(x\sqrt{I})\left\{\frac{x^2}{6\sqrt{n}I}(3J+2K)\right\}+o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\quad x>0 \qquad (1)$$

となることが証明される．$x<0$ の場合も同様に求められる（竹内(1974, p. 176)）．ここに I, J, K は $\underset{\sim}{X}_n$ に対する対数尤度 $l(\theta)$を用いて

$$I=-\lim\frac{1}{n}E_\theta\left\{\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}\log l(\theta)\right\}$$

$$J=\lim\frac{1}{n}E_\theta\left\{\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}\log l(\theta)\frac{\partial}{\partial\theta}\log l(\theta)\right\}$$

$$K=\lim\frac{1}{n}E_\theta\left\{\frac{\partial}{\partial\theta}\log l(\theta)\right\}^3$$

で定義される．すなわち $\hat{\theta}_n$ の2次漸近分布が(1)式で与えられるとき，$\hat{\theta}$ は2次漸近有効である．

さらに一歩進めて，3次漸近有効性について考えよう．しかし3次 AMU 推定量の中で3次漸近分布の集中度を最大にするような推定量は，一般には在存しないことが知られているので，推定量を次のように制限して議論をおこなう．すなわち $\hat{\theta}_n$ は BAN で3次 AMU 推定量であり，

$$\sqrt{n}(\hat{\theta}_n-\theta)=\frac{Z_1(\theta)}{I(\theta)}+\frac{1}{\sqrt{n}}Q(\theta)+o_p\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$$

という形に展開されるものとする．ここに $Z_1=\frac{1}{\sqrt{n}}\frac{\partial}{\partial\theta}\log l(\theta)$，また $I(\theta)$ はフィッシャーの情報量である．そうして

$$Q(\theta)=O_p(1),\ E(Z_1(\theta)Q(\theta)^i)=o(1),\quad (i=1,2)$$

であるとする．このような推定量のクラスをクラス D という．このとき $\sqrt{n}(\hat{\theta}-\theta)$ の漸近分布は，$\sqrt{n}(\hat{\theta}-\theta)$ の4次までの，次のような漸近キュムラントによって定められる．

$$\mu_1=E(Q)$$

$$\tilde{\mu}_1^{(3)}=-\frac{1}{6}\tilde{\mu}_3^{(3)}+o\left(\frac{1}{n}\right)$$

$$\tilde{\mu}_2^{(3)}=\frac{1}{I}+\frac{2}{nI}\frac{\partial\mu_1}{\partial\theta}+\frac{1}{n}V(Q)+o\left(\frac{1}{n}\right)$$

$$\tilde{\mu}_3^{(3)}=\frac{\beta_3}{\sqrt{n}}+\frac{3}{2nI}E(Z_1\tilde{Q}^2)+o\left(\frac{1}{n}\right),\ \tilde{Q}=Q-E(Q)$$

$$\tilde{\mu}_4^{(3)}=\frac{\beta_4}{n}+o\left(\frac{1}{n}\right).$$

クラス D においては，これらのうち推定量に依存する項は $V(Q)$ と $E(Z_1\tilde{Q}_2)$ だけである．残りの項は，先の I, J, K によって定められる．仮定により $E(Z\tilde{Q}^2)=o(1)$ であるからこの項は3次漸近分布の中で無視できる．そうして3次漸近有効性の理論によれば，$\sqrt{n}(\hat{\theta}-\theta)$ の3次の漸近分布の集中確率は $V(Q)$ が最小になるときであることが知られている．さらに $V(Q)$ が最小となるための必要十分条件，すなわちクラス D において $\hat{\theta}_n$ が3次漸近有効となるための必要十分条件は，Cを定数とし

$$Z_2=\frac{1}{\sqrt{n}}\left\{\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}\log\ l(\theta)-E\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}\log l(\theta)\right\}\text{とおくとき}$$

$$\sqrt{n}(\hat{\theta}-\theta)=\frac{1}{I}Z_1+\frac{1}{\sqrt{n}I^2}Z_1Z_2-\frac{3J+K}{2\sqrt{n}I^3}Z_1^2+\frac{C}{\sqrt{n}}+o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\qquad(2)$$

と展開されることである（竹内 1981，p.12）．クラス D の中の2つの推定量においては $V(Q)$ を比較して一致していれば，分布が限界に到達しているかどうかは別にして $O(n^{-1})$ まで両者の分布が等しいことが言える．

次に以上の議論を多次元母数 $\Theta=(\theta_1,\ \theta_2,\ \cdots,\ \theta_p)'$ の場合に拡張したい．その場合，3次 AMU の意味が少し変わってくる．Θ の推定量 $\hat{\Theta}$ の個々の要素 $\hat{\theta}_\alpha$ が，全て3次 AMU のとき，$\hat{\Theta}$ を3次 AMU と定義する (Akahira (1982))．いま Θ が BAN で3次 AMU であり，

$$\sqrt{T}(\hat{\Theta}-\Theta)=\underset{\sim}{U}+Q/\sqrt{T}+o_p\left(\frac{1}{\sqrt{T}}\right)$$

と展開されたとしよう．このとき $Q=O_p(1)$, $E(U_\alpha\tilde{Q}_\beta{}^k)=o(1)$, $(k=1, 2)$ が満たされるとき，$\hat{\Theta}$ はクラス D に属するという．$\sqrt{T}(\hat{\Theta}-\Theta)$ の3次漸近分布は，Taniguchi (1984b, (7.6)式) 等に示されている．その式において，推定量に依存する量は $\mathrm{Cov}(Q_\alpha, Q_\beta)$ だけである．そして，その漸近分布の集中確率は $\mathrm{Cov}(Q_\alpha, Q_\beta)$ が最小のとき，最大化される．ただしその分布は多次元分布であるから，最大化された分布の限界は座標軸 $(y_1, y_2, \cdots, y_p)$ に依存する．その限界に達したとき，すなわち集中確率が最大化されたとき，その推定量 $\hat{\Theta}$ は (coordinatewise) 3次漸近有効推定量という．いまモデルの対数尤度 $l=l(\theta_1, \theta_2, \cdots, \theta_m)$ に関して

$$Z_i=\frac{1}{\sqrt{T}}\frac{\partial l}{\partial\theta_i},\quad Z_{ij}=\frac{1}{\sqrt{T}}\left\{\frac{\partial^2 l}{\partial\theta_i\partial\theta_j}-E\frac{\partial^2 l\partial}{\theta_i\partial\theta_j}\right\}$$

とし，$Z^{(1)}=(Z_1, \cdots, Z_p)$, $Z^{(2)}=(Z_{ij})$ とする．また $I(\Theta)$ を情報行列とし，$\underset{\sim}{U}=I(\Theta)^{-1}Z^{(1)}$ とおく．このとき(2)の拡張として次の補題が成立する．

補題 (Taniguchi 1984b)

$\hat{\Theta}$ がクラス D に属するとき，$\sqrt{T}(\hat{\Theta}-\Theta)$ が

$$\sqrt{n}(\hat{\Theta}-\Theta)=\underset{\sim}{U}+\frac{1}{\sqrt{T}}I(\Theta)^{-1}\underset{\sim}{Z}^{(2)}\underset{\sim}{U}$$

$$+\frac{1}{2\sqrt{T}}I(\Theta)^{-1}R_{\cdots}\circ\underset{\sim}{U}\circ\underset{\sim}{U}+\frac{1}{\sqrt{T}}\underset{\sim}{\xi}+o_p\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\quad(3)$$

と展開されるならば，$\mathrm{Cov}(Q_i, Q_j)$ は最小化される．ここに $\underset{\sim}{\xi}$ は定数ベクトル，$R_{\cdots}=\{R_{ijk}\}$, $R_{ijk}=-K_{ijk}-J_{ijk}-J_{jki}-J_{kij}$, $R_{\cdots}\circ U\circ U$ は p 次元ベクトルで，その要素は $\sum_{j,k}R_{ijk}U_jU_k$ である．また $J_{ijk}=E(Z_iZ_{jk})$, $K_{ijk}=\sqrt{T}E(Z_iZ_jZ_k)$ である．

この補題より，$\hat{\Theta}$ がクラス D に属しかつ(3)のように展開されれば，それは3次漸近有効であることが分る．また，クラス D の2つの推定量において，$\mathrm{Cov}(Q_i, Q_j)$ が一致すれば，両者の分布は $O(n^{-1})$ まで一致することが言える．

3　一般線型回帰モデル

攪乱項の分散共分散行列が，正値定符号行列であるような，線型回帰モデル

$$y=X\beta+u,\ u\sim N(0,\ \Omega(\theta)) \tag{4}$$

を，ここでは一般線型回帰モデルと呼ぶことにする．ここに，

y : $T\times 1$ の従属変数の観測値ベクトル，

X : $T\times k$ の独立変数の定数行列，

β : $k\times 1$ の係数ベクトル，

u : $T\times 1$ の攪乱項ベクトル，

$\Omega(\theta)$: $T\times T$ の正値定符号分散共分散行列，

θ : 未知パラメータ $\theta_1,\ \theta_2\cdots,\ \theta_r$ のベクトル．r は大きくないものとする．

よく知られているように，$\Omega(\theta)$ が既知であれば一般化最小2乗推定量

$$\bar{\beta}=[X'\Omega^{-1}(\theta)X]^{-1}X'\Omega^{-1}(\theta)y \tag{5}$$

は，最良線型不偏推定量 (BLUE) である．$\bar{\beta}$ はエイトキン推定量とも呼ばれる．θ が未知の場合（しかし$\Omega(\theta)$ の構造は知られているとする），まず何らかの方法によって θ の推定値 $\hat{\theta}$ を求め，次に $\hat{\theta}$ を(5)に代入し，β を

$$\hat{\beta}=[X'\Omega^{-1}(\hat{\theta})X]^{-1}X'\Omega^{-1}(\hat{\theta})y \tag{6}$$

によって推定することができる．この $\hat{\beta}$ は，2段階エイトキン推定量と呼ばれることがあるが，本稿では単に2段階推定量と呼ぶ．θ の推定法は，$\Omega(\theta)$ の構造にそくした種々の方法が取られる．さらに最尤法や，反復数値計算によって推定する方法など，様々な方法が存在する．以下において(6)における $\hat{\beta}$ を次のような条件を満たすクラスに限定する．

1. $\hat{\theta}$ は u の偶関数である．
2. $\hat{\theta}$ は漸近的に有効推定量である．
3. $\Lambda_{11}=\left[\frac{1}{T}X'\Omega^{-1}(\theta)X\right]^{-1}$ とおくとき

$$\sqrt{T}\begin{pmatrix}\hat{\beta}-\beta\\ \hat{\theta}-\theta\end{pmatrix}\overset{asy}{\sim} N\left(0,\begin{bmatrix}\Lambda_{11} & 0\\ 0 & \Lambda_{22}\end{bmatrix}\right)$$ である．

ここに $A \overset{asy}{\sim} B$ は，A は漸近的に分布 B に従うと読む．これらの条件を満たすような推定量のクラスをここでは G-クラス推定量と呼ぶことにしよう．後に見るように，ふつうよく用いられるような2段階推定量や最尤推定量は G-クラスに含まれる．Magnus (1978) は β の最尤推定量の漸近的正規性のための条件を詳細に検討するとともに，漸近的性質を調べている．

G-クラス推定量においては，$\hat{\theta}$ の推定効率が良いほど，$\hat{\beta}$ の推定効率も良いように思われるが，Taylor (1977, 1978) は，必ずしもそうではないことを示唆している．事実 Taylor (1980) は，パネルデータに対する回帰モデルにおいて，このことを例証している．これと同様の例は，他にもいくつか知られている．Srivastava (1970) および Srivastava and Upadhyaya (1978) は，ゼルナーモデルにおける制約付ゼルナー法，制約なしゼルナー法として知られる2つの G-クラス推定量の分散の漸近展開が T^{-2} の項まで一致することを示した．また Takeuchi and Morimune (1982) はゼルナーの2つの推定量と最尤推定量の分布の漸近展開は，3次の項まで等しいことを示した．他方，撹乱項が1階の自己回帰過程に従う場合，Toyooka (1982) は，2段階推定量と最尤推定量は，X に関する Grenander (1954) の条件のもとで，分散が T^{-2} の項まで等しくなることを示した．また，Kobayashi (1983) はこのモデルにおける，プレイス＝ウィステン法と呼ばれる推定法と最尤法の分散は T^{-2} まで一致することを示した．いずれの研究も，θ のより良い推定が，必ずしも β のより良い推定をもたらすわけではないことの例証である．このように個々のモデルごとに知られている事実を，もう少し一般的な見通しの良い型で述べることはできないであろうか．本稿の目的はこの問に対して，3次漸近有効性の観点からひとつの解答を与えることである．言い換えれば，G-クラス推定量が，この比較法によって“同等”であるための条件を明示することが目的である．

Rothenberg (1984) は3次漸近有効性には触れていないが，上のわれわれの問に対するひとつの解答を含んでいるように見える．彼は，$\hat{\theta}$ が

（i）　u の偶関数で，

（ii）　$\hat{\beta}$ とは独立に分布し，

（iii）　漸近的正規性，漸近的有効性を満たす

とき，いくつかの正則条件のもとで2段階推定量 $\hat{\beta}$ の1次結合 $c'(\hat{\beta}-\beta)$ の分布の正規近似を，次式によって与えた．

$$P_r\left[\frac{c'(\hat{\beta}-\beta)}{\sigma}\leq t\right]=\Phi\left(t-\frac{t^3-3t}{24T^2}a\right)+o(T^{-2}). \tag{7}$$

ここに Φ は，標準正規分布 $N(0,\ 1)$ の分布関数，

$$\sigma^2=c'(X'\Omega^{-1}X)^{-1}c\left[1+\frac{\mathrm{tr}\Lambda B}{T}+O(T^{-2})\right]$$

$$a=6tr\Lambda B\Lambda B$$

と定義され，Λは $\sqrt{T}(\hat{\theta}-\theta)$ の漸近分散共分散行列，B は X, Ω, c によって定められるある定数行列である．なお(7)式は β $\hat{\text{が}}$ 3次漸近中央不偏であることを示している．

彼の導出法は条件(ii)に強く依存している．彼のこの結果から，われわれは次のことを読み取ることができる．すなわち $c'(\hat{\beta}-\beta)$ の $O(T^{-2})$ までの分布の展開に対して，$\sqrt{T}(\hat{\theta}-\theta)$ は，その漸近分散共分散行列 Λ のみを通して影響する．彼の論文では，$\hat{\theta}$ の高次の項がなぜ効果を持たないのか，また彼の設けた仮定がどのように上の結論に影響しているのかといった点が必ずしも明確でない．そこで以下において，3次漸近有効性の立場からこれらの点を明らかにしつつ上記の問に答えていきたい．ここでRothenberg との論点の違いを明記しておく．彼の論文では(i)$\hat{\beta}$ の同時分布ではなくその1次結合 $c'\hat{\beta}$ しか扱われておらず，(ii)分布の近似に重点が置かれていて，3次漸近有効性については言及されていない．他方，われわれは (i)′ $\hat{\beta}$ の同時分布を扱い，(ii)′3次漸近有効性を考察する．

なお，モデル(4)に含まれる，不均一分散モデルやゼルナーモデルにおいては，G-クラス推定量より，単純な最小2乗推定量のほうが効率が良い場合もある（たとえば Kunitomo (1977), Metha and Swamy (1976) を見よ）．しかし本章においては，単純最小2乗法は考察の対象から除く．また Kariya (1980) および Kariya and Toyooka (1982) のように，モデル(4)の β の各種推定量の分散共分散行列の大小関係によって推定量の比較をおこなう方法がある．この接近法についても，本章では触れない．

4　G-クラス推定量の分布の比較

4.1　推定量の確率展開

G-クラス推定量 $\hat{\beta}$ の真値 β からの偏差は

$$\hat{\beta}-\beta=[X'\Omega^{-1}(\hat{\theta})X]^{-1}X'\Omega^{-1}(\hat{\theta})u \tag{8}$$

と表わすことができる．以下の展開のために次のような記号を導入する．

$$v'=(v_1,\ v_2,\ \cdots,\ v_p)$$
$$=(\hat{\theta}_1-\theta_1,\ \hat{\theta}_2-\theta_2,\ \cdots,\ \hat{\theta}_p-\theta_p)$$
$$A_0=X'\Omega^{-1}(\theta)X/T$$
$$z_0=X'\Omega^{-1}(\theta)u/T$$
$$A_i=\frac{\partial A_0}{\partial\theta_i},\quad A_{ij}=\frac{\partial^2 A_0}{\partial\theta_i\partial\theta_j},\ \cdots$$
$$z_i=\frac{\partial z_0}{\partial\theta_i},\ z_{ij}=\frac{\partial^2 z_0}{\partial\theta_i\partial\theta_j},\ \cdots.$$

ここで Rothenberg (1984) と同様の仮定をおく．

仮定1.　A_0 と z_0 は必要な次数まで θ_i に関して微分可能である．

仮定2.　$T\to\infty$ のとき，行列 A_0, A_i, $A_{ij}\cdots$ 等の極限が存在し，それらの極限値は非特異である．

仮定3.　$T\to\infty$ のとき，ベクトル $\sqrt{T}z_0$, $\sqrt{T}z_i$, $\sqrt{T}z_{ij}\cdots$ 等の分散共分散行列の極限が存在する．

次に $\sqrt{T}(\hat{\beta}-\beta)$ の確率展開を求めよう．

$$\sqrt{T}(\hat{\beta}-\beta)=\sqrt{T}\left(\frac{X'\Omega^{-1}(\hat{\theta})X}{T}\right)^{-1}\left(\frac{X'\Omega^{-1}(\hat{\theta})u}{T}\right)$$

において，右辺の（　）の中をテイラー展開することにより

$$\sqrt{T}(\hat{\beta}-\beta)=\left[A_0+\sum A_a v_a+\frac{1}{2}\sum A_{ab}v_a v_b+\cdots\right]^{-1}\times$$
$$\left[z_0+\sum z_a v_a+\frac{1}{2}\sum z_{ab}v_a v_b+\frac{1}{6}\sum z_{abc}v_a v_b v_c+\cdots\right]$$
$$\equiv[A_0+\Delta A]^{-1}[z_0+\Delta z]$$

となる．ここに ΔA と Δz はそれぞれの［　］の中の第2項以降をまとめたものである．ここで

$$[A_0+\Delta A]^{-1}=A_0^{-1}-A_0^{-1}\Delta A A_0^{-1}+A_0^{-1}\Delta A A_0^{-1}\Delta A A_0^{-1}\cdots$$

と展開し，整理すれば結局

$$\begin{aligned}\sqrt{T}(\hat{\beta}-\beta)=\sqrt{T}A_0^{-1}\Big[&z_0+\sum z_a v_a+\frac{1}{2}\sum z_{ab}v_a v_b+\frac{1}{6}\sum z_{abc}v_a v_b v_c\\&-\Big(\sum A_a v_a+\frac{1}{2}\sum A_{ab}v_a v_b\Big)A_0^{-1}z_0\\&-\Big(\sum A_a v_a+\frac{1}{2}Z A_{ab}v_a v_b\Big)\times\\&\Big(\sum z_a v_a+\frac{1}{2}\sum z_{ab}v_a v_b+\frac{1}{6}\sum z_{ab}v_a v_b v_c\Big)\\&+\Big(\sum A_a v_a+\frac{1}{2}\sum A_{ab}v_a v_b\Big)A_0^{-1}\times\\&\Big(\sum A_a v_a+\frac{1}{2}A_{ab}v_a v_b\Big)A_0^{-1}z_0+\cdots\Big].\end{aligned}$$

ここで $\bar{z}_0=\sqrt{T}z_0$, $\bar{z}_a=\sqrt{T}z_a$ とおき，2次の項まで取れば

$$=A_0^{-1}\bar{z}_0+A_0^{-1}\sum_a\frac{\bar{z}_a\bar{v}_a}{\sqrt{T}}+A_0^{-1}\sum_{a,b}A_a\bar{v}_a A_0^{-1}\frac{\bar{z}_0}{\sqrt{T}}+o_p\Big(\frac{1}{\sqrt{T}}\Big)$$

となる．ここでさらに

$$\bar{p}=A_0^{-1}\bar{z}_0,$$

$$z^{(2)}=\Big(\bar{z}_1,\ \bar{z}_2,\ \cdots,\ \bar{z}_p\Big)$$

$$\bar{v}=\sqrt{T}v$$

$A_{aij}=A_a$ の第 $(i,\ j)$ 要素

とおき，Hayakawa (1977) の演算子 $\circ$ を用いれば，上の確率展開は

$$\sqrt{T}(\hat{\beta}-\beta)=\bar{p}+\frac{1}{\sqrt{T}}A_0^{-1}\circ z^{(2)}\bar{v}+\frac{1}{\sqrt{T}}A_0^{-1}R\ldots\circ\bar{v}\circ\bar{p}+o_p\Big(\frac{1}{\sqrt{T}}\Big)\tag{9}$$

と簡潔に表わすことができる．ここに $R\ldots=\{A_{aij}\}$ と定義され，$R\ldots\circ\bar{v}\circ\bar{p}$ は k 次元ベクトルで，演算子 $\circ$ は，このベクトルの第 i 要素として $\sum_{a,j}A_{aij}\bar{v}_a\bar{p}_j$ をもたらすような演算を施すことを意味する．ここでさらに右辺の第2項と第3項をまとめて，

$$\sqrt{T}(\hat{\beta}-\beta)=\bar{p}+\frac{1}{\sqrt{T}}q+o_p\Big(\frac{1}{\sqrt{T}}\Big)\tag{10}$$

と表わそう．このとき $\bar{p}=O_p(1)$, $q=O_p(1)$ は明らかである．

4.2　G-クラス推定量の3次漸近有効性

次に，$\hat{\beta}$ はクラス D に属することを見よう．まず $\hat{\beta}$ は，G クラスの条件より BAN 推定量であることは明らかである．次に3次 AMU 条件のチェックであるが，(7)式の直後に述べたように $\hat{\beta}$ は3次 AMU 推定量である．またこの章の補論の方法によっても $\hat{\beta}$ の3次 AMU 条件は検証することができる．D クラスの第3の条件 $E(\bar{p}_\alpha q_\beta)=o(1)$，$E(\bar{p}_\alpha q_\beta q_\gamma)=o(1)$ は次のように示される．定義により，

$$\bar{p}=\sqrt{T}\ (X'\Omega^{-1}(\theta)X)^{-1}X'\Omega^{-1}(\theta)u=\sqrt{T}(\bar{\beta}-\beta)$$

$$\bar{v}=\sqrt{T}(\hat{\theta}-\theta)$$

である．ただし $\bar{\beta}=[X'\Omega^{-1}(\theta)X]^{-1}X'\Omega^{-1}(\theta)y$ である．G クラスの第3の条件は

$$\sqrt{T}\begin{pmatrix}\hat{\beta}-\beta\\ \hat{\theta}-\theta\end{pmatrix}\overset{asy}{\sim}N\left(0,\begin{bmatrix}\Lambda_{11} & 0\\ 0 & \Lambda_{22}\end{bmatrix}\right)$$

であるが，この極限正規分布は $\sqrt{T}(\bar{\beta}-\beta,\ \hat{\theta}-\theta)$ の分布であるから $\bar{p}=\sqrt{T}(\bar{\beta}-\beta)$ と $\bar{v}=\sqrt{T}(\hat{\theta}-\theta)$ は漸近的に独立である．次に定義より $\bar{z}_0=A_0\bar{p}$ であるから，$\bar{z}_0$ と $\bar{v}$ の漸近分布は

$$N\left(0,\begin{bmatrix}A_0\Lambda_{11}A_0 & 0\\ 0 & \Lambda_{22}\end{bmatrix}\right)$$

である．したがって $\bar{z}_0$ と $\bar{v}$ は漸近的に独立，したがってまた $\bar{z}_i=\sqrt{T}\dfrac{\partial z_0}{\partial\theta_i}$ と $\bar{v}$ は漸近的に独立である．ここで $\bar{p}$, $\bar{z}_i$, $\bar{v}$ の要素を $\bar{p}_i, \bar{p}_j, \cdots$, $\bar{z}_i$, $\bar{z}_j$, $\bar{z}_k$, $\cdots\bar{v}_m$, $\bar{v}_n$, $\cdots$ によって表わそう．このとき q の第1項の要素は $\bar{z}_i\bar{v}_m$ という型の項の和，第2項の要素は $\bar{p}_j\bar{v}_m$ という型の項の和として表わされることが分る．したがって $E(\bar{p}_r q_s)$ は $E(\bar{p}_i\bar{z}_j\bar{v}_m)$ という型の項の和と，$E(\bar{p}_i\bar{p}_j u_m)$ という型の項の和として表わされる．いま $(\bar{p}_i, \bar{z}_j)$ と v_m は漸近的に独立に正規分布に従うから，漸近的に

$$E(\bar{p}_i\bar{z}_j\bar{v}_m)=E(\bar{p}_i\bar{z}_j)E(\bar{v}_m)=0$$

$$E(\bar{p}_i\bar{p}_j\bar{v}_m)=E(\bar{p}_i\bar{p}_j)E(\bar{v}_m)=0$$

が成立する．よって $E(\bar{p}_r q_s)=o(1)$ である．同様に $E(\bar{p}_r q_s q_t)$ の構成要

素についても漸近的に

$$E(\bar{p}_i\bar{z}_j\bar{z}_k\bar{v}_m\bar{v}_n)=E(\bar{p}_i\bar{z}_j\bar{z}_k)E(\bar{v}_m\bar{v}_n)=0$$

$$E(\bar{p}_i\bar{p}_j\bar{p}_k\bar{v}_m\bar{v}_n)=E(\bar{p}_i\bar{p}_j\bar{p}_k)E(\bar{v}_m\bar{v}_n)=0$$

が成立するから $E(\bar{p}_r q_s q_t)=o(1)$ である．

以上のことから G-クラス推定量 $\hat{\beta}$ は，クラス D に含まれることが言えた．すなわち G⊂D である．

モデル(4)における最尤推定量は，対数尤度

$$l=\text{const.}-\frac{1}{2}\log|\Omega(\theta)|-\frac{1}{2}(y-X\beta)'\Omega^{-1}(\theta)(y-X\beta)$$

から導かれる尤度方程式 $\dfrac{\partial l}{\partial\beta}=0,\ \dfrac{\partial l}{\partial\theta}=0$ より

$$\beta=[X'\Omega^{-1}(\theta)X]^{-1}X'\Omega^{-1}(\theta)y$$

$$\mathrm{tr}\left(\frac{\partial\Omega^{-1}(\theta)}{\partial\theta_i}\Omega(\theta)\right)=(y-X\beta)'\left(\frac{\partial\Omega^{-1}(\theta)}{\partial\theta_i}\right)(y-X\beta)$$

の解として得られる．θ の最尤解を $\tilde{\theta}$ とすれば，最尤推定量 $\tilde{\beta}$ は

$$\tilde{\beta}=[X'\Omega^{-1}(\tilde{\theta})X]^{-1}X'\Omega^{-1}(\tilde{\theta})y$$

によって与えられる．$u=y-X\beta$ であるから対数尤度 l は u の偶関数である．よって $\tilde{\theta}$ は u の偶数関数であり，また漸近的に有効である．さらに簡単な計算により情報行列は

$$I=\begin{pmatrix} X'\Omega^{-1}(\theta)X & 0 \\ 0 & I_{22}\end{pmatrix} \tag{11}$$

とブロック対角型になることが分る．よって最尤推定量はクラス G に入る．従って当然最尤推定量は3次 AMU 条件を満たし，クラス D に属する．さらに $\sqrt{T}(\tilde{\beta}-\beta)$ の展開式(9)は(3)の型に書けていることが容易に示されるので，前節に紹介した Taniguchi (1984b) の補題より最尤推定量 $\tilde{\beta}$ は3次漸近有効である．

G⊂D が分ったから，クラス G に属する推定量の分布を比較するためには，3次漸近有効性の理論の教えるところにより，$\mathrm{Cov}(q_r, q_s)$ の漸近値のみに着目すればよい．ところで $\mathrm{Cov}(q_r, q_s)$ は，$E(\bar{z}_i\bar{z}_j\bar{v}_m\bar{v}_n)$ という型の項の和であり，z_i と v_m の漸近的独立性より，それは漸近的に

$$\lim_{T\to\infty}E(\bar{z}_i\bar{z}_j\bar{v}_m\bar{v}_n)=\lim_{T\to\infty}E(\bar{z}_i\bar{z}_j)\lim_{T\to\infty}E(\bar{v}_m\bar{v}_n)$$

と書くことができる．$\lim E(\bar{z}_i\bar{z}_j)$ は Λ_{11} によって定まり，$\lim E(\bar{v}_m\bar{v}_n)$ は Λ_{22} によって定まる．またクラス G においては Λ_{11} は全ての推定量に共通だから，結局分布の比較においては，Λ_{22} だけを比較すればよいことが分る．しかしさらにクラス G において $\hat{\theta}$ は漸近的有効であったから，Λ_{22} もこのクラスの推定量では常に一致している．ゆえにクラス G における全ての推定量の分布は，$O(T^{-1})$ のオーダーまで一致する．そうしてクラス G には，3次漸近有効な最尤推定量が含まれているのだから結局，

〔**定理**〕 G-クラス推定量は，3次漸近有効である．

一般的に $\tilde{\beta}$ と $\tilde{\theta}$ は明示的に書き表わすことができないので，数値計算によって求める他ない．たとえば次のような反復法が考えられる．

1. 初期値 $\beta=\beta_0$ を与える．
2. $y-X\beta_0=e_0$ を計算し，e_0 を2番目の尤度方程式に代入し $\theta=\theta_0$ を求める．このとき一意的に θ_0 が定まらないときは，l を最大にするような θ_0 を選ぶ．
3. $\beta_1=[X'\Omega^{-1}(\theta_0)X]^{-1}X'\Omega^{-1}(\theta_0)y$ を計算する．

以上1～3までの過程を収束するまで反復する．ところで β_0 として $\hat{\beta}_{OLS}$ を用いた場合，最小2乗残差の2乗和 $e'e$ は u の偶関数であるから，反復の第 $i(i=1, 2, \cdots)$ 過程における β_i は，G-クラス推定量である．したがってこの場合，最尤法における数値計算を反復することによっては，推定効率を全く改善することができない．

クラス G は，理論的にはかなり制約されたクラスであるが，後に見られるようなモデル(4)に対してよく用いられる自然な推定量は，ほとんどクラス G に含まれる．

5　推定量の比較

この節では，計量経済分析においてしばしば現われるいくつかの回帰モデルと，それに対する2～3の推定量の3次漸近有効性を吟味する．そのとき，比較される推定量が共にクラス G に含まれることが言えれば，上の〔定理〕により，それらは3次漸近有効である．以下の比較において，

クラスGの条件1が満たされることは明らかである．また条件2，3を調べるためには，次の手順をふめば十分である．すなわち

1；最尤推定量における $\tilde{\beta}$ と $\tilde{\theta}$ の漸近共分散行列を計算し，2；比較の対象となる推定量 $\hat{\beta}$ と $\hat{\theta}$ の漸近共分散行列を計算し，3；両者が一致すれば $\hat{\beta}$ は3次漸近有効である．

例1　SUR モデルにおける制約付，制約なしゼルナー推定量と最尤推定量

このモデルにおける対数尤度関数は

$$l=-\frac{k}{2}\log 2\pi-\frac{1}{2}\log|\Omega|-\frac{1}{2}(y-X\beta)'\Omega^{-1}(y-X\beta)$$

である．前節(11)式に示されるように情報行列はブロック対角で $I_{11}=X'\Omega^{-1}X$ である．I_{22} は次のように計算される．いま $\theta'=(\sigma_{11},\sigma_{12},\sigma_{22})=(\theta_1,\ \theta_2,\ \theta_3)$ とおき，$\dfrac{\partial\Omega}{\partial\theta_i}=\Omega_i$ で表わせば

$$\frac{\partial^2 l}{\partial\theta_1{}^2}=l_{11}=\frac{1}{2}\operatorname{tr}\Omega^{-1}\Omega_1\Omega^{-1}\Omega_1+u'\Omega^{-1}\Omega_1\Omega^{-1}\Omega_1\Omega^{-1}u$$

$$E(l_{11})=\frac{1}{2}\operatorname{tr}\begin{pmatrix}\sigma^{11}I & \sigma^{12}I\\ \sigma^{21}I & \sigma^{22}I\end{pmatrix}\begin{pmatrix}I & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\sigma^{11}I & \sigma^{12}I\\ \sigma^{21}I & \sigma^{22}I\end{pmatrix}\begin{pmatrix}I & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}=\frac{1}{2}(\sigma^{11})^2T.$$

ここに σ^{ij} は Ω^{-1} の要素である．以下同様の計算により

$$E(l_{12})=-\sigma^{11}\sigma^{12}T$$
$$E(l_{13})=-\frac{1}{2}(\sigma^{12})^2T$$
$$E(l_{22})=[\sigma^{11}\sigma^{22}+(\sigma^{12})^2]T$$
$$E(l_{23})=\sigma^{12}\sigma^{22}T$$
$$E(l_{33})=\frac{1}{2}(\sigma^{22})^2T.$$

よって

$$I_{22}=T\begin{pmatrix}\frac{1}{2}(\sigma^{11})^2 & \sigma^{11}\sigma^{12} & \frac{1}{2}(\sigma^{12})^2\\ \sigma^{11}\sigma^{12} & \sigma^{11}\sigma^{23}+(\sigma^{12})^2 & \sigma^{12}\sigma^{22}\\ \frac{1}{2}(\sigma^{12})^2 & \sigma^{12}\sigma^{22} & \frac{1}{2}(\sigma^{22})^2\end{pmatrix}.$$

これより

$$I_{22}^{-1}=\frac{2}{T}\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\sigma_{11}^2 & 2\sigma_{11}\sigma_{12} & \frac{1}{2}\sigma_{12}^2\\ \sigma_{11}\sigma_{12} & \frac{1}{2}(\sigma_{11}\sigma_{22}+(\sigma_{12})^2) & \sigma_{12}\sigma_{22}\\ \frac{1}{2}\sigma_{12}^2 & \sigma_{12}\sigma_{22} & \frac{1}{2}\sigma_{22}^2\end{pmatrix}$$

を得る．ゆえに $\sqrt{T}(\hat{\theta}-\theta)$ の漸近分散 Λ_{22} は $\Lambda_{22}=\lim_{T\to\infty} TI_{22}^{-1}$ によって与えられる．

次にSURモデルにおける2つの2段階推定量について Λ_{22} を計算する．制約付ゼルナー推定量は σ_{ij} を

$$s_{11}=\frac{1}{T}y_1'M_1y_1,\quad s_{12}=\frac{1}{T}y_1'M_1M_2y_2,\quad s_{22}=\frac{1}{T}y_2'M_2y_2$$

によって推定する．ここに $M_i=I-X_i(X_i'X_i)^{-1}X_i'$ である．そして $\hat{\theta}=(s_{11},\ s_{12},\ s_{22})$ とおけば，$\sqrt{T}(\hat{\theta}-\theta)$ の漸近共分散行列は $\sqrt{T}s_{ij}=\bar{s}_{ij}$ のキュムラントから計算できる．ここで $p_1=Ts_{11}$, $p_2=Ts_{22}$, $p_3=Ts_{12}$ とおくとき，p_1, p_2, p_3 の積率母関数は

$$\phi(t)=E(t_1p_1+t_2p_2+t_3p_3)$$

$$=E\left\{\exp\left[(u_1',\ u_2')\begin{pmatrix}t_1M_1, & \frac{1}{2}t_3N\\ \frac{1}{2}t_3N', & t_2M_2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}u_1\\ u_2\end{pmatrix}\right]\right\}$$

$$=E\{\exp[u'Qu]\}=K|\Omega|^{-\frac{1}{2}}|\Omega-2Q|^{-\frac{1}{2}}$$

である．ただし $N=M_1M_2$, K は定数．そして

$$Q=\begin{pmatrix}t_1M_1, & \frac{1}{2}t_3N\\ \frac{1}{2}t_3N' & t_2M_2\end{pmatrix}$$

である．したがってキュムラント母関数 $\psi(t)$ は

$$\psi(t)=\log\phi(t)$$

$$=\text{const.}-\frac{1}{2}|\Omega^{-1}-2Q|$$

と表わされる．したがって $\bar{s}_{ij}=\sqrt{T}s_{ij}=p_k/\sqrt{T}$ の2次のキュムラントは，p_k のキュムラントを T で割ることによって得られる．上のキュムラント

母関数から $p_k/\sqrt{T}$ の2次のキュムラントを計算すると

$$\phi_{11}=2\sigma_{11}^2(T-k_1)/T,\ \phi_{12}=2\sigma_{12}^2\,\mathrm{tr}\,M_1M_2/T$$

$$\phi_{13}=2\sigma_{11}\sigma_{12}trM_1M_2/T,\ \phi_{22}=2\sigma_{22}^2(T-k_2)/T$$

$$\phi_{23}=2\sigma_{12}\sigma_{22}\mathrm{tr}M_1M_2/T,\ \phi_{33}=(\sigma_{12}^2+\sigma_{11}\sigma_{22})\mathrm{tr}(M_1M_2)^2/T$$

となる．ここで

$$\frac{T-k_i}{T}=1+O\left(\frac{1}{T}\right)$$

$$\begin{aligned}&\mathrm{tr}M_1M_2/T\\&\quad=\mathrm{tr}[I-X_1(X_1'X_1)^{-1}X_1'-X_2(X_2'X_2)^{-1}X_2'\\&\qquad+X_1(X_1'X_1)^{-1}X_1'X_2(X_2'X_2)^{-1}X_2]/T\\&\quad=1+O\left(\frac{1}{T}\right),\quad\left(\frac{X_i'X_j}{T}=O(1)\ \text{に注意}\right).\end{aligned}$$

同様に

$$\mathrm{tr}(M_1M_2)^2/T=1+O\left(\frac{1}{T}\right)$$

であるから $\sqrt{T}(\hat{\theta}-\theta)$ の漸近共分散 Λ_{22} は

$$\Lambda_{22}=2\begin{pmatrix}\sigma_{11}^2 & \sigma_{12}^2 & \sigma_{11}\sigma_{12}\\ \sigma_{12}^2 & \frac{1}{2}(\sigma_{11}^2+\sigma_{11}\sigma_{22}) & \sigma_{12}\sigma_{22}\\ \sigma_{11}\sigma_{12} & \sigma_{12}\sigma_{22} & \sigma_{22}^2\end{pmatrix}$$

である．これは上に見た最尤推定量の場合と一致している．

他方，制約なしゼルナー推定法においては

$$s_{11}=\frac{1}{T}y_1'My_1,\ \ s_{12}=\frac{1}{T}y_1'My_2,\ \ s_{22}=\frac{1}{T}y_2'My_2$$

を用いる．ここに $M=I-X(X'X)^{-1}X'$ である．キュムラントの計算は，上の結果において M_1, M_2 を全て M に置きかえればよい．したがって $\mathrm{tr}\ M_1M_2=\mathrm{tr}(M)^2=\mathrm{tr}M=T-k$ より $\sqrt{T}(\hat{\theta}-\theta)$ の漸近共分散 Λ_{22} は，上の制約なしの場合と全く同じになる．またいずれの場合も s_{ij} は，明らかに u の偶関数である．よって，最尤推定量，ゼルナーの2種類の推定量の分布は $O(T^{-1})$ の項まで一致し，3者は3次漸近有効推定量であることが言えた．

例 2　撹乱項が 1 階の自己回帰過程に従う回帰モデル[1)]

モデル(4)において撹乱項が 1 階の自己回帰過程 $u_t=\rho u_t+\varepsilon_t$, $\varepsilon_t\sim IN(0, \sigma_t^2)$, $|\rho|<1$ のとき，よく知られているように

$$\Omega^{-1}=a\begin{pmatrix} 1 & -\rho & & & 0 \\ -\rho & 1+\rho^2 & \ddots & & \\ & & & 1+\rho^2 & -\rho \\ 0 & & & -\rho & 1 \end{pmatrix}$$

である．ここで a はある定数であるが，$\hat{\beta}$ の中では相殺されるので，$a=1$ としてさしつかえない．プレイス＝ウィステン法と呼ばれる 2 段階推定法は，最小 2 乗残差 e にもとづく

$$\hat{\rho}=\sum_{t=2}^{T} e_t e_{t-1} \Big/ \sum_{t=1}^{T-1} e_t^2$$

を用いて β を

$$\hat{\beta}=[X'\Omega^{-1}(\hat{\rho})X]^{-1}\ X'\Omega^{-1}(\hat{\rho})y$$

によって推定する．くり返しプレイス＝ウィステン法では，この $\hat{\beta}$ を用いてさらに$e_1=y-X\hat{\beta}\to\hat{\rho}_1\to\hat{\beta}_2\to e_2\to\cdots$を収束するまでくり返す．ここでは，この 2 つを単純 $P-W$ 法，反復 $P-W$ 法と呼んで区別することにする．Kobayashi (1983) は，このくり返し法による推定量 $\hat{\beta}_{pw}$ と最尤推定量 $\tilde{\beta}$ の分散は T^{-2} の項まで等しいことを示した．

以下において単純 $W-P$ 推定量と，最尤推定量は 3 次漸近有効推定量であることを示す．$\hat{\rho}$ の極限分布は $\sum\varepsilon_t\varepsilon_{t-1}/\sum\varepsilon_t^2$ の極限分布と同じであるから，それは漸近的に正規分布 $N(\rho, \sqrt{1-\rho^2})$ に従う（例えば Phillips (1977b) を見よ）．したがって

$$\sqrt{T}\begin{pmatrix}\hat{\beta}-\beta \\ \hat{\rho}-\rho\end{pmatrix} \overset{asy}{\sim} N\left[\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}\left(\frac{1}{T}X'\Omega X\right)^{-1} & 0 \\ 0 & 1-\rho^2\end{pmatrix}\right]$$

である．また β と ρ に対する情報行列の逆行列は

$$I^{-1}=\begin{bmatrix}(X'\Omega^{-1}X)^{-1} & 0 \\ 0 & \dfrac{T(1-\rho^2)^2}{(T-1)\{T(1-\rho^2)+2\rho^2\}}\end{bmatrix}$$

と計算される．$\lim_{T\to\infty} T\cdot I_{22}^{-1}=1-\rho^2$ であるから

$$\Lambda_{22}=1-\rho^2$$

となり，単純 $P-W$ 推定量と最尤推定量は，3次漸近有効推定量であることが言えた．

Park and Mitchell (1980) は，モンテカルロ実験によって反復 $P-W$ 法は，単純 $P-W$ 法よりわずかではあるが明らかに優れていることを見いだし，反復 $P-W$ 法を使用することを勧めている．しかし彼らの結果は，反復 $P-W$ 法と単純 $P-W$ 法との差はわずか（3次漸近的に同等）であることを例証していると見ることもできる．彼らの主目的は，説明変数 X に時間的上昇トレンドが存在する場合の推定量の比較である．そのようなトレンドがある場合は，$\lim_{T\to\infty} X'\Omega^{-1}X/T$ が収束しないので，$1/\sqrt{T}$ のオーダーで整理するようなエッジワース展開を適用することはできない．そのときは，$1/\sqrt{T}$ の代りに $1/\sqrt{X'_iX_i}$ のオーダーで展開することによって同様の結論が得られることが予想される．

例3　不均一分散モデル

次のような不均一分散をもつモデルを考えよう．

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix}\beta+\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}\sim N(0,\ \Omega):\Omega=\begin{pmatrix}\sigma_{11}I & 0 \\ 0 & \sigma_{22}I\end{pmatrix}.$$

ここで簡単化のために $i=1,\ 2$ に対して $X_i:T\times k,\ y_i:T\times 1,$ とする．また $X'=(X_1',\ X_2')$ としておく．この場合の2段階推定量 $\hat{\beta}$ は，σ_{ii} を

$$\hat{\sigma}_{ii}=e_i'e_i/(T-k):e_i=[I-X_i(X_i'X_i)^{-1}X_i']y_i$$

によって推定し，$\hat{\sigma}_{ii}$ を Ω の σ_{ii} に代入することによって得られる．

ところで明らかに $\hat{\beta}\overset{asy}{\sim}N(\beta,(X'\Omega^{-1}X)^{-1})$ である．また $(T-k)\ \hat{\sigma}_{11}\sim$

$\hat{\sigma}_{11}\chi^2_{T-k}$, $(T-\mathrm{k})\hat{\sigma}_{22}\sim\sigma_{22}\chi^2_{T-k}$ であるから $\mathrm{Var}(\hat{\sigma}_{11})=2\sigma_{11}/(T-k)$, $\mathrm{Var}(\hat{\sigma}_{22})=2\sigma_{22}/(T-k)$ である．また $\hat{\sigma}_{ii}$ と $X'u$ は独立に分布し，χ^2 分布は漸近的に正規分布に従うから

$$\sqrt{T}\begin{bmatrix}\hat{\beta}-\beta\\ \hat{\sigma}_{11}-\sigma_{11}\\ \hat{\sigma}_{22}-\sigma_{22}\end{bmatrix}\overset{asy}{\sim}N[0,\ \Lambda]$$

$$\Lambda=\begin{pmatrix}\left(\frac{1}{T}X'\Omega^{-1}X\right)^{-1} & 0\\ 0 & \Lambda_{22}\end{pmatrix},\quad \Lambda_{22}=diag(2\sigma_{11},\ 2\sigma_{22})$$

である．

他方 β と σ_{ii} に対する情報行列の逆行列 I^{-1} は

$$I^{-1}=\begin{pmatrix}(X'\Omega^{-1}X)^{-1} & & 0\\ & \frac{2\sigma_{11}^2}{T} & \\ 0 & & \frac{2\sigma_{22}}{T}\end{pmatrix}$$

であるから，明らかに $TI^{-1}=\Lambda$ である．よって $\hat{\beta}$ と最尤推定量は，3次漸近有効推定量である．

例4　パネルデータの回帰分析

Taylor (1980) は，N 個の個体に関する T 個の時点におけるパネルデータ $(Y_{it}^*,\ X_{it}^*)$, $i=1,\ \cdots,\ N$, $t=1,\ \cdots,\ T$ に対する回帰モデル

$$Y_{it}^*=X_{it}^*\beta+\mu_i+\varepsilon_{it}^* \tag{12}$$

の推定問題を考察している．ここに μ_i, ε_{it}^* は撹乱項で，それぞれ独立に正規分布 $N(0,\ \sigma_\mu^2)$, $N(0,\ \sigma_\varepsilon^2)$ に従うものと仮定する．また説明変数 X_{it}^* は μ_i, ε_{it}^* と無相関であるとする．ここで個体ごとにデータをグループ分けして，(12)を

$$Y^*=X^*\beta+\mu+\varepsilon^* \tag{13}$$

と表わす．ここに

$$Y^*=(Y_{11}^*,\ Y_{12}^*,\ \cdots,\ Y_{1T}^*,\ \cdots,\ Y_{N1}^*,\ Y_{N2}^*,\ \cdots,\ Y_{NT}^*)$$

$$X^*=(X_{11}^*,\ X_{12}^*,\ \cdots,\ X_{1T}^*,\ \cdots,\ X_{N1}^*,\ X_{N2}^*,\ \cdots,\ X_{NT}^*)$$

$$\mu \quad =(\mu_1^*,\ \mu_1^*,\ \cdots,\ \mu_1^*,\ \cdots,\ \mu_N^*,\ \mu_N^*,\ \cdots,\ \mu_N^*)$$

$$\varepsilon^* \ =(\varepsilon_{11}^*,\ \varepsilon_{12}^*,\ \cdots,\ \varepsilon_{1T}^*,\ \cdots,\ \varepsilon_{N1}^*,\ \varepsilon_{N2}^*,\ \cdots,\ \varepsilon_{NT}^*)$$

である．このとき合成された撹乱項 $\mu+\varepsilon^*$ は平均0，分散共分散行列

$$\sum=\sigma_\varepsilon^2 I_{TN}+\sigma_\mu^2[I_N\otimes\eta_T\eta_T'],\ \eta_T'=(1,\ \cdots,\ 1)$$ をもつ正規分布に従う．

ここで X^*, Y^* に対して次のような変換を施す．いま変換行列として

$$P_z=[I_N\otimes\bar{J}_T],\quad \bar{J}_T=\eta_T\eta_T'/T$$

$$Q_z=I_{NT}-P_z$$

を定義すれば，$P_zP_z'=P_z$, $Q_zQ_z'=Q_z$ であることは容易に確かめられる．$V=[P_z\ \vdots\ Q_z]$ とおき V' を(13)式の両辺の左から乗じた結果を

$$\begin{pmatrix} Y_1 \\ Y_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix}\beta+\begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \end{pmatrix} \tag{14}$$

と書くことにする．ここに $Y_1=P_z'Y^*$, $X_1=P_z'X^*$, $Y_z=Q_z'Y^*$, $X_2=Q_zX^*$ である．P_z と Q_z の定義から容易に

$$X_1'=(\underbrace{\bar{X}_1,\ \cdots,\ \bar{X}_1}_{T\text{個}},\ \underbrace{\bar{X}_2,\ \cdots,\ \bar{X}_2}_{T\text{個}},\ \cdots,\ \underbrace{\bar{X}_N,\ \cdots,\ \bar{X}_N}_{T\text{個}}),\quad \bar{X}_i=\frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T}X_{it}$$

$$X_2'=(X_{11}-\bar{X}_1,\ X_{12}-\bar{X}_1,\ \cdots,\ X_{1T}-\bar{X}_1,\ X_{21}-\bar{X}_2,\ \cdots,\ X_{N1}-\bar{X}_N)$$

と計算される．すなわち X_1 は第 i 個体の T 個の値を全てその時間平均 $\bar{X}_i$ に置き換えたものに，X_2 は個体 i の t 時点の値 X_{it}^* をその個体の時間平均 $\bar{X}_i$ からの偏差におきかえたものになっている．ここで(14)の上段，下段に対して別々に β の最小2乗推定量を計算すれば

$$\hat{\beta}_1=(X_1'X_1)^{-1}X_1'Y_1 \ \text{と}\ \hat{\beta}_2=(X_2'X_2)^{-1}X_2'Y_2$$

を得る．$\hat{\beta}_1$ を β のグループ間推定量 (between group estimator), $\hat{\beta}_2$ をグループ内推定量 (within group estimator) という．(11)の撹乱項 $[e_1', e_2']$ は平均0，分散共分散行列

$$\sum_e=\begin{bmatrix} (\sigma_\varepsilon^2+T\sigma_\mu^2)I_N & 0 \\ 0 & \sigma_\varepsilon^2 T_{TN-N} \end{bmatrix}$$

と表わされる．すなわちこのような変換によって，(12)は特殊な不均一分散モデルへと変換されたことが分る．

Taylor (1980) はこのような変換を施した後で，$(\sigma_\varepsilon^2+T\sigma_\mu^2)$ および σ_ε^2 の推定量 s_1, s_2 を，それぞれ(14)の上，下段に対する最小2乗残差を用いて推定し，β を

$$\hat{\beta}^*=(X'\hat{\Sigma}_e^{-1}X)^{-1}X'\hat{\Sigma}_e^{-1}Y$$

によって推定する方法について論じている．ここに，$X'=(X_1', X_2')$, $Y'=(Y_1', Y'_2)$, $\hat{\Sigma}_e$ は

$$\Sigma_e=\begin{bmatrix} s_1 I_N & 0 \\ 0 & s_2 I_{TN-N} \end{bmatrix}$$

である．そして彼は $\sigma_\varepsilon^2+T\sigma_\mu^2$ と σ_ε^2 のより効率的な推定量を用いたとき $\hat{\beta}^*$ の推定効率も良くなるだろうかという疑問を投げかけている．そして彼は $\hat{\beta}^*$ の平均2乗誤差を計算することによって，Σ_e のより良い推定量が必ずしもより良い β^* の推定量をもたらさないことを指摘している．ここでは2段階エイトキン推定量 $\hat{\beta}^*$ と最尤推定量 $\tilde{\beta}$ を比較することによって，この問に対する3次漸近有効性の立場からのより簡潔，明解な解答を与えたい．

モデル(14)に関する対数尤度

$$l=\text{const.}-\frac{1}{2}\log|\Sigma_e|-\frac{1}{2}(y-X\beta)'\Sigma_e^{-1}(y-X\beta)$$

から情報行列を求めると

$$I=\begin{pmatrix} -X'\Sigma_e^{-1}X & 0 & 0 \\ 0 & -\dfrac{T_2N}{2(\sigma_\varepsilon^2+T\sigma_\mu^2)^2}, & \dfrac{-TN}{2(\sigma_\varepsilon^2+T\sigma_\mu^2)^2} \\ 0 & \dfrac{-TN}{2(\sigma_\varepsilon^2+T\sigma_\mu^2)^2}, & -\dfrac{TN-N}{2\sigma_\varepsilon^4}-\dfrac{N}{2(\sigma_\varepsilon^2+T\sigma_\mu^2)^2} \end{pmatrix}$$

となる．これより

$$I^{-1}=\begin{pmatrix} (X'\Sigma_e^{-1}X)^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & c_{11} & c_{12} \\ 0 & c_{21} & c_{22} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} I_{11}^{-1} & 0 \\ 0 & I_{22}^{-1} \end{pmatrix}$$

となる．ただし

$$c_{11}=\frac{2(\sigma_\varepsilon^2+T\sigma_\mu^2)^2}{T^2N}+\frac{2\sigma_\varepsilon^4}{T^2(TN-N)}$$

$$c_{12}=\frac{2\sigma_\varepsilon^4}{TN-N}$$

$$c_{22}=\frac{2\sigma_\varepsilon^4}{TN-N}$$

である．他方，(14)の下段に対する最小2乗残差を用いて σ_ε^2 の推定量として

$$\hat{\sigma}_\varepsilon^2=s_2^2=\frac{1}{N(T-1)-k}e_2'e_2=\frac{1}{N(T-1)-k}u_2'M_2u_2$$

を得る．ここに $e_2=Y_2-X_2\hat{\beta}_2$, $M_2=I-X_2(X_2'X_2)^{-1}X_2'$ である．また $u_2'M_2u_2/\sigma_\varepsilon^2$ は自由度 $TN-N-k$ の χ^2 分布に従うから

$$V(s_2^2)=\frac{\sigma_\varepsilon^4}{(NT-N-k)^2}\cdot 2(NT-N-k)=\frac{2\sigma_\varepsilon^4}{NT-N-k}$$

である．$(\sigma_\varepsilon^2+T\sigma_\mu^2)$ の推定量は

$$\widehat{(\sigma_\varepsilon^2+T\sigma_\mu^2)}=s_1^2=\frac{1}{N-k}e_1'e_1=\frac{1}{N-k}u_1'M_1u_1 \tag{15}$$

である．ここに $e_1=Y_1-X_1\hat{\beta}_1$, $M_1=I-X_1(X_1'X_1)^{-1}X_1'$ である．このとき $u_1'M_1u_1/(\sigma_\varepsilon^2+T\sigma_\mu^2)$ は自由度 $N-k$ の χ^2 分布に従うから

$$V(s_1^2)=\frac{(\sigma_\varepsilon^2+T\sigma_\mu^2)^2}{(N-k)^2}2(N-k)=\frac{2(\sigma_\varepsilon^2+T\sigma_\mu^2)^2}{N-k}$$

である．(15)式は $T\sigma_\mu^2$ を

$$T\sigma_\mu^2=s_2^2-s_1^2$$

によって推定することを意味している．

(14)から明らかなように s_1^2 と s_2^2 は独立に分布するから

$$\begin{aligned}V(T\hat{\sigma}_\mu^2)&=V(s_1^2)+V(s_2^2)\\&=\frac{2(\sigma_\varepsilon^2+T\sigma_\mu^2)^2}{(N-k)}+\frac{2\sigma_\varepsilon^4}{(NT-N-k)}\end{aligned}$$

となる．ゆえに

$$V(\hat{\sigma}_\mu^2)=\frac{2(\sigma_\varepsilon^2+T\sigma_\mu^2)^2}{T^2(N-k)}+\frac{2\sigma_\varepsilon^4}{T^2(NT-N-k)}$$

である．また $\hat{\sigma}_\varepsilon^2$ と $\hat{\sigma}_\mu^2$ の共分散は

$$\begin{aligned}&\mathrm{cov}(\hat{\sigma}_\varepsilon^2,\hat{\sigma}_\mu^2)\\&\quad=E(\hat{\sigma}_\varepsilon^2-\sigma_\varepsilon^2)(\hat{\sigma}_\mu^2-\sigma_\mu^2)\end{aligned}$$

$$=E(s_2^2-\sigma_\varepsilon^2)(s_2^2-s_1^2-\sigma_\mu^2)$$
$$=E\{(s_2^2-\sigma_\varepsilon^2)s_2^2-(s_2^2-\sigma_\varepsilon^2)(s_1+\sigma_\mu^2)\}$$
$$=E(s_2^2-\sigma_\varepsilon^2)s_2^2$$
$$=V(s_2^2)$$
$$=\frac{2\sigma_\varepsilon^4}{(NT-N-k)}$$

と計算される．ゆえに $\hat{\sigma}_\varepsilon^2$ と $\hat{\sigma}_\mu^2$ の分散共分散行列 $\sum(\hat{\sigma}_\varepsilon^2,\ \hat{\sigma}_\mu^2)$ は $\sum(\hat{\sigma}_\varepsilon^2,\ \hat{\sigma}_\mu^2)$

$$=\begin{pmatrix}\dfrac{2\sigma_\varepsilon^4}{T^2(NT-N-k)}+\dfrac{2(\sigma_\varepsilon^2+T\sigma_\mu^2)^2}{T^2(N-k)}, & \dfrac{2\sigma_\varepsilon^4}{NT-N-k}\\ \dfrac{2\sigma_\varepsilon^2}{NT-N-k}, & \dfrac{2\sigma_\varepsilon^4}{NT-N-k}\end{pmatrix}$$

となる．ここで容易に

$$\lim_{T\to\infty}T\sum(\hat{\sigma}_\varepsilon^2,\ \hat{\sigma}_\mu^2)=\lim_{T\to\infty}TI_{22}^{-1}$$

となることが分るから，最尤推定量 $(\tilde{\beta},\ \tilde{\sigma}_\mu^2,\ \tilde{\sigma}_\varepsilon^2)$ と2段階推定量 $(\hat{\beta}^*,\ \hat{\sigma}_\mu^2,\ \hat{\sigma}_\varepsilon^2)$ の漸近的分散共分散行列は一致することが示された．よって定理より $\hat{\beta}^*$ と $\tilde{\beta}$ は，共に3次漸近有効である．したがって Taylor の提起した問に対して，われわれは次のように答えることができる．2段階推定量 $\hat{\beta}^*$ において，推定量 s_1^2 と s_2^2 をさらに効率のよいものに改善しても，$\hat{\beta}^*$ の推定効率は3次漸近有効の意味において改善されない．

6 むすび

この章で述べてきたことを，3次漸近有効性の理論のことばで次のように要約することができる．一般線型回帰モデル(4)における β の推定量として，(6)式で与えられる $\hat{\beta}$ が広く用いられている．$\hat{\beta}$ として条件1～3を満すようなクラスのもの——G-クラス推定量——を考える．クラス G には2段階エイトキン推定量，最尤推定量等が含まれる．このクラスの推定量は BAN かつ3次 AMU 推定量であり，さらに $\sqrt{T}(\hat{\beta}-\beta)$ の確率展開式(10)における $\bar{p}$ と q の共分散が $o(1)$ の大きさであることが示される．従ってクラス G は，Akahira and Takeuchi (1981) のクラス D に

含まれる．したがって2つの G-クラス推定量の分布の $O(T^{-1})$ までの比較に際しては，Q の漸近分散が両者において等しければ，それらの分布の $O(T^{-1})$ までの漸近展開は一致する．ところが，クラス G においては Q の分散は（$\hat{\beta}$, $\hat{\theta}$）の漸近分散共分散 Λ によって決定されてしまうので，分布の漸近展開式を比較するまでもなく Λ を比較すればよい．クラス G の中では Λ は常に一致しているから，結局G-クラス推定量の分布は必ず $O(T^{-1})$ まで一致する．また G-クラスの中には，最尤推定量が含まれ，このクラスでは最尤推定量は3次漸近有効なので，G-クラス推定量は3次漸近有効であることが分る．

G-クラス推定量に関するこのような性質は具体的な推定量の性質を調べる際に簡明な指針を与える．すなわち最尤推定量における（$\tilde{\beta}$, $\tilde{\theta}$）の漸近的分散共分散行列を，情報行列から計算し，それが考察の対象となる推定量における（$\hat{\beta}$, $\hat{\theta}$）の漸近的分散共分散と一致するかどうかを見ればよい．一致すれば，$\hat{\beta}$ は3次漸近有効である．このようにクラス G の特殊な構造を利用すると，漸近的に3次の項までの比較が，$\hat{\theta}$ の1次の項によって決定されるという，一見不思議な結論が得られる．このことは，最尤推定量の数値計算に対して次のようなコメントを可能にする．すなわち最尤解を4.2節で述べられているような反復計算によって求める際に，2回目以降のくり返し計算をすることによっても3次漸近有効の観点からは，効率を改善することができない．収束するまで反復計算を行うことによって最尤解を求めることと，推定効率を高めるということは別の問題である．

補論　$\hat{\beta}$の3次AMU条件について

$\hat{\beta}$ が3次 AMU 推定量であることは，前川(1984c)における議論にもとづいて次のように示される．G-クラス推定量 $\hat{\beta}$ の真値 β からの偏差

$$\hat{\beta}-\beta=[X'\Omega^{-1}(\hat{\theta})X]^{-1}X'\Omega^{-1}(\hat{\theta})u$$

を，第1章3節の誤差関数 $G(p)$ に対応させて考える．このとき確率変数のベクトル p は，次のような確率変数が対応する．いまベクトル $d=$

$\hat{\theta}-\theta$, $s=X'\Omega^{-1}(\theta)u$ を導入して d の要素を p_i, p_j, p_k, p_l に対応させ，s の要素および s の θ_i に関する偏微分を p_m, p_n, p_r, p_s に対応させる．このとき $\sqrt{T}G(p)=\sqrt{T}(\hat{\beta}-\beta)$ のテイラー展開は，テンソル和を用いて

$$\sqrt{T}(\hat{\beta}-\beta)=\sqrt{T}\{G_m p_m+G_{mi}p_m p_i+G_{mij}p_m p_i p_j+G_{mijk}p_m p_i p_j p_k+\cdots\}$$

となる．これより

$$G_i=\frac{\partial G(0)}{\partial p_i}=0,\ G_{mn}=\frac{\partial^2 G(0)}{\partial p_m \partial p_n}=0 \qquad \text{(i)}$$

となっていることが分る．また $\bar{p}=\sqrt{T}p$ のキュムラントに関しては次のことが成立する．まず ϕ_{mnr} は，u の3次のキュムラントであるから0である．さらに ϕ_{im} は d と s に関するキュムラントであるから漸近的に0である．すなわち

$$\phi_{mnr}=0,\ \phi_{im}=0+O(T^{-1}). \qquad \text{(ii)}$$

(i)，(ii)より次の3つのエッジワース係数の最高次数の項は，

$$\begin{aligned}
\alpha_{1(a,b,c)}&=\phi_{mnr}G_m{}^{(a)}G_n{}^{(b)}G_r{}^{(c)}=0\\
\alpha_{3(a,b,c)}&=G_m{}^{(a)}\phi_{mj}G_{in}{}^{(b)}\phi_{nl}G_l{}^{(c)}=0 \qquad \text{(iii)}\\
\alpha_{4(a)}\quad&=\phi_{im}G_{im}{}^{(a)}=0
\end{aligned}$$

となる．$\hat{\beta}_k-\beta_k$ の周辺分布を考えるときには，多次元の場合のエッジワース係数(第1章3節)の添字を $a, b, c\cdots=k$ とし，$\alpha_{1(k,k,k)}=\alpha_1$, $\alpha_{3(k,k,k)}=\alpha_3$, $\alpha_{4(k)}=\alpha_4\cdots$ 等とおき，それらを第1章(6)，(7)式に代入すれば $\sqrt{T}(\hat{\beta}_k-\beta_k)$ の分布のエッジワース展開が得られる．そのとき，(iii)より $\alpha_1=0$, $\alpha_3=0$, $\alpha_4=0$ であるから $c_0=0$ である．したがって第1章(6)式より $p(\sqrt{T}(\hat{\beta}_k-\beta_k)<0)=\frac{1}{2}+o(T^{-1})$ となり，$\hat{\beta}_k$ は3次 AMU である．

---

1) Taniguchi (1983a) は，撹乱項が ARMA 過程に従う回帰モデルにおける最小2乗推定量と，分散共分散行列が既知の場合の一般化最小2乗推定量の3次漸近有効性について論じている．

第7章　AR(1) モデルにおける最尤推定量の分布の漸近展開

1　は　じ　め　に

1階の自己回帰モデル (AR(1) モデル)

$$y_t=\alpha y_{t-1}+u_t,\ u_t\sim iidN(0,\ \sigma^2),\ |\alpha|<1$$

における α の最尤推定量 $\tilde{\alpha}_{ML}$ の漸近展開に関しては，すでにいくつかの研究がある．

Anderson (1971) は，$\tilde{\alpha}_{ML}$ の近似公式を次のように求めている．いま AR(1) モデルから生成された y_t の系列を $y=(y_1,\ y_2,\ \cdots,\ y_T)$ とするとき，y の尤度関数は

$$L(y,\ \alpha,\ \sigma^2)=(2\pi\sigma^2)^{-\frac{T}{2}}(1-\alpha^2)^{1/2}$$
$$\cdot\exp[-(2(\sigma^2)^{-1}\{(1+\alpha^2)TX_2-2\alpha TX_1+X_3\}]$$

と書くことができる．ここに

$$X_1=\frac{1}{T}\sum_{t=2}^{T}y_ty_{t-1},\quad X_2=\frac{1}{T}\sum_{t=2}^{T-1}y_t^2,\quad X_3=y_1^2+y_T^2$$

である．このとき最尤推定量 $\tilde{\alpha}_{ML}$ は

$$\tilde{\alpha}^3_{ML}\left(1-\frac{1}{T}\right)X_2-\tilde{\alpha}^2_{ML}\left(1-\frac{2}{T}\right)X_1-\tilde{\alpha}_{ML}\left\{\left(1+\frac{1}{T}\right)X_2+\frac{1}{T}X_3\right\}+X_1=0$$

の解として与えられる．Arderson (1971, p. 369) は，解の近似として

$$\tilde{\alpha}_{AN}=\left(1-\frac{1}{T}\right)\frac{X_1}{X_2}$$

を与えている．

Fujikoshi and Ochi (1984) は，この Anderson の近似最尤推定量と，真の最尤推定量の分布の差は $o(T^{-1})$ であることを証明した後，$\tilde{\alpha}_{AN}$ の分布の $O(T^{-1})$ までの漸近展開を求めた．したがって間接的に $\tilde{\alpha}_{ML}$ の分布の $O(T^{-1})$ までの展開が求められたことになる．

これに対して Taniguchi (1984b) は AR(1) モデルにおいて分散 σ^2 を

既知としたときの α の最尤推定量 $\tilde{\alpha}_T$ の分布の $O(T^{-1})$ までの漸近展開を与えている．彼は，Akahira and Takeuchi (1981) の3次漸近有効性の理論的枠組の中で ARMA (p, q) モデルを扱っており，分布の導出方法は Fujikoshi and Ochi (1984) のそれとは相当異なっている．ところで，σ^2 を未知として扱った場合と，既知として扱った場合の最尤推定量の $O(T^{-1})$ までの分布は，両者の結果を比較すると $O(T^{-1})$ まで完全に一致している．この一見不思議な現象が正しいことは，この章において再確認される．

他方，Tanaka (1984a, b) は Sargan (1976) の漸近展開のアルゴリズムを ARMA モデルの最尤推定量の分布の展開に応用する道を開いた．そうして彼は，定数項を含む階数の低い ARMA モデルの最尤推定量のバイアスの2次の項までの近似を求め，さらに MA(1) に関しては，最尤推定量の分布をも $O(T^{-1/2})$ まで求めている．このように，Sargan のアルゴリズムを時系列モデルの最尤推定量に適用することが理論的には可能になったわけであるが，その実行にあたっては，非常に階数の低い ARMA モデルの場合でさえ，膨大な計算量を必要とする．

次節以下では，Sargan-Tanaka のアルゴリズによる AR(1) モデルにおける $\tilde{\alpha}_{ML}$ の分布の $O(T^{-1})$ までの漸近展開を，σ^2 が未知の場合と既知の場合について求める．その際，計算過程をかなり詳しく述べることによって，このアルゴリズムの解説を合わせて行ないたい．

2 最尤推定量の確率展開

この節の目的は，1母数の場合の最尤推定量の確率展開を求めるアリゴリズムの解説である．

未知母数 θ の対数尤度を $l(\theta)$ で表わす．このとき，θ の最尤推定量 $\tilde{\theta}$ は $\partial l(\theta)/\partial\theta=0$ の解である．このとき一般には，$\tilde{\theta}$ は明示的に書き表わすことができない．しかし次のようにして，$\tilde{\theta}$ の $O(T^{-1})$ の項までの近似解を求めることができる．準備として次のような記号を導入する．

$$l^{(i)}=\frac{\partial^i l(\theta)}{\partial\theta^i},\quad i=1,\ 2,\ 3,\ 4$$

$$\hat{\theta} = \sqrt{T}(\tilde{\theta}-\theta_0)$$
$$g^{(1)} = l^{(1)}/\sqrt{T},\ g^{(2)} = (l^{(2)} - E(l^{(2)}))/\sqrt{T}$$
$$g^{(3)} = (l^{(3)} - E(l^{(3)}))/\sqrt{T}$$
$$a_* = \frac{1}{T}E(l^{(2)}),\quad \alpha_{(2)} = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}E(l^{(2)})$$
$$a_{(3)} = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}E(l^{(3)}),\ a_{(4)} = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}E(l^{(4)}).$$

ここに a_* のオーダーは $O(1)$ であるが，$O(T^{-1})$ までの確率展開においては，a_* の $O(T^{-1})$ の項まで必要になる場合がある．以上の記号を用いれば $l^{(1)}(\tilde{\theta})=0$ の真値 θ_0 の回りでのテイラー展開は

$$l^{(1)}(\tilde{\theta}) = 0 = l^{(1)}(\theta_0) + l^{(2)}(\theta_0)(\tilde{\theta}-\theta_0) + \frac{1}{2}l^{(3)}(\theta_0)(\tilde{\theta}-\theta_0)^2$$
$$+\frac{1}{6}l'^{(4)}(\theta_0)(\tilde{\theta}-\theta_0)^3 + o_p\left(\frac{1}{T}\right)$$

と書くことができる．さらに上の記号をこの式に代入すれば，

$$0 = g^{(1)} + \left(a_* + \frac{1}{\sqrt{T}}g^{(2)}\right)\hat{\theta} + \frac{1}{2\sqrt{T}}\left(a_{(3)} + \frac{1}{\sqrt{T}}g^{(3)}\right)\hat{\theta}^2$$
$$+\frac{1}{6T}a_{(4)}\hat{\theta}^3 + o_p\left(\frac{1}{T}\right) \tag{1}$$

となる．この式を陰関数の定理によって $\hat{\theta}$ について解けば $\hat{\theta}$ の $O_p(T^{-1})$ までの展開式が得られる．その解は形式的には次の手順で求めることができる．まず $\hat{\theta}$ の第1次近似（$O(1)$ までの項）を求めれば，明らかに

$$\hat{\theta} = -a^{-1}{}_{(2)}g^{(1)} + o_p(1) \tag{2}$$

である．次に第2次近似（$O_p(T^{-1/2})$ の項まで）を求める．それにはまず(1)式の$\frac{1}{T}$の項を無視して

$$0 = g^{(1)} + a_{(2)}\hat{\theta} + \frac{1}{\sqrt{T}}g^{(2)}\hat{\theta} + \frac{1}{2\sqrt{T}}a_{(3)}\hat{\theta}^2 + o_p\left(\frac{1}{\sqrt{T}}\right) \tag{3}$$

と書き表わす．次にこの式の $\frac{1}{\sqrt{T}}$ の項に第1次近似値(2)を代入し

$$0 = g^{(1)} + a_{(2)}\hat{\theta} + \frac{1}{\sqrt{T}}g^{(2)}a^{-1}{}_{(2)}g^{(1)} + \frac{1}{2\sqrt{T}}a_{(3)}(a^{-1}{}_{(2)}g^{(1)})^2$$

を得る．この式を $\hat{\theta}$ について解けば，第2次近似値として

$$\hat{\theta} = -a_{(2)}{}^{-1}g^{(1)} + \frac{1}{\sqrt{T}}a_{(2)}{}^{-1}g^{(2)}a_{(2)}{}^{-1}g^{(1)}$$

$$-\frac{1}{2\sqrt{T}}a_{(2)}{}^{-1}a_{(3)}(a_{(2)}{}^{-1}g^{(1)})^2+o_p\left(\frac{1}{\sqrt{T}}\right) \tag{4}$$

を得る．最後に (2) 式と (4) 式を (1) 式に代入することによって $\hat{\theta}$ の $O_p(T^{-1})$ までの近似解が得られる．この代入を行う際に(1)式の $O_p(T^{-1})$ の項には(2)式を，$O_p(T^{-1/2})$ の項には(4)式を代入する．その結果を整理すれば

$$\begin{aligned}\hat{\theta}=&-a_*{}^{-1}g^{(1)}+\frac{1}{2\sqrt{T}}a_{(2)}{}^{-1}\{2g^{(2)}a_{(2)}{}^{-1}g^{(1)}-a_{(3)}(a_{(2)}{}^{-1}g^{(1)})^2\}\\&+\frac{1}{6T}a_{(2)}{}^{-1}\{-6g^{(2)}a_{(2)}{}^{-1}g^{(2)}a_{(2)}{}^{-1}g^{(1)}\\&+3g^{(2)}a_{(2)}{}^{-1}a_{(3)}(a_{(2)}{}^{-1}g^{(1)})^2+6a_{(3)}a_{(2)}{}^{-1}g^{(2)}a_{(2)}{}^{-1}g^{(1)}a_{(2)}{}^{-1}g^{(1)}\\&-3a_{(3)}a_{(2)}{}^{-1}a_{(3)}(a_{(3)}{}^{-1}g^{(1)})^3-3g^{(3)}(a_{(2)}{}^{-1}g^{(1)})^2\\&+a_{(4)}(a_{(2)}{}^{-1}g^{(1)})^3\}+O_p(T^{-1})\end{aligned} \tag{5}$$

を得る．ここで右辺の第1項だけは $a_{(2)}$ ではなく，a_* を用いなければならない．a_* は $O_p(T^{-1})$ の項を含むからである．この結果は田中 (1984b) の1母数の場合に相当している．

多母数の場合も導出原理は全く1母数の場合と同様であるが，添字が増え，しかも $a_{(\cdot)}$, $g^{(\cdot)}$ 等が行列になるため，表現が非常に複雑になる．しかしこの複雑さを田中 (1984b) は，Hayakawa (1977) の記号を導入することによって回避している．それを次に補題として挙げておく．そのために次のような記号を導入する．$L(\theta)$ を対数尤度，その1回微分を，$\partial L(\theta)/\partial\theta=L(\theta)_\cdot$ とするとき，

$$\tilde{g}_\cdot=\frac{1}{\sqrt{T}}L(\theta)_\cdot,\quad \tilde{G}_{\cdot\cdot}=\frac{1}{\sqrt{T}}(L(\theta)_{\cdot\cdot}-E(L(\theta)_{\cdot\cdot}))$$

$$\tilde{G}_{\cdot\cdot\cdot}=\frac{1}{\sqrt{T}}(L(\theta)_{\cdot\cdot\cdot}-E(L(\theta)_{\cdot\cdot\cdot}))$$

$$A_{\cdot\cdot}{}^{(T)}=\frac{1}{T}E(L(\theta)_{\cdot\cdot}),\quad A_{\cdot\cdot}=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}E(L(\theta)_{\cdot\cdot})$$

$$A_{\cdot\cdot\cdot}=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}E(L(\theta)_{\cdot\cdot\cdot}),\quad A_{\cdot\cdot\cdot\cdot}=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}E(L(\theta)_{\cdot\cdot\cdot\cdot}).$$

〔補題〕〔多母数最尤推定量の確率展開　田中 (1984b)〕

$$\sqrt{T}(\tilde{\theta}-\theta)=-A_{\cdot\cdot}{}^{(T)-1}\tilde{g}_\cdot+\frac{1}{2\sqrt{T}}A_{\cdot\cdot}{}^{-1}(2\tilde{G}_{\cdot\cdot}A_{\cdot\cdot}{}^{-1}\tilde{g}_\cdot$$

$$
\begin{aligned}
&-A_{\cdot\cdot\cdot}\circ(A_{\cdot\cdot}^{-1}\tilde{g}_{\cdot})\circ(A_{\cdot\cdot}^{-1}\tilde{g}_{\cdot}))\\
&+\frac{1}{6T}A_{\cdot\cdot}^{-1}\{-6\tilde{G}_{\cdot\cdot}A_{\cdot\cdot}^{-1}\tilde{G}_{\cdot\cdot}A_{\cdot\cdot}^{-1}\tilde{g}_{\cdot}\\
&+3\tilde{G}_{\cdot\cdot}A_{\cdot\cdot}^{-1}(A_{\cdot\cdot\cdot}\circ(A_{\cdot\cdot}^{-1}\tilde{g}_{\cdot})\circ(A_{\cdot\cdot}^{-1}\tilde{g}_{\cdot}))\\
&+6A_{\cdot\cdot\cdot}\circ(A_{\cdot\cdot}^{-1}\tilde{G}_{\cdot\cdot}A_{\cdot\cdot}^{-1}\tilde{g}_{\cdot})\circ(A_{\cdot\cdot}^{-1}\tilde{g}_{\cdot})\\
&-3A_{\cdot\cdot\cdot}\circ A_{\cdot\cdot}^{-1}(A_{\cdot\cdot\cdot}\circ(A_{\cdot\cdot}^{-1}\tilde{g}_{\cdot})\circ(A_{\cdot\cdot}^{-1}\tilde{g}_{\cdot}))\circ(A_{\cdot\cdot}^{-1}\tilde{g}_{\cdot})\\
&-3\tilde{G}_{\cdot\cdot\cdot}\circ(A_{\cdot\cdot}^{-1}\tilde{g}_{\cdot})\circ(A_{\cdot\cdot}^{-1}\tilde{g}_{\cdot})\\
&+A_{\cdot\cdot\cdot\cdot}\circ(A_{\cdot\cdot}^{-1}\tilde{g}_{\cdot})\circ(A_{\cdot\cdot}^{-1}\tilde{g}_{\cdot})\circ(A_{\cdot\cdot}^{-1}\tilde{g}_{\cdot})\}+o_p\left(\frac{1}{T}\right) \qquad (6)
\end{aligned}
$$

で与えられる．

ここに演算子 $\circ$ は，次のような演算を施すために用いられる．たとえば，$A_{\cdot\cdot\cdot}=\{A_{ijk}\}$，$(i,\ j,\ k=1,\ \cdots,\ p)$ と p 次元ベクトル x，y，z に関して $A_{\cdot\cdot\cdot}\circ x\circ y\circ z$ は p 次元のベクトルを表わし，その第 i 要素は $\sum_{j,k}A_{ijk}x_iy_jz_k$ である．この確率展開において $\tilde{g}_{\cdot}$，$\tilde{G}_{\cdot\cdot}$，$\tilde{G}_{\cdot\cdot\cdot}$ は平均からの偏差として表わされた確率変数である．

3　$\sqrt{T}(\tilde{\alpha}_{ML}-\alpha)$ の確率展開

われわれのモデルは2母数であるから，$\sqrt{T}(\tilde{\theta}-\theta)'=(\tilde{\alpha}_{ML}-\alpha,\ \tilde{\sigma}_{ML}^2-\sigma^2)$ とおくことにする．そうして目的は $\sqrt{T}(\tilde{\alpha}_{ML}-\alpha)$ の分布であるから，(6)式の第1要素だけ求めればよい．いま $A_{\cdot\cdot}^{-1}$ と $\tilde{G}_{\cdot\cdot}$ の $(i,\ j)$ 要素を，それぞれ a^{ij}, G_{ij} とすれば，

$$
A_{\cdot\cdot}^{-1}=\begin{pmatrix} a^{11} & a^{12} \\ a^{21} & a^{22} \end{pmatrix},\quad \tilde{G}_{\cdot\cdot}=\begin{pmatrix} G_{11} & G_{12} \\ G_{21} & G_{22} \end{pmatrix}
$$

となる．ここに $A_{\cdot\cdot}^{-1}$ は情報行列の極限で

$$
A_{\cdot\cdot}^{-1}=\begin{pmatrix} 1-\alpha^2 & 0 \\ 0 & 2\sigma^4 \end{pmatrix}
$$

と計算される．すなわち $\tilde{\alpha}_{ML}$ と $\tilde{\sigma}_{ML}$ は漸近的に独立である．また $A_{\cdot\cdot\cdot}$ の要素を A_{ijk} とする．したがってたとえば，(6)式の第5項における

$$
A_{\cdot\cdot}^{-1}\tilde{G}_{\cdot\cdot}A_{\cdot\cdot}^{-1}(A_{\cdot\cdot\cdot}\circ(A_{\cdot\cdot}^{-1}\tilde{g}_{\cdot})\circ(A_{\cdot\cdot}^{-1}\tilde{g}_{\cdot}))
$$

の第1要素は，

$$2(a^{11})^3a^{22}A_{112}G_{11}g_1g_2+(a^{11})^3a^{22}A_{211}g_1{}^2G_{12}+a^{11}(a^{22})^3A_{222}g_2{}^2G_{12}$$

となる．同様の計算を実行することによって $\sqrt{T}(\tilde{\alpha}_{ML}-\alpha)$ の確率展開を得る．そこに現われる確率変数は，行列の微分記号(16頁)を用いれば

$$g_1=-\frac{1}{2}\mathrm{tr}\,\Sigma^{-1}\dot{\Sigma}+\frac{1}{2\sigma^2}y'\Sigma^{-1}\dot{\Sigma}\Sigma^{-1}y\equiv p_1$$

$$g_2=-\frac{T}{2\sigma^2}+\frac{1}{2\sigma^4}y'\Sigma^{-1}y\equiv p_2/\sigma^2$$

$$G_{11}=-\frac{1}{2}\mathrm{tr}(\Sigma^{-1}\ddot{\Sigma}\Sigma^{-1}\dot{\Sigma})+\frac{1}{\sigma^2}y'\Big\{-\Sigma^{-1}\dot{\Sigma}\Sigma^{-1}\dot{\Sigma}\Sigma^{-1}$$

$$+\frac{1}{2}\Sigma^{-1}\ddot{\Sigma}\Sigma^{-1}\Big\}y\equiv p_3$$

$$G_{12}=-\frac{1}{2\sigma^2}\mathrm{tr}\,\Sigma^{-1}\dot{\Sigma}-\frac{1}{2\sigma^4}y'\Sigma^{-1}\dot{\Sigma}\Sigma^{-1}y=-p_1/\sigma^2$$

$$G_{22}=\frac{T}{\sigma^4}-\frac{1}{\sigma^6}y'\Sigma^{-1}y=-2p_2/\sigma^2$$

$$G_{112}=\mathrm{const.}-\frac{1}{\sqrt{T\sigma^4}}y'\Big(-\Sigma^{-1}\dot{\Sigma}\Sigma^{-1}\dot{\Sigma}\Sigma^{-1}$$

$$+\frac{1}{2}\Sigma^{-1}\ddot{\Sigma}\Sigma^{-1}\Big)y\equiv-\ p_3/\sigma^2$$

$$G_{122}=\mathrm{const.}+\frac{1}{\sqrt{T}}\ \frac{1}{\sigma^6}y'\Sigma^{-1}\dot{\Sigma}\Sigma^{-1}y=\frac{2p_1}{\sigma^2}$$

$$G_{111}=\mathrm{const.}+\frac{1}{2\sigma^2}y'\{-\Sigma^{-1}\dot{\Sigma}\Sigma^{-1}\ddot{\Sigma}\Sigma^{-1}+\Sigma^{-1}\ddot{\Sigma}\Sigma^{-1}$$

$$-\Sigma^{-1}\ddot{\Sigma}\Sigma^{-1}\dot{\Sigma}\Sigma^{-1}+6\Sigma^{-1}\dot{\Sigma}\Sigma^{-1}\dot{\Sigma}\Sigma^{-1}\dot{\Sigma}\Sigma^{-1}$$

$$-2\Sigma^{-1}\ddot{\Sigma}\Sigma^{-1}\dot{\Sigma}\Sigma^{-1}-2\Sigma^{-1}\dot{\Sigma}\Sigma^{-1}\ddot{\Sigma}\Sigma^{-1}\}y\equiv p_4$$

$$G_{222}=\mathrm{const.}+\frac{1}{\sqrt{T}}\ \frac{1}{\sigma^2}y'\Sigma^{-1}y\equiv\frac{6p_2}{\sigma^2}$$

となる．これらの確率変数は複雑な行列を含むので上のように新たに p_1, p_2, p_3, p_4 を定義し，以後 p_i を用いる．そうすると最終的に $\sqrt{T}(\tilde{\alpha}_{ML}-\alpha)$ の確率展開は，$\bar{p}_i=\sqrt{T}p_i$ を用いて

$$\sqrt{T}(\tilde{\alpha}_{ML}-\alpha)=a^{11}\bar{p}_1+\frac{1}{\sqrt{T}}\Big\{(a^{11})^2\bar{p}_1\bar{p}_3+a^{11}a^{22}\Big(\frac{\bar{p}_2}{\sigma^2}\Big)\Big(-\frac{\bar{p}_1}{\sigma^2}\Big)\Big\}$$

$$-\frac{1}{\sqrt{T}}A_{112}(a^{11})^2a^{22}\bar{p}_1\Big(\frac{\bar{p}_2}{\sigma^2}\Big)$$

$$
\begin{aligned}
&+\frac{1}{T}\Big\{(a^{11})^3\bar{p}_3\bar{p}_1+(a^{11})^2a^{22}\Big(\frac{\bar{p}_1}{\sigma^2}\Big)^2\bar{p}_1+(a^{11})^2a^{22}\bar{p}_3\Big(-\frac{\bar{p}_1}{\sigma^2}\Big)\Big(\frac{\bar{p}_2}{\sigma^2}\Big)\\
&+a^{11}(a^{22})^2\Big(-\frac{\bar{p}_1}{\sigma^2}\Big)\Big(-\frac{2\bar{p}_2}{\sigma^2}\Big)\Big(\frac{\bar{p}_2}{\sigma^2}\Big)\Big\}\\
&+\frac{1}{T}\Big\{A_{112}(a^{11})^3a^{22}\bar{p}_1\Big(\frac{\bar{p}_2}{\sigma^2}\Big)\bar{p}_3+A_{112}(a^{11})^2(a^{22})^2\Big(\frac{\bar{p}_2}{\sigma^2}\Big)^2\Big(-\frac{\bar{p}_1}{\sigma^2}\Big)\\
&+A_{121}(a^{11})^3a^{22}\bar{p}_1{}^2\Big(-\frac{\bar{p}_1}{\sigma^2}\Big)+A_{121}(a^{11})^2(a^{22})^2\bar{p}_1\Big(\frac{\bar{p}_2}{\sigma^2}\Big)\Big(-\frac{2\bar{p}_2}{\sigma^2}\Big)\Big\}\\
&+\frac{1}{2T}\Big\{2(a^{11})^3a^{22}A_{112}\bar{p}_1\Big(\frac{\bar{p}_2}{\sigma^2}\Big)\bar{p}_3+(a^{11})^3a^{22}A_{211}\bar{p}_1{}^2\Big(-\frac{\bar{p}_1}{\sigma^2}\Big)\\
&+a^{11}(a^{22})^3A_{222}\Big(\frac{\bar{p}_2}{\sigma^2}\Big)^2\Big(-\frac{\bar{p}_1}{\sigma^2}\Big)\Big\}\\
&+\frac{1}{2T}\Big\{2A_{112}{}^2(a^{11})^3(a^{22})^2\bar{p}_1\Big(\frac{\bar{p}_2}{\sigma^2}\Big)^2+A_{112}{}^2(a^{11})^4a^{22}\bar{p}_1{}^3\\
&+A_{112}A_{222}(a^{11})^2(a^{22})^3\bar{p}_1\Big(\frac{\bar{p}_2}{\sigma^2}\Big)^2\Big\}\\
&+\frac{1}{2T}\Big\{(a^{11})^3\bar{p}_1{}^2p_4+2(a^{11})^2a^{22}\bar{p}_1\Big(\frac{\bar{p}_2}{\sigma^2}\Big)\Big(-\frac{\bar{p}_3}{\sigma^2}\Big)\\
&+a^{11}(a^{22})^2\Big(\frac{\bar{p}_2}{\sigma^2}\Big)^2\Big(\frac{2\bar{p}_1}{\sigma^4}\Big)\Big\}\\
&+\frac{1}{6T}\Big\{A_{1111}(a^{11})^4\bar{p}_1{}^3+3A_{1112}(a^{11})^3a^{22}\bar{p}_1{}^2\Big(\frac{\bar{p}_2}{\sigma^2}\Big)\\
&+A_{1222}a^{11}(a^{22})^2\Big(\frac{\bar{p}_2}{\sigma^2}\Big)^3\Big\}+o\Big(\frac{1}{T}\Big)
\end{aligned}
\tag{7}
$$

となる.

4 エッジワース係数の導出

次の段階は $\sqrt{T}e(p)=\sqrt{T}(\tilde{\alpha}_{ML}-\alpha)$ の原点における p_i に係る微係数 e_i, e_{ij}, e_{ijk} を求めることである. 前節で求めた確率展開から, e_i, e_{ij} は

$$e_1=a_*{}^{11},\ e_{12}=-a^{11}a^{22}/\sigma^4+A_{112}(a^{11})^2/\sigma^2,\ e_{13}=(a^{11})^2$$

となることは明らかである. またその他の e_i, e_{ij} は全て0である. さらに3次の微係数も同様に容易に計算されるが, 長くなるので省略する. さらにこれらの微係数を, 母数によって明示的に表わすことができる. 定義から容易に $a^{11}=1/(1-\alpha^2)$, $a^{22}=1/2\sigma^4$ と計算される. また A_{112} については

定義より

$$A_{112}=\frac{1}{T}E\left(\frac{\partial^3 l}{\partial\alpha^2\partial\sigma^2}\right)$$

$$=\frac{1}{2\sigma^2}\ \frac{1}{T}\mathrm{tr}(2\Sigma^{-1}\dot{\Sigma}\Sigma^{-1}\dot{\Sigma}-\Sigma^{-1}\ddot{\Sigma})$$

となる．後述の留数定理によってこの式のトレース部分の最高次数を評価することにより $A_{112}=1/\sigma^2(1-\alpha^2)+O(T^{-1})$ となることが示される．他の A_{ij}, A_{ijk}, A_{ijkl} の評価については第6節補論での結果を用いれば，$e_{12}=0$ となる．同様の計算を行うことによって結局，3次までの微係数は

$$e_1=1-\alpha^2,\qquad e_1{}^*=\left[\frac{1}{1-\alpha}+\frac{3\alpha^2-1}{T(1-\alpha^2)^2}\right]^{-1}$$

$$e_{13}=(1-\alpha^2)^2,\qquad e_{133}=2(1-\alpha^2)^3$$

$$e_{114}=(1-\alpha^2)^3$$

であることが分る．他の微係数は全て0である．$e_1{}^*$ は，エッジワース係数 ω^2 を計算するときのみ必要である．他の係数の計算では e_1 を用いればよい．

このように微係数 e_i, e_{ij}, e_{ijk} の多くは0になるので，エッジワース係数は，次のように簡単になる．

$$\omega^2=e_1{}^2\phi_{11}$$

$$\alpha_1=e_1{}^3\phi_{111},\qquad \alpha_2=e_1{}^4\phi_{1111}$$

$$\alpha_3=2e_{13}\nu_1\nu_3,\qquad \alpha_4=2\phi_{13}e_{13}$$

$$\alpha_5=2\phi_{13}e_{13},\qquad \alpha_6=3e_{331}\phi_{31}{}^2e_1{}^2\phi_{11}e_1$$

$$\alpha_7=e_{331}\phi_{33}\nu_1+e_{313}\phi_{31}\nu_3+e_{133}\phi_{13}\nu_3$$

$$\alpha_8=\nu_1e_{13}\phi_{31}e_{13}\nu_3+\nu_1e_{13}\phi_{33}e_{31}\nu_1+\nu_3e_{31}\phi_{11}e_{13}\nu_3+\nu_3e_{31}\phi_{13}e_{31}\nu_1$$

$$\alpha_9=(\phi_{13}e_{13})^2+\phi_{11}e_{13}\phi_{33}e_{31}+\phi_{33}e_{31}\phi_{11}e_{13}+\phi_{31}e_{31}\phi_{13}e_{31}$$

$$\alpha_{10}=\phi_{11}e_1e_{13}\phi_{311}e_1{}^2+\phi_{31}e_1e_{31}\phi_{111}e_1{}^2.$$

なおこれらの表現を得るにあたっては，すぐ後に見る $\phi_{12}=0+O(T^{-1})$ という結果より，$\nu_2=\phi_{21}e_1=0$ という事実を用いた（エッジワース係数 α_i, $i=1, \cdots, 10$ の計算においては $O(T^{-1})$ の項は無視しうる）．

次の段階は，確率変数 $\bar{p}_1, \cdots, \bar{p}_4$ に関する2次から4次までのキュムラント ϕ_{ij}, ϕ_{ijk}, ϕ_{ijkl} を計算することである．$\bar{p}_i$, $i=1, \cdots, 4$ の中に含まれ

る定数項は2次以上のキュムラントに影響しないから，以下のキュムラントの計算においては，定数項を除外した確率変数の部分を p_i および $\bar{p}_i=\sqrt{T}p_i$ として扱うことにする．そうすると $\bar{p}_i$ は $\sqrt{T}y'A_iy$ という形の2次形式であるから，$\bar{p}_1, \cdots, \bar{p}_4$ の積率母関数は

$$\phi(t)=\left|I-\frac{1}{\sqrt{T}}\sum_{i=1}^{4}t_iA_i\Omega\right|,\quad t'=(t_1,\ t_2,\ t_3,\ t_4)$$

と書ける．したがってキュムラント母関数は

$$\psi(t)=\log\phi(t)=-\frac{1}{2}\log\det\left(I-\frac{1}{\sqrt{T}}\sum_{i=1}^{4}t_iA_i\Omega\right)$$

となる．

$\psi(t)$ を t の要素で偏微分することにより，$\bar{p}_i$ のキュムラント ψ_{ij}, ψ_{ijk}, $\psi_{ijkl}(i,\ j,\ k,\ l=1,\ 2,\ 3,\ 4)$ が計算される．このとき全ての添字の組合せを計算する必要はない．なぜなら上に見たように多くの偏微係数 e_i, e_{ij}, e_{ijk} は0になるので，エッジワース係数の中で，0となる微係数との積の型で現われてくるキュムラントは計算する必要がない．この点を考慮すれば必要なキュムラントは，次のものに限られることが分る．

$$\psi_{11}=\frac{1}{2T}\mathrm{tr}(\dot{\Sigma}\Sigma^{-1}\dot{\Sigma}\Sigma^{-1})$$

$$\psi_{12}=\frac{2}{4T\sigma^2}\mathrm{tr}(\dot{\Sigma}\Sigma^{-1})$$

$$\psi_{22}=\frac{2}{4T\sigma^4}\mathrm{tr}(\Sigma^{-1}\Sigma\Sigma^{-1}\Sigma)=\frac{1}{2\sigma^4}$$

$$\psi_{13}=-\frac{1}{T}\mathrm{tr}(\dot{\Sigma}\Sigma^{-1}\dot{\Sigma}\Sigma^{-1}\dot{\Sigma}\Sigma^{-1})+\frac{1}{2T}\mathrm{tr}(\dot{\Sigma}\Sigma^{-1}\ddot{\Sigma}\Sigma^{-1})$$

$$\psi_{23}=-\frac{1}{T\sigma^2}\mathrm{tr}(\dot{\Sigma}\Sigma^{-1}\dot{\Sigma}\Sigma^{-1})+\frac{1}{2T\sigma^2}\mathrm{tr}(\ddot{\Sigma}\Sigma^{-1})$$

$$\psi_{33}=\frac{2}{T}\left\{\mathrm{tr}(\dot{\Sigma}\Sigma^{-1})^4-\mathrm{tr}(\dot{\Sigma}\Sigma^{-1})^2\ddot{\Sigma}\Sigma^{-1}+\frac{1}{4}\mathrm{tr}(\ddot{\Sigma}\Sigma^{-1})^2\right\}$$

$$\begin{aligned}\psi_{14}=\frac{1}{4}\mathrm{tr}\ (&-\dot{\Sigma}\Sigma^{-1}\dot{\Sigma}\Sigma^{-1}\ddot{\Sigma}\Sigma^{-1}+\dot{\Sigma}\Sigma^{-1}\dddot{\Sigma}\Sigma^{-1}\\&-\dot{\Sigma}\Sigma^{-1}\ddot{\Sigma}\Sigma^{-1}\dot{\Sigma}\Sigma^{-1}+6\dot{\Sigma}\Sigma^{-1}\dot{\Sigma}\Sigma^{-1}\dot{\Sigma}\Sigma^{-1}\dot{\Sigma}\Sigma^{-1}\\&-2\dot{\Sigma}\Sigma^{-1}\ddot{\Sigma}\Sigma^{-1}\dot{\Sigma}\Sigma^{-1}-2\dot{\Sigma}\Sigma^{-1}\dot{\Sigma}\Sigma^{-1}\ddot{\Sigma}\Sigma^{-1})\end{aligned}$$

$$\phi_{111}=\frac{1}{T\sqrt{T}}\mathrm{tr}(\dot{\Sigma}\Sigma^{-1})^3$$

$$\phi_{112}=\frac{1}{T\sqrt{T\sigma^2}}\mathrm{tr}(\dot{\Sigma}\Sigma^{-1}\dot{\Sigma}\Sigma^{-1})=\phi_{121}=\phi_{211}$$

$$\phi_{222}=\frac{1}{T\sqrt{T\sigma^6}}\mathrm{tr}\,\Sigma\Sigma^{-1}\Sigma\Sigma^{-1}\Sigma\Sigma^{-1}=\frac{1}{\sqrt{T\sigma^6}}$$

$$\phi_{122}=\frac{1}{T\sqrt{T\sigma^4}}\mathrm{tr}(\dot{\Sigma}\Sigma^{-1})=\phi_{212}=\phi_{221}$$

$$\phi_{113}=\frac{1}{T\sqrt{T}}\left\{-\mathrm{tr}(\dot{\Sigma}\Sigma^{-1})^4+\frac{1}{2}\mathrm{tr}(\dot{\Sigma}\Sigma^{-1})^2\ddot{\Sigma}\Sigma^{-1}\right\}$$

$$\phi_{1111}=\frac{3}{T^2}\mathrm{tr}(\Sigma^{-1}\dot{\Sigma})^4.$$

以上のキュムラントの最高次数の項は，補論の結果を用いることによって

$$\phi_{11}=\frac{1}{1-\alpha^2}+\frac{3\alpha^2-1}{T(1-\alpha^2)^2}\ ,\qquad \phi_{12}=0$$

$$\phi_{13}=-\frac{2\alpha}{(1-\alpha^2)^2}\ ,\qquad \phi_{22}=\frac{1}{2\sigma^4}$$

$$\phi_{23}=\frac{-3}{2\sigma^2(1-\alpha^2)}\ ,\qquad \phi_{33}=\frac{2(1+\alpha^2)}{(1-\alpha^2)^3}$$

$$\phi_{111}=\frac{6\alpha}{\sqrt{T}(1-\alpha^2)^2}\ ,\qquad \phi_{222}=\frac{1}{\sqrt{T\sigma^6}}$$

$$\phi_{122}=0\ ,\qquad \phi_{113}=\frac{-4(1+2\alpha^2)}{\sqrt{T}(1-\alpha^2)^3}$$

$$\phi_{1111}=\frac{6(3+7\alpha^2)}{T(1-\alpha^2)^3}$$

となることが示される．ここに ϕ_{11} だけは $O(T^{-1})$ の項まで計算されているのは，$\omega^2=\phi_{11}e_1{}^2$ を計算する際に $O(T^{-1})$ の項まで計算する必要があるからである．

以上の結果を用いて，エッジワース係数を定義に従って計算すれば，

$$\alpha_1=\frac{6\alpha(1-\alpha^2)}{\sqrt{T}},\quad \alpha_2=\frac{3}{T}(1-\alpha^2)(6+14\alpha^2)$$

$$\alpha_3=-4\alpha\ (1-\alpha^2),\quad \alpha_4=-4\alpha$$

$$\alpha_5=-\frac{8(1+2\alpha^2)}{\sqrt{T}},\quad \alpha_6=24\alpha^2(1-\alpha^2)$$

$$\alpha_7=4+20\alpha^2,\quad \alpha_8=2(1-\alpha^2)(1+7\alpha^2)$$

$$\alpha_9=12\alpha^2+4,\quad \alpha_{10}=-\frac{1}{\sqrt{T}}(1-\alpha^2)(1+5\alpha^2)$$

を得る．最後に残された係数 $\omega^2=e_i\phi_{ij}e_j=\phi_{11}e_1{}^2$ は，$O(T^{-1})$ まで評価しなければならないので少々めんどうであるが，補論の結果を用いれば

$$\omega^2=\phi_{11}e_1{}^2=\left[\frac{1}{1-\alpha^2}+\frac{3\alpha^2-1}{T(1-\alpha^2)^2}\right]^{-1}$$

$$=(1-\alpha^2)-\frac{3\alpha^2-1}{T}+O(T^{-2})$$

を得る．これより

$$\omega=\sqrt{1-\alpha^2}\ \sqrt{1-\varDelta}+o\left(\frac{1}{T}\right),\quad \varDelta=\frac{3\alpha^2-1}{T(1-\alpha^2)} \tag{8}$$

と計算される．以上の結果をまとめれば第1章(7)式に対応する諸量は

$$c_0=\frac{\alpha}{\sqrt{T}\ \sqrt{1-\alpha^2}},\quad c_1=\frac{1}{4T}$$

$$c_2=\frac{\alpha}{\sqrt{T}\ \sqrt{1-d^2}},\quad c_3=\frac{1+\alpha^2}{4T(1-\alpha^2)}$$

$$c_5=\frac{-\alpha^2}{2T(1-\alpha^2)}$$

となる．従って

$$p\{\sqrt{T}(\tilde{\alpha}_{NL}-\alpha)<y\}=I\left(\frac{y}{\omega}\right)+i\left(\frac{y}{\omega}\right)\left\{c_0+c_1\left(\frac{y}{\omega}\right)\right.$$
$$\left.+c_2\left(\frac{y}{\omega}\right)^2+c_3\left(\frac{y}{\omega}\right)^3+c_5\left(\frac{y}{\omega}\right)^5\right\}+o\left(\frac{1}{T}\right)$$

が得られた．ここで注意しなければならないことは，ω は $O(T^{-1})$ の項を含んでいるので，上に得られた展開式の第1項 $\Phi\left(\frac{y}{\omega}\right)$ は $O(T^{-1})$の項に影響することである．そこで，さらに

$$\omega=\frac{1}{\sqrt{1-\alpha^2}}\left(1+\frac{\varDelta}{2}\right)+o\left(\frac{1}{T^2}\right) \tag{9}$$

と展開することにより

$$I\left(\frac{y}{\omega}\right)=I\left(\frac{y}{\sqrt{1-\alpha^2}}\left(1+\frac{\Delta}{2}\right)\right)$$

$$=I\left(\frac{y}{\sqrt{1-\alpha^2}}\right)+i\left(\frac{y}{\sqrt{1-\alpha^2}}\right)\frac{y\Delta}{2\sqrt{1-\alpha^2}}+o\left(\frac{1}{T}\right) \tag{10}$$

を得る．その他の項についても(9)を代入し $O(T^{-1})$ の項までとれば，結局

$$p(\sqrt{T}(\tilde{\alpha}_{ML}-\alpha)<y)=\Phi\left(\frac{y}{\sqrt{1-\alpha^2}}\right)+i\left(\frac{y}{\sqrt{1-\alpha^2}}\right)\frac{y\Delta}{\sqrt{1-\alpha^2}}$$

$$+i\left(\frac{y}{\sqrt{1-\alpha^2}}\right)\left\{c_0+c_1\left(\frac{y}{\sqrt{1-\alpha^2}}\right)+c_2\left(\frac{y}{\sqrt{1-\alpha^2}}\right)^2\right.$$

$$\left.+c_3\left(\frac{y}{\sqrt{1-\alpha^2}}\right)^3+c_5\left(\frac{y}{\sqrt{1-\alpha^2}}\right)^5\right\}+o\left(\frac{1}{T}\right)$$

となる．ここで $x=y/\sqrt{1-\alpha^2}$ とおき $c_0, \cdots, c_5$ を代入して整理すれば

$$p(\sqrt{T}(\tilde{\alpha}_{ML}-\alpha)/\sqrt{1-a^2}<x)$$

$$=I(x)+i(x)\left[\frac{\alpha}{\sqrt{T}\ \sqrt{1-\alpha^2}}(1+x^2)+\frac{1}{4T(1-\alpha^2)}\{(5\alpha^2-1)x\right.$$

$$\left.+(1+\alpha^2)x^3-2\alpha^2x^5\}\right]+o\left(\frac{1}{T}\right)$$

となり，Fujikoshi and Ochi (1984) の結果と一致する．さらにまた，この結果は，Taniguchi (1984b) の σ^2 を既知と仮定したときの α の最尤推定量の $O(T^{-1})$ までの分布とも一致している．σ^2 が既知であっても未知であっても $\tilde{\alpha}_{ML}$ の分布が $O(T^{-1})$ まで一致するということは，一見奇異に感じられるので，次節においてその原因を考えてみよう．

5 σ^2 が既知の場合

σ^2 が既知の場合，$\tilde{\alpha}_{ML}$ は尤度方程式 $\partial l/\partial\alpha=0$ のみの解として得られる．従って $\sqrt{T}(\tilde{\alpha}_{ML}-\alpha)$ の確率展開は(7)式における係数 a^{ij}, A_{ijk}, A_{ijkl} のうち a^{11}, A_{111}, A_{1111} 以外の項は存在しないことになる．ゆえに

$$\sqrt{T}(\tilde{\alpha}_{ML}-\alpha)=a^{11}\bar{p}_1+\frac{1}{\sqrt{T}}\left(\bar{p}_1\bar{p}_3+\frac{1}{T}(a^{11})^3\bar{p}_1\bar{p}_3^2\right.$$

$$+\frac{1}{2T}(a^{11})^3\bar{p}_1^2\bar{p}_4+\frac{1}{6T}A_{1111}(a^{11})^4\bar{p}_1^3+o\left(\frac{1}{T}\right)$$

と，非常に簡単になる．これより $\sqrt{T}e(p)=\sqrt{T}(\hat{\alpha}_{ML}-\alpha)$ は，確率変数 $\bar{p}_1, \bar{p}_3, \bar{p}_4$ によって構成されていることが分る．ここに $\bar{p}_i$ の定義は前節のそれと同一である．この確率展開の型から，e の $\bar{p}_i$ に関する3次までの偏導関数は $e_1, e_{13}, e_{111}, e_{114}, e_{133}$ の5種類であることが分る．これらの偏導関数の原点における値は，前節の計算結果を用いれば，

$$e_1=1-\alpha^2,\ e_{13}=(1-\alpha^2)^2,\ e_{111}=0$$

$$e_{113}=2(1-\alpha^2)^3,\ e_{114}=(1-\alpha^2)^3$$

である．これらは σ^2 が未知の場合の結果と一致している．σ^2 が未知の場合には，さらに多くの種類の e_{ij}, e_{ijk} が存在するが，それらの多くは0であるので，結局エッジワース係数に寄与する0でない係数は，前節で見たように $e_1, e_{13}, e_{133}, e_{114}$ しかない．しかもこれらは上に述べたように σ^2 が既知であるか未知であるかにかかわらず等しい．このことは σ^2 が未知の場合に固有の項であるべき係数 e_{ij}, e_{ijk} が0であることの結果であるが，なぜ0になるかといえば，それらの項には，$\phi_{12}=0+o\left(\frac{1}{T}\right)$ という項を積の型で含んでいるからである．ϕ_{12} は $\bar{p}_1$ と $\bar{p}_2$ の2次のキュムラントであり，$\bar{p}_1$ と $\bar{p}_2$ は定義から $g_1=\frac{\partial l}{\partial \alpha}$，$g_2=\frac{\partial l}{\partial \sigma^2}$ に対応していたから，$\phi_{12}\to 0$ は $E\left(\frac{\partial l}{\partial \alpha}\right)\left(\frac{\partial l}{\partial \sigma^2}\right)\to 0$ を意味する．これは，情報行列の極限 $A_{..}^{-1}$ の非対角要素が0であることに対応している．すなわち，$\tilde{\alpha}_{ML}$ と $\tilde{\sigma}^2_{ML}$ が漸近的に独立であるということが，σ^2 が未知の場合と既知の場合の $\tilde{\alpha}_{ML}$ の分布の $O(T^{-1})$ までの漸近展開を一致させる直接の原因になっている．

σ^2 を既知とする仮定の最尤推定量に与える上のような効果は，一般のAR(p)の最尤推定量の場合に生じるであろうと予想される．しかしその場合，分布の展開を $O(T^{-1})$ まで明示的に求めることは不可能に近いから，σ^2 が未知の場合と既知の場合の漸近分布を直接比較することはできない．しかし分布が $O(T^{-1})$ まで一致するかどうかを確認するだけなら，Akahira (1981, 1982) の漸近的 Defficiency の概念を用いて比較することができるかもしれない．この予想の検討は，将来の課題としたい．

補　　論

(A) トレースの評価

4節で導いたキュムラントは，行列 Σ^{-1}, $\dot{\Sigma}$, $\ddot{\Sigma}$ 等の複雑な積のトレースとして表わされている．しかし $O(T^{-1})$ までの漸近展開を得るためには，これらのキュムラントの最高次数による近似(第1次近似)を求めるだけでよい．そして第1次近似は，Taniguchi (1983b, p. 159 定理1) によって，モデルのスペクトル密度関数 $f(\lambda)$ に関する積分によって表わされることが知られている．この定理は，Akahira and Takeuchi (1981) の高次漸近有効性の理論を時系列の漸近展開に応用する際の橋渡しとなる重要な定理である．さらに，キュムラントの積分表示は，コーシーの留数定理を応用することによって，明示的に解くことができる．その一例として ϕ_{11} の計算を示そう．まずトレースの積分近似は

$$\phi_{11}=\frac{1}{T}\operatorname{tr}\dot{\Sigma}\Sigma^{-1}\dot{\Sigma}\Sigma^{-1}=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f^{-2}(\lambda)\left\{\frac{\alpha}{\partial\alpha}f(\lambda)\right\}^2d\lambda+O\left(\frac{1}{T}\right)$$

となる．われわれのモデルにおいては

$$f(\lambda)=\frac{\sigma^2}{2\pi(1-\alpha e^{-i\pi})(1-\alpha e^{i\pi})}$$

であるから，上の積分は

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{(e^{i\pi}+e^{-i\pi}-2\alpha)^2}{(1-\alpha e^{i\pi})(1-\alpha e^{-i\pi})}d\lambda+O\left(\frac{1}{T}\right)$$

となる．ここで $z=e^{i\pi}$ と変数変換をおこなえば，上式は

$$\frac{1}{2\pi i}\int_c\frac{(z^2+1-2\alpha z)^2}{(1-\alpha z)(z-\alpha)^2z}dz+O\left(\frac{1}{T}\right).$$

ここに，c は $|z|=1$ で定義される閉曲線である．上の被積分関数を $F(z)$ とすると，$F(z)$ は $z=\alpha$ において2位の，$z=0$ において1位の極をもつという．そうして，留数定理によって

$$\frac{1}{2\pi i}\int_c F(z)=\mathrm{Res}(\alpha)+\mathrm{Res}(0)$$

と表わされる．ここに $\mathrm{Res}(a)$ は，$z=a$ における $F(z)$ の留数といい，a の位数を s とすれば

$$\mathrm{Res}(a)=\frac{1}{(s-1)!}\left[\frac{d^{s-1}}{dz^{s-1}}(z-a)^2F(z)\right]_{z=a}$$

によって与えられる．したがってこの場合

$$\mathrm{Res}(\alpha)=\frac{d}{dz}\ \frac{(1-2\alpha z+z^2)^2}{(1-\alpha z)^2 z}\ \Bigg|_{z=\alpha}=\frac{3\alpha^2-1}{\alpha^2(1-\alpha^2)}$$

$$\mathrm{Res}(0)=\frac{(1-2\alpha z+z^2)^2}{(1-\alpha z)(z-\alpha)^2}\ \Bigg|_{z=0}=\frac{1}{\alpha^2}$$

となる．したがって結局

$$\phi_{11}=\frac{3\alpha^2-1}{\alpha^2(1-\alpha^2)}+\frac{1}{\alpha^2}=\frac{2}{1-\alpha^2}$$

となる．以下同様の計算により次の結果を得る．

$$\frac{1}{T}\ \mathrm{tr}\Sigma^{-1}\dot{\Sigma}=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f^{-1}(\lambda)\left\{\frac{\partial}{\partial\alpha}f(\lambda)\right\}d\lambda+O\left(\frac{1}{T}\right)=0+O\left(\frac{1}{T}\right)$$

$$\frac{1}{T}\mathrm{tr}\Sigma^{-1}\dot{\Sigma}\Sigma^{-1}\dot{\Sigma}\Sigma^{-1}\dot{\Sigma}=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f^{-3}(\lambda)\left\{\frac{\partial}{\partial\alpha}f(\lambda)\right\}^3d\lambda+O\left(\frac{1}{T}\right)$$

$$=\frac{6\alpha}{(1-\alpha^2)^2}+O\left(\frac{1}{T}\right)=\frac{6\alpha}{(1-\alpha^2)^2}+O\left(\frac{1}{T}\right)$$

$$\frac{1}{T}\ \mathrm{tr}\Sigma^{-1}\dot{\Sigma}\Sigma^{-1}\ddot{\Sigma}=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f^{-2}(\lambda)\left\{\frac{\partial}{\partial\alpha}f(\lambda)\right\}\left\{\frac{\partial^2}{\partial\alpha^2}f(\lambda)\right\}d\lambda+O\left(\frac{1}{T}\right)$$

$$=\frac{8\alpha}{(1-\alpha^2)^2}+O\left(\frac{1}{T}\right)$$

$$\frac{1}{T}\ \mathrm{tr}\Sigma^{-1}\ddot{\Sigma}=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f^{-1}(\lambda)\left\{\frac{\partial}{\partial\alpha}f(\lambda)\right\}^2d\lambda+O\left(\frac{1}{T}\right)$$

$$=\frac{2}{1-\alpha^2}+O\left(\frac{1}{T}\right)$$

$$\frac{1}{T}\mathrm{tr}(\Sigma^{-1}\dot{\Sigma})^4=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f^{-4}(\lambda)\left\{\frac{\partial}{\partial\alpha}f(\lambda)\right\}^4d\lambda+O\left(\frac{1}{T}\right)$$

$$=\frac{6+14\alpha^2}{(1-\alpha^2)^3}+O\left(\frac{1}{T}\right)$$

$$\frac{1}{T}\ \mathrm{tr}(\Sigma^{-1}\dot{\Sigma})^2\Sigma^{-1}\ddot{\Sigma}=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f^{-3}(\lambda)\left\{\frac{\partial}{\partial\alpha}f(\lambda)\right\}^2\left\{\frac{\partial^2}{\partial\alpha^2}f(\lambda)\right\}d\lambda+O\left(\frac{1}{T}\right)$$

$$=\frac{4(2+5\alpha^2)}{(1-\alpha^2)^3}+O\left(\frac{1}{T}\right)$$

$$\frac{1}{T}\ \mathrm{tr}(\Sigma^{-1}\dot{\Sigma}\Sigma^{-1}\dddot{\Sigma})=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f^{-2}(\lambda)\left\{\frac{\partial}{\partial\alpha}f(\lambda)\right\}\left\{\frac{\partial^3}{\partial\alpha^3}f(\lambda)\right\}d\lambda+O\left(\frac{1}{T}\right)$$

$$=\frac{12(3\alpha^2+1)}{(1-\alpha^2)^3}+O\left(\frac{1}{T}\right)$$

$$\frac{1}{T}\operatorname{tr}(\Sigma^{-1}\dddot{\Sigma})=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f^{-1}(\lambda)\left\{\frac{\partial^3}{\partial\alpha^3}f(\lambda)\right\}d\lambda+O\left(\frac{1}{T}\right)$$

$$=\frac{12\alpha}{(1-\alpha^2)^2}+O\left(\frac{1}{T}\right).$$

上の留数計算における微分の評価は，初等的な計算であるとはいえ，相当量の計算が必要である．いずれも手計算で実行可能であるが，ここでは正確を期すために，手計算と数式演算処理プログラム REDUCE2 を用いたコンピュータによる計算とを併用した．

最後に ω^2 の計算に必要な ϕ_{11} の $O(T^{-1})$ までの項は REDUCE2 により

$$\phi_{11}=\frac{1}{T}\operatorname{tr}\Sigma^{-1}\dot{\Sigma}\Sigma^{-1}\dot{\Sigma}=\frac{2}{1-\alpha^2}+\frac{6\alpha^2-2}{T(1-\alpha^2)^2}$$

となることが示された．しかしこの計算とても Taniguchi (1984b, p. 16) の Lemma 7 を用いることにより，手計算可能である．

(B) 行列A..，A...，A....の評価

微係数の計算に必要な $A_{..}$, $A_{...}$, $A_{....}$ は上のトレースの評価を利用して次のように計算される．

$$A_{11}=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}E\left(\frac{\partial^2 l}{\partial\alpha^2}\right)=-\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2}\operatorname{tr}(\Sigma^{-1}\dot{\Sigma}\Sigma^{-1}\dot{\Sigma})=-\frac{1}{1-\alpha^2}$$

$$A_{12}=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}E\left(\frac{\partial^2 l}{\partial\alpha^2}\right)=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2\sigma^2 T}\operatorname{tr}\Sigma^{-1}\dot{\Sigma}=0$$

$$A_{22}=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}E\left(\frac{\partial^2 l}{\partial\sigma^4}\right)=-\frac{1}{2\sigma^4}.$$

よって

$$-A_{..}^{-1}=\begin{pmatrix}\dfrac{1}{1-\alpha^2} & 0\\ 0 & \dfrac{1}{2\sigma^4}\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix}1-\alpha^2 & 0\\ 0 & 2\sigma^4\end{pmatrix}$$

となるから $a^{11}=1-\alpha^2$, $a^{12}=0$, $a^{22}=2\sigma^4$ を得る．また

$$A_{111}=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}E\left(\frac{\partial^3 l}{\partial\alpha^3}\right)=\lim_{T\to\infty}\left(\frac{2}{T}\mathrm{tr}\,\Sigma^{-1}\dot{\Sigma}\Sigma^{-1}\dot{\Sigma}\right.$$

$$\left.-\frac{3}{2T}\mathrm{tr}\,\Sigma^{-1}\dot{\Sigma}\Sigma^{-1}\ddot{\Sigma}\right)=0$$

$$A_{112}=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}E\left(\frac{\partial^3 l}{\partial\alpha^2\partial\sigma^2}\right)=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\ \frac{1}{2\sigma^2}\mathrm{tr}(2\Sigma^{-1}\dot{\Sigma}\Sigma^{-1}\dot{\Sigma}-\Sigma^{-1}\ddot{\Sigma})$$

$$=\frac{1}{\sigma^2(1-\alpha^2)}$$

$$A_{122}=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}E\left(\frac{\partial^3 l}{\partial\alpha\partial(\sigma^2)^2}\right)=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T\sigma^4}\mathrm{tr}\,\Sigma^{-1}\dot{\Sigma}=0$$

$$A_{222}=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}E\left(\frac{\partial^3 l}{\partial(\sigma^2)^3}\right)=\frac{2}{\sigma^6}$$

$$A_{111}=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}E\left(\frac{\partial^4 l}{\partial\alpha^4}\right)$$

$$=\lim_{T\to\infty}\left\{-9\mathrm{tr}(\Sigma^{-1}\dot{\Sigma})^4+12\mathrm{tr}(\Sigma^{-1}\dot{\Sigma})^2(\Sigma^{-1}\ddot{\Sigma})-\frac{3}{2}\mathrm{tr}(\Sigma^{-1}\ddot{\Sigma})^2\right.$$

$$\left.-2\mathrm{tr}(\Sigma^{-1}\ddot{\Sigma}\Sigma^{-1}\dot{\Sigma})\right\}=0$$

$$A_{1222}=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}E\left(\frac{\partial^4 l}{\partial\alpha\partial(\sigma^2)^3}\right)=\lim_{T\to\infty}\left\{-\frac{4}{T\sigma^8}\mathrm{tr}\,\Sigma^{-1}\dot{\Sigma}\right\}=0$$

$$A_{1112}=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}E\left(\frac{\partial^4 l}{\partial\alpha^3\partial\sigma^2}\right)$$

$$=\lim_{T\to\infty}\left\{\frac{1}{T\sigma^2}\mathrm{tr}[-3(\Sigma^{-1}\dot{\Sigma})^3+\Sigma^{-1}\ddot{\Sigma}\Sigma^{-1}\dot{\Sigma}+\Sigma^{-1}\dot{\Sigma}\Sigma^{-1}\ddot{\Sigma}]\right.$$

$$\left.-\frac{1}{2\sigma^2T}\mathrm{tr}[-\Sigma^{-1}\dot{\Sigma}\Sigma^{-1}\ddot{\Sigma}+\Sigma^{-1}\dddot{\Sigma}-\Sigma^{-1}\dddot{\Sigma}\Sigma^{-1}\dot{\Sigma}]\right\}$$

$$=0.$$

第8章　AR(1)モデルにおける予測量の比較

1　はじめに

自己回帰モデルにおける，最小2乗推定量にもとづく予測量の小標本特性については，分布やモーメントの漸近展開を用いた研究が，最近いくつか報告されている．ここではそれらの研究を系統的に展望することはしないが，この章と関連の深いいくつかの論文を簡単に紹介し，2節以下の展開との関連を述べておこう．なお工学的時系列の分野では，モデルのパラメータが既知の場合の予測の問題が扱われることがあるが，本章ではパラメータは未知として議論をすすめる．

Yamamoto (1976) は未知パラメータの推定に用いられるサンプルと，予測量の構成に用いられるサンプルは，統計的に独立であるというよく用いられる仮定のもとで，AR(p) モデルにおける h 期先の予測量の予測誤差の漸近的平均2乗誤差を $O(T^{-1})$ の項まで求めた．このような仮定を置く場合のことを，本章では“独立な場合”と呼ぶことにする．彼のこの論文は，以後の一連の研究の出発点となり，いくつかの方向へ発展させられた．Phillips (1979) は，AR(1) モデルに限定したうえで“独立な場合”の仮定をゆるめ，推定に用いられるサンプルと予測量の構成に用いられるサンプルは，統計的に独立でないという仮定のもとで，最小2乗推定量にもとづく予測量の予測誤差の分布の漸近展開を $O(T^{-1})$ の項まで求めた．以後，このゆるめられた仮定を置く場合を“独立でない場合”を呼ぶ．彼はさらに，観測値の最後の値 y_T (推定にも予測にも使われる)が与えられたという条件の場合とそうでない場合とに分けて議論し，この条件の予測誤差に及ぼす効果を調べている．Tanaka and Maekawa (1984) は，Phillips の議論を発展させ，モデルとして AR(1) を想定したとき，真のモデルが ARMA(1, 1|μ)—ARMA(1, 1) モデルに未知の定数項を加えたモデル—

であったときの，すなわち想定誤差がある場合の，最小 2 乗推定にもとづく h 期先の予測量の予測誤差の分布の $O(T^{-1})$ までの漸近展開を求め，想定誤差の影響を調べた．予測量の分布の近似については，以上のように単純なモデルのもとでしか知られていないようであるが，これらの研究をもう少し広い範囲のモデル—たとえば ARMAX タイプのモデル—に拡張できれば，Hatanaka (1983) によって求められている予測の信頼区間帯 (Confidence belt) を漸近展開の立場から扱うことが可能になるかもしれない．

Yamamoto (1976) の他の方向への発展として，Reinsel (1980) がある．彼は“独立な場合”における，多変量自己回帰モデル（ベクトル自己回帰モデル）の予測誤差の漸近分散共分散行列を $O(T^{-1})$ の項まで求め，さらに自己回帰の階数に関する想定誤差の影響にも言及している．

他方 Fuller and Hasza (1981) は AR($p|\mu$)—AR(p) モデルに未知の定数項を加えたモデル—における“独立でない場合”における h 期先の予測誤差の条件付および条件なし平均 2 乗誤差を求めた．また Baillie (1979, 1980) は一連の研究において，回帰モデルの誤差項が AR(p) 過程に従い回帰の説明変数の中に遅れのある被説明変数が含まれる場合（いわゆる ARMAX 型モデル）や，ラグ付内生変数を含む同時方程式の場合における予測の問題を論じている．

以上の研究は，漸近理論にもとづくものであるが，精密理論の立場から Dufour (1984) は AR($p|\mu$) モデルにおいて，p を過小に想定した場合に，最小 2 乗推定にもとづく予測量の不偏性を分布の対称性に関する弱い仮定のもとで証明している．そこでは，明示的に述べられていないが“独立でない場合”が扱われている．Dufour は予測量の適性基準として不偏性を強調しているように見えるが，Phillips (1979), Tanaka and Maekawa (1984) および以下の本章に見られるように，y_T の条件付で考えると，この不偏性は保証されない．

さてこの章では，AR(1) モデル $y_t=\alpha y_{t-1}+u_t$ に焦点を絞り，異なる推定量にもとづく h 期先の予測量 $\hat{y}_{T+h}$ の比較をおこなう．このモデルに

対する推定法としては，最小2乗法，最尤法，Yule-Walker 法などいくつもの方法が知られており，それらのいくつかについては，前章で見たように分布の3次の漸近展開が与えられている．ところで予測誤差 $\hat{y}_{T+h}-y_{T+h}$ の $O(T^{-1})$ までの漸近展開においては，推定量 $\sqrt{T}(\hat{\alpha}-\alpha)$ の2次の漸近展開 $O(T^{-1/2})$ までの項しか影響力を持たないことが容易に分る（例えば Phillips (1979) を見よ）．したがって $\sqrt{T}(\hat{\alpha}-\alpha)$ の分布が $O(T^{-1/2})$ まで同じであるような推定量に関しては，それらにもとづく予測量の性質も $O(T^{-1})$ の項まで同じになることが直感的に予想される．しかしこのことは必ずしも自明なことではない．事実，以下に見られるように一部の例外的現象もありうる．

以下の展開は，Tanaka and Maekawa (1984)—今後 T−M 論文と略記する—で用いられた方法を，最小2乗推定量以外の推定量にもとづく予測誤差の分析に応用したものである．

2　モデルと予測量

ここからは，1階の自己回帰 (AR(1)) モデル

$$y_t=\alpha y_{t-1}+u_t,\ t=0,\ \pm1,\ \pm2,\ \cdots\cdots$$

における予測の問題に焦点を絞る．通常どおり次の仮定を設ける．

仮定1.　$|\alpha|<1$

仮定2.　$u_t\sim iid\ N(0,\ \sigma^2)$.

いま観測値 $y'=(y_0,\ y_1,\ \cdots y_T)$ が得られたとして，α が未知の場合，h 期先の y_{T+h} を予測する問題を考えよう．自然な予測法は，まず α を $y_0,\cdots,y_T$ から推定し（それを $\hat{\alpha}$ とする），$\hat{y}_{T+h}=\hat{\alpha}^h\hat{y}_T$ によって y_{T+h} を予測することであろう．$\hat{\alpha}$ として最小2乗推定量

$$\hat{\alpha}_{LS}=\frac{\sum_{t=1}^{T}y_ty_{t-1}}{\sum_{t=0}^{T-1}y_t^2}$$

を用いたときの $\hat{y}_{T+h}$ の小標本特性については，前節で言及したいくつかの研究によってすでに多くのことが知られている．ここでの目的は，α を他の方法によって推定した場合の予測量 $\hat{y}_{T+h}$ の小標本特性を調べること

である．代表的な α の推定量として Box and Jenkins (1970, p. 279) は，次の3つをあげている．

$$\hat{\alpha}_{ML}=\frac{\sum_{t=1}^{T} y_t y_{t-1}/(T-1)}{\sum_{t=1}^{T-1} y_t^2/(T-2)} \quad \text{(近似最尤推定量)}$$

$$\hat{\alpha}_{YW}=\frac{\sum_{t=1}^{T} y_t y_{t-1}}{\sum_{t=0}^{T} y_t^2} \quad \text{(Yule-Walker 推定量)}$$

$$\hat{\alpha}_{LS}{}^{*}=\frac{\sum_{t=1}^{T} y_t y_{t-1}}{\sum_{t=1}^{T-1} y_t^2}.$$

最後の $\hat{\alpha}_{LS}{}^{*}$ は，尤度関数

$$l=-\frac{n}{2}\log\sigma^2+\frac{1}{2}(1-\alpha^2)^{\frac{1}{2}}-\frac{1}{2\sigma^2}\{(1-\alpha^2)y_0{}^2+\sum_{t=1}^{T}(y_t-\alpha y_{t-1})^2\}$$

における{ }内を最小にするような α の推定量である．これも最小2乗推定量と呼ばれているが，回帰分析における最小2乗推定量 $\hat{\alpha}_{LS}$ とは，分母がわずかに異なる．また $\hat{\alpha}_{ML}$ は，T^{-1} に関して展開すれば明らかに

$$\hat{\alpha}_{ML}=\left(1-\frac{1}{T}\right)\frac{\sum_{t=1}^{T} y_t y_{t-1}}{\sum_{t=1}^{T-1} y_t^2}+O\left(\frac{1}{T^2}\right)$$

となり，$O(T^{-2})$ は3次までの漸近展開では無視しうるので，今後は前章で紹介した Anderson (1971) の近似最尤推定量と上の $\hat{\alpha}_{ML}$ を区別しないで用いることにし，公式も上のように $O(T^{-1})$ までの近似式を用いる．これらの推定量の漸近分布による比較は Fujikoshi and Ochi (1984) によって，また漸近平均2乗誤差による比較は西尾（1981）によってなされている．

以上の4種類の推定量は

$$\hat{\alpha}=\left(1-\frac{k_1}{T}\right)\frac{\sum_{t=1}^{T} y_t y_{t-1}}{k_2 y_0{}^2+\sum_{t=1}^{T-1} y_t{}^2+k_3 y_T{}^2}, \quad k_i=0,\ 1$$

という型に書くことができる．ただし $k_1=1$ のとき，$k_2=k_3=0$ である．

この推定量 $\hat{\alpha}$ にもとづく予測量 $\hat{y}_{T+h}=\hat{\alpha}^h y_T$, および前章で扱った最尤推定量 $\tilde{\alpha}_{ML}$ にもとづく予測量 $\tilde{y}_{T+h}$ の予測誤差 $\hat{y}_{T+h}-y_{T+h}$ および $\tilde{y}_{T+h}-y_{T+h}$ の分布と1次と2次のモーメントの $O(T^{-1})$ までの近似を求めることによって，この予測量の小標本特性を見ていこう．

この節と次節では $\hat{y}_{T+h}$ の分析に焦点をあて，5節において最尤予測量 $\tilde{y}_{T+h}$ を一括して扱う．まず以下の記号を導入する．

$$p_1=\frac{1}{T}(k_2y_0^2+\sum_{t=1}^{T-1}y_t^2+k_3y_T^2)-\mu_1^*$$

$$\mu_1^*=\frac{1}{T}E(k_2y_0^2+\sum_{h=1}^{T-1}y_t^2+k_3y_T^2)$$

$$p_2=\frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T}y_ty_{t-1}-\mu_2,\quad \mu_2=\frac{1}{T}E(\sum_{t=1}^{T}y_ty_{t-1})\,.$$

このとき

$$\hat{\alpha}=\left(1-\frac{k_1}{T}\right)\frac{p_2+\mu_2}{p_1+\mu_1^*}$$

と書ける．また予測誤差は

$$\begin{aligned}\hat{y}_{T+h}-y_{T+h}&=\hat{\alpha}^h y_T-y_{T+h}\\&=\alpha^h y_T-y_{T+h}+(\hat{\alpha}^h-\alpha^h)y_T\end{aligned}$$

と表わすことができる．ここで $q_h=\sqrt{T}(\hat{\alpha}^h-\alpha^h)$ とおけば

$$\hat{y}_{T+h}-y_{T+h}=\alpha^h y_T-y_{T+h}+q_hy_T/\sqrt{T}$$

となる．明らかに $q_h=O_p(1)$ であるから，$T\to\infty$ のときは上式の最後の項は無視することができるが，T が十分大きくないときはその項は無視できない．$\hat{y}_{T+h}-y_{T+h}$ の分布の $O(T^{-1})$ までの漸近展開の導出は，T−M 論文のそれと全く並行した方法によって行うことができる．その準備として q_h の確率展開を与えておこう．

ここで改めて $p'=(p_1,\ p_2)$, $\eta(p)=\hat{\alpha}^h-\alpha^h$ とおけば，$q_h=\sqrt{T}\eta(p)$ と書くことができる．後に示すように $\eta(0)=0+O(T^{-1})$ なので，このことに注意して $\eta(p)$ を原点の回りでテイラー展開すれば，

$$\begin{aligned}q_h&=\sqrt{T}\left\{\eta(0)+\sum_{j=1}^{2}\frac{\partial\eta(0)}{\partial p_j}p_j+\frac{1}{2}\sum_{j,k=1}^{2}\frac{\partial^2\eta(0)}{\partial p_j\partial p_k}p_jp_k+\cdots\right\}\\&=\eta_j\bar{p}_j+\frac{\eta_{jk}}{2\sqrt{T}}\bar{p}_j\bar{p}_k+O_p(T^{-1})\end{aligned}$$

を得る．ここに

$$\bar{p}_j=\sqrt{T}p_j,\quad \eta_j=\frac{\partial\eta(0)}{\partial p_j},\quad \eta_{jk}=\frac{\partial^2\eta(0)}{\partial p_j\partial p_k}$$

である．また明らかに $\bar{p}_j=O_p(1)$ である．

ところで $\eta(0)\neq 0$ なので，ここでその大きさを評価しておこう．いま $\sum_{t=1}^{T}y_ty_{t-1}=\alpha\sum_{t=1}^{T}y^2{}_{t-1}+\sum_{t=1}^{T}u_ty_{t-1}$ に注意し，$\mu_1=\frac{1}{T}E(\sum_{t=1}^{T}y^2{}_{t-1})$ とおけば明らかに $\alpha=\mu_2/\mu_1$ となる．またこのとき $\mu_1{}^*=\mu_1+O(T^{-1})$ となることは容易に分るから，

$$\frac{\mu_2}{\mu_1{}^*}=\frac{\mu_2}{\mu_1}+O\left(\frac{1}{T}\right)=\alpha+O\left(\frac{1}{T}\right)$$

となる．ゆえに $e(p)=\hat{\alpha}-\alpha$ とおけば $e(0)=0+O\left(\frac{1}{T}\right)$ である．次に2項展開により

$$\begin{aligned}\eta(p)&=\{(\hat{\alpha}-\alpha)-\alpha\}^h-\alpha^h\\&=\sum_{j=1}^{h}\binom{h}{j}e(p)^j\alpha^{h-j}\end{aligned}$$

と書けるから，$\eta(0)=0+O\left(\frac{1}{T}\right)$ を得る．ただし h は T に比べて十分小さいものとする．この結果を使えば，

$$\begin{aligned}\eta_1&=-h\alpha^h/\mu_1{}^*=-h\alpha^h(1-\alpha^2)/\sigma^2+O\left(\frac{1}{T}\right)\\\eta_2&=h\alpha^{h-1}/\mu_1{}^*=h\alpha^{h-1}(1-\alpha^2)/\sigma^2+O\left(\frac{1}{T}\right)\\\eta_{11}&=h(h+1)\alpha^h/\mu_1{}^{*2}=h(h+1)\alpha^h(1-\alpha^2)^2/\sigma^4+O\left(\frac{1}{T}\right)\\\eta_{12}&=\eta_{21}=-h^2\alpha^{h-1}/\mu_1{}^2=-h^2\alpha^{h-1}(1-\alpha^2)^2/\sigma^4+O\left(\frac{1}{T}\right)\\\eta_{22}&=h(h-1)\alpha^{h-2}/\mu_1{}^{*2}=h(h-1)\alpha^{h-2}(1-\alpha^2)^2/\sigma^4+O\left(\frac{1}{T}\right)\end{aligned}$$

となる．

なお，上の計算においては次の点に注意した．$e(p)$ において $k_1=0$ の場合と $k_1=1$ の場合とのあいだでは，$e(p)$ の $1/T$ の項に差がある．すなわち

$$e(p)=\frac{p_2+\mu_2}{p_1+\mu_1}\quad(k_1=0)$$

$$e(p)=\left(1-\frac{1}{T}\right)\frac{p_2+\mu_2}{p_1+\mu_1}\quad(k_1=1).$$

しかし $k_1=1$ のときの $\frac{1}{T}$ の項は，明らかに η_i, η_{ij} の $O(1)$ の項には影響しない．

3　予測誤差の分布の展開 (1)—“独立でない場合”—

3.1　条件付分布

この節では，$\hat{\alpha}$ と $\hat{y}_{T+h}$ が同一のサンプルから計算される場合の y_T が与えられたときの条件付分布 $p(\hat{y}_{T+h}-y_{T+h}<x|y_T)$ の $O(T^{-1})$ までの漸近展開を導出する．その導出は，T−M 論文 (p. 332) の定理1を，この問題に即した型に書き換えればよい．導出の基本方針は次のとおりである．

（i）y_T を与えたときの $\hat{y}_{T+h}-y_{T+h}$ の条件付特性関数 $\phi_1(\theta|y_T)$ を $O(T^{-1})$ まで求める．

（ii）$\phi_1(\theta|y_T)$ を反転することにより $\hat{p}(y_{T+h}-y_{T+h}<x|y_T)$ の，$O(T^{-1})$ までの漸近展開を求める．

（iii）上の結果から $\hat{y}_{T+h}-y_{T+h}$ の密度関数の $O(T^{-1})$ までの展開が得られる．それを用いて漸近的な期待値と平均2乗誤差を計算する．

$\phi_1(\theta|y_T)$ は，

$$\begin{aligned}\phi_1(\theta|y_T)&=E[\exp\{i\theta(\hat{y}_{T+h}-y_{T+h})\}|y_T]\\&=E[\exp\{i\theta(\alpha^h y_T-y_{T+h}+q_h y_T/\sqrt{T}\}|y_T]\\&\sim\exp(i\theta\alpha^h y_T)[E\{\exp(-i\theta y_{T+h})|y_T\}\\&\quad+(i\theta/\sqrt{T})y_T E\{q_h\exp\{-i\theta y_{T+h})|y_T\}\\&\quad-(\theta^2 y_T{}^2/2T)E\{q_h{}^2\exp(-i\theta y_{T+h})|y_T\}]\end{aligned}$$

と書くことができる．この式の中に現われる期待値は，次の補題で与えられる．

〔補題1〕（T−M 論文 p. 331）

y_T が与えられたときの q_h と y_{T+h} の条件付特性関数を $\phi(\theta_1,\ \theta_2|y_T)$ とする．このとき

$$E\{\exp(-i\theta y_{T+h})\,|\,y_T\}=\exp\left(-i\theta\frac{\gamma_h y_T}{\gamma_0}-\frac{\theta^2\sigma^2}{2}\right)$$

$$E\{q_h\exp(-i\theta y_{T+h})\,|\,y_T\}=-i\frac{\partial\phi(0,\ -\theta\,|\,y_T)}{\partial\theta_1}$$

$$E\{q_h{}^2\exp(-i\theta y_{T+h})\,|\,y_T\}=-\frac{\partial^2\phi(0,\ \theta\,|\,y_T)}{\partial\theta_1{}^2}.$$

ここに

$$\gamma_0=\mathrm{var}(y_t)=\frac{\sigma^2}{1-\alpha^2},\quad \gamma_h=\mathrm{cov}(y_t,\ y_{t-h})=\frac{\sigma^2\alpha^h}{1-\alpha^2}$$

である．

証明．y_T と y_{T+h} は，2 次元正規分布

$$\begin{pmatrix} y_T \\ y_{T+h}\end{pmatrix}\sim N\left[\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}\gamma_0 & \gamma_h\\ \gamma_h & \gamma_0\end{pmatrix}\right]$$

に従う．ゆえに y_T を与えたときの y_{T+h} の条件付分布は，よく知られているように，平均と分散が

$$E(y_{T+h}|y_T)=\gamma_h y_T/r_0,\ \gamma^2=\mathrm{var}(y_{T+h}|y_T)=\gamma_0-\gamma_h{}^2/\gamma_0$$

で与えられる正規分布に従う．よってその特性関数より上の第 1 式が得られる．第 2 式と第 3 式は

$$\phi(\theta_1,\ \theta_2|y_T)=E\{\exp(i\theta_1 q_h+i\theta_2 y_{T+h})\,|\,y_T\}$$

を偏微分することにより

$$\frac{\partial\phi(\theta_1,\ \theta_2|y_T)}{\partial\theta_1}=iE\{q_h\exp(i\theta_1 q_h+i\theta_2 y_{T+h})\,|\,y_T\}$$

$$\frac{\partial^2\phi(\theta_1,\ \theta_2|y_T)}{\partial\theta_1\partial\theta_2}=-E\{q_h{}^2\exp(i\theta_1 q_h+i\theta_2 y_{T+h})\,|\,y_T\}$$

を得る．ここで $\theta_1=0$ とすれば，ただちに上の結果が得られる（証明終り）．

上のステップ（i）においては $\phi(\theta_1,\ \theta_2|y_T)$ が重要な役割を果す．その導出のステップは次のとおりである．

(1)　$q_h,\ y_T,\ y_{T+h}$ の同時分布の特性関数を $O(T^{-1/2})$ の項まで求める．以下ではその特性関数を $\delta(t,\ s_3,\ s_4)$ で示す．

(2)　上で求めた特性関数を反転することにより $q_h,\ y_T,\ y_{T+h}$ の同時密度関数を $O(T^{-1/2})$ まで求める．それを $f(q_h,\ y_T,\ y_{T+h})$ とする．

(3)　上の結果を用いて $f(q_h, y_T, y_{T+h})/f(y_T)$ より y_t の条件付分布 $g(q_h, y_{T+h}|y_T)$ を $O(T^{-1/2})$まで求める．

(4)　$g(q_h, y_{T+h}|y_T)$ を用いて (q_h, y_{T+h}) の y_T の条件付特性関数 $\phi(\theta_1, \theta_2|y_T)$ を求める．

以上の導出過程は原理的には単純であるが，計算は長く複雑であるので，その概要を補論に掲げることにして先へ進もう．これらの長い過程を経て，最終的には次の定理（T-M 論文の定理1に対応する）を得る．

〔**定理1**〕 y_T を与えたときの $\hat{y}_{T+h}-y_{T+h}$ の条件付分布の $O(T^{-1})$ までの漸近展開は，次式で与えられる．

$$
\begin{aligned}
&p(\hat{y}_{T+h}-y_{T+h}<x|y_T)\\
&\sim \Phi\left(\frac{x}{\gamma}\right)+\frac{\phi\left(\frac{x}{\gamma}\right)}{\gamma}\left[\frac{\alpha_4}{2\sqrt{T}}-\frac{\omega^2 y_T}{2\sqrt{T}}H_1(x)\right.\\
&-\frac{iC_1}{2}\left\{\frac{y_T{}^2}{\gamma_0{}^2}-\frac{1}{\gamma_0}+\frac{2\gamma_h y_T}{\gamma_0{}^2}H_1(x)+\frac{\gamma_h{}^2}{\gamma_0{}^2}H_1(x)\right\}\\
&\left.+\frac{iC_2}{2}\left\{\frac{y_T}{\gamma_0}H_1(x)+\frac{\gamma_h}{\gamma_0}H_2(x)\right\}-\frac{iC_3}{2}H_2(x)\right].
\end{aligned}
\tag{1}
$$

ここに $\Phi(z)$ と $\phi(z)$ は，それぞれ標準正規分布の分布関数と密度関数である．さらに

$$H_1(x)=x/\gamma^2,\ H_2(x)=x^2/\gamma^4-1/\gamma^2$$

$$\alpha_4=-\eta_{jk}E(\bar{p}_j\bar{p}_k)$$

$$\omega^2=\eta_j\eta_k E(\bar{p}_j\bar{p}_k)$$

$$C_1=-i\eta_j E(\bar{p}_j y_T{}^2)$$

$$C_2=-i\eta_j E(\bar{p}_j y_T y_{T+h})$$

$$C_3=-i\eta_j E(\bar{p}_j y_{T+h}{}^2)$$

である．

つぎに上の定理における，係数 $\alpha_4, \omega^2, C_1, C_2, C_3$ を，α の推定法ごとに評価することによって，それらの推定法に対応する予測量の分布の漸近展開が得られる．その際，係数 α_4 と ω^2 については次の事実が成立する．

〔**補題**〕 エッジワース係数 α_4 と ω^2 は，推定量 $\hat{\alpha}$ における $k_i(i=1,$

2，3）の値にかかわらず常に

$$\alpha_4=(1-\alpha^2)h(h-1)\alpha^{h-2}+4\alpha h\alpha^{h-1}$$

$$\omega^2=h^2\alpha^{2(h-1)}(1-\alpha^2)+O\left(\frac{1}{T}\right)$$

である．

証明．

$$A_1=\begin{pmatrix} k_2 & & & & \\ & 1 & & 0 & \\ & & \ddots & & \\ & 0 & & 1 & \\ & & & & k_3 \end{pmatrix},\quad A_2=\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 & & & 0 \\ 1 & \ddots & \ddots & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & & & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

とおけば，

$$p_1=\frac{1}{T}y'A_1y-\mu_1,\quad p_2=\frac{1}{T}y'A_2y-\mu_2 \tag{2}$$

と表わされる．A_2 は Toeplitz 行列，A_1 は漸近的に Toeplitz 行列である．よく知られているように

$$E(\bar{p}_j\bar{p}_k)=\frac{1}{T}\mathrm{tr}(\Omega A_j\Omega A_k),\ j,\ k=1,\ 2$$

である．この式の右辺は Hannan〔1970, p. 354〕の定理により AR(1) モデルのスペクトル密度関数 $f(x)$ を用いて

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f^2(\lambda)(\cos\lambda)^{j+k-2}d\lambda+O\left(\frac{1}{T}\right)$$

によって近似される．さらに留数定理を応用することによりこの積分を近似的に解けば，結局

$$E(\bar{p}_1\bar{p}_1)=\frac{2\sigma^4(1+\alpha^2)}{(1-\alpha^2)^3}+O\left(\frac{1}{T}\right)$$

$$E(\bar{p}_1\bar{p}_2)=\frac{4\alpha\sigma^4}{(1-\alpha^2)^3}+O\left(\frac{1}{T}\right)$$

$$E(\bar{p}_2\bar{p}_2)=\frac{\sigma^4(1+4\alpha^2-\alpha^4)}{(1-\alpha^2)^3}+O\left(\frac{1}{T}\right)$$

となる．これらの値と上で求めた η_j, η_{jk} の値を用いて α_4 と ω^2 を計算すれば，上の結果が得られる（証明終り）．

トレースを積分近似したときの，推定量の違いによる差の具体例をひと

つあげておこう．$k_2=1$ のとき，$k_3=0$ と $k_3=1$ の場合の差は次のように表わされる．A_1 を $k_2=1,\ k_3=0$ の場合に $A_1{}^*$ を$k_2=1,\ k_3=1$ の場合に対応させれば

$$
\begin{aligned}
&(\mathrm{tr}\,A_1\Omega A_2\Omega-\mathrm{tr}\,A_1{}^*\Omega A_2\Omega)/T\\
&=\mathrm{tr}\,\{(A_1-A_1{}^*)\Omega A_2\Omega\}/T\\
&=\mathrm{tr}\left\{\begin{pmatrix} 0 & & & 0\\ & \ddots & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & 0\\ & & & & 1\end{pmatrix}\Omega\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 & & 0\\ 1 & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & 1\\ 0 & & 1 & 0\end{pmatrix}\Omega\right\}/T\\
&=\frac{\gamma_0}{T}(\gamma_0\gamma_1+\gamma_1\gamma_2+\cdots)=\frac{\gamma_0{}^3}{T}(\alpha+\alpha^3+\alpha^5+\cdots)\\
&=\frac{1}{T}\left(\frac{\sigma^2}{1-\alpha^2}\right)^3\left(\frac{\alpha}{1-\alpha^2}\right)=O\left(\frac{1}{T}\right)
\end{aligned}
$$

となる．すなわち k_i の値にかかわらずトレースの第1次近似は等しい．

次に $C_1,\ C_2,\ C_3$ の値は $k_2,\ k_3$ の値に影響されるので，個々の場合ごとに評価しなければならない．まず次の2つのベクトルを定義する．

$$
b_3=(\underbrace{0\cdots\cdots010}_{T+2\text{個}})',\quad b_4=(\underbrace{0\cdots\cdots01}_{T+2\text{個}})'
$$

このとき $\bar{p}_1,\ \bar{p}_2,\ y_T,\ y_{T+h}$ のキュムラント母関数は

$$
\begin{aligned}
\psi(\theta)=&-\frac{1}{2}\log|I-\frac{2\Omega^*}{\sqrt{T}}(\theta_1A_1+\theta_2A_2)|\\
&+\frac{1}{2}(\Omega^*(\theta_3b_3+\theta_4b_4))'\left(\Omega^*-\frac{2\Omega^*}{\sqrt{T}}(\theta_1A_1+\theta_2A_2)\Omega^*\right)^{-1}\times\\
&(\Omega^*(\theta_3b_3+\theta_4b_4))-\sqrt{T}(\mu_1\theta_1+\mu_2\theta_2)
\end{aligned}
$$

と表わされる．ここで Ω^* は $(y_0,\ y_1,\ \cdots\ y_T,\ y_{T+h})$ の分散共分散行列

$$
\Omega^*=\left(\begin{array}{ccc:c}
 & & & \gamma_{T+h}\\
 & \Omega & & \gamma_{T+h-1}\\
 & & & \vdots\\
 & & & \gamma_h\\
\hdashline
\gamma_{T+h} & \gamma_{T+h-1}\cdots & \gamma_h & \gamma_0
\end{array}\right)
$$

である．これから $\partial^3\psi(0)/\partial\theta_j\partial\theta_p\partial\theta_q,\ j=1,\ 2\ p,\ q=3,\ 4$ を計算すれば

$$E(\bar{p}_j y_T^2)=\frac{2}{\sqrt{T}}b_3'\Omega^* A_j\Omega^* b_3$$

$$E(\bar{p}_j y_{T+h} y_T)=\frac{2}{\sqrt{T}}b_3'\Omega^* A_j\Omega^* b_4$$

$$E(\bar{p}_j y_{T+h}^2)=\frac{2}{\sqrt{T}}b_4'\Omega^* A_j\Omega^* b_4,\quad j=1,\ 2$$

となる．これらはそれぞれの推定量ごとに次のように評価される．

（i）$\hat{\alpha}_{LS}{}^*$ の場合（$k_1=0,\ k_2=0,\ k_3=0$）

$$\phi_{133}=\frac{2}{\sqrt{T}}b_3'\Omega^* A_1\Omega^* b_3$$

$$=\frac{2}{\sqrt{T}}(\gamma_T,\ \gamma_{T-1},\ \cdots\gamma_1,\ \gamma_0,\ \gamma_1)\begin{pmatrix} 0 & & & & & \\ & 1 & & & 0 & \\ & & \ddots & & & \\ & & & 1 & & \\ & 0 & & & 0 & \\ & & & & & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \gamma_T \\ \vdots \\ \gamma_1 \\ \gamma_0 \\ \gamma_1 \end{pmatrix}$$

$$=\frac{2}{\sqrt{T}}(\gamma_1^2+\gamma_2^2+\gamma_3^2+\cdots)$$

$$=\frac{2}{\sqrt{T}}\ \frac{\gamma_1^2}{1-\alpha^2}\ .$$

以下同様に

$$\phi_{233}=\frac{2\alpha\gamma_0^2}{\sqrt{T}(1-\alpha^2)},\quad \phi_{134}=\frac{2\alpha^{h+2}\gamma_0^2}{\sqrt{T}(1-\alpha^2)}$$

$$\phi_{234}=\frac{2\alpha^{h+1}\gamma_0^2}{\sqrt{T}(1-\alpha^2)},\quad \phi_{144}=\frac{2\alpha^{h+2}\gamma_0^2}{\sqrt{T}(1-\alpha^2)}$$

$$\phi_{244}=\frac{2\alpha^{h+1}\gamma_0^2}{\sqrt{T}(1-\alpha^2)}$$

を得る．従って

$$C_1=-i(\eta_1\phi_{133}+\eta_2\phi_{233})=-\frac{i}{\sqrt{T}}\times 2h\alpha^h\gamma_0$$

$$C_2=-i(\eta_1\phi_{134}+\eta_2\phi_{234})=-\frac{i}{\sqrt{T}}\times 2h\alpha^{2h}\gamma_0$$

$$C_3=-i(\eta_1\phi_{144}+\eta_2\phi_{244})=-\frac{i}{\sqrt{T}}\times 2h\alpha^{3h}\gamma_0$$

を得る．以下結果のみ示せば（ii）$\hat{\alpha}_{LS}$ の場合（$k_1=0, k_2=1, k_3=0$）と，（iii）$\hat{\alpha}_{ML}$ の場合（$k_1=1,\ k_2=0,\ k_3=0$）は（i）の場合と同じ結果となる．また (iv) $\hat{\alpha}_{YW}$ の場合（$k_1=0,\ k_2=1,\ k_3=1$）には $C_1=C_2=C_3=0$ となる．

以上の結果を(1)式に代入すれば，次の系を得る．

〔系1〕 α の推定量として $\hat{\alpha}_{LS}{}^{*}$, $\hat{\alpha}_{LS}$, $\hat{\alpha}_{ML}$ を用いたときの予測量 $\hat{y}_{T+h}$ の条件付分布 $p(\hat{y}_{T+h}-y_{T+h}<x|y_T)$ の $O(T^{-1})$ までの展開は，全て

$$\Phi\left(\frac{x}{\gamma}\right)+\frac{\phi\left(\frac{x}{\gamma}\right)}{\gamma}\frac{y_T}{2T}\times\left[h\alpha\left\{2\alpha^{h-1}\left(3-\frac{(1-\alpha^2)y_T{}^2}{\sigma^2}\right)\right.\right.$$
$$\left.\left.-(1-\alpha^2)(h-1)\alpha^{h-3}\right\}-\frac{h^2\alpha^{2(h-1)}(1-\alpha^2)y_Tx}{\gamma^2}\right] \tag{3}$$
$$\gamma^2=(1-\alpha^{2h})\sigma^2/(1-\alpha^2)$$

で与えられる．

ここで $h=1$ とすれば，Phillips (1979) の $\hat{\alpha}_{LS}$ にもとづく予測量に関する結果に一致する．彼が指摘しているように $h=1$ のときは，$\alpha>0$, $y_T>0$ に対して分布は負の歪みを持つ．しかし $h>1$ の場合は，この歪みの程度は α の大きさに非常に依存する．$y_T>0$ で α が1に近いとき，分布は負の歪みをもつが，そうでない場合は正の歪みをもつ．また $\hat{\alpha}_{YW}$ を用いたときは

$$\Phi\left(\frac{x}{\gamma}\right)+\frac{\phi\left(\frac{x}{\gamma}\right)}{\gamma}\frac{y_T}{2T}\left[4h\alpha^h-h(h-1)(1-\alpha^2)\alpha^{h-2}\right.$$
$$\left.-h^2\alpha^{2(h-1)}(1-\alpha^2)y_T\left(\frac{x}{\sigma^2}\right)\right] \tag{4}$$

で与えられる．

上に与えられた分布を $\left(\frac{x}{\gamma}\right)$ で微分することによって $\hat{y}_{T+h}-y_{T+h}$ の密度関数の $O(T^{-1})$ までの近似が得られるから，その結果を用いて，予測誤差の偏りと平均2乗誤差が次のように計算される．推定量 $\hat{\alpha}_{LS}$, $\hat{\alpha}_{LS}{}^{*}$, $\hat{\alpha}_{ML}$ に対しては

$$E(\hat{y}_{T+h}-y_{T+h}|y_T)\sim\frac{y_T}{T}\left\{h\alpha^h\left(\frac{y^2{}_T}{\gamma_0}-3\right)+\frac{h(h-1)}{2}(1-\alpha^2)\alpha^{h-2}\right\}$$
$$E\{(\hat{y}_{T+h}-y_{T+h})^2|y_T\}\sim\frac{1-\alpha^{2h}}{1-\alpha^2}\sigma^2+\frac{y_T{}^2}{T}h^2\alpha^{2(h-1)}(1-\alpha^2)$$

となる．上の第2式は Fuller and Hasza (1981) の結果と一致している．

他方 Yule-Walker 推定量 $\hat{\alpha}_{YW}$ に対しては

$$E(\hat{y}_{T+h}-y_{T+h}|y_T)\sim-\frac{y_T}{2T}\{4h\alpha^h-h(h-1)(1-\alpha^2)\alpha^{h+2}\}$$

となるが，平均2乗誤差は上の結果と同じになる．以上のことから，条件付平均2乗誤差の $O(T^{-1})$ までの近似によって評価すると，上の4つの予測量は全く同等であることが言える．

3.2 条件付でない場合

条件付でない場合の分布の導出は，理論的には T−M 論文が行っているように特性関数の反転によるべきであるが，ここでは形式的に上で得られた結果を y_T に関して期待値をとることにより，y_T の条件付でない場合の分布を求める．$\hat{\alpha}_{YW}$ に基づく予測量を除く他の予測量については，全ての結果が $\hat{\alpha}_{LS}$ のそれに一致する．(3)に対応する条件なし分布は，T−M 論文より

$$\Phi\left(\frac{x}{\gamma}\right)-\frac{\phi\left(\frac{x}{\gamma}\right)}{\gamma}\cdot\frac{h^2(1-\alpha^2)\alpha^{2(h-1)}x}{2T(1-\alpha^{2h})}$$

である．また(4)式に対応する条件なし分布は

$$\Phi\left(\frac{x}{\gamma}\right)-\frac{\phi\left(\frac{x}{\gamma}\right)}{\gamma}\cdot\frac{h^2\alpha^{2(h-1)}}{2T}$$

である．他方，偏りと平均2乗誤差については $\hat{\alpha}_{YW}$ を含む全ての場合について

$$E(\hat{y}_{T+h}-y_{T+h})\sim0 \tag{5}$$

$$E(\hat{y}_{T+h}-y_{T+h})^2\sim\frac{1-\alpha^{2h}}{1-\alpha^2}\sigma^2+\frac{1}{T}\sigma^2h^2\alpha^{2(h-1)} \tag{6}$$

である．上の(6)式は Box and Jenkins (1970, p. 269), Yamamoto (1976) および Fuller and Hasza (1981) の結果と同一である．

4　予測誤差の分布の展開 (2)

——“独立な場合”——

時系列の予測理論においては，しばしば $\hat{\alpha}$ と (y_T, y_{T+h}) が独立である

という単純化の仮定が置かれる．この節では，この仮定のもとで予測誤差 $(\hat{y}_{T+h}-y_{T+h})$ の分布の展開を求める．そして，前節と同様に y_T の条件付の場合と，条件なしの場合に分けて考える．

4.1　条件付分布

この場合の分布は，次の定理によって与えられている．

〔定理〕 (T−M 論文 p. 338) $\hat{y}_{T+h}-y_{T+h}$ の y_T を与えたときの条件付分布は，次式で与えられる．

$$p(\hat{y}_{T+h}-y_{T+h}<x|y_T)$$
$$\sim\Phi\left(\frac{x}{\gamma}\right)+\frac{\phi\left(\frac{x}{\gamma}\right)}{\gamma}\cdot\frac{y_T}{2T}\left\{\alpha_4-\frac{\omega^2 y_T}{\gamma^2}\right\}. \tag{7}$$

ここに α_4, ω^2, γ は前節で定義されたものと同じである．

ここで分布(7)における係数 α_4, ω^2 は，前節で示されたように，4つの推定量において共通であった．また前節で見たような，推定量ごとに異なる係数 C_1, C_2, C_3 は，この場合存在しない．したがって“独立な場合”には，α の推定法の違いは分布に全く影響をもたらさないことが分る．補題に示された α_4, ω^2 の値を上の分布に代入することにより，ただちに次の〔系2〕を得る．

〔系2〕 α の推定量 $\hat{\alpha}_{LS}$, $\hat{\alpha}_{LS}^*$, $\hat{\alpha}_{ML}$, $\hat{\alpha}_{YW}$ のいずれに対しても

$$p(\hat{y}_{T+h}-y_{T+h}<x|y_T)$$
$$\sim\Phi\left(\frac{\gamma}{\gamma}\right)+\frac{\phi\left(\frac{x}{\gamma}\right)}{\gamma}\ \frac{y_T}{2T}\Big[h\alpha\{4\alpha^{h-1}-(1-\alpha^2)(h-1)\alpha^{h-3}\}$$
$$-\frac{h^2\alpha^{2(h-1)}(1-\alpha^2)y_T x}{\gamma^2}\Big]$$

である．ここに $\gamma=(1-\alpha^{2h})\sigma^2/(1-\alpha^2)$.

この分布から，偏りと平均2乗誤差は次のように計算される．

$$E(\hat{y}_{T+h}-y_{T+h}|y_T)\sim\frac{y_T}{T}\left\{-2h\alpha^h+\frac{h(h-1)}{2}(1-\alpha^2)\alpha^{h-2}\right\}$$

$$E\{(\hat{y}_{T+h}-y_{T+h})^2|y_T\}\sim\frac{1-\alpha^{2h}}{1-\alpha^2}\sigma^2+\frac{y_T}{T}h^2\alpha^{2(h-1)}(1-\alpha^2).$$

4.2　条件なし分布

4.1の結果を y_T に関して形式的に期待値をとることにより，条件なしの場合の結果が得られる．この場合も，理論的には特性関数の反転を用いるべきであるが，結果は同じなので形式論を採用する．そうすると

〔系3〕 α の推定量 $\hat{\alpha}_{LS}$, $\hat{\alpha}_{LS}^*$, $\hat{\alpha}_{ML}$, $\hat{\alpha}_{YW}$ のいずれに対しても

$$p(\hat{y}_{T+h}-y_{T+h}<x)\sim \Phi\left(\frac{x}{\gamma}\right)-\frac{\phi\left(\frac{x}{\gamma}\right)}{\gamma}\frac{h^2(1-\alpha^2)\alpha^{2(h-1)}x}{2T(1-\alpha^{2h})}$$

となる．

この結果は，“独立でない場合” における条件なし分布と全く一致している．したがってまた偏りも平均2乗誤差も(5)式と(6)式に一致する．すなわち条件なし分布に関しては，上の単純化の仮定は全く影響を及ぼさない．

5　最尤予測量について

前章で述べたように，近似最尤推定量 $\sqrt{T}(\hat{\alpha}_{ML}-\alpha)$ と最尤推定量 $\sqrt{T}(\tilde{\alpha}_{ML}-\alpha)$ の分布は $O(T^{-1})$ まで一致する (Fujikoshi and Ochi (1984)) から，予測に際して $\hat{\alpha}_{ML}$ を用いても $\tilde{\alpha}_{ML}$ を用いても，予測誤差の小標本特性（$O(T^{-1})$ の項まで）に差がないであろうことは容易に予想される．事実そうなることを次に示そう．

最尤推定量 $\tilde{\alpha}_{ML}$ は，前章の記号を用いればすでに見たように

$$\sqrt{T}e(p)=\sqrt{T}(\tilde{\alpha}_{ML}-\alpha)=\sqrt{T}\Big(e_1\bar{p}_1+e_{13}\bar{p}_1\bar{p}_3+e_{12}\bar{p}_1\bar{p}_2$$
$$+\frac{e_{11}}{2}\bar{p}_1^{\,2}+e_{12}\bar{p}_{12}+\frac{e_{22}}{2}\bar{p}_2^{\,2}\Big)+O_p\left(\frac{1}{T}\right)$$

と書くことができる．ここに $\bar{p}_i=\sqrt{T}p_i$ で，

$$p_1=\frac{y'\Sigma^{-1}\dot{\Sigma}\Sigma^{-1}y}{2T\sigma^2}-\mu_1,\quad \mu_1=\frac{1}{T}E\left(\frac{y'\Sigma^{-1}\dot{\Sigma}\Sigma^{-1}y}{2\sigma^2}\right)$$
$$p_2=\frac{y'\Sigma^{-1}y}{2T\sigma^2}-\mu_2,\quad \mu_2=\frac{1}{T}E\left(\frac{y'\Sigma^{-1}y}{2\sigma^2}\right) \tag{8}$$
$$p_3=\frac{1}{2T\sigma^2}y'\left\{-2\Sigma^{-1}\dot{\Sigma}\Sigma^{-1}\dot{\Sigma}\Sigma^{-1}+\frac{1}{2}\Sigma^{-1}\ddot{\Sigma}\Sigma^{-1}\right\}y-\mu_3$$

$$\mu_3 = E\{p_3 \text{ の第1項}\}$$

であった．また

$$e_1 = 1-\alpha^2,\ e_{13} = (1-\alpha^2)^2$$

となり，その他の e_i, e_{ij} は全て0であった．これらの結果を用いれば，

$$\eta_1 = h\alpha^{h-1}e_1 = h\alpha^{h-1}(1-\alpha^2)$$

$$\eta_{jk} = h(h-1)\alpha^{h-2}e_je_k + h\alpha^{h-1}e_{jk}, \quad \eta_j = 0,\ j=1$$

となるから

$$\omega^2 = \eta_j\eta_k E(\bar{p}_j\bar{p}_k) = h^2\alpha^{2(h-1)}(1-\alpha^2)$$

$$\alpha_4 = -\eta_{jk}E(\bar{p}_j\bar{p}_k) = -(1-\alpha^2)h(h-1)\alpha^{h-2} + 4h\alpha^h$$

を得る．よって ω^2, α_4 は $\hat{\alpha}$ の場合と同じであることが示された．さらに C_1, C_2, C_3 は次のように評価される．いま $\eta_j=0$, $j\neq 1$ であるから

$$C_1 = -i\eta_1 E(\bar{p}_1 y_T^2),\ C_2 = -i\eta_1 E(\bar{p}_1 y_T y_{T+h})$$

$$C_3 = -i\eta_1 E(\bar{p}_1 y^2{}_{T+h})$$

である．ここで期待値は，例えば

$$\begin{aligned} E(\bar{p}_1 y_T^2) &= \frac{2}{\sqrt{T}} b_3{}'\Omega^* A\Omega^* b_3 \\ &= \frac{2}{\sqrt{T}}(0\cdots010)\,\Omega^* \begin{pmatrix} & & & 0 \\ & \frac{\sum^{-1}\dot{\sum}\sum^{-1}}{2\sigma^2} & & \vdots \\ 0 & \cdots\cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix} \Omega^* \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= \frac{2\sigma^2\alpha}{\sqrt{T}(1-\alpha^2)^2} \end{aligned}$$

となる．他の期待値も同様の計算より

$$E(\bar{p}_1 y_T y_{T+h}) = \frac{2\sigma^2\alpha^{h+1}}{\sqrt{T}(1-\alpha^2)^2},\ E(\bar{p}_1 y_{T+h}^2) = \frac{2\sigma^2\alpha^{2h+1}}{\sqrt{T}(1-\alpha^2)^2}$$

となる．これより

$$C_1 = -\frac{i2h\sigma^2\alpha^h}{\sqrt{T}(1-\alpha^2)}, \quad C_2 = \frac{i2h\sigma^2\alpha^{2h}}{\sqrt{T}(1-\alpha^2)}$$

$$C_3 = -\frac{i2h\alpha^{3h}}{\sqrt{T}(1-\alpha^2)}$$

となり，3節の $\hat{\alpha}_{LS}{}^*$, $\hat{\alpha}_{LS}$, $\hat{\alpha}_{ML}$ における C_i と同じ結果を得る．従って前節の $\hat{y}_{T+h}-y_{T+h}$ に関する分布とモーメントの議論は，“独立な場合”にも“独立でない場合”にも，また y_T の条件付の場合にも，条件なしの場合

にも，全く結論は同じである．以上をまとめれば，

〔系4〕 $\tilde{\alpha}_{ML}$ にもとづく予測量 $\tilde{y}_{T+h}$ と $\hat{\alpha}_{ML}$, $\hat{\alpha}_{LS}$, $\hat{\alpha}_{LS}{}^*$ にもとづく予測量 $\hat{y}_{T+h}$ の予測誤差は，$O(T^{-1})$ までの漸近展開に関する限り，前節で扱った全ての場合について全く同等である．

補論　特性関数 $\phi(\theta_1, \theta_2|y_T)$ の導出

3節で述べたように，この補論において y_T を与えたときの条件付 (q_h, y_{T+h}) の特性関数 $\phi(\theta_1, \theta_2|y_T)$ の導出過程(1)～(4)の概要を示す．以下の説明は，(2)式で定義される確率変数 p_1, p_2 の関数であるような推定量 $\hat{\alpha}_{LS}$, $\hat{\alpha}_{LS}{}^*$, $\hat{\alpha}_{YW}$, $\hat{\alpha}_{ML}$ を対象にしているが，(8)式で定義される p_1, p_2, p_3 の関数である場合も，以下と全く並行した説明が可能である．

(1): (q_h, y_T, y_{T+h}) の特性関数を $\delta(t, s_3, s_4)$ によって，また $(\bar{p}_1, \bar{p}_2, y_T, y_{T+h})$ のそれを $\phi(w_1, w_2, w_3, w_4)$ によって表わすことにする．またキュムラント母関数を $\psi(w)=\log\phi(w)$, $w=(w_1, \cdots, w_4)$ によって表わす．以後，添字は j, $k=1, 2$; p, $q=3$, 4 を意味する．また $\psi(w)$ を w_j, w_k, w_p, w_q 等によって偏微分したものを原点で評価した値を ψ_{jk}, ψ_{jp}, 等々によって示す．これらの記号を用い，第1章で説明した Sargan のアルゴリズムを応用すれば，$\delta(t, s_3, s_4)$ は次のように求められる．

特性関数

$$\delta(t, s_3, s_4)=E\{\exp[-i(tq_h+s_3y_T+s_4y_{T+h})]\}$$

に

$$q_h=\eta_j\bar{p}_j+\frac{\eta_{jk}}{2\sqrt{T}}\bar{p}_j\bar{p}_k+O_p(T^{-1})$$

を代入し，

$$e^{x+y}=e^x\left(1+y+\frac{1}{2}y^2\cdots\right),\quad x=O_p(1),\ y=O_p(1/\sqrt{T})$$

というタイプの展開を用いることによって

$$\delta(t, s_3, s_4)=\phi(t\eta_j, s_3, s_4)+E\left\{\exp\left[-i(t\eta_1\bar{p}_1+t\eta_2\bar{p}_2+s_3y_T+s_4y_{T+h})\right.\right.$$
$$\left.\left.\left(\frac{t\eta_{jk}}{2\sqrt{T}}\bar{p}_j\bar{p}_k\right)^2\right]\right\}+O\left(\frac{1}{T}\right)$$

$$=\phi(t\eta_j,\ s_3,\ s_4)+\frac{t\eta_{jk}}{2\sqrt{T}}\ \frac{\partial^2\phi(t\eta_1,\ t\eta_2,\ s_3,\ s_4)}{\partial w_j w_k}+O\left(\frac{1}{T}\right)$$

と書くことができる．次に $\phi(w)=\exp\{\log\phi(w)\}=\exp\{\psi(w)\}$ という関係から exp{ } を展開することにより

$$\phi(w)=\exp\Big\{-\frac{1}{2}w_jw_k\psi_{jk}-\frac{1}{2}w_jw_p\psi_{jp}-\frac{1}{2}w_pw_q\psi_{pq}$$
$$-\frac{i}{6}w_jw_kw_l\psi_{jkl}-\frac{i}{6}w_jw_pw_q\psi_{jpq}$$
$$-\frac{i}{6}w_jw_kw_p\psi_{jkp}-\frac{i}{6}w_pw_qw_r\psi_{pqr}+\cdots\Big\}$$

を得る．ここで ψ_{jp}, ψ_{jkp}, ψ_{pqr} は y_t の奇数次のキュムラントであるから 0 となることに注意しよう．これを上の式に代入し整理すれば,

$$\delta(t,\ s_3,\ s_4)=\exp\left(-\frac{\omega^2t^2}{2}\right)\exp\left(-\frac{1}{2}\psi_{pq}s_ps_q\right)$$
$$\times\left[-it^3\left(\frac{i\alpha_1}{6}+\frac{\alpha_3}{2\sqrt{T}}\right)-\frac{it\alpha_4}{2\sqrt{T}}+\frac{t}{2}\psi_{jpq}\eta_js_ps_q\right]+o(T^{-1}) \qquad (\mathrm{i})$$

となる．ここに $\omega^2=-\psi_{jk}\eta_j\eta_k$, $\alpha_1=\psi_{jkl}\eta_j\eta_k\eta_l$, $\alpha_3=\psi_{jl}\eta_l\eta_{jk}\psi_{km}\eta_m$, $\alpha_4=\psi_{jk}\eta_{jk}$, $j,\ k,\ l,\ m=1,\ 2;\ p,\ q=3,\ 4$ である．

(2): 次に $\delta(t,\ s_3,\ s_4)$ を反転することによって $(q_h,\ y_T,\ y_{T+h})$ の同時密度関数 $p(q_h,\ y_T,\ y_{T+h})$ を求める．すなわち,

$$p(q_h,\ y_T,\ y_{T+h})=\iiint\delta(t,\ s_3,\ s_4)\exp[-i(tq_h+s_3y_T+s_4y_{T+h})]dtds_3ds_4$$

に(i)式を代入し，項別に積分すれば,

$$p(q_h,\ y_T,\ y_{T+h})=i(q_h)i(y_T,\ y_{T+h})\Big\{1-H_1\frac{\alpha_4}{2\sqrt{T}}+H_3\left(\frac{i\alpha_1}{6}+\frac{\alpha_3}{2\sqrt{T}}\right)$$
$$-\frac{i}{2}(C_1G_{20}+2C_2G_{11}+C_3G_{02})\Big\}+O(T^{-1}) \qquad (\mathrm{ii})$$

を得る．ここに $i(x)$, $i(x_1,\ x_2)$ はそれぞれ1変数と2変数の標準正規分布の密度関数を表わす．また $C_1=-i\eta_j\psi_{j33}$, $C_2=-\eta_j\psi_{j34}$, $C_3=-i\eta_j\psi_{j44}$ である．そして H_i, G_{ij} はそれぞれ $i(x)$, $i(x_1,\ x_2)$ から計算されるエルミート多項式である．たとえば

$$H_1=\frac{\partial i(x)}{\partial x_i}i(x)^{-1}$$

$$G_{10}=\frac{\partial i(x_1,\ x_2)}{\partial x_1}i(x_1,\ x_2)^{-1}$$

$$G_{20}=\frac{\partial^2 i(x_1,\ x_2)}{\partial x_1{}^2}i(x_1,\ x_2)^{-1}$$

等々である．G_{ab} において a は x_1 による，b は x_2 による微分の回数を表わす．

(3): 上で得た $p(q_h,\ y_T,\ y_{T+h})$ を $i(y_T)$ で割ることにより，条件付密度関数 $p(q_h,\ y_{T+h}|y_T)$ を求めることができる．その結果は(ii)式において $i(y_T, y_{T+h})$ を $i(y_{T+h}|y_T)$ に置きかえることによって得られる．すなわち

$$i(q_h)\,i(y_{T+h}|y_T)\left\{1-H_1\frac{\alpha_4}{2\sqrt{T}}+H_3\left(\frac{i\alpha_1}{6}+\frac{\alpha_3}{2\sqrt{T}}\right)\right.$$
$$\left.-\frac{1}{2}(C_1G_{20}+2C_2G_{11}+C_3G_{02})\right\}+o(T^{-1}) \qquad \text{(iii)}$$

となる．

(4): 他方 y_T の条件付 $(q_h,\ y_{T+h})$ の特性関数は定義より

$$\phi(\theta_1,\ \theta_2|y_T)=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\exp[-i(\theta_1q_h+\theta_2y_{T+h})]p(q_h,\ y_{T+h}|y_T)\,dq_h dy_{T+h}$$

であるから，この式に(iii)を代入し，項別に積分すれば

$$\phi(\theta_1,\ \theta_2|y_T)=\exp(-\omega^2\theta_1{}^2/2)\exp\left\{i\theta_2\frac{\gamma_h y_T}{\gamma_0}-\frac{\theta_2{}^2\gamma^2}{2}\right\}$$
$$\times\left[1-i\theta_1{}^3\left(\frac{i\alpha_1}{6}+\frac{\alpha_3}{2\sqrt{T}}\right)-\frac{i\theta_1\alpha_4}{2\sqrt{T}}\right.$$
$$-\frac{C_1\theta_1}{2}\left\{\frac{y_T{}^2}{\gamma_0{}^2}-\frac{2i\theta_1\gamma_h}{\gamma_0{}^2}-\frac{1}{\gamma_0}-\frac{\theta_2{}^2\gamma_h{}^2}{\gamma_0{}^2}\right\}$$
$$\left.-C_2\theta_1\left\{\frac{i\theta_2y_T}{\gamma_0}+\frac{\gamma_h\theta_2{}^2}{\gamma_0}\right\}+\frac{C_3\theta_1\theta_2{}^2}{2}\right]+o(T^{-1}) \qquad \text{(iv)}$$

を得る．

第9章　ARMAXモデルにおける最小2乗推定量の漸近展開（I）

——想定誤差の分析——

1　はじめに

この章では，最も単純な ARMAX 型モデル

$$y_t=\alpha y_{t-1}+\beta x_t+v_t \tag{1}$$

$$v_t=u_t+\gamma u_{t-1} \quad t=\cdots-1,\ 0,\ 1,\ \cdots,$$

$$u_t\sim iidN(0,\ \sigma_u{}^2)$$

$$|\alpha|,\ |\gamma|<1,\ \alpha+\gamma\neq 0$$

における α と β の最小2乗推定量に関する小標本特性を，漸近展開によって調べる．この分野の漸近展開の研究としては，$\beta=0$ かつ $\gamma=0$ のときすなわち AR(1) の場合の α の最小2乗推定量 $\hat{\alpha}_{LS}$ の分布の $O(T^{-1})$ までの展開は，Phillips (1977b, 1978) によって，また $x_t=1$ の場合，すなわちAR(1|β) の場合のそれは，Tanaka (1983) によって導かれている．他方，AR(1) モデルに複数の外生変数を追加したモデル（AR(1|x) と略記する）における $\hat{\alpha}_{LS}$ の分布の漸近展開は，Sargan and Tse (1979), Tse(1982), Maekawa (1983b) によって求められている．さらに AR(1|x) を Maekawa (1983c) は，撹乱項が MA(1) の場合に，すなわち ARMA (1, 1|x) に拡張した場合を論じている（次章参照）．本章の議論は，次章の特殊ケースという側面をもつが，他方で β の最小2乗推定量 $\hat{\beta}_{LS}$ の特性の吟味や，Hannan (1970) の定理の拡張を含むなど，次章の接近法では処理しえない問題を，Maekawa (1984a, 1985) にもとづいて扱っている．

さて最小2乗推定量 $\hat{\alpha}_{LS}$ と $\hat{\beta}_{LS}$ は，観測期間 $t=0,\ \cdots,\ T$ に対して次のように表現することができる．なお以下では添字 LS を省略する．

$$\begin{pmatrix}\hat{\alpha}\\ \hat{\beta}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}y'A_1y & d_3'y\\ y'd_3 & x'x\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}y'A_2y\\ y'd_4\end{pmatrix}.$$

ここに

$$y'=(y_0,\ y_1,\ \cdots,\ y_T),\ x'=(x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_T),\ d_3'=(x',\ 0),\ d_4'=(0,\ x')$$

$$A_1=\begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \\ & & & 0 \end{pmatrix},\ A_2=\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 & & 0 \\ 1 & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

である．明らかに y は正規分布 $N(m,\ \Omega)$ に従う．ここに m は $(T+1)\times 1$ の平均ベクトル，Ω は $(T+1)\times(T+1)$ の分散共分散行列

$$\Omega=\begin{pmatrix} \omega_0 & \omega_1 & \cdots & \omega_T \\ \omega_1 & \omega_0 & \omega_1 & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \omega_1 \\ \omega_T & \cdots & \omega_1 & \omega_0 \end{pmatrix}$$

である．ここに

$$\omega_0=\sigma_u{}^2(1+\gamma^2+2\alpha\gamma)/(1-\alpha^2)$$

$$\omega_1=\sigma_u{}^2(1+\alpha\gamma)(\alpha+\gamma)/(1-\alpha^2)$$

$$\omega_k=\alpha\omega_{k-1},\ k\geq 2$$

である．Ω はよく知られているように Toeplitz 行列で，その対応するスペクトル密度関数は

$$f(\lambda)=\frac{\sigma_u{}^2|1-\gamma e^{i\lambda}|^2}{2\pi|1-\alpha e^{i\lambda}|^2}$$

である．

外生変数 x に関して，次の仮定をおく．

(仮定1) $\dfrac{1}{T-h}\sum_{t=1}^{T-h}x_tx_{t-h}=c_h+O_p(T^{-s/2}),\ s\geq 1.$

(仮定2) x の漸近的分散共分散行列 Γ は

$$\Gamma=\begin{pmatrix} c_0 & c_1 & \cdots\cdots & c_{T-1} \\ c_1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & c_1 \\ c_{T-1} & \cdots\cdots & c_1 & c_0 \end{pmatrix}$$

という要素をもつ Toeplitz 行列である．

これらの仮定を設けるにあたって，われわれは後に，x_t を人工的に AR(p) 過程より発生させる場合および $x_t=1$ の場合などを念頭に置いている．また平均ベクトル m と x との間のクロススペクトル密度関数を以後 $f_{mx}(\lambda)$ によって表わす．

$(\hat{\alpha},\ \hat{\beta})'$ はさらに，次のように書きかえられる．

$$\begin{pmatrix} \hat{\alpha} \\ \beta \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} q_1+\mu_1 & q_3+\mu_3 \\ q_3+\mu_3 & \mu_0 \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} q_2+\mu_2 \\ q_4+\mu_4 \end{pmatrix}.$$

ここに

$$q_1=\frac{y'A_1y-E(y'A_1y)}{T},\quad \mu_1=E(y'A_1y)/T$$

$$q_2=\frac{y'A_2y-E(y'A_2y)}{T},\quad \mu_2=E(y'A_2y)/T$$

$$q_3=\frac{y'd_3-E(y'd_3)}{T},\quad \mu_3=E(y'd_3)/T$$

$$q_4=\frac{y'd_4-E(y'd_4)}{T},\quad \mu_4=E(y'd_4)/T$$

および

$$\mu_0=x'x/T$$

である．

2 $\hat{\alpha}$ と $\hat{\beta}$ の漸近展開

母数 θ のある推定量 $\hat{\theta}$ の分布の漸近展開を考える場合，$\hat{\theta}$ が一致推定量であれば，$\sqrt{T}(\hat{\theta}-\theta)$ という形に標準化したうえで分布の漸近展開を考えるのが普通である．そうして誤差関数 $e=\hat{\theta}-\theta$ を構成する確率変数を

$q=(q_1, q_2, \cdots, q_m)$ とするとき，Sargan のアルゴリズムを $\sqrt{Te}$ に適用するためには，原点 $q=0$ における e の値は $e(0)=0$ となるように調整されていなければならない．ところが，よく知られているように誤差項に系列相関がある場合には $\hat{\alpha}$ と $\hat{\beta}$ は一致推定量ではないので，$\sqrt{T}(\hat{\alpha}-\alpha)$ と $\sqrt{T}(\hat{\beta}-\beta)$ において $e(0)=0$ に対応する条件は満たされない．そこで推定量を標準化するときに，推定量の偏りを調整して $e(0)=0$ となるように工夫する必要がある．そこで，以下においては次のような修正された誤差関数を定義する．すなわち

$$e=\begin{pmatrix} e^{(\alpha)} \\ e^{(\beta)} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \hat{\alpha}-\alpha-\Delta_\alpha \\ \hat{\beta}-\beta-\Delta_\beta \end{pmatrix}. \tag{2}$$

ここに $e^{(\alpha)}$, $e^{(\beta)}$ は q_1, q_2, q_3, q_4 の関数であり，また Δ_α と Δ_β は次式で与えられる．

$$\Delta_\alpha=\mu_0 E(v'y_*)/T(\mu_0\mu_1-\mu_3{}^2) \tag{3}$$

$$\Delta_\beta=-\mu_3 E(v'y_*)/T(\mu_0\mu_1-\mu_3{}^2). \tag{4}$$

ここに

$$y_*{}'=(y_0, y_1, \cdots, y_{T-1}),\ v'=(v_1, v_2, \cdots, v_T)$$

である．このとき $e(0)=0$ であることは容易に示される．また $\gamma=0$ のとき $\Delta_\alpha=\Delta_\beta=0$ となり，$\hat{\alpha}$ と $\hat{\beta}$ は一致推定量になる．言いかえれば，真のモデルにおいて $\gamma=0$ であれば，最小2乗推定量は一致性をもつという意味で適切な推定量であるが，真のモデルにおいては $\gamma\neq 0$ なのに，誤って $\gamma=0$ と想定して最小2乗法を適用すると，この想定誤差の罰則として偏り Δ_α と Δ_β が課せられる．したがって以下の分析の目的は，想定誤差の影響を，漸近展開によって調べることである．

ここで第1章の結果を応用すれば，理論的には $e^{(\alpha)}$ と $e^{(\beta)}$ の同時分布の $O(T^{-1})$ までの漸近展開を求めることができる．しかし実際にその計算は非常に複雑であり，実行することは容易ではない．Phillips (1977b) や Tanaka (1983) らの場合に比べ，いっそう複雑になる第1の理由は，撹乱項に MA(1) を仮定したことから生じる追加的な項が多数生じるからである．第2の理由は，われわれのモデルには外生変数が存在するため，結果

が x_t に依存するので，母数のみによる明示的な表現が困難だからである．第2の点については，次節に見られるように，外生変数生成過程に何らかの仮定を置くことにより，母数による明示的表現を可能にする道は開かれている．

$e^{(\alpha)}$ と $e^{(\beta)}$ の同時密度関数は，第1章の公式をこの場合に応用することにより，形式的には次式で与えられる．その表現と記号の定義は，第1章におけるそれと全く同じであるが，ここに再現しておく．

$$
\begin{aligned}
i(e^{(\alpha)}, e^{(\beta)}) &+ \frac{1}{2\sqrt{T}}\sum_{a} a_4(a)H(a) \\
&+ \sum_{a,b} H(a, b)\left\{\frac{\alpha_5(a, b)}{2\sqrt{T}} + \frac{\alpha_7(a, b)}{2T} + \frac{\alpha_4(a)\alpha_4(b)}{8T}\right. \\
&\left. + \frac{\alpha_9(a, b)}{4T}\right\} + \sum_{a,b,c} H(a, b, c) \times \\
&\left\{\frac{\alpha_1(a, b, c)}{6} + \frac{\alpha_3(a, b, c)}{2\sqrt{T}}\right\} \\
&+ \sum_{a,b,c,d} H(a, b, c, d)\left\{\frac{1}{24}\alpha_2(a, b, c, d)\right. \\
&+ \frac{1}{2\sqrt{T}}\alpha_{10}(a, b, c, d) + \frac{1}{12\sqrt{T}}\alpha_1(a, b)\alpha_4(c, d) \\
&+ \frac{1}{6T}\alpha_6(a, b, c, d) + \frac{1}{4T}\alpha_3(a, b)\alpha_4(c, d) \\
&\left. + \frac{1}{2T}\alpha_8(a, b, c, d)\right\} \\
&+ \sum_{\substack{a,b,c \\ d,e,f}} H(a, b, c, d, e, f)\left\{\frac{1}{72}\alpha_1(a, b, c)\alpha_1(d, e, f)\right. \\
&+ \frac{1}{12\sqrt{T}}\alpha_1(a, b, c)\alpha_3(d, e, f) \\
&\left. + \frac{1}{8T}\alpha_3(a, b, c)\alpha_3(d, e, f)\right\} + O(T^{-3/2}) . \qquad (5)
\end{aligned}
$$

ここに

$$
i(z) = \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^m |\Omega|}\exp\left(-\frac{1}{2}z'\Omega z\right), \quad \Omega = [\omega(a, b)]
$$

$$
H(a) = \frac{\partial i(z)}{\partial z_a}, \quad H(a, b) = \frac{\partial^2 i(z)}{\partial z_a \partial z_b}
$$

などである．さらにエッジワース係数は，次のように与えられる．以下において添字 i, j, k, l には 1, 2, 3, 4 が，a, b, c, d には α, β が対応する．

$$\alpha_1(a, b, c)=\phi_{ijk}e_i^{(a)}e_j^{(b)}e_k^{(c)}$$

$$\alpha_2(a, b, c, d)=\phi_{ijkl}e_i^{(a)}e_j^{(b)}e_k^{(c)}e_l^{(d)}$$

$$\alpha_3(a, b, c)=\nu_i^{(a)}e_{ij}^{(b)}\nu_j^{(c)},\ \nu_i^{(a)}=\phi_{ij}e_j^{(a)}$$

$$\alpha_4(a)=e_{ij}^{(a)}\phi_{ij}$$

$$\alpha_5(a, b)=\phi_{ijk}e_{ij}^{(a)}e_k^{(b)}$$

$$\alpha_6(a, b, c, d)=e_{ijk}^{(a)}\nu_i^{(b)}\nu_j^{(c)}\nu_k^{(d)}$$

$$\alpha_7(a, b)=e_{ijk}^{(a)}\phi_{ij}\nu_k^{(b)}$$

$$\alpha_8(a, b, c, d)=\nu_i^{(a)}e_{ij}^{(b)}\phi_{jk}e_{kl}^{(c)}\nu_l^{(d)}$$

$$\alpha_9(a, b)=\phi_{ij}e_{jk}^{(a)}\phi_{kl}e_l^{(b)}$$

$$\alpha_{10}(a, b, c, d)=\nu_i^{(a)}e_{ij}^{(b)}\phi_{jkl}e_k^{(c)}e_l^{(d)}$$

$$\omega(a, b)=\phi_{ij}e_i^{(a)}e_j^{(b)}.$$

上の表現において $e_{ij}^{(\cdot)}$, $e_{ijk}^{(\cdot)}$ は，誤差関数 $e^{(\cdot)}$ の q_i, q_j, q_k に関する偏微係数を $p=0$ で評価したもの，$\phi_{ij}, \phi_{ijk}, \phi_{ijkl}$ は q_1, q_2, q_3, q_4 に関するキュムラントの母関数 $\phi(q)$ の偏微係数の $q=0$ における値である．これらの偏微係数の値は，補論(B)に一括して示されている．

(5)式から $\hat{\alpha}$ と $\hat{\beta}$ の周辺分布関数を求めることができる．(それらはもちろん1変量の統計量に対する Sargan のアルゴリズムから直接計算することもできる)．$\hat{\alpha}$ の周辺分布の数値計算は第5節に示す．ここでは，$\hat{\alpha}$ と $\hat{\beta}$ の $O(T^{-1/2})$ までの周辺分布を，上の記号を用いて示す．ただし $\hat{\alpha}$ の分布と $\hat{\beta}$ の分布を，形式的に1つにまとめて次のように表わす．θ を α または β を示すものとして，$\sqrt{T}(\hat{\theta}-\theta-\Delta_\theta)$ の分布は次式で与えられる．

$$p(\sqrt{T}(\hat{\theta}-\theta-\Delta_\theta)<x)=I\left(\frac{x}{\omega(\theta)}\right)+i\left(\frac{x}{\omega(\theta)}\right)\left\{c_0+c_2\left(\frac{x}{\omega(\theta)}\right)^2\right\}.$$

ここで

$$c_0=-\frac{\alpha_4(\theta)}{2\omega(\theta)\sqrt{T}}+\frac{\alpha_1(\theta)}{6\omega(\theta)^3}+\frac{\alpha_3(\theta)}{2\omega(\theta)^3\sqrt{T}}$$

$$c_2=-\frac{1}{\omega(\theta)^3}\left(\frac{\alpha_1(\theta)}{6}+\frac{\alpha_3(\theta)}{2\sqrt{T}}\right)$$

である．

上の式は，

$$P(\sqrt{T}(\hat{\theta}-\theta-\Delta_\theta)<x)=P\left((\hat{\theta}-\theta)<\frac{x}{\sqrt{T}}+\Delta_\theta\right)$$

と書き換えられるから，これより

$$p(\sqrt{T}(\hat{\theta}-\theta)<0)=I\left(\frac{-\Delta_\theta}{\omega(\theta)}\right)+O\left(\frac{1}{\sqrt{T}}\right)$$

を得る．明らかに $\lim_{T\to\infty}\Delta_\theta\neq 0$ であるから，$\hat{\theta}$ は漸近的中央不偏ではないことが分る．また，密度関数の展開式を用いて偏りを計算すれば

$$E(\hat{\alpha})=\alpha+\Delta_\alpha+\frac{\alpha_4(\alpha)}{2T}+O(T^{-2}) \tag{6}$$

$$E(\hat{\beta})=\beta+\Delta_\beta+\frac{\alpha_4(\beta)}{2T}+O(T^{-2}) \tag{7}$$

を得る．モデルが単純化された場合における $\operatorname{plim}_{T\to\infty}\Delta_\theta$ と $\alpha_4(\theta)$ の値が，第4節に示されている．

3　キュムラントのスペクトル表現

$\hat{\alpha}_{LS}$ と $\hat{\beta}_{LS}$ の分布の漸近展開は，形式的には上に述べた方法で求めることができる．しかし展開式に現われる各項が，適切な大きさを持っているかどうかは，にわかには判別しがたい．時系列モデルに関する漸近展開におけるひとつの困難は，補論(B)のキュムラントの公式に見られるように，計算過程に現われる種々のキュムラントに含まれる行列やベクトルが，サンプル期間の長さ T に依存することに起因している．すなわち $T\to\infty$ のとき，行列やベクトルのサイズも無限大になってしまうので，それらのトレースや，2次形式の値がはたして有限の大きさに収まるのかということが疑問になる．モデルが外生変数 x に依存しない AR(1) モデルや AR$(1|\beta)$ モデルにおける最小2乗法に関する漸近展開では，必要なキュムラントの近似値が Hannan (1970) の定理の応用によって明示的に求められているので (Phillips (1977b), Tanaka (1983))，上のような疑問は解消さ

れている．また ARMA(p, q) モデルに対する最尤推定量に関するキュムラントの大きさの評価は，Taniguchi (1983b) によって行なわれている．

しかしわれわれのモデルでは，キュムラントが平均ベクトル m を通して x に依存している．たとえば補論(B)における $\phi_{ij}=\frac{2}{T}\mathrm{tr}(A_i\Omega A_j\Omega)+\frac{4}{T}m'A_i\Omega A_jm$ における第2項（準2次形式）の大きさは，T と x の性質に依存している．そこで，x に何らかの仮定を置いたうえで，これらのキュムラントの大きさを評価する必要が生じる．この目的のために，次の補題が有効である．

ここで次の仮定を満たすような2つの確率的又は非確率的ベクトル $x'=(x_1, x_2, \cdots, x_T)$ と $z'=(z_1, z_2, \cdots, z_T)$ と行列 R を考えよう．

(i) $\frac{1}{T-h}\sum_{t=1}^{T-h}x_tz_{t+h}=\delta(h)+\Delta\delta(h)$

と表わされる．ここに $\delta(h)$ は絶対可算 (absolute summable) で $\Delta\delta(h)=O(T^{-s/2})$, $s\geq 1$ である．

(ii) x_t と z_t のスペクトル密度関数 $f_{xx}(\lambda)$, $f_{zz}(\lambda)$ と，それらのクロススペクトル密度関数 $f_{xz}(\lambda)$ が存在する．

(iii) R は，漸近的に又は厳密に Toeplitz 行列であるとし，その (i, j) 要素は $\gamma(h)=\gamma(h)^*+O(T^{-1})$ と表わされ，$\gamma(h)\propto\omega^{|h|}$, $h=i-j$, $|\omega|<1$ とする．また $\gamma(h)^*$ を要素とする Toeplitz 行列に対応するスペクトル密度関数を $g(\lambda)$ とする．

以上の仮定のもとで

〔補題〕

$$\frac{1}{T}x'Rz=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f_{xz}(\lambda)g(\lambda)d\lambda+O(T^{-s/2}),\quad s=1 \text{ 又は } 2$$

が成立する．

証明．x_t と z_t の漸近的分散共分散行列を Γ_{xz} で表わすと，仮定(i)より Γ_{xz} は Toeplitz 行列で，その (i, j) 要素は $\delta(h)$ である．ただし $h=i-j$ とする．ここで上の式の左辺を書き下せば

$$\frac{1}{T}x'Rz=\frac{1}{T}\Big[\gamma(0)\sum_{t=1}^{T}x_tz_t+\gamma(1)\sum_{t=1}^{T-1}x_tz_{t+1}+\gamma(2)\sum_{t=1}^{T-2}x_tz_{t+2}+\cdots$$

$$
\begin{aligned}
&+\gamma(-1)\sum_{t=1}^{T-1}x_t z_{t-1}+\gamma(-2)\sum_{t=1}^{T-2}x_t z_{t-2}+\cdots\Big] \\
&=\frac{1}{T}\{T\gamma(0)[\delta 0)+\Delta\delta(0)]+2(T-1)\gamma(1)[\delta(1)+\Delta\delta(1)] \\
&\quad+2(T-2)\gamma(2)[\delta(2)+\Delta\delta(2)]+\cdots+2(T-s)\gamma(s)[\delta(s)+\Delta\delta(s)] \\
&\quad+\cdots+2\gamma(T)[\delta(T)+\Delta\delta(T)]\} \\
&=\frac{1}{T}\{T\gamma(0)\delta(0)+2(T-1)\gamma(1)\delta(1)+2(T-2)\gamma(2)\delta(2)+\cdots \\
&\quad\cdots+2(T-s)\gamma(s)\delta(s)+\cdots+2\gamma(T)\delta(T)\}+R_s \\
&=\mathrm{tr}(R\Gamma_{xz})+O(T^{-s/2})
\end{aligned}
$$

となる．ここに $R_s=\sum_{h=-T}^{T}\gamma(h)\Delta\delta(h)=O\left(\frac{\omega^{|h|}}{T^{s/2}}\right)$ である．最後の行に現われる $\mathrm{tr}(R\Gamma_{xz})$ に Hannan (1970, p. 354) の定理を応用することにより補題を得る．

この補題は，単にキュムラントの大きさの評価のためだけでなく，その近似値を留数定理を用いて明示的に求めるためにも有効である．したがって $O(T^{-1/2})$ までの漸近展開に関しては，この補題と留数定理を応用することによって，エッジワース係数の母数による明示的表現を得る可能性がある．しかし $O(T^{-1})$ までの展開を得ようとするならば，エッジワース係数 ω^2 の $O(T^{-1})$ の項まで求めなければならないので，留数計算による近似だけに頼ることはできない．また x_t の性質によっては，補題の近似法の誤差が $O(T^{-1/2})$ のこともあろうから，この誤差は展開の $O(T^{-1})$ の項に影響するので注意を要する．分布の $O(T^{-1/2})$ までの展開に関しては，補題の近似を用いて差しつかえない．

次に補題の応用例をいくつか示そう．たとえば

$$I=\frac{1}{T}x'A_2\Omega A_1x=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(\lambda)\cos 2\lambda\cos\lambda dG(\lambda)+O(T^{-s/2})$$

を評価する場合を考えよう．ここに

$f(\lambda)=\sigma^2/|1-\alpha e^{i\lambda}|^2$ である．また $G(\lambda)$ は x_t のスペクトル分布関数とする．

（例1）　$x_t=1,\ t=1,\ 2,\ \cdots,\ T$ の場合．

$G(\lambda)$ は，原点でジャンプ1を持ち，他の所での測度は0であるので，た

だちに

$$I=f(0)+O\left(\frac{1}{T}\right)=\frac{\sigma^2}{(1-\alpha)^2}+O\left(\frac{1}{T}\right)$$

を得る.

(例2) $x_t=\cos\gamma t$ の場合.

$G(\lambda)$ は $\lambda=\pm\gamma$ においてジャンプ1/2をもち, 他の所での測度は0であるから, ただちに

$$I=\frac{1}{2}f(-\gamma)\cos(-2\gamma)\cos(-\gamma)+\frac{1}{2}f(\gamma)\cos(2\gamma)\cos(\gamma)$$

$$=\frac{\sigma^2\cos 2\gamma\cos\gamma}{1-2\alpha\cos\gamma+\alpha^2}$$

を得る.

(例3) $x_t=\rho x_{t-1}+\varepsilon_t$, $\varepsilon_t\sim iidN(0,\ \sigma_\varepsilon{}^2)$, $|\rho|<1$ の場合.

このとき $m_t=E(y_t|x)=\beta\sum_{i=0}^{\infty}\alpha^i x_{t-i}$ である. また x_t のスペクトル密度関数と, x_t と m_t のクロススペクトル密度関数は

$$g_{xx}(\lambda)=\frac{\sigma_u{}^2}{|1-\rho e^{i\lambda}|^2},\quad f_{xm}(\lambda)=\frac{\sigma_\varepsilon{}^2}{(1-\alpha e^{i\lambda})|1-\rho e^{i\lambda}|^2}$$

で与えられる. ゆえに補題と留数定理より

$$\frac{1}{T}m'A_1\Omega d_4=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(\lambda)f_{xm}(\lambda)d\lambda+O(T^{-1/2})$$

$$=\left[\frac{\sigma_u{}^2}{1-\alpha^2}\right]\left[\frac{\sigma_\varepsilon{}^2}{1-\rho^2}\right]\left[\frac{1}{1-\alpha\rho}\right]\left[\frac{1+\alpha\rho}{1-\alpha^2}+\frac{\alpha\rho}{1-\alpha\rho}\right]$$

$$+O(T^{-1/2})$$

を得る. なおこの場合は $s=1$ であることに注意しよう.

その他の例として真のモデルが AR$(1|x)$ のときの, キュムラントの第2項(2次形式 $m'\square m$ 又は準2次形式 $m'\square d$ の項. 以下これらのタイプの項を便宜上単に2次形式と呼ぶ)への補題の応用が, 補論(C)に示されている. また補論(B)にあげられているいろいろなタイプのキュムラントの2次形式の部分(以下 ϕ_{ij} の2次形式の部分を $\phi_{ij}{}^*$ のように*印を付けて表わすことにする)のスペクトル表現を下にいくつか例示しておこう.

$$\phi_{22}{}^*=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(\lambda)f_{mm}(\lambda)\cos^2\lambda d\lambda+\varepsilon$$

$$\phi_{34}^* = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{i\lambda} f(\lambda) f_{xx}(\lambda)\, d\lambda + \varepsilon$$

$$\phi_{13}^* = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{i\lambda} f(\lambda) f_{xm}(\lambda)\, d\lambda + \varepsilon$$

$$\phi_{233}^* = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f^2(\lambda) \cos\lambda f_{xx}(\lambda)\, d\lambda + \varepsilon$$

$$\phi_{1234}^* = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f^3(\lambda) e^{i\lambda} \cos\lambda f_{xx}(\lambda)\, d\lambda + \varepsilon.$$

ここに $\varepsilon = O(T^{-s/2})$, $s=1$ 又は2である．これらの式に対してスペクトル密度関数を特定化してやれば，留数計算によって積分の近似を得ることができる．その計算は一般にはかなりめんどうであるが，第7章で行なったように REDUCE 2 を用いてコンピュータに計算させることが可能である．

なお以上の2次形式において次のような $T\times T$ 行列

$$D_1 \Omega D_2' = \begin{pmatrix} 1 & & & 0 \\ & \ddots & 0 & \vdots \\ & & \ddots & \vdots \\ 0 & & 1 & 0 \end{pmatrix} \Omega \begin{pmatrix} 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 1 & \ddots & 0 & \vdots \\ & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & & 1 & \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \omega_{12} & \omega_{13} & \cdots & \omega_{1,T+1} \\ \omega_{22} & \omega_{23} & \cdots & \omega_{2,T+1} \\ \omega_{32} & \omega_{33} & \cdots & \omega_{3,T+1} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ \omega_{T2} & \omega_{T3} & \cdots \omega_{TT} & \omega_{T,T+1} \end{pmatrix}$$

が含まれることがある．これは Toeplitz 行列でその (m, n) 要素は

$$\int_{-\pi}^{\pi} e^{i(m-n+1)\lambda} f(\lambda)\, d\lambda = \int_{-\pi}^{\pi} e^{i(m-n)\lambda} e^{i\lambda} f(\lambda)\, d\lambda$$

で与えられるから，対応するスペクトル密度関数は $e^{i\lambda} f(\lambda)$ である．

4　偏りと確率極限

2節で求めた $\hat{\alpha}_{LS}$ と $\hat{\beta}_{LS}$ の分布の漸近展開の公式は，非常に複雑なので，それに解釈を加えることはほとんど不可能に近い．したがって得られ

た公式を役立たせるためには，モデルを単純化することによって公式を単純にするか，数値計算およびそのグラフ表現によって，複雑な表現の裏に隠されている情報を引き出すほかない．この節では，前者の方法によって，以下の単純化されたモデルにおける $\hat{\alpha}$ と $\hat{\beta}$ の性質を見ていきたい．

(1) 真のモデルが

$$y_t=\beta+\alpha y_{t-1}+u_t+\gamma u_{t-1}$$

$$u_t\sim iidN(0,\ \sigma_u{}^2),\quad |\alpha|,\ |\gamma|<1,\ \alpha+\gamma\neq 0$$

のとき．

このとき，α と β の最小2乗推定量 $\hat{\alpha}_{LS}$, $\hat{\beta}_{LS}$ については，初等的な計算により確率極限は次式のように計算される．

$$\mathrm{plim}\ \hat{\alpha}=\frac{(\alpha+\gamma)(1+\alpha\gamma)}{1+\gamma^2+2\alpha\gamma},\quad \mathrm{plim}\ \hat{\beta}=\frac{\beta(1+\gamma^2-\gamma+\alpha\gamma)}{1+\gamma^2+2\alpha\gamma}.$$

また想定誤差のために生じた漸近的な偏り Δ_α と Δ_β の確率極限は

$$\mathrm{plim}\ \Delta_\alpha=\frac{\gamma(1-\alpha^2)}{1+\gamma^2+2\alpha\gamma},\quad \mathrm{plim}\ \Delta_\beta=\frac{\gamma\beta(1-\alpha^2)}{1+\gamma^2+2\alpha\gamma}$$

と計算される．これらの式は明らかに $\gamma=0$ のとき，すなわち想定誤差が存在しない場合には，$\Delta_\alpha=\Delta_\beta=0$ となり，$\hat{\alpha}$ と $\hat{\beta}$ は一致推定量となることを示している．また $\hat{\alpha}$ と $\hat{\beta}$ の偏りの $O(T^{-1})$ の項の係数 $\alpha_4(\alpha)$, $\alpha_4(\beta)$ は，かなり複雑な計算の結果

$$\alpha_4(\alpha)=-2(3\alpha+1)+\frac{4(3\alpha^2-1)}{1-\alpha^2}\delta+\frac{16\alpha}{1-\alpha^2}\delta^2$$
$$+\frac{8}{1-\alpha^2}\delta^3-\frac{2\{\gamma(2+\gamma)(1-\alpha^2)(1-\alpha)+\delta\}}{(1-\alpha)^2} \tag{8}$$

および

$$\alpha_4(\beta)=2\left(\frac{\beta}{1-\alpha}\right)(3\alpha+1+4\delta)$$
$$-\frac{2\delta\beta\{(1+\gamma)^2(1-\alpha^2)^2+2(1-\alpha)^2(1+\alpha^2+4\alpha\delta+2\delta^2)\}}{(1-\alpha)^3(1-\alpha^2)}$$

となることが示される．ここに

$$\delta=\frac{\gamma(1-\alpha^2)}{1+\gamma^2+2\alpha\gamma}$$

である．もし $\gamma=0$ ならば，$\delta=0$, $\Delta_\alpha=\Delta_\beta=0$ となるから，偏りの式

(6), (7) は

$$E(\hat{\alpha})=\alpha-(3\alpha+1)/T+O(T^{-2})$$

$$E(\hat{\beta})=\beta+\beta(3\alpha+1)/(1-\alpha)T+O(T^{-2})$$

となり，よく知られた Kendall (1954) や Tanaka (1983) の結果に帰着する．

ここで(8)式は，次の3つの部分に分けて解釈できることに注意しておこう．すなわち第1項は AR(1) モデルにおける偏りであり，第2，3，4項は ARMA(1, 1) モデルに固有な偏りであり，最後の項は ARMA (1, 1|β) に固有な偏りである．

(2) 真のモデルが

$$y_t=\alpha y_{t-1}+\beta x_t+u_t+\gamma u_{t-1}$$

$$u_t\sim iidN(0,\ \sigma_u{}^2),\ |\alpha|,\ |\gamma|<1,\ \alpha+\gamma\neq 0,$$

かつ，x_t が AR(1) 過程によって生成されるとき．すなわち $x_t=\rho x_{t-1}+\varepsilon_t$, $\varepsilon_t\sim iidN(0,\ \sigma_\varepsilon{}^2)$. ここで u_t と ε_t は独立であるとする．x_t に対するこのような想定は，$\hat{\alpha}_{LS}$ や $\hat{\beta}_{LS}$ の分布特性を調べるためのモンテカルロ実験において，x_t を生成する際にしばしばなされるものである．そうしていったん生成された x_t の系列は，あたかも所与の固定変数があるかのようにくり返し用いられる．この場合，モンテカルロ実験から得られた $\hat{\alpha}_{LS}$ や $\hat{\beta}_{LS}$ の分布は，$x_t(t=0,\ 1,\ \cdots,\ T)$ を与えたときの条件付分布と考えられる．そうして x_t の生成過程は，$\hat{\alpha}_{LS}$ や $\hat{\beta}_{LS}$ の確率極限に影響を及ぼす．それらの計算結果は

$$\operatorname{plim}\hat{\alpha}=\alpha+\frac{\sigma_u{}^2\gamma}{A}$$

$$\operatorname{plim}\hat{\beta}=\beta+\frac{\sigma_u{}^2\gamma B}{A}.$$

ここに

$$A=\frac{\sigma_u{}^2(1+\gamma^2+2\alpha\gamma)}{1-\alpha^2}+\frac{\sigma_\varepsilon{}^2\beta^2(1+\alpha\rho)}{(1-\alpha^2)(1-\rho^2)(1-\alpha\rho)}$$

$$-\beta^2\left(\frac{\sigma_\varepsilon{}^2}{1-\rho^2}\right)\left(\frac{\rho}{1-\alpha\rho}\right)^2$$

$$B=\frac{\sigma_u{}^2\beta\rho(1+2\alpha^2)}{(1-\alpha^2)(1-\alpha\rho)}.$$

これらの確率極限の第2項は，それぞれこのモデルにおける $\underset{T\to\infty}{\mathrm{plim}}\,\Delta_\alpha$, $\underset{T\to\infty}{\mathrm{plim}}\,\Delta_\beta$ を表わしている．この場合も明らかに $\gamma=0$ のとき $\hat{\alpha}_{LS}$ と $\hat{\beta}_{LS}$ は一致推定量になる．上の2つの確率極限は，書き換えて

$$\mathrm{plim}\,\hat{\alpha}=\alpha+\frac{\gamma}{c_1+c_2(\sigma_\varepsilon^2/\sigma_u^2)},\quad \mathrm{plim}\,\hat{\beta}=\beta+\frac{\sigma_u^2\gamma}{c_3+c_4(\sigma_\varepsilon^2/\sigma_u^2)}$$

という形にすることができる．ここに c_i, $i=1, 2, 3, 4$ は，α, β, γ, ρ によって定められる定数である．これらの式は，分散比 $\sigma_\varepsilon^2/\sigma_u^2$ が漸近的な偏りの重要な決定要因であることを示している．このことは，Phillips (1980) や Tse (1982) のエッジワース展開の数値計算による分布特性の研究の中にも指摘されている．

偏りの $O(T^{-1})$ の項の係数 $\alpha_4(\alpha)$, $\alpha_4(\beta)$ をこのモデルの場合に計算するのは非常に困難であるので計算しなかった．いずれにせよ，エッジワース係数を明示的に計算することは，このような単純化された場合でさえ限界があるので，節を改めて，次にそれらの係数の数値計算を行なおう．

5 数値計算とそのグラフ

この節では真のモデルが $y_t=\alpha y_{t-1}+\beta x_t+u_t+\gamma u_{t-1}$ のときの，$\hat{\alpha}_{LS}$ の分布の漸近展開の公式をいくつかの母数の組合せに対して数値計算を行う．x_t の系列としては，$x_t=1$, $x_t=\rho_1 x_{t-1}+\varepsilon_t$, $x_t=\rho_1 x_{t-1}+\rho_2 x_{t-2}+\varepsilon_t$ の3種の過程から人工的に生成したものを用いる．なお全ての計算は $\beta=1$ のもとで行なわれた．漸近展開の数値計算にあたっては，補論に示されている $e_i^{(\alpha)}$, $e_{ij}^{(\alpha)}$, $e_{ijk}^{(\alpha)}$ および ϕ_{ij}, ϕ_{ijk}, ϕ_{ijkl} を公式どおり直接計算し，その結果をエッジワース係数の公式に代入する方法を取った．ただし AR $(1|\beta)$ を想定した計算では，ϕ_{ij}, ϕ_{ijk}, ϕ_{ijkl} は公式どおりの直接計算と留数計算による近似計算を行ない，両者の比較を試みた．それらの数値計算結果のいくつかを選んでグラフ化したものが，下の図1～6である．これらの図のいくつかには，漸近展開結果の近似精度を見るために5,000回のくり返しによるモンテカルロ実験によって得られた経験分布（ほぼ精密分布に近い）も合わせて描かれている．

図1と2は，$x_t=1$, $\sigma_u{}^2=1$ のときの $\hat{\alpha}_{LS}$ の分布が，$\gamma=0.8$, $\alpha=0.4, 0.8$, $T=20, 40$ に対して描かれている．このように T が十分大きくないときは，α が1に近いとき分布の上側のすそが波打つ現象が見られ，エッジワース近似がうまくいかないことが示されている．また T が小さいほど，そして α が大きい程，極限分布としての正規分布からのへだたりが大きいことが読み取られる．図1のグラフは $\sqrt{T}(\hat{\alpha}-\alpha-\Delta_\alpha)/\omega_\alpha$ という型に標準化されたときの分布であるので，偏り Δ_α の効果が分りにくい（なお $\lim_{T\to\infty}\omega_\alpha$ は $\hat{\alpha}$ の漸近分散である）．そこで Δ_α の効果を見るために，$\hat{\alpha}$ そのものの分布を図2に示した．この図から $\alpha=0.4$ のときも，$\alpha=0.8$ のときも，γ の値が0から1へ向けて上昇するにつれて分布は右へシフトするのが見られる．この図からまた $\gamma=0$ のとき $\hat{\alpha}$ の偏りは負であることが読み取られるが，このことは第4節で示した $E(\hat{\alpha})=\alpha-(3\alpha+1)/T$ という結果に符合している．そうして皮肉なことに，この偏りは γ の上昇とともにいったん減少し，γ がある値を過ぎると正の偏りが現われ始める．このように γ の値によっては，偏りが幸運にも小さくなりえることがあるとはいえ，図2は真のモデルにおいて $\gamma\neq0$ のとき，$\gamma=0$ と想定して最小2乗法を適用するという想定誤差がいかに無視し難い影響を与えるかを示している．

図3は $\gamma=0.0$, $x_t=1$ のとき，$\alpha=0.8$ に対する $\hat{\alpha}_{LS}$ の2種類のエッジワース近似，すなわちエッジワース係数を公式どおり直接計算した場合（図中(b)で示される）と，留数定理を用いて近似計算した場合（図中(a)で示される），およびモンテカルロ実験による経験分布とを比較したものである．$T=20$, $\alpha=0.8$ というエッジワース近似にとって最も不利な場合を図示しているが，いくつかの興味深い点を読み取ることができる．まず第1点は，正規分布による近似と他の近似および経験分布を比較することによってこのような小標本においては，$\hat{\alpha}$ の漸近的正規性に依拠した統計的推論がいかに頼りにならないかが読み取られる点である．

第2点は，近似方法(a)と(b)の差である．理論的には，どちらも $O(T^{-1})$ までの近似を与えてはいるが，このような小標本では両者の差はけっして

小さくなく，その差は $O(T^{-1})$ の大きさに収まっているかどうかも疑わしいほどである．このようなことが起る理由としては次のような状況が考えられる．留数定理にもとづく近似においては，個々のキュムラントの近似計算の誤差は，確かに $O(T^{-1})$ であるが，エッジワース係数の計算に必要な0でないキュムラントの数は59個あり，しかもそれらは何度も計算に用いられている．したがって $T=20$ の場合には，これらの誤差が累積されて，エッジワース展開における全体の誤差の大きさを越えてしまうという状況が起るのではなかろうか．ただし図3における比較は，上にも述べたように，エッジワース近似にとって最も不利な場合なので，近似(a)と(b)の差が誇張され過ぎている．実際，$T=20$, $\alpha=0.4$ のときの両者の差は，ここに示されていないけれど，これほど極端ではない．

図4は，エッジワース近似と経験分布との比較を，$x_t=0.4x_{t-1}+\varepsilon_t$, $\alpha=0.4$, 0.8, $\gamma=0.2$ $\sigma_u^2=\sigma_\varepsilon^2=1$ に対しておこなったものである．x_t の系列 $x_1, \cdots, x_T$ を得るために，x_{-40} を初期値として与え最初の20ないし40個の値は捨てた．$\alpha=0.4$ の場合のほうが，$\alpha=0.8$ の場合より近似の精度が良いこと，$O(T^{-1})$ までの近似が一様に $O(T^{-1/2})$ までの近似より精度が必ずしも良いとは言えないことなどを読み取ることができる．また図3と図4を比較すると，図4におけるほうが近似の精度が全般に良いことが分る．ここでは省略されたその他の多くの計算結果から判断して x_t が AR 過程から生成された場合は，$x_t=0$ や $x_t=1$ の場合に比べて，分布のすその近似精度の低下や波打現象がやわらげられる傾向があるようである．

図5は分散比 $\sigma_\varepsilon^2/\sigma_u^2$ の影響を見るためのものである．x_t は $x_t=0.4x_{t-1}+\varepsilon_t$ より生成されている．これらの図からこの分散比は，分布の位置と広がりの双方に効果を持つことが読み取られる．すなわちこれらの図において，$\sigma_\varepsilon^2/\sigma_u^2$ が増加するとき，分布の偏りと広がりも縮小する．また分布のすそにおける波打現象も現われていない．ここには示さなかったが，$\gamma=0$ のとき，分布は負の偏りを持つことが観察された．

最後に図6において，x_t の生成過程の相違がエッジワース近似に与える効果を見ることができる．すなわち $x_t=\rho_1x_{t-1}+\rho_2x_{t-2}+\varepsilon_t$ という x_t

の生成過程において，(ρ_1, ρ_2) の値が (0.0, 0.0)，(0.4, 0.0)，(0.4, 0.2)，(0.4, −0.2) および $x_t=1$ の場合を比較した．他のパラメータは $\alpha=0.8$, $\gamma=0.4$, $\sigma_\epsilon^2=\sigma_u^2=1$ とした．x_t の系列の与え方によって分布の形状も位置もかなり異なってくることが分る．特に分布(3)は非常に急な勾配を持つが，これと似た現象は，Phillips (1980) にも報告されている．このように x_t の生成過程は $\hat{\alpha}_{LS}$ の分布に顕著な効果を持たらすが，さらに付言すれば，x_t の生成にあたって十分長い過去に逆のぼって生成した場合と，そうでない場合とでは，x_t の系列が相当異なってくるので注意しなければならない．特に ρ_1 の値が大きいときは，十分遠い過去から始めても，x_t の系列は不安定になる傾向があり，また $\hat{\alpha}_{LS}$ のエッジワース近似も不安定になりがちであった．この事実は第3節の例に見られたように $(1-\rho^2)$ という項がキュムラントの分母に現われてくることから予想されることでもある．

Tse (1982) の数値計算においては，x_t の生成にあたって x_0 を初期値として与え，$x_1, x_2, \cdots$ を AR(1) 過程によって得ているが，初期値 x_0 が無視できない影響をエッジワース近似に与えているものと思われる．

6 むすび

以上 ARMAX モデルの撹乱項に対する，想定誤差の最小2乗推定量に及ぼす悪影響を漸近展開の結果にもとづいていろいろ指摘した．したがって撹乱項が MA(1) 過程に従っていることが分ったときは，最小2乗法を避け，最尤法を用いるべきであろう．しかし ARMAX モデルにおける最尤法の小標本特性は，ほとんど知られていないようである．その性質を調べるためにも最尤推定量の漸近展開を求める意義は十分ある．第7章の方法を ARMAX モデルに対して適用することは理論的には可能であろうが，その計算を実行することは一般には非常に困難であろう．しかしモデルを(1)式のように単純化してエッジワース展開の最終的な式を示す代りに第5節で行なったような数値計算や，グラフによる分析は可能であろう．以下その可能性を展望してみよう．Sargan のアルゴリズムを(1)式に

対する最尤推定量に適用することを考えてみる．まず対数尤度は

$$l=-\frac{T}{2}\log\sigma_u{}^2-\frac{1}{2}\log|\Sigma|-\frac{1}{2\sigma_u{}^2}(y-m)'\Sigma^{-1}(y-m)$$

である．ここに $E(y)=m$, $E(y-m)(y-m)'=\Sigma$ である．対数尤度に含まれる未知パラメータは，α, β, γ, $\sigma_u{}^2$ である．この対数尤度に対して，第7章の方法を応用すれば，最尤推定量 $\tilde{\theta}=(\tilde{\alpha}, \tilde{\beta}, \tilde{\gamma}, \tilde{\sigma}_u{}^2)'$ に関する漸近展開を計算することが理論的には可能である．その計算を実行に移してみたが，Sargan のアルゴリズムの第(4)段階（第1章2節）を数値計算に頼ることにすれば $\sqrt{T}e=\sqrt{T}(\tilde{\theta}-\theta)$ の周辺分布の $O(T^{-1/2})$ までのエッジワース展開が得られる可能性は十分にありそうである．しかしその場合ですら，計算の繁雑さはこの章の計算の比ではない．そのように複雑化する第1の原因は，誤差関数 $e=\tilde{\theta}-\theta$ を構成する基本的な確率変数の数が，飛躍的に増える点にあり，第2の原因は平均ベクトル m が未知母数 α, β に依存するため，対数尤度 l の未知母数に関する偏微分から非常に多くの項が派生する点である．しかしともあれ $O(T^{-1/2})$ までの展開に必要な e_{jk}, ϕ_{jk}, ϕ_{jkl} については，なんとか計算することができた．その結果を用いれば，$\sqrt{T}(\tilde{\theta}_i-\theta_i)$ の分布の $O(T^{-1/2})$ までのエッジワース近似を数値計算によって求めることが可能である．その数値計算の実行と結果の分析は，他の機会に譲りたい．

以上の接近法は，自己回帰モデルにおいて攪乱項が AR 過程に従う場合にも適用可能である．Hatanaka (1974) はモデル

$$y_t=\alpha y_{t-1}+\beta x_t+u_t$$

$$v_t=\rho u_{t-1}+\varepsilon_t,\ \varepsilon_t\sim iidN(0,\ \sigma_\varepsilon)$$

に対して，2段階有効推定量 (2-step efficient estimator) を提案し，この推定量と最尤推定量の（1次の）漸近的有効性を示した．ここで述べた方法を適用すれば，これらの推定量の2次の有効性まで議論をすすめることができるかもしれない．これも，今後の課題としたい．

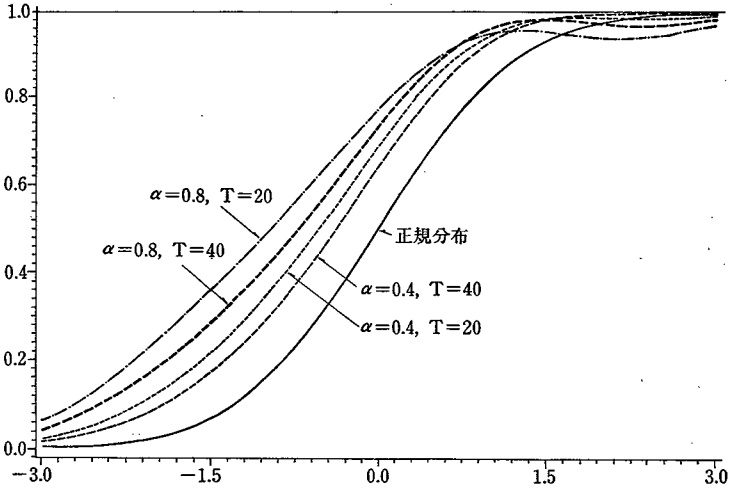

図1　$\gamma=0.8,\ x_t=1,\ \sigma_u^2=1.0$

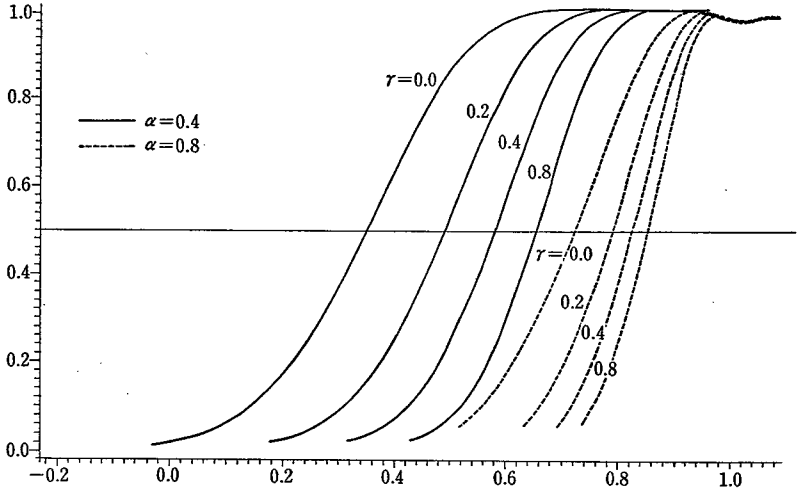

図2　$x_t=1,\ T=40,\ \sigma_u^2=1.0$

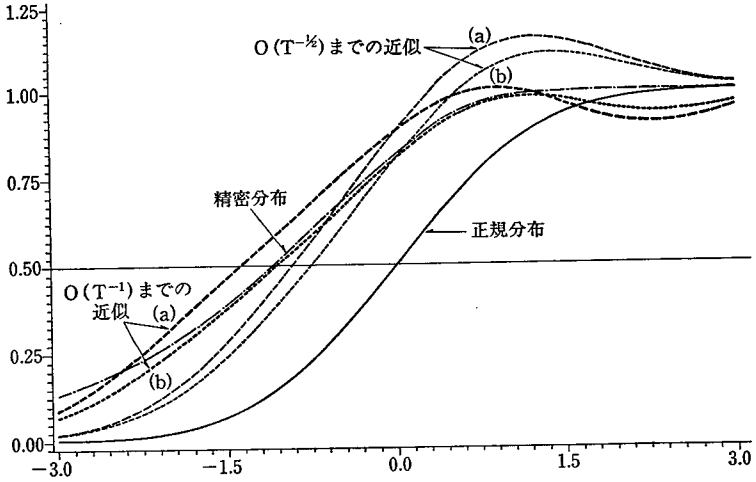

図3　$\alpha=0.8,\ \gamma=0.0,\ x_t=1.0,\ T=20,\ \sigma_u^2=1.0$

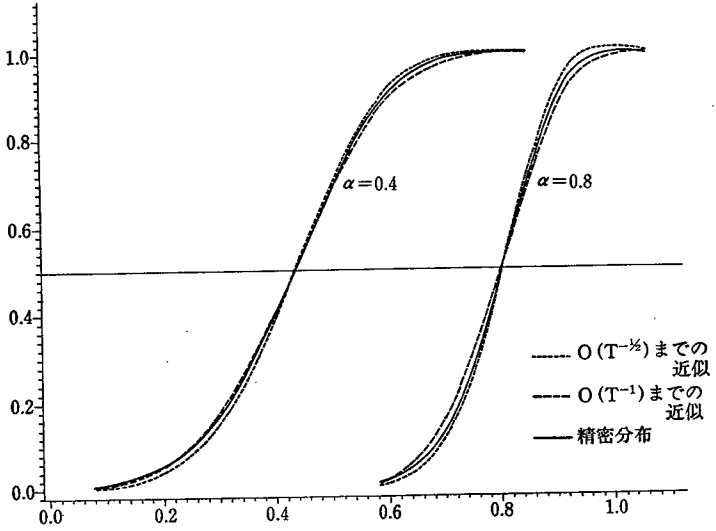

図4　$\gamma=0.2,\ x_t=0.4x_{t-1}+\varepsilon_t,\ T=20,\ \sigma_\varepsilon^2=\sigma_u^2=1.0$

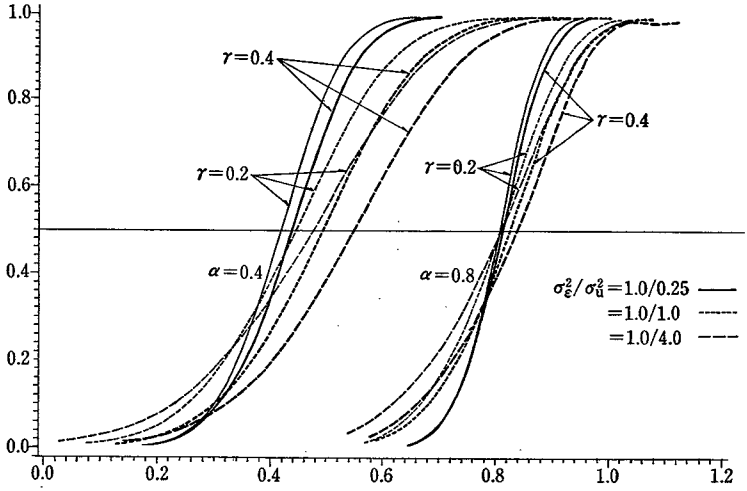

図5　$x_t = 0.4x_{t-1} + \varepsilon_t$, T=20

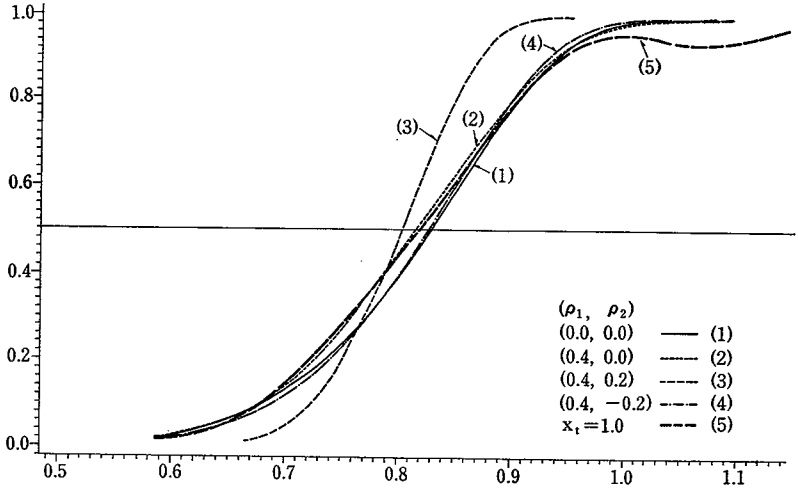

図6　$\alpha=0.8$, $\gamma=0.4$, $x_t = \rho_1 x_{t-1} + \rho_2 x_{t-2} + \varepsilon_t$, $\sigma_\varepsilon^2 = \sigma_u^2 = 1.0$, T=20

補論(A) 誤差関数 $e(q)$ の偏微係数

A.1 $e^{(\alpha)}$ の偏微係数.

定義より次式を得る.

$$e^{(\alpha)}=\hat{\alpha}-\alpha-\Delta_\alpha$$

$$=\frac{\mu_0(q_2+\mu_2)-(q_3+\mu_3)(q_4+\mu_4)}{(q_1+\mu_1)-(q_3+\mu_3)^2}.$$

$e^{(\alpha)}$ の q_i に関する偏微係数の原点での値を

$$e_i^{(\alpha)}=\frac{\partial e^{(\alpha)}(0)}{\partial q_i},\quad e_{ij}^{(\alpha)}=\frac{\partial^2 e^{(\alpha)}(0)}{\partial q_i \partial q_j}$$

$$e_{ijk}^{(\alpha)}=\frac{\partial^3 e^{(\alpha)}(0)}{q_i q_j q_k},\qquad (i,\ j,\ k=1,\ 2,\ 3,\ 4)$$

によって表わす. さらに次の量を定義する. $a=\mu_0\mu_1-\mu_3^2$, $b=\mu_0\mu_2-\mu_3\mu_4$. ここで $e^{(\alpha)}$ をテイラー展開すれば, $e_i^{(\alpha)}$, $e_{ij}^{(\alpha)}$, $e_{ijk}^{(\alpha)}$ は容易に次のように計算される. 以下において $e^{(\alpha)}$ における (α) は省略する.

$$e_1=-\mu_0 b/a^2,\ e_2=\mu_0/a$$

$$e_3=-\mu_4/a+2\mu_3 b/a^2,\ e_4=-\mu_3/a$$

$$e_{11}=2\mu_0^2 b/a^3$$

$$e_{33}=-4\mu_3\mu_4/a^2+2(\mu_0\mu_1-\mu_3\mu_4)/a^2+8\mu_3^2 b/a^3$$

$$e_{12}=-\mu_0^2/a^2,\ e_{13}=\mu_0\mu_4/a^2-4\mu_0\mu_3 b/a^3$$

$$e_{14}=\mu_0\mu_3/a^2,\ e_{23}=2\mu_0\mu_3/a^2,\ e_{34}=-2\mu_3^2/a^2-1/a$$

$$e_{22}=e_{24}=e_{44}=0$$

$$e_{111}=-6\mu_0^3 b/a^4$$

$$e_{333}=-6\mu_4/a^2-24\mu_3^2\mu_4/a^3+24\mu_3 b/a^3-48\mu_3^2 b/a^4$$

$$e_{112}=2\mu_0^3/a^3,\ e_{113}=-2\mu_0\mu_4/a^3+12\mu_0\mu_3 b/a$$

$$e_{114}=-2\mu_0\mu_3/a^3,\ e_{123}=-4\mu_0^2\mu_3/a^3$$

$$e_{133}=8\mu_0\mu_3\mu_4/a^3-4\mu_0 b/a^3-24\mu_0\mu_3^2 b/a^4$$

$$e_{134}=\frac{\mu_0}{a^2}+\frac{4\mu_0\mu_3^2}{a^3}$$

$$e_{233}=2\mu_0/a^2+8\mu_0\mu_3^2/a^3,\ e_{334}=-6\mu_3/a^2-8\mu_3^2/a^3$$

$$e_{122},\ e_{124},\ e_{144},\ e_{222},\ e_{223},\ e_{224},\ e_{234},\ e_{244},\ e_{344},\ e_{444}=0.$$

A.2 $e^{(\beta)}$ の偏微係数.

上と同様に，定義より次式を得る.

$$e^{(\beta)}=\hat{\beta}-\beta-\Delta_\beta$$
$$=\frac{(q_1+\mu_1)(q_4+\mu_4)-(q_2+\mu_2)(q_3+\mu_3)}{(q_1+\mu_1)\mu_0-(q_3+\mu_3)^2}.$$

$e^{(\beta)}$ の q_i に関する偏微係数を原点で評価した値は次式で与えられる．ここで $e^{(\beta)}$ における添字（β）は省略し，$c=\mu_1\mu_4-\mu_2\mu_3$ とおく.

$$e_1=\mu_4/a-\mu_0c/a^2,\ e_2=-\mu_3/a$$
$$e_3=-\mu_2/a+2\mu_3c/a^2,\ e_4=\mu_1/a$$
$$e_{11}=-2\mu_0\mu_4/a^2+2\mu_0{}^2c/a^3,\ e_{12}=\mu_0\mu_3/a^2$$
$$e_{13}=\mu_0\mu_2/a^2+2\mu_3\mu_4/a^2-4\mu_0\mu_3c/a^3$$
$$e_{14}=1/a-\mu_0\mu_1/a^2,\ e_{23}=-1/a-2\mu_3{}^2/a^2$$
$$e_{33}=-4\mu_2\mu_3/a^2+2c/a^2+8\mu_3{}^2c/a^3$$
$$e_{34}=4\mu_1\mu_3/a^2,\ e_{22},\ e_{24},\ e_{44}=0$$
$$e_{111}=6\mu_0{}^2\mu_4/a^3-6\mu_0{}^3c/a^3$$
$$e_{333}=-6\mu_2/a^2-24\mu_3{}^2\mu_2/a^3+24\mu_3c/a^3+48\mu_3{}^2c/a^4$$
$$e_{112}=-2\mu_0{}^2\mu_3/a^3$$
$$e_{113}=-2\mu_0{}^2\mu_2/a^3-8\mu_0\mu_3\mu_4/a^3+12\mu_0\mu_3c/a^4$$
$$e_{114}=-2\mu_0/a^2+2\mu_0{}^2\mu_1/a^3$$
$$e_{123}=\mu_0/a^2$$
$$e_{133}=2\mu_4/a^2+8\mu_0\mu_2\mu_3/a^3-4\mu_0c/a^3-24\mu_0\mu_3{}^2c/a^4$$
$$e_{134}=2\mu_2/a^2-4\mu_0\mu_1\mu_3/a^3$$
$$e_{233}=-6\mu_3/a^2-8\mu_3{}^3/a^3$$
$$e_{334}=2\mu_1/a^2+8\mu_1\mu_3{}^2/a^3$$
$$e_{122},\ e_{124},\ e_{144},\ e_{222},\ e_{223},\ e_{224},\ e_{234},\ e_{244},\ e_{344},\ e_{444}=0.$$

補論(B) キュムラントの計算

q_1, q_2, q_3, q_4 のキュムラント母関数は，次式で与えられる.

$$\phi(t)=-\frac{1}{2}\log|\Omega|-\frac{1}{2}\log|\Omega^{-1}-2A(t)|-\frac{1}{2}m'\Omega^{-1}m$$

$$+\frac{1}{2}[B'(t)+\Omega^{-1}m]'[\Omega^{-1}-2A(t)]^{-1}[B'(t)+\Omega^{-1}m].$$

ここに Ω は $v_t=u_t+\gamma u_{t-1}$ の分散共分散行列，m は y の平均ベクトル，

$$A(t)=t_1A_1+t_2A_2$$

$$B(t)=t_3d_3+t_4d_4.$$

ψ の q_i に関する偏微係数の原点における値を

$$\psi_{ab}=\frac{\psi^2\psi(0)}{\partial q_a\partial q_b},\ \psi_{abc}=\frac{\partial^3\psi(0)}{\partial q_a\partial q_b\partial q_c}$$

$$\psi_{abcd}=\frac{\partial^4\psi(0)}{\partial q_a\partial q_b\partial q_c\partial q_d},\ (a,\ b,\ c,\ d=1,\ \cdots,\ 4)$$

によって表わす．以下では，添字 $i,\ j,\ k,\ l$ は1，2に対して，$r,\ s,\ t,\ u$ は3，4に対して用いる．このとき，次の表現を得る．

$$\psi_{ij}=\frac{2}{T}\mathrm{tr}(A_i\Omega A_j\Omega)+\frac{4}{T}m'A_i\Omega A_jm$$

$$\psi_{ir}=\frac{2}{T}d_r'\Omega A_im$$

$$\psi_{rs}=\frac{1}{T}d_r'\Omega d_s$$

$$\psi_{ijk}=\frac{4}{T^{3/2}}[\mathrm{tr}(A_k\Omega A_j\Omega A_i\Omega)+\mathrm{tr}(A_j\Omega A_k\Omega A_i\Omega)]$$

$$+\frac{8}{T^{3/2}}m'(A_i\Omega A_j\Omega A_k+A_i\Omega A_k\Omega A_j+A_k\Omega A_i\Omega A_j)m$$

$$\psi_{ijr}=\frac{4}{T^{3/2}}m'(A_j\Omega A_i\Omega+A_i\Omega A_j\Omega)d_r$$

$$\psi_{irs}=\frac{2}{T^{3/2}}d_r'\Omega A_i\Omega d_s$$

$$\psi_{rst}=0$$

$$\psi_{ijkl}=\frac{8}{T^2}[\mathrm{tr}(A_l\Omega A_k\Omega A_j\Omega A_i\Omega)+\mathrm{tr}(A_k\Omega A_l\Omega A_j\Omega A_i\Omega)$$

$$+\mathrm{tr}(A_k\Omega A_j\Omega A_l\Omega A_i\Omega)+\mathrm{tr}(A_l\Omega A_j\Omega A_k\Omega A_i\Omega)$$

$$+\mathrm{tr}(A_j\Omega A_l\Omega A_k\Omega A_i\Omega)+\mathrm{tr}(A_j\Omega A_k\Omega A_l\Omega A_i\Omega)]$$

$$+\frac{16}{T^2}m'(A_l\Omega A_k\Omega A_j\Omega A_j+A_l\Omega A_j\Omega A_k\Omega A_i$$

$$+A_l\Omega A_j\Omega A_i\Omega A_k+A_l\Omega A_k\Omega A_i\Omega A_j$$

$$+A_l\Omega A_i\Omega A_k\Omega A_j+A_l\Omega A_i\Omega A_j\Omega A_k)m$$
$$+\frac{16}{T^2}m'(A_k\Omega A_l\Omega A_j\Omega A_i+A_k\Omega A_j\Omega A_l\Omega A_i$$
$$+A_j\Omega A_l\Omega A_k\Omega A_i+A_j\Omega A_k\Omega A_l\Omega A_i$$
$$+A_j\Omega A_l\Omega A_i\Omega A_k+A_j\Omega A_i\Omega A_l\Omega A_k)m$$
$$\phi_{ijkr}=\frac{8}{T^2}m'(A_k\Omega A_j\Omega A_i\Omega+A_j\Omega A_k\Omega A_i\Omega+A_j\Omega A_i\Omega A_k$$
$$+A_k\Omega A_i\Omega A_j\Omega+A_i\Omega A_k\Omega A_j\Omega+A_i\Omega A_j\Omega A_k)d_r$$
$$\phi_{ijrs}=\frac{4}{T^2}d_r'(\Omega A_j\Omega A_i\Omega+\Omega A_i\Omega A_j\Omega)d_s$$
$$\phi_{irst}=0$$
$$\phi_{rstu}=0.$$

これらの表現は，Phillips (1980, pp. 209–210) の表現をわれわれの場合に記号を形式的に対応させることによって得ることができる．

補論(C) 補題の応用例

補題の例示のつづきとして，AR(1|x) において $x_t=\rho x_{t-1}+\varepsilon_t$ とした場合の ϕ_{ab} の値を以下に示す．

$$\phi_{11}{}^*=\frac{1}{T}m'A_1\Omega A_1m$$
$$=\frac{2\sigma_u{}^2(1+\alpha^2)}{(1-\alpha^2)^3}+\frac{K\{1+2\alpha\rho+\alpha^2(1-\rho^2)-2\alpha^3\rho-\alpha^4\rho^2\}}{(1-\alpha^2)^2(1-\alpha\rho)}+O\left(\frac{1}{T}\right)$$
$$\phi_{12}{}^*=\frac{1}{T}m'A_1\Omega A_2m$$
$$=\frac{4\sigma_u{}^4\alpha}{(1-\alpha^2)^3}+\frac{K\beta\{(\alpha+\rho)(1-\alpha^3\rho)+\alpha(1-\alpha^2\rho^2)\}}{(1-\alpha^2)^2(1-\alpha\rho)}+O\left(\frac{1}{T}\right)$$
$$\phi_{22}{}^*=\frac{1}{T}m'A_2\Omega A_2m$$
$$=\frac{\sigma_u{}^4(1+4\alpha^2-\alpha^4)}{(1-\alpha^2)^3}+\frac{K\beta\{1+(1-\alpha^2)(4\alpha^2+4\alpha\rho+\rho^2)-\alpha^4\rho^2\}}{(1-\alpha^2)^2(1-\alpha\rho)}$$
$$+O\left(\frac{1}{T}\right)$$
$$\phi_{33}=\frac{1}{T}d_3'\Omega d_3=\frac{\sigma_\varepsilon{}^2\sigma_u{}^2(1+\alpha\rho)}{(1-\alpha^2)(1-\rho^2)(1-\alpha\rho)}+O\left(\frac{1}{T}\right)=\phi_{44}=\frac{1}{T}d_4\Omega d_4$$
$$\phi_{34}=\frac{1}{T}d_3'\Omega d_4=\frac{\sigma_\varepsilon{}^2\sigma_u{}^2(\alpha+\rho)}{(1-\alpha^2)(1-\rho^2)(1-\alpha\rho)}+O\left(\frac{1}{T}\right)$$

$$\phi_{13} = \frac{1}{T} d_3' \Omega A_1 m = K\left\{\frac{\alpha(1+\alpha\rho)}{1-\alpha^2} + \frac{\rho}{1-\alpha\rho}\right\} + O\left(\frac{1}{T}\right)$$

$$\phi_{23} = \frac{1}{T} d_3' \Omega A_2 m = K\left\{\frac{1+\alpha\rho}{1-\alpha^2} + \frac{\alpha\rho}{1-\alpha\rho}\right\} + O\left(\frac{1}{T}\right) = \phi_{14} = \frac{1}{T} d_4' \Omega A_1 m$$

$$\phi_{24} = \frac{1}{T} d_4' \Omega A_2 m = K\left\{\frac{2\alpha+\alpha^2\rho+\rho}{1-\alpha^2} + \frac{\alpha+\rho}{1-\alpha\rho}\right\} + O\left(\frac{1}{T}\right).$$

ここに $K = \left(\frac{\sigma_\varepsilon^2}{1-\rho^2}\right)\left(\frac{\sigma_u^2}{1-\alpha^2}\right)\left(\frac{1}{1-\alpha\rho}\right)$ である.

キュムラントの次数が低いときには ϕ_{ij}^* は $\lim_{T\to\infty}$ の計算によっても求めることができるが, 次数の高い場合は, $\lim_{T\to\infty}$ の計算は困難であろう. 最後に lim による計算例を ϕ_{13}^* の場合に示しておこう. Ω の (i, j) 要素を $\omega(h)$, $h=i-j$ で示せば,

$$\begin{aligned}
\phi_{13}^* = \frac{1}{T} d_3' \Omega A_0 m = \frac{1}{T}(x_1, x_2, \cdots, x_T, 0)\Omega(m_0, m_1, \cdots, m_{T-1}, 0)' \\
\sim \frac{1}{T}\{ & x_0 m_0 \omega(1) + x_0 m_1 \omega(2) + \cdots + x_0 m_{T-1}\omega(T) \\
& + x_1 m_0 \omega(0) + x_1 m_1 \omega(1) + \cdots + x_1 m_{T-1}\omega(T-1) \\
& + x_2 m_0 \omega(1) + x_2 m_1 \omega(0) + \cdots + x_2 m_{T-1}\omega(T-2) \\
& + x_3 m_0 \omega(2) + x_3 m_1 \omega(1) + \cdots + x_3 m_{T-1}\omega(T-3) \\
& \qquad \vdots \\
& + x_T m_0 \omega(T-1) + x_T m_1 \omega(T-2) + \cdots + x_T m_{T-1}\omega(0)\}. \qquad \text{(C1)}
\end{aligned}$$

ここで{ }の中の第1行は人工的に追加されたものである. このように拡張された和を考えると, この追加された部分は $T\to\infty$ のとき無視できるから, 以下の $\lim_{T\to\infty}$ の演算は, 拡張された和についておこなう. (C1)式の{ }の中の対角線から上の部分(以後「上側三角部分」という)の和と, それ以下の部分の和に分けて考える. 最初に上側三角部分を計算しよう.

ここで x_t と x_{t-h} の自己共分散を $\gamma_x(h)$ で, x_t と m_{t+h} の共分散を $\gamma_{xm}(h)$ で表わすことにする. いま $x_t = \rho x_{t-1} + \varepsilon_t$ を仮定しているから $\gamma(h) = \sigma_\varepsilon^2 \rho^{|h|}/(1-\rho^2)$ である. また定義より $m_t = E(y_t|x) = \beta \sum_{i=0}^{\infty} \alpha^i x_{t-i}$ である. これらのことに注意すれば, 容易に

$$\gamma_{xm}(h) = \gamma_x(h) + \alpha\gamma_x(h-1) + \alpha^2\gamma_x(h-2) + \cdots + \alpha^{h-1}\gamma_x(1)$$

$$+\left(\frac{\alpha^h}{1-\alpha\rho}\right)\gamma(0)$$

と表わされる．このことを用いれば，上側三角部分の和は，次のように計算される．なお $\gamma_x(h)$ は，以後 $\gamma(h)$ と表わし，$\beta=1$ とする．

$$\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\{\omega(1)\sum_t x_t m_t+\omega(2)\sum_t x_t m_{t+1}+\omega(3)\sum_t x_t m_{t+2}+\cdots\}$$

$$=\omega(1)\gamma(0)\frac{1}{1-\alpha\rho}$$

$$+\omega(2)\left\{\gamma(1)+\gamma(0)\frac{\alpha}{1-\alpha\rho}\right\}$$

$$+\omega(3)\left\{\gamma(2)+\alpha\gamma(1)+\gamma(0)\frac{\alpha^2}{1-\alpha\rho}\right\}$$

$$+\omega(4)\left\{\gamma(3)+\alpha\gamma(2)+\alpha^2\gamma(1)+\gamma(0)\frac{\alpha^3}{1-\alpha\rho}\right\}$$

$$+\cdots$$

$$=\gamma(0)\{\omega(1)+\alpha\omega(2)+\alpha^2\omega(3)+\alpha^3\omega(4)+\cdots\}\frac{1}{1-\alpha\rho}$$

$$+\gamma(1)\{\omega(2)+\alpha\omega(3)+\alpha^2\omega(4)+\alpha^3\omega(5)+\cdots\}$$

$$+\gamma(2)\{\omega(3)+\alpha\omega(4)+\alpha^2\omega(5)+\alpha^3\omega(6)+\cdots\}$$

$$+\gamma(3)\{\omega(4)+\alpha\omega(5)+\alpha^2\omega(6)+\cdots\}$$

$$+\cdots.$$

ここで　$\omega(h)=\frac{\sigma_u{}^2}{1-\alpha^2}\alpha^{|h|}$，$\gamma(h)=\frac{\sigma_\varepsilon{}^2}{1-\rho^2}\rho^{|h|}$，を代入し{　}の中の等比級数の和をとれば

$$=\left(\frac{\sigma_\varepsilon{}^2}{1-\rho^2}\right)\left(\frac{\sigma_u{}^2}{1-\alpha^2}\right)\left(\frac{\alpha}{1-\alpha^2}\right)\left(\frac{1+\alpha\rho}{1-\alpha\rho}\right)$$

を得る．対角線より下の部分の和も同様に計算すれば

$$\left(\frac{\sigma_\varepsilon{}^2}{1-\rho^2}\right)\left(\frac{\sigma_u{}^2}{1-\alpha^2}\right)\left(\frac{1}{1-\alpha\rho}\right)\left(\frac{\rho}{1-\alpha\rho}\right)$$

となる．したがって全体の和は両者を加えて

$$\lim_{T\to\infty}\phi_{13}{}^*=\left(\frac{\sigma_\varepsilon{}^2}{1-\rho^2}\right)\left(\frac{\sigma_u{}^2}{1-\alpha^2}\right)\left(\frac{1}{1-\alpha\rho}\right)\left\{\frac{\alpha(1+\alpha\rho)}{1-\alpha^2}+\frac{\rho}{1-\alpha\rho}\right\}$$

となり，補題と留数定理の応用から求められた結果と一致する．

第10章　ARMAX モデルにおける最小2乗推定量の漸近展開（Ⅱ）

——2次形式の比の分布としてみた場合——

1　は　じ　め　に

前章では，最も単純な ARMAX モデルにおける最小2乗推定量の漸近展開を扱った．そこでの接近法を，より一般的な ARMAX モデルに適用することは原理的には可能である．Sargan and Tse (1979) は Sargan (1976) を拡張した形でそのような場合に対する数値計算のアルゴリズムを述べている．それは当然，非常に複雑なものになっている．複雑化する理由は，ARMAX モデルにおける y_t のラグ付変数の数と，外生変数の数が増えるため，推定量を構成する確率変数の種類が飛躍的に増えるからである．

例えば，Tse (1982) が扱っているモデル

$$y_t = c + \alpha y_{t-1} + \beta_1 x_{1t} + \beta_2 x_{2t} + u_t,\ u_t \sim iidN(0,\ \sigma_u{}^2) \tag{1}$$

においては，$\hat{\alpha}_{LS}$ を構成する確率変数は，次の8個である．

$$p_1 = \frac{1}{T} y_{-1}{}' y_{-1},\quad p_2 = \frac{1}{T} y' y_{-1}$$

$$p_3 = \frac{1}{T} l' y,\qquad p_4 = \frac{1}{T} X_1{}' y$$

$$p_5 = \frac{1}{T} X_2{}' y,\qquad p_6 = \frac{1}{T} l' y_{-1}$$

$$p_7 = \frac{1}{T} X_1{}' y_{-1},\quad p_8 = X_2{}' y_{-1}.$$

ここに $X_k{}' = (x_{k1},\ x_{k2},\ \cdots,\ x_{kT})$, $y_{-1}{}' = (y_0,\ y_1,\ \cdots,\ y_{T-1})$, $y' = (y_1,\ \cdots,\ y_T)$, $l' = (1,\ 1,\ \cdots,\ 1)$ である．このように基本的な確率変数の数が増えると当然エッジワース係数を式の形で表わすことは非常に困難になる．事実 Tse (1982), Phillips (1980) においても，またわれわれの前章においても，エッジワース係数の最終的な式の形は与えられていない．そこでは p_i のキュム

ラントの公式と誤差関数 $e(p)=\hat{\alpha}-\alpha$ の偏微係数の公式を求め，それらを用いて，エッジワース係数を数値計算によって求めている．ところが(1)式のように y_t のラグ付変数が y_{t-1} だけである場合には，外生変数の数がいくつであっても $\hat{\alpha}_{LS}$ に関する限り，エッジワース係数の最終的な式の形は明示的に示される (Maekawa 1983 b, c)．それは $\hat{\alpha}_{LS}$ を構成する確率変数のとり方をかえることにより可能になる．すなわち $\hat{\alpha}_{LS}$ が $y'Ay/y'By$ という2次形式の比になっていることに着目し，その分母分子それぞれをひとつの確率変数とみなせば，$\hat{\alpha}_{LS}$ はわずか2つの確率変数によって構成されていると見ることができる．このように，確率変数の数が少なければ，エッジワース係数は非常に計算しやすくなる．

2 モデルと推定量

次のような k 個の外生変数を含む単純な ARMAX モデルを取り上げる．

$$y_t=\alpha y_{t-1}+\sum_{i=1}^{k}x_{ti}\beta_i+u_t+\gamma u_{t-1},$$
$$t=\cdots,\ -1,\ 0,\ 1,\ \cdots;\ |\alpha|,\ |\gamma|<1. \tag{2}$$

ここに $u_t\sim iidN(0,\ \sigma_u{}^2)$ である．(2)式はベクトルで表現すれば

$$y=\alpha y_{-1}+X\beta+u+\gamma u_{-1} \tag{3}$$

である．ここに

$$y'=(y_2,\ y_3,\ \cdots,\ y_T),\ y_{-1}'=(y_1,\ y_2,\ \cdots,\ y_{T-1}),\ u'=(u_2,\ u_3,\ \cdots,\ u_T)$$
$$u_{-1}'=(u_1,\ u_2,\ \cdots,\ u_{T-1})$$

である．また X は $(T-1)\times k$ の非確率的外生変数の観察値行列である．さらに$y_*'=(y_1,\ y_2,\ \cdots,\ y_T)$とおけば，$y_*\sim N(m,\Omega)$ である．ここに Ω は

$$\Omega=\begin{pmatrix}\omega_0 & \omega_1 & \omega_2 & \cdots & \omega_{T-1}\\ \omega_1 & \omega_0 & \omega_1 & \cdots & \omega_{T-2}\\ \vdots & \vdots & \ddots & & \vdots\\ \omega_{T-1} & \omega_{T-2} & \cdots\cdots & \omega_1 & \omega_0\end{pmatrix},\qquad \omega_1=\frac{\alpha^2(1+\gamma^2+2\alpha\gamma)}{1-\alpha^2}$$
$$\omega_1=\frac{\alpha^2(1+\alpha\gamma)(\alpha+\gamma)}{1-\alpha^2}$$

で与えられ，$\omega_k=\alpha\omega_{k-1}$，$k\geq 2$ である．また m は y の平均ベクトルで，その t 番目の要素は，

$$E(y_t)=m_t=\alpha m_{t-1}+\sum_{i=1}^{k}x_{ti}\beta_i$$

と書くことができる．ここで x_t に関して次の仮定をおく．

（i）　$|x_{ti}|<\infty$

（ii）　$\lim_{T\to\infty}\frac{X'X}{T}=S$,　S は正値定符号行列．

いま行列 $\frac{1}{T}X\left(\frac{X'X}{T}\right)^{-1}X'$ の $(i,\ j)$ 要素を c_{ij} とすれば，上の仮定から $c_{ij}=O(T^{-1})$ となることが容易に示される (Theil (1971, p. 379))．このことより行列 $M=I-X(X'X)^{-1}X'=I-\frac{1}{T}X\left(\frac{X'X}{T}\right)^{-1}X'=I+\underset{\sim}{O}_T(T^{-1})$ と表わされる．ここに記号 $\underset{\sim}{O}(T^{-1})$ は $T\times T$ の行列で，その要素は $O(T^{-1})$ の大きさであることを意味する．ここで $Z=(y,\ X)$ とおけば，$\theta=(\alpha,\ \beta_1,\ \cdots,\ \beta_k)'$ の最小2乗推定量 $\hat{\theta}$ は，$\hat{\theta}=(Z'Z)^{-1}Z'y$ であるから，この式から $\hat{\alpha}$ に対応する要素を取り出せば，

$$\hat{\alpha}=\frac{y_*'D_2'MD_1y_*}{y_*'D_1'MD_1y_*}=\frac{y_*'A_1y_*}{y_*'A_2y_*}$$

となる．ここに

$$D_1=\begin{pmatrix}1 & & & & 0\\ & \ddots & & 0 & \vdots\\ & & \ddots & & \vdots\\ & 0 & & \ddots & \vdots\\ & & & 1 & 0\end{pmatrix},\quad D_2=\begin{pmatrix}0 & 1 & & & \\ \vdots & & \ddots & & 0\\ \vdots & & & \ddots & \\ \vdots & & 0 & & \ddots\\ 0 & & & & 1\end{pmatrix}$$

$$A_1=\frac{1}{2}(D_1'MD_2+D_2'MD_1),\ A_2=D_1'MD_1$$

である．ここで

$$q_1=\frac{1}{T}(y_*'A_1y_*-\mu_1),\quad \mu_1=E(y_*'A_1y_*)$$

$$q_2=\frac{1}{T}(y_*'A_2y_*-\mu_2),\quad \mu_2=E(y_*'A_2y_*)$$

と定義すれば

$$\hat{\alpha}-\alpha=\frac{q_1-\alpha q_2+d}{q_2+\lambda_2},\quad \frac{d}{T}=\lambda_1-\alpha\lambda_2$$

となる．ここに $\lambda_i=\mu_i/T$ である．なお d は次のように導出される．(3)式の両辺の左側から $y_{-1}'M$ を乗じ，期待値をとれば

$$E(y_{-1}'My)=\alpha E(y_{-1}'My_{-1})+E(y_{-1}'MXb)+E(y'_{-1}M(u+\gamma u_{-1}))$$

となるから，$MX=0$ を代入すれば，

$$\mu_1-\alpha\mu_2=E[y_{-1}'M(u+\gamma u_{-1})]=d$$

を得る．ここで両辺を T で割れば $\lambda_1-\alpha\lambda_2=\dfrac{d}{T}$ となる．この場合も前章におけるのと同様に $\hat{\alpha}$ は一致性を持たないから誤差関数 e を漸近的な偏りで調整して，

$$\sqrt{T}e_T(q_1,\ q_2)=\sqrt{T}\left(\hat{\alpha}-\alpha-\frac{d}{T\lambda_2}\right)$$

によって定義する．このとき $e(0,\ 0)=0$ である．このように標準化された $\hat{\alpha}$ の分布の漸近展開を，第1章のアルゴリズムを用いて $O(T^{-1})$ まで求めることができる．

3　分布の漸近展開

まず誤差関数 $e(q_1,\ q_2)$ の偏微係数を求めるために，e を原点の回りでテイラー展開する．その結果は，

$$\begin{aligned}
e(q_1,\ q_2)&=\hat{\alpha}-\alpha-\frac{d}{T\lambda_2}\\
&=\frac{q_1-\alpha q_2+d}{q_2+\lambda_2}-\frac{d}{T\lambda_2}\\
&=\frac{q_1}{\lambda_2}-q_2\left(\frac{\alpha}{\lambda_2}+\frac{d}{\lambda_2}\right)-\frac{q_1q_2}{\lambda_2{}^2}+q_2{}^2\left(\frac{\alpha}{\lambda_2{}^2}+\frac{d}{\lambda_2{}^3}\right)\\
&\quad+\frac{q_1q_2{}^2}{\lambda_2{}^3}-q_2{}^3\left(\frac{d}{\lambda_2{}^4}+\frac{\alpha}{\lambda_2{}^3}\right)+\cdots-\frac{d}{T\lambda_2}
\end{aligned}$$

となるから，これにより e の偏微係数の原点での値は

$$e_1=1/\lambda_2,\ e_2=-f/\lambda_2,\ e_{11}=0,\ e_{12}=e_{21}=-1/\lambda_2{}^2$$

$$e_{22}=2f/\lambda_2{}^2,\ e_{111}=0,\ e_{112}=e_{211}=e_{121}=0,\ e_{222}=-6f/\lambda_2{}^3.$$

ここに $f=\lambda_1/\lambda_2$ である．

次に $\bar{p}_i=\sqrt{T}p_i$ のキュムラントを求める．積率母関数は

$$\phi(t_1,\ t_2)=E[\exp(t_1 y_*' A_1 y_* + t_2 y_*' A_2 y_*)]$$
$$=\frac{|\Omega^{-1}|^{1/2}}{|\Omega^{-1}-2C|^{1/2}}$$
$$\times\exp(-1/2(\mathrm{m}'\Omega^{-1})(\Omega^{-1}-2C)^{-1}(\Omega^{-1}m)).$$

ただし $C=\frac{t_1}{\sqrt{T}}A_1+\frac{t_2}{\sqrt{T}}A_2$ である．またキュムラント母関数は

$$\phi(t_1,\ t_2)=\frac{1}{2}\log|\Omega^{-1}|-m'\Omega^{-1}m-\frac{1}{2}|\Omega^{-1}-2C|$$
$$+\frac{1}{2}m'\Omega^{-1}(\Omega^{-1}-2C)^{-1}\Omega^{-1}m$$

である．これよりキュムラントは下のように求められる．

以下の結果は前章の補論の結果の一部と形式的には同じであるが，異なる点は，ここでは添字 $i,\ j,\ k,\ l$ は1又は2の2値のみをとることと，A_i の定義である．

$$\phi_{ij}=\frac{2}{T}\mathrm{tr}(A_i\Omega A_j\Omega)+\frac{4}{T}m'A_i\Omega A_j m$$

$$\phi_{ijk}=\frac{4}{T^{3/2}}[\mathrm{tr}(A_k\Omega A_j\Omega A_i\Omega)+\mathrm{tr}(A_j\Omega A_k\Omega A_i\Omega)]$$
$$+\frac{8}{T^{3/2}}m'[A_i\Omega A_j\Omega A_k+A_i\Omega A_k\Omega A_j+A_k\Omega A_i\Omega A_j]m$$

$$\phi_{ijkl}=\frac{8}{T^2}[\mathrm{tr}(A_l\Omega A_k\Omega A_j\Omega A_i\Omega)+\mathrm{tr}(A_k\Omega A_l\Omega A_j\Omega A_i\Omega)$$
$$+\mathrm{tr}(A_k\Omega A_j\Omega A_l\Omega A_i\Omega)+\mathrm{tr}(A_l\Omega A_j\Omega A_k\Omega A_i\Omega)$$
$$+\mathrm{tr}(A_j\Omega A_l\Omega A_k\Omega A_i\Omega)+\mathrm{tr}(A_j\Omega A_k\Omega A_l\Omega A_i\Omega)]$$
$$+\frac{16}{T^2}m'(A_l\Omega A_k\Omega A_j\Omega A_i+A_l\Omega A_j\Omega A_k\Omega A_i$$
$$+A_l\Omega A_j\Omega A_i\Omega A_k+A_l\Omega A_k\Omega A_i\Omega A_j+A_l\Omega A_i\Omega A_k\Omega A_j$$
$$+A_l\Omega A_i\Omega A_j\Omega A_k)m+\frac{16}{T^2}m'(A_k\Omega A_l\Omega A_j\Omega A_i$$
$$+A_k\Omega A_j\Omega A_l\Omega A_i+A_j\Omega A_l\Omega A_k\Omega A_i+A_j\Omega A_k\Omega A_l\Omega A_i$$
$$+A_j\Omega A_l\Omega A_i\Omega A_k+A_j\Omega A_i\Omega A_l\Omega A_k)m.$$

これらの式において A_i, m は X の影響を受けているので，以上のキュムラントおよび $\frac{d}{T\lambda_2}$ が適切な大きさのオーダーを持っているかどうかは自明ではない．この点に関して次の補題が成立する．

〔補題1〕 $\bar{q}_1$, $\bar{q}_2$ の k 次 $(k=2,\ 3,\ 4)$ のキュムラントの大きさは $O(T^{1-k/2})$ である．

〔補題2〕 $\zeta \equiv \dfrac{d}{T\lambda_2} = O(1)$ である.

証明：補論を見よ.

以上で，エッジワース係数の構成要素 e_i, e_{ij}, e_{ijk}, ϕ_{ij}, ϕ_{ijk}, ϕ_{ijkl} が求まったので，エッジワース係数 $\alpha_1, \cdots, \alpha_{10}, \omega^2$ を定義に従って計算することができる．その結果は，次のようになる．

$$\omega^2 = \frac{1}{T\lambda_2^2}(2\mathrm{tr}(\Omega A_1 - f\Omega A_2)^2 + 4m'(A_1 - fA_2)\Omega(A_1 - fA_2)m)$$

$$= \frac{1}{T\lambda_2}\omega^{*2}$$

$$\alpha_1 = \frac{1}{T^{3/2}\lambda_2^3}(8\mathrm{tr}(\Omega A_1 - f\Omega A_2)^3$$

$$+ 24m'(A_1 - fA_2)\Omega(A_1 - fA_2)\Omega(A_1 - fA_2)m) = \frac{1}{T^{3/2}\lambda_2^3}\alpha_1^*$$

$$\alpha_2 = \frac{1}{T^2\lambda_2^4}(48\mathrm{tr}(\Omega A_1 - f\Omega A_2)^4 + 194m'(A_1 - fA_2)\Omega$$

$$\times (A_1 - fA_2)\Omega(A_1 - fA_2)\Omega(A_1 - fA_2)m) = \frac{1}{T^2\lambda_2^4}\alpha_2^*$$

$$\alpha_3 = -\frac{2}{T^2\lambda_2^2}\gamma_2^*\omega^{*2}, \quad \alpha_4 = -\frac{2}{T\lambda_2^2}\gamma_2^*, \quad \alpha_5 = -\frac{2}{T^{3/2}}\lambda_2^3\beta_2^*$$

$$\alpha_6 = \frac{1}{T^3\lambda_2^6}\omega^{*2}\gamma_2^{*2}$$

$$\alpha_7 = \frac{2}{T^2\lambda_2^4}((4\mathrm{tr}\Omega A_1\Omega A_2 + 8m'A_1\Omega A_2 m)\gamma_2^* + (2\mathrm{tr}(\Omega A_2)^2$$

$$+ 4m'A_2\Omega A_2 m)(\gamma_1^* - 3f\gamma_2^*))$$

$$\alpha_8 = \frac{1}{T^3\lambda_2^6}((2\mathrm{tr}(\Omega A_2)^2 + 4m'A_2\Omega A_2 m)(\gamma_1^*\gamma_2^* - 2f\gamma_2^{*2})(1 - 2f)$$

$$+ (2\mathrm{tr}\Omega A_1\Omega A_2 + 4m'A_1\Omega A_2 m)(\gamma_1^* - f\gamma_2^*)^2 + \gamma_2^{*2}$$

$$+ (2\mathrm{tr}(\Omega A_1)^2 + 4m'A_1\Omega A_1 m)\gamma_1^*\gamma_2^*)$$

$$\alpha_9 = \frac{2}{T^2\lambda_2^4}(\gamma_2^* + (2\mathrm{tr}(\Omega A_2)^2 + 4m'A_2\Omega A_2 m)\omega^{*2})$$

$$\alpha_{10} = \frac{1}{T^{5/2}\lambda_2^5}(\omega^{*2}\beta_2^* + \alpha_1^*\gamma_2^*).$$

ここに

$$\gamma_1{}^*=2\mathrm{tr}(\Omega A_1)^2+4m'A_1\Omega A_1m-f(2\mathrm{tr}\Omega A_1\Omega A_2+4m'A_1\Omega A_2m)$$
$$\gamma_2{}^*=2\mathrm{tr}\Omega A_1\Omega A_2+4m'A_1\Omega A_2m-f(2\mathrm{tr}(\Omega A_2)^2+4m'A_2\Omega A_2m)$$
$$\begin{aligned}\beta_1{}^*=&8\mathrm{tr}(\Omega A_1)^3-16f\mathrm{tr}(\Omega A_1)^2(\Omega A_2)+8f^2\mathrm{tr}(\Omega A_1)(\Omega A_2)^2\\&-16fm'A_1\Omega A_2\Omega A_1m-32fm'A_1\Omega A_1\Omega A_2m\\&+16f^2m'A_2\Omega A_2\Omega A_1m+8f^2m'A_2\Omega A_1\Omega A_2m\\&+24m'A_1\Omega A_1\Omega A_1m\end{aligned}$$
$$\begin{aligned}\beta_2{}^*=&8\mathrm{tr}(\Omega A_1)^2(\Omega A_2)-16f\mathrm{tr}(\Omega A_1)(\Omega A_2)^2+8f^2\mathrm{tr}(\Omega A_2)^3\\&+16m'A_2\Omega A_1\Omega A_1m+8m'A_1\Omega A_2\Omega A_1m\\&-32fm'A_2\Omega A_2\Omega A_1m-16fm'A_2\Omega A_1\Omega A_2m\\&+24f^2m'A_2\Omega A_2\Omega A_2m.\end{aligned}$$

これらの係数の導出は，長くて複雑なので，次に ω^2 と α_1 の導出を例示するのみにとどめる．まず ω^2 を計算する．

$$\begin{aligned}\omega^2=\phi_{jk}e_je_k/T&=(e_1,\ e_2)\begin{bmatrix}\phi_{11} & \phi_{12}\\ \phi_{21} & \phi_{22}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}e_1\\ e_2\end{bmatrix}/T\\&=(1/T\lambda_2{}^2)(1,\quad -f)\left[2\begin{bmatrix}\mathrm{tr}(\Omega A_1)^2, & \mathrm{tr}\Omega A_1\Omega A_2\\ \mathrm{tr}\Omega A_2\Omega A_1, & \mathrm{tr}(\Omega A_2)^2\end{bmatrix}\right.\\&\quad\left.+4\begin{bmatrix}m'A_1A_1m, & m'A_2A_1m\\ m'A_1A_2m, & m'A_2A_2m\end{bmatrix}\right]\begin{bmatrix}1\\ -f\end{bmatrix}\\&=(2/T\lambda_2{}^2)(\mathrm{tr}(\Omega A_1)^2-2f\mathrm{tr}\Omega A_1\Omega A_2+f^2\mathrm{tr}(\Omega A_2)^2)\\&\quad+(4/T\lambda_2{}^2)(m'A_1\Omega A_1m-2fm'A_1\Omega A_2m+f^2m'A_2\Omega A_2m)\\&=(2/T\lambda_2{}^2)(\mathrm{tr}(\Omega A_1-f\Omega A_2)^2+2m'(A_1-fA_2)\Omega(A_1-fA_2)m).\end{aligned}$$

次に α_1 を計算する．

$$\begin{aligned}\alpha_1&=\phi_{jkm}e_je_ke_m/T^{3/2}\\&=(1/T^{3/2})(\phi_{111}e_1e_1e_1+\phi_{112}e_1e_1e_2+\phi_{122}e_1e_2e_2+\phi_{222}e_2e_2e_2\\&\quad+\phi_{121}e_1e_2e_1+\phi_{212}e_2e_1e_2+\phi_{211}e_2e_1e_1+\phi_{221}e_2e_2e_1)\\&=(1/T^{3/2}\lambda_2{}^3)\{8\mathrm{tr}(\Omega A_1)^3+24m'(A_1\Omega A_1\Omega A_1)m\\&\quad-8f\mathrm{tr}\Omega A_2\Omega A_1\Omega A_1-8fm'(A_2\Omega A_1\Omega A_1+A_1\Omega A_2\Omega A_1\\&\quad+A_1\Omega A_1\Omega A_2)m+8f^2\mathrm{tr}\Omega A_1\Omega A_2\Omega A_2+8f^2m'(A_1\Omega A_2\Omega A_2\\&\quad+A_2\Omega A_1\Omega A_2+A_2\Omega A_2\Omega A_1)m-8f^3\mathrm{tr}(\Omega A_2)^3\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&-24f^3m'(A_2\Omega A_2\Omega A_2)m-8f\mathrm{tr}\Omega A_1\Omega A_2\Omega A_1\\
&-8fm'(A_1\Omega A_1\Omega A_2+A_1\Omega A_2\Omega A_1+A_2\Omega A_1\Omega A_1)m\\
&+8f^2\mathrm{tr}\Omega A_2\Omega A_1\Omega A_2+8f^2m'(A_2\Omega A_2\Omega A_1+A_2\Omega A_1\Omega A_2\\
&+A_1\Omega A_2\Omega A_2)m-8f\mathrm{tr}\Omega A_1\Omega A_2\Omega A_1-8fm'(A_1\Omega A_1\Omega A_2\\
&+A_1\Omega A_2\Omega A_1+A_2\Omega A_1\Omega A_1)m+8f^2\mathrm{tr}\Omega A_1\Omega A_2\Omega A_2\\
&-8f^2m'(A_1\Omega A_2\Omega A_2+A_2\Omega A_1\Omega A_2+A_2\Omega A_2\Omega A_1)m\}\\
=&(1/T^{3/2}\lambda_3^3)\{8\mathrm{tr}(\Omega A_1-f\Omega A_2)^3\\
&+24m'(A_1-fA_2)\Omega(A_1-fA_2)\Omega(A_1-fA_2)m\}.
\end{aligned}
$$

他の係数も同様の計算によって得られる．ここで，補題1と補論(A)の結果を用いて，各係数の大きさを評価すると α_3, α_4, α_6, α_7, α_8, α_9, ω^2, λ_i は $O(1)$, α_1, α_5, α_{10} は $O(T^{-1/2})$, α_2 は $O(T^{-1})$である．以上の係数を第1章の(7)式に代入すれば，$\sqrt{T}e(q_1, q_2)$ の分布の漸近展開

$$
\begin{aligned}
&p\{\sqrt{T}(\hat{\alpha}-\alpha-d/T\lambda_2)<x\}\\
&=I\left(\frac{x}{\omega}\right)+i\left(\frac{x}{\omega}\right)\left\{c_0+c_1\left(\frac{x}{\omega}\right)+c_2\left(\frac{x}{\omega}\right)^2+c_3\left(\frac{x}{\omega}\right)^3\right.\\
&\left.+c_5\left(\frac{x}{\omega}\right)^5\right\}+O(T^{-3/2})
\end{aligned}
\tag{4}
$$

が得られる．ここに c_1, …, c_5 は第1章(7)式で定義された係数である．

4 結果の解釈

以上のようにエッジワース係数をともかく式の形に表わすことができはしたが，その結果はあまりに複雑である．そこから解釈を引き出すことは容易ではないが，全く不可能というわけでもない．モデルを単純化するなどして，いくつかの含意の要点を述べておこう．それらは前章で述べたことと一部重複するけれど，既知の結果に帰着させられることは，前節の結果の検証にもなるので重複をあえて避けないことにした．

まずモデル(2)式を ARMA(1, 1) に単純化してみよう．そうすると $E(y_t)=m_t=0$ となるから，キュムラントに含まれる2次形式の部分は0となる．さらに行列 A_1, A_2 は

$$\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 & & & & \\ 1 & 0 & 1 & & 0 & \\ & 1 & \ddots & \ddots & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & 0 & & \ddots & \ddots & 1 \\ & & & & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & 1 & & 0 & \\ & & \ddots & & \\ & 0 & & \ddots & \\ & & & & 1 \\ & & & & & 0 \end{pmatrix}$$

となり，エッジワース係数 ω^2 は

$$\omega^2=1-\alpha^2-4\alpha\delta+\frac{(7\alpha^2-3)\delta^2}{(1-\alpha^2)}+\frac{8\alpha\delta^3}{1-\alpha^2}+\frac{4\delta^4}{1-\alpha^2}$$

$$\delta=(1-\alpha^2)\gamma/(1+2\alpha\gamma+\gamma^2)$$

となる (Tanaka and Maekawa (1984))．またこの場合には，エッジワース係数から σ^2 が，後に見る理由により消えることも示される．

次にモデル ARMA(1, 1|β)，すなわち，$y_t=\alpha y_{t-1}+\beta+u_t+\gamma u_{t-1}$ と単純化してみよう．このとき $E(y_t)=\beta/(1-\alpha)$, $M=I-ll'/T$, $l'=(1, 1, \cdots, 1)$ となる．そうして $l'D_1M=0$ となることが容易に示されるので，再び2次形式の部分は消える（ただし A_1, A_2 の中に定数項の影響は残されることに注意）．また ω^2 は一般には

$$\omega^2=\frac{\sigma^4\mathrm{tr}(A)+\sigma^2m'Bm}{\sigma^4\mathrm{tr}(C)+\sigma^2m'Dm}$$

という形で表わされるが，上に述べたようにこの場合，2次形式 $m'\square m$ は0であるから $\omega^2=\mathrm{tr}(A)/\mathrm{tr}(C)$ となり σ^2 は約分されてしまい，係数の中に現われない．すなわち；

要点1：モデルが外生変数を含まないか，または定数項しか含まない場合にのみエッジワース係数は σ^2 に依存しない．一般に外生変数が含まれる場合は，σ^2 は分布のエッジワース展開に効果を持つ．

次に $\sqrt{T}e(q_1, q_2)$ の $O(T^{-1/2})$ までの分布を

$$P\left\{\sqrt{T}\left(\hat{\alpha}-\alpha-\frac{d}{T\lambda_2}\right)<x\right\}=P\{\sqrt{T}(\hat{\alpha}-\alpha)<z\}$$

$$=I\left(\frac{z-\theta}{\omega}\right)+i\left(\frac{z-\theta}{\omega}\right)\left\{c_0+c_2\left(\frac{z-\theta}{\omega}\right)^2\right\}+O\left(\frac{1}{T}\right)$$

と書きかえる．ここに $z=x+\dfrac{d}{\sqrt{T}\lambda_2}\equiv x+\theta$ である．ここで $\theta=\dfrac{d}{\sqrt{T}\lambda_2}$ であるから補題2より $\theta=O(\sqrt{T})$ である．このとき；

要点2：

$$z=0 \text{ のとき，} \quad P\{\sqrt{T}(\hat{\alpha}-\alpha)<0\}=I\left(\frac{-\theta}{\omega}\right)+O\left(\frac{1}{\sqrt{T}}\right)$$

であるから，$\hat{\alpha}$ は漸近的中央不偏ではない．したがって $\gamma\neq 0$ のとき $\gamma=0$ という誤った想定のもとに，$\hat{\alpha}$ の漸近的正規性にもとづいて統計的推論を行うと，重大な誤りを犯すことになる．また $\gamma=0$ のとき（すなわち攪乱項がホワイトノイズのとき）にのみ $\theta=0$ となり，$\hat{\alpha}$ は一致性，漸近的中央不偏性をもつ．

3節で得られた漸近分布を微分すれば密度関数の近似式として

$$f(z)=i(z)\{1-c_0z+c_1(1-z^2)+c_2(2z-z^3)+c_3(3z^2-z^4)$$
$$+c_5(5z^4-x^6)\}+O(T^{-1})$$

を得る．これにより漸近的偏りと平均2乗誤差を計算すれば，

$$E(\hat{\alpha}-\alpha)=\zeta-\frac{\alpha_4}{2T}+o(T^{-1}) \ : \zeta=\frac{d}{T\lambda_2} \tag{5}$$

$$E(\hat{\alpha}-\alpha)^2=2\zeta E(\hat{\alpha}-\alpha)-\zeta^2+\frac{\omega^2}{T}(1-2c_1-6c_3-30c_5)+o(T^{-1}) \tag{6}$$

を得る．したがって；

要点3：$\gamma\neq 0$ のとき $\zeta=O(1)$ であるから，γ は偏りと平均2乗誤差に無視しえない効果を持つ．

ここで ARMA(1, 1) の場合にもどれば，このとき

$$E(\hat{\alpha})\simeq\alpha+\delta-\frac{1}{2T}\left\{-4\alpha+\frac{4(3\alpha^2-1)}{1-\alpha^2}\delta+\frac{16\alpha}{1-\alpha^2}\delta^2+\frac{8}{1-\alpha^2}\delta^3\right\} \tag{7}$$

$$E(\hat{\alpha}-\alpha)^2\simeq\delta^2-\frac{1}{T}\left\{-4\alpha\delta+\frac{4(3\alpha^2-1)}{1-\alpha^2}\delta^2+\frac{16\alpha}{1-\alpha^2}\delta^3+\frac{8}{1-\alpha^2}\delta^4\right\} \tag{8}$$

となる (Tanaka and Maekawa (1984))．これらの式から；

要点4：偏りと平均2乗誤差は γ の複雑な非線型な関数であるので γ

の増加に比例して偏りと平均2乗誤差が増加するわけのものではない．またこれらの式は $\gamma=0$ のとき $\hat{\alpha}$ は不偏性，一致性をもつというよく知られた結果を包含している．

次に(5)式に ζ と α_4 の定義を代入することによって $E(\hat{\alpha})$ を書きかえてみよう．2節に示されたように $\lambda_1-\alpha\lambda_2=\frac{d}{T}$ であるから，$\alpha+\zeta=\lambda_1/\lambda_2$ である．またキュムラントの計算結果より，$\mathrm{Cov}(y_*'A_iy_*,\ y_*'A_jy_*)=\mathrm{Cov}(\sqrt{T}\,\bar{q}_i,\ \sqrt{T}\,\bar{q}_j)=2\,\mathrm{tr}\,\Omega A_i\Omega A_j+4m'A_i\Omega A_jm$ である．さらに，α_4 の定義から

$$-\frac{\alpha_4}{T}=-\frac{\lambda_1}{T\lambda_2}\left[\frac{2}{\lambda_1\lambda_2}\ \{\mathrm{tr}\Omega A_1\Omega A_2+2m'A_1\Omega A_2m\}\right.$$
$$\left.-\lambda_2^{-2}\{(\mathrm{tr}\Omega A_2)^2+2m'A_2\Omega A_2m\}\right].$$

これらの関係を用いれば $E(\hat{\alpha})$ の $O(T^{-1})$ までの近似式は

$$E(\hat{\alpha})=E\left[\frac{(y_*'A_1y_*)}{(y_*'A_2y_*)}\right]=\frac{\lambda_1}{\lambda_2}-\frac{\alpha_4}{2T}$$
$$=\frac{E(y_*'A_1y_*)}{E(y_*'A_2y_*)}\left[1-\frac{\mathrm{Cov}(y_*'A_1y_*,\ y_*'A_2y_*)}{E(y_*'A_1y_*)E(y_*'A_2y_*)}\right.$$
$$\left.+\frac{\mathrm{Var}[(y_*'A_2y_*)^2]}{[E(y_*'A_2y_*)]^2}\right]+O(T^{-2})$$
$$=\frac{\mathrm{tr}\,\Omega A_1}{\mathrm{tr}\,\Omega A_2}\left[1-\frac{2\,\mathrm{tr}\,\Omega A_1\Omega A_2}{T\,\mathrm{tr}\,\Omega A_2\,\mathrm{tr}\,\Omega A_1}+\frac{\mathrm{tr}(\Omega A_2)^2}{T[\mathrm{tr}\,\Omega A_2]^2}\right]+O(T^{-2}) \quad (9)$$

で与えられることが容易に導かれる．同様の計算を行なえば $\mathrm{Var}(\hat{\alpha})$ は

$$\mathrm{Var}(\hat{\alpha})=\left[\frac{E(y_*'A_1y_*)}{E(y_*'A_2y_*)}\right]^2$$
$$\times\left\{\frac{\mathrm{Var}[(y_*'A_1y_*)^2]}{E^2(y_*'A_1y_*)}+\frac{\mathrm{Var}[(y_*'A_2y_*)^2]}{E^2(y_*'A_2y_*)}\right.$$
$$\left.-\frac{2\mathrm{Cov}(y_*'A_1y_*,\ y_*'A_2y_*)}{E(y_*'A_1y_*)E(y_*'A_2y_*)}\right]$$
$$\left.-\left[\frac{\mathrm{Cov}(y_*'A_1y_*,\ y_*'A_2y_*)}{E(y_*'A_1y_*)E(y_*'A_2y_*)}-\frac{\mathrm{Var}[(y_*'A_2y_*)^2]}{E^2(y_*'A_2y_*)}\right]^2\right\}$$
$$+O(T^{-2}) \quad (10)$$

となる．

上に得られた近似公式(9)は，Kendall (1954) のそれと，また，(10)は

De Gooijer (1980) のそれと，それぞれ同等のものである．これらの近似の精度は，極めて良いことが示されている (Sawa (1978), De Gooijer (1980))．以上要約すれば；

要点5：エッジワース展開によって得られた近似式(9)と(10)は，それぞれ Kendall (1954) と De Gooijer (1980) の近似公式に帰着させられる．

真のモデルが AR(1|β) の場合，Kendall の近似は $E(\hat{\alpha})=-(3\alpha+1)/T$ となることが知られている．これは前節で留数計算によって求めた結果とも一致している．他方 Sawa (1978) はこの $E(\hat{\alpha})$ を精密に計算しているので，その結果と上の近似式による結果との比較を行なってみた．その結果は次の表1に示されている．

表 1

$y_t=\beta+\alpha y_{t-1}+u_t,\ u_t\sim iidN(0,\ \sigma^2)$ における $\hat{\alpha}_{LS}$ の偏より，

T		$\alpha=0.4$	$\alpha=0.8$
10	(a)	−.2199	−.3592
	(b)	−.22	−.34
	(c)	−.2092	−.342
20	(a)	−.1113	−.1868
	(b)	−.11	−.17
	(c)	−.107	−.1786
30	(a)	−.0741	−.1238
	(b)	−.0733	−.1133
	(c)	−.0724	−.1195

T は標本サイズ，(a)は(9)式による近似，(b)は Kendall の近似：$-(3\alpha+1)/T$，(c)は Sawa (1974) の精密な偏り．

最後に AR(1, 1|β) に対する $p(\hat{\alpha}<x)$ の $O(T^{-1})$ までの漸近展開の数値計算結果のグラフを下に示す．これに対応するグラフは前章ですでに示されているが，ここでは精密分布を Imhof (1961) の方法によって計算したので参考までにそのグラフを図1に示しておこう．

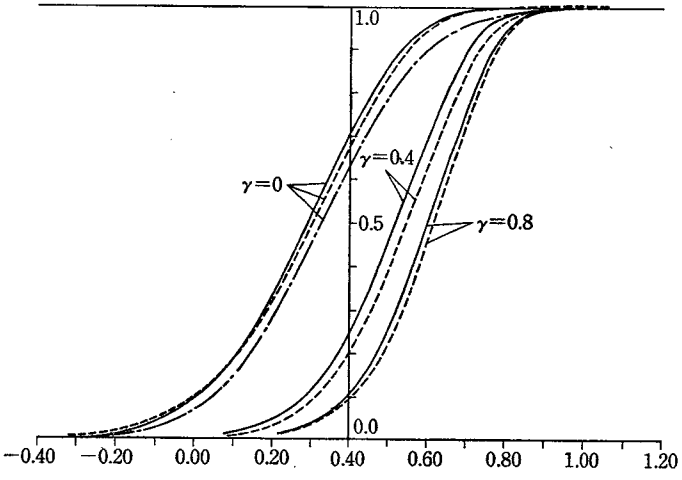

図　1

-----; (4)式による近似,　——; Imhof の方法による精密分布

—·—; 正規近似

Imhof の方法の計算プログラムは，Koerts and Abrahamse (1969) に示されているものを使用した．この方法の他の応用例として，Maekawa (1983b) の $x_t=\sin t$ とした AR(1|x) モデルにおける $\hat{\alpha}_{LS}$ の分布の計算を下に掲げておく．これらの経験において，Imhof の方法は非常にコンピュータの使用時間を，従って費用を要する方法であった．

表2と表3には，エッジワース近似式(4)を $O(T^{-1/2})$ までと $O(T^{-1})$ まで評価した値が示されている．また正規近似の欄には，エッジワース近似の第1項，すなわち標準正規分布の値が，精密分布の欄には Imhof の方法による精密分布の計算値が示されている．これらの表の中から，最も近似精度が高い場合が図2に，最も低い場合が図3に示されている．

表2　$\sqrt{T}e(q_1, q_2)$ の分布　　$\alpha=0.4,\ X_t=\sin(t)$

$\frac{X}{\omega}$	正規近似	$T=21$ エッジワース近似 $1/\sqrt{T}$	$T=21$ エッジワース近似 $1/T$	$T=21$ 精密分布	$T=61$ エッジワース近似 $1/\sqrt{T}$	$T=61$ エッジワース近似 $1/T$	$T=61$ 精密分布
−3.0	.0014	.0039	.0057	.0056	.0028	.0035	.0037
−2.8	.0026	.0060	.0088	.0087	.0050	.0057	.0061
−2.6	.0047	.0108	.0134	.0133	.0083	.0092	.0097
−2.4	.0082	.0169	.0199	.0199	.0134	.0144	.0151
−2.2	.0139	.0259	.0289	.0293	.0210	.0220	.0231
−2.0	.0228	.0383	.0413	.0422	.0320	.0330	.0345
−1.8	.0359	.0552	.0580	.0599	.0474	.0482	.0505
−1.6	.0548	.0776	.0799	.0832	.0683	.0690	.0722
−1.4	.0808	.1063	.1083	.1135	.0959	.0964	.1009
−1.2	.1151	.1423	.1440	.1516	.1312	.1316	.1375
−1.0	.1587	.1864	.1878	.1984	.1752	.1754	.1830
−0.8	.2119	.2390	.2403	.2542	.2280	.2282	.2376
−0.6	.2743	.3001	.3011	.3186	.2897	.2898	.3010
−0.4	.3446	.3689	.3696	.3906	.3591	.3592	.3721
−0.2	.4207	.4438	.4442	.4682	.4345	.4346	.4488
0.0	.5000	.5226	.5226	.5489	.5135	.5135	.5286
0.2	.5793	.6023	.6019	.6294	.5931	.5930	.6083
0.4	.6554	.6797	.6790	.7062	.6699	.6698	.6847
0.6	.7258	.7516	.7506	.7764	.7412	.7410	.7548
0.8	.7881	.8153	.8141	.8372	.8043	.8041	.8164
1.0	.8413	.8691	.8677	.8873	.8578	.8576	.8680
1.2	.8850	.9122	.9105	.9262	.9011	.9008	.9091
1.4	.9193	.9448	.9428	.9545	.9344	.9339	.9403
1.6	.9452	.9680	.9656	.9738	.9587	.9580	.9627
1.8	.9641	.9834	.9806	.9860	.9755	.9747	.9779
2.0	.9773	.9928	.9898	.9931	.9865	.9855	.9876
2.2	.9861	.9981	.9950	.9968	.9932	.9922	.9935
2.4	.9918	1.0006	.9974	.9987	.9970	.9960	.9968
2.6	.9953	1.0014	.9988	.9995	.9990	.9981	.9985
2.8	.9974	1.0015	.9993	.9998	.9998	.9991	.9994
3.0	.9987	1.0012	.9995	.9999	1.0002	.9996	.9997

表3　$\sqrt{T}e(q_1, q_2)$ の分布　　$\alpha=0.8,\ X_t=\sin(t)$

$\frac{X}{\omega}$	正規近似	$T=21$ エッジワース近似 $1/\sqrt{T}$	$T=21$ エッジワース近似 $1/T$	$T=21$ 精密分布	$T=61$ エッジワース近似 $1/\sqrt{T}$	$T=61$ エッジワース近似 $1/T$	$T=61$ 精密分布
−3.0	.0014	.0101	.0272	.0250	.0067	.0127	.0124
−2.8	.0026	.0163	.0371	.0327	.0110	.0182	.0175
−2.6	.0047	.0253	.0488	.0426	.0174	.0253	.0244
−2.4	.0082	.0378	.0621	.0551	.0264	.0344	.0337
−2.2	.0139	.0544	.0770	.0706	.0388	.0459	.0460
−2.0	.0228	.0753	.0939	.0900	.0552	.0605	.0620
−1.8	.0359	.1009	.1135	.1136	.0761	.0790	.0825
−1.6	.0548	.1311	.1371	.1424	.1022	.1024	.1083
−1.4	.0808	.1659	.1660	.1768	.1338	.1318	.1404
−1.2	.1151	.2055	.2014	.2175	.1716	.1683	.1795
−1.0	.1587	.2502	.2444	.2652	.2162	.2125	.2261
−0.8	.2119	.3007	.2953	.3199	.2682	.2649	.2807
−0.6	.2743	.3579	.3540	.3819	.3377	.3253	.3430
−0.4	.3446	.4224	.4202	.4506	.3947	.3933	.4125
−0.2	.4207	.4941	.4932	.5253	.4683	.4677	.4878
0.0	.5000	.5716	.5716	.6041	.5466	.5466	.5669
0.2	.5793	.6526	.6535	.6846	.6268	.6275	.6471
0.4	.6554	.7333	.7355	.7634	.7056	.7070	.7249
0.6	.7258	.8094	.8133	.8360	.7792	.7816	.7970
0.8	.7881	.8770	.8824	.8976	.8444	.8478	.8599
1.0	.8413	.9328	.9386	.9439	.8989	.9027	.9110
1.2	.8850	.9753	.9794	.9732	.9415	.9448	.9491
1.4	.9193	1.0044	1.0044	.9882	.9723	.9742	.9745
1.6	.9452	1.0215	1.0155	.9948	.9926	.9923	.9892
1.8	.9641	1.0291	1.0164	.9977	1.0043	1.0014	.9923
2.0	.9773	1.0298	1.0113	.9990	1.0097	1.0045	.9990
2.2	.9861	1.0266	1.0039	.9995	1.0110	1.0040	.9998
2.4	.9918	1.0214	.9971	.9998	1.0101	1.0021	.9999
2.6	.9953	1.0160	.9925	.9999	1.0081	1.0001	.9999
2.8	.9974	1.0112	.9903	.9999	1.0059	.9987	1.0000
3.0	.9987	1.0074	.9903	.9999	1.0040	.9980	1.0000

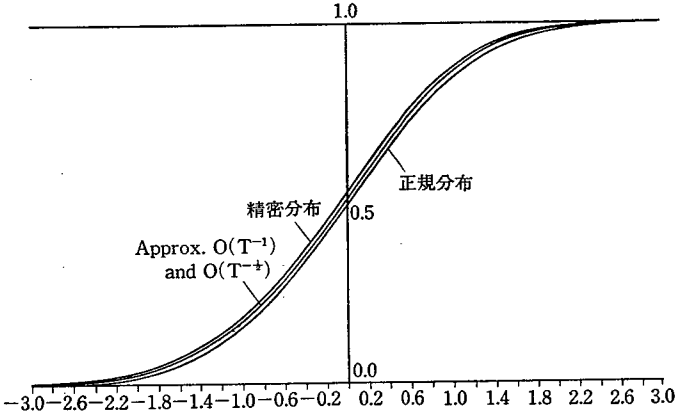

図2　$\alpha=0.4,\ T=61,\ x_t=\sin(t)$

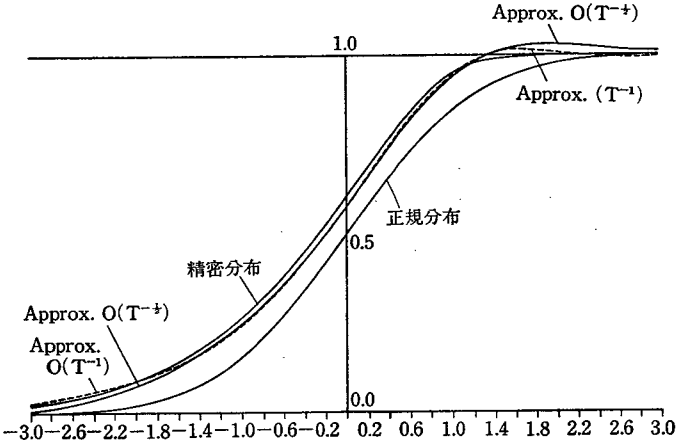

図3　$\alpha=0.8,\ T=21,\ x_t=\sin(t)$

5　む　す　び

先に述べたように，ここで扱われた最小2乗推定量 $\hat{\alpha}$ は，2次形式の比の形をとるので，以上の議論はただちに他の2次形式の比の分布の漸近展開や，モーメントの近似に応用することができる．たとえば ARMA (p, q) 過程からの実現値 $\{y_t : t=1, \cdots, T\}$ が与えられたときの標本自己相関係数は，

$$r_k=\frac{\frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T-k}(y_t-\bar{y})(y_{t+k}-\bar{y})}{\frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T}(y_t-\bar{y})^2},\quad \left(\bar{y}=\frac{1}{T}\sum y_t\right)$$

$$=\frac{y_*'A_1{}^*y_*}{y_*'A_2{}^*y_*}$$

で与えられる．ここに

$$A_1{}^*=\left(I-\frac{1}{T}ll'\right)Q_k\left(I-\frac{1}{T}ll'\right),\quad A_2{}^*=\left(I-\frac{1}{T}ll'\right)\left(I-\frac{1}{T}ll'\right)$$

$$l'=(1,\ 1,\ \cdots,\ 1)$$

$$Q_k=\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & & & 1 & \ddots & & \vdots \\ 0 & & \ddots & & & \ddots & & \vdots \\ 1 & & & \ddots & & & \ddots & \vdots \\ 0 & 1 & & & \ddots & & 1 & 0 \\ \vdots & & \ddots & & & \ddots & & 1 \\ \vdots & & & \ddots & & & \ddots & 0 \\ \vdots & & & & 1 & & & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

（k 個）

である．この r_k の分布やモーメントの漸近展開は，本章での議論において A_i を $A_i{}^*$ に，Ω を Ω^* に符号の変換を行うことにより求めることが可能である．ここに Ω^* は y_t の分散共分散行列である．ARMA 過程の次数 p, q の値が大きいときは，エッジワース係数を明示的に求めることは，非常に困難になるが，その場合にも数値計算による分析は可能である．

また検定統計量の中には，2次形式の比として表わされるものが多い（たとえばダービン＝ワトソン検定量）ので，本章の結果はそれらの分布の分析にも有効であるかもしれない．これらの応用については，他の機会に譲りたい．

補論(A)　補題１の証明

２節で定義された記号 $\underset{\sim}{O}_T(T^{-1})$ を用いれば，次の関係式が成立する．

補題A1.

(A.1)　$\Omega \underset{\sim}{O}_T(T^{-1}) = \underset{\sim}{O}_T(T^{-1})$

(A.2)　$\Omega \underset{\sim}{O}_T(1) = \underset{\sim}{O}_T(1)$

(A.3)　$\Omega^r = \underset{\sim}{O}(1)$

(A.4)　$m' \underset{\sim}{O}_T(T^{-1}) m = O(T)$

証明．いずれの関係も，直接計算によって検証することができる．たとえば(A.1)は，次のように証明される．k/T を $\underset{\sim}{O}_T(T^{-1})$ の最大の要素とする．また行列間の大小関係 $A \leqq B$ は，２つの行列の全ての (i, j) 要素に対して $a_{ij} \leqq b_{ij}$ が成立することを意味する．このとき，

$$\Omega \underset{\sim}{O}_T(T^{-1}) \leqq \frac{k}{T} \begin{pmatrix} \omega_0 & \omega_1 & \cdots & \omega_{T-1} \\ \omega_1 & \omega_0 & \cdots & \omega_{T-2} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ & & \omega_0 & \omega_1 \\ \omega_{T-1} & \omega_{T-2} & \cdots \omega_1 & \omega_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & & 1 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{k}{T}[b_{ij}]$$

と書くことができる．ここに b_{ij} は

$$b_{ij} = \omega_{i-1} + \omega_{i-2} + \cdots + \omega_1 + \omega_0 + \omega_1 + \cdots + \omega_{T-i} < 2 \sum_{k=0}^{r} \omega_k$$

$$= 2\omega_0 + 2\omega_1(1 + \alpha + \alpha^2 + \cdots + \alpha^{r-2}),\ r = \max[i-1,\ T-i]$$

である．ゆえに

$$\lim_{T \to \infty} b_{ij} < 2\omega_0 + 2\omega_1 \left(\frac{1}{1-\alpha} \right)$$

となるから，$\frac{k}{T} b_{ij} = O(T^{-1})$ を得る．

(A.2)～(A.3)の証明も同様である．また(A.4)においては，

$$m_t=E(y_t)=\beta_1\sum_{i=0}^{\infty}\alpha^i x_{1t-i}+\beta_2\sum_{i=0}^{\infty}\alpha^i x_{2t-i}+\cdots+\beta_k\sum_{i=0}^{\infty}\alpha^i x_{kt-i}$$

かつ $|\alpha|<1$, $x_{j,t}<\infty$（仮定(i)）であるから，$m_t=O(1)$ であることに注意すれば，容易に証明される．

補題A2. $q_i'=y_*'A_iy_*$, $(i=1, 2)$ とおき，q_i' のキュムラントを ϕ_{ij}', ϕ_{ijk}', ϕ_{ijkl}' とすれば，これらのキュムラントの大きさは $O(T)$ である．

証明．ϕ_{1212}' を例にとって証明する．3節で求められた $\bar{q}_i$ のキュムラント ϕ_{1212} を用いれば，$\phi_{1212}=\dfrac{1}{T\sqrt{T}}\phi_{1212}'$ であるから ϕ_{1212}' は $\mathrm{tr}\Omega A_2\Omega A_1\Omega A_2\Omega A_1$ というタイプのトレース（t_{2121} で表わそう）と $m'A_2\Omega A_1\Omega A_2\Omega A_1m$ というタイプの2次形式（q_{2121} で表わそう）の和である．

さて(2)式，A_i の定義式，および(A.1)を ΩA_1 と ΩA_2 に代入すると次の関係を得る．

$$\text{(A.6)}\qquad \Omega A_1=\frac{1}{2}\Omega C_1+\underset{\sim}{O}_T(T^{-1})$$

$$\text{(A.7)}\qquad \Omega A_2=\Omega C_2+\underset{\sim}{O}_T(T^{-1}).$$

ここに

$$C_1=\begin{pmatrix} 0 & 1 & & & 0 \\ 1 & 0 & \ddots & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 0 & 1 \\ 0 & & & 1 & 0 \end{pmatrix},\quad C_2=\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & & 1 & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

である．(A.6)と(A.7)を t_{2121} に代入すれば，

$$\begin{aligned}\text{(A.8)}\qquad t_{2121}&=\mathrm{tr}\,\Omega A_2\Omega A_1\Omega A_2\Omega A_1\\ &=\frac{1}{4}\mathrm{tr}\{\Omega C_2\Omega C_1\Omega C_2\Omega C_1+\underset{\sim}{O}_T(T^{-1})\}\\ &\leq\frac{1}{4}\mathrm{tr}(\Omega^2C_1\Omega^2C_1)+O(1)\\ &=\frac{1}{4}\mathrm{tr}\,\underset{\sim}{O}_T(1)+O(1)=O(T)\end{aligned}$$

となる．他方 $z_1'=m'A_2\Omega A_1$, $w_1=A_2\Omega A_1m$ とおけば，$q_{2121}{}^2$ の上限は

$$q_{2121}{}^2=(m'A_2\Omega A_1\Omega A_2\Omega A_1m)^2$$

$$=(z_1'\Omega w_1)^2$$
$$\leq(z_1'\Omega z_1)(w_1'\Omega w_1)$$
$$\leq\lambda_0^2(z_1'z_1)(w_1'w_1)$$

によって与えられる．ここに λ_0 は，Toeplitz 行列 Ω の最大の固有値（$|\lambda_0|\leq 1$）である．上の式において第１の不等式はコーシー・シュワルツの不等式，第２のそれは，よく知られた２次形式の上限を与える不等式である．さらに $w_1'w_1$ の大きさは

$$\text{(A.9)}\quad w_1'w_1=m'A_1\Omega^2A_1m\leq\lambda_0^2m'A_1A_1m$$
$$=\frac{\lambda_0^2}{4}m'(D_1'MD_2+D_2'MD_1)^2m$$
$$=\frac{\lambda_0^2}{4}m'(D_1'D_2D_1'D_2+D_1'D_1+D_2'D_2$$
$$+D_2'D_1D_2'D_1)m+m'\underset{\sim}{O}_T(T^{-1})m$$
$$=O(T)$$

と評価される．同様に

$$\text{(A.10)}\quad z_1'z_1=\frac{1}{4}m'C_1\Omega^2C_1m+m'\underset{\sim}{O}_T(T^{-1})m$$
$$\leq\frac{\lambda_0^2}{4}m'C_1C_1m+m'\underset{\sim}{O}_T(T^{-1})m=O(T)$$

となる．(A.9)と(A.10)から結局

$$\text{(A.11)}\quad \phi_{2121}=t_{2121}+q_{2121}=O(T)$$

を得る．他の場合も同様に証明される．

ここで定義より $\bar{q}_i=\sqrt{T}q_i=\frac{1}{\sqrt{T}}(y_*'A_iy_*-\mu_i)=\frac{1}{\sqrt{T}}(q_i'-\mu_i)$ であることと補題 A2 を用いれば $\phi_{ij}=\frac{1}{T}\phi_{ij}'=O(1)$, $\phi_{ijk}=\frac{1}{T\sqrt{T}}\phi_{ijk}'=O\left(\frac{1}{\sqrt{T}}\right)$, $\phi_{ijkl}=\frac{1}{T^2}\phi_{ijkl}'=O\left(\frac{1}{T}\right)$ となる．よって補題１が証明された．

補論(B)　補題２の証明

d の定義式を変形すれば，

$$\text{(B.1)}\quad \frac{d}{T}=\frac{1}{T}E(y'_{-1}Mu)+\frac{\gamma}{T}E(y'_{-1}Mu_{-1})$$

$$=\frac{1}{T}E(y'_{-1}u)+\frac{1}{T}E\left(y'_{-1}\frac{C}{T}u\right)+\frac{\gamma}{T}E(y'_{-1}u_{-1})$$

$$+\frac{\gamma}{T}E\left(y'_{-1}\frac{C}{T}u_{-1}\right)$$

$$=\frac{1}{T}(d_1+d_2+d_3+d_4)$$

となる．ここに $d_1, \cdots, d_4$ は上の式の第2～3行の各項を表わしている．また行列 C は

$$\frac{C}{T}=\frac{1}{T}X\left(\frac{X'X}{T}\right)^{-1}X'$$

によって定義される．仮定(ii)より $\frac{X'X}{T}=\underset{\sim}{O}(1)$ であるから，C の要素 C_{ij} は $O(1)$ である．

さらに次の関係は明らかである．

(B.2) $d_1=E(y_{-1}u)=0,\ d_3=\gamma E(y_{-1}'u_{-1})=\sigma^2\gamma(T-1)$

(B.3) $E(y_tu_t)=\sigma^2,\ E(y_tu_{t-s})=\sigma^2(\alpha^s+\gamma\alpha^{s-1}),\ E(y_tu_{t+s})=0.$

また d_2 は，次のように評価される．

$$d_2=E\left(\frac{y'_{-1}Cu}{T}\right)$$

$$=\frac{1}{T}E\left\{(y_1, y_2, \cdots, y_{T-1})\begin{bmatrix} C_{11}\,C_{12}\cdots\cdots\cdots C_{T-1,1} \\ C_{12}\,C_{22}\cdots\cdots\cdots C_{T-1,2} \\ \vdots \qquad\qquad \vdots \\ C_{1,T-1}\,C_{2,T-1}\cdots C_{T-1,T-1}\end{bmatrix}\begin{pmatrix} u_2 \\ u_3 \\ \vdots \\ u_T\end{pmatrix}\right\}$$

$$=\frac{1}{T}E[(y_1C_{11}+y_2C_{12}+\cdots+y_{T-1}C_{1,T-1})u_2+(y_1C_{21}+y_2C_{22}+\cdots$$

$$+y_TC_{2,T-1})u_3+\cdots+(y_1C_{T-1,1}+y_2C_{T-1,2}+\cdots y_{T-1}C_{T-1,T-1})u_T]$$

$$=\frac{\sigma^2}{T}E\{[C_{12}+\sum_{i=3}^{T-1}C_{1i}(\alpha^{i-2}+\alpha^{i-3}\gamma)]$$

$$+[C_{23}+\sum_{i=4}^{T-1}C_{2i}(\alpha^{i-3}+\alpha^{i-4}\gamma)]+\cdots+C_{T-2,T-1}\}$$

$$=\frac{\sigma^2}{T}(a_1+a_2+\cdots+a_{T-1}).$$

ここに $a_k=C_{k,k+1}+\sum_{i=k+1}^{T-1}C_{ki}(\alpha^{i-k-1}+\alpha^{i-k-2}\gamma)$, $(k=1, \cdots, T-2)$ および

$a_{T-1}=0$ である．そして，$|\alpha|$, $|\gamma|<1$, $C_{ij}=O(1)$ であるから a_k は有界である．ここで $\bar{a}=\max(|a_k|,\ k=1,\ \cdots,\ T-1)$ とおけば，

$$\text{(B.4)}\quad d_2=\frac{1}{T}E(y_{-1}'Cu)\leq\frac{1}{T}(T-1)\bar{a}$$

を得る．同様に

$$\text{(B.5)}\quad d_4=\frac{1}{T}E(y_{-1}'Cu_{-1})\leq\bar{b}$$

となる．ここに $\bar{b}$ は有界な定数である．

以上の d_i の評価を総合すれば

$$\lim_{T\to\infty}\frac{d}{T}=\lim_{T\to\infty}\left(\frac{d_1}{T}+\frac{d_2}{T}+\frac{d_3}{T}+\frac{d_4}{T}\right)$$

$$=\lim_{T\to\infty}\left(\frac{0}{T}+\frac{d_2}{T}+\frac{(T-1)\sigma^2\gamma}{T}+\frac{d_4}{T}\right)=\sigma^2\gamma$$

となる．この結果と $\lambda_2=O(1)$ より $\zeta=\dfrac{d}{T\lambda_2}=O(1)$ を得る．

参 考 文 献

Anderson, T. W., (1958), An introduction to multivariate statistical analysis, Wiley, New York.

Anderson, T. W., (1971), The statistical analysis of time series, Wiley, New York.

Anderson, T. W., (1980), Some recent developments on the distributions of single-equations estimators, Advances in Econometrics, Cambrige Unive. Press.

Akahira, M. and Takeuchi, K., (1981), Asymptotic efficiency of statistical estimators; Concepts and higher order asymptotic efficiency. Springer Lecture notes in statistics, No. 7. Springer-Verlag, New York.

Akahira, M., (1981), On asymptotic deficiency of estimators, Australian Journal of statistics, 23, 67-72.

Akahira, M., (1982), On asymptotic deficiency of estimators in multiparameter exponential family case, mimeographed, Stanford University.

Baillie, R. T., (1979), The asymptotic mean squared error of multistep prediction from the regression model with autoregressive errors, Jour. Amer. Statist. Assoc., 74, 175-184.

Baillie, R. T., (1980), Predictions from ARMAX models, Journal of Econometrics, 12, 365-374.

Bhattacharya, R. N. and Ghosh, J. K., (1978), On the validity of the formal Edgeworth expansion, Ann. statist., 6, 434-451.

Boot, J. C. G. and de Witt. G. M., (1960), Investment demand: An empirical contribution to the aggregation problem, International Economic Review, 1, 3-30.

Box, G. E. P., and Jenkins, G. M., (1970), Time series analysis: Forecasting and control, Halden-Day, San Francisco.

Chambers, J. M., (1967), On methods of asymptotic approximation for multivariate distributions, Biometrika, 54, 367-383.

Conniffe, D., (1982), A note on seemingly unrelated regressions, Econometrica, 50, 229-232.

De Gooijer, J. D., (1980), Exact moments of the sample autocorrelations from series generated by general ARIMA processes of order (p, d, q), $d=0$ or 1, Journal of Econometrics, 14, 365-379.

Dufour, J. M., (1984) Unbiasedness of predictions from estimated autoregressions when the true order is unknown, Econometrica, 52, 209-215.

Durbin, J., (1980), Approximations for densities of sufficient estimates, Biometrika, 67, 311–333.

Feller, W., (1966), An introduction to probability and its applications, Wiley, New York.

Fujikoshi, Y., Morimune, K., Kunitomo, N., and Taniguchi, M., (1982), Asymptotic expansions of the distributions of estimates of coefficients in a simultaneous equation system, Journal of Econometrics, 18, 191–205.

Fujikoshi, Y., and Ochi, Y., (1984), Asymptotic properties of the maximum likelihood estimator in the first order autoregressive process, Ann. Inst. Statist. Math., 36, A, 119–128.

Fujikoshi, Y., (1984b), Error bounds for asymptotic approximations to the distribution function on an estimate in a multivariate linear model, Technical Report No 106, Statistical Research Group, Hiroshima University.

Fuller, W. A. and Hasza, D. P., (1981), Properties of predictors for autoregressive time series, Jour. Amer. Statist. Assoc., 76, 155–161.

Grenander, U., (1954), On the estimation of regression coefficients in the case of an autocorrelated disturbance. Ann. Math. Statist., 25, 252–272.

Hannan, E. J., (1970), Multiple time series, Wily, New York.

Hatanaka, M., (1974), An efficient two-step estimator for the dynamic adjustment model with autoregressive erros, Journal of Econometrics, 2, 199–220.

Hatanaka, M.,(1983), Confidence judgment of the extrapolation from a dynamic money demand function, Journal of Economic Dynamics and Control, 6, 55–78.

Hayakawa, T., (1977), The likelihood ratio and the asymptotic expansion of its distribution, Ann. Inst. Statist. Math., 29 359–378.

Hillier, G. H., and Satchell, S. E., (1984), Exact results for Telser's single equation estimator in the seemingly unrelated regression model, mimeographed.

Imhof, J. P., (1961), Computing the distribution of quadratic forms in normal variables, Biometrika, 48, 419–426.

Kariya, T., (1980), Bounds for the covariance matrices of Zellner's estimator in the SUR model and a 2SAE in a heteroscedastic model, Jour. Amer. Statist. Assoc., 76, 975–979.

Kariya, T. and Maekawa, K., (1982), A method for approximations to the pdf's of GLSE's and its application to the seemingly unrelated regression model. Ann. Inst. Statist. Math., 34, No. 2, A.

Kariya, T. and Toyooka, Y., (1982), The lower bound for the covariance matrix of a GLSE and its application to regression with serial correlation,

mimeograhed.

Kendall, M. G., (1954), Note on bias in estimation of autocorrelation, Biometrika 43, 403-404.

Kobayashi, M., (1983), A comparison of efficiencies of several estimation methods for linear regression models with autocorrelated errors, mimeographed, Tokyo University.

Koerts, J., and Abrahamse, A. P. J., (1969), On the theory and application of the generel linear model, Rotterdam University Press.

Kunitomo, N., (1977), A note on the efficiency of Zellner's estimator for the case of two seemingly unrelated regression equations. Econ. Studies Quarterly, 28, 73-77.

Maekawa, K., (1980), An asymptotic expansion of the test statistics for linear restrictions in Zellner's USR model, 広島大学経済論叢, 第4巻, 第2号.

Maekawa, K., (1982), Relations among several asymptotic expansions in seemingly unrelated regression model, 広島大学経済論叢, 第5巻, 第4号.

Maekawa, K., (1983a), Effects of nonorthogonal regressors on the distribution of seemingly unrelated regression estimator, Journal of Japan Statistical Society, 13, No. 2, 145-149.

Maekawa, K., (1983b), An approximation to the distribution of the least squares estimator in an autoregressive model with exogenous variables, Econometrica, 51, No. 1, 229-238.

Maekawa, K., (1983c), Edgeworth expansion of the least squares estimator in ARMA(1, 1) model with exogenous variables, 広島大学経済論叢, 第7巻, 第1号.

前川功一 (1983 d), SUR モデルにおける2段階推定量と最尤推定量の3次漸近有効性, 広島大学経済論叢, 第7巻, 第1号.

Maekawa, K., (1984a), Edgeworth expansion for OLS estimator in an ARMAX model, Technical Report No. 122, Statistical Research Group, Hiroshima University.

Maekawa, K., (1984b), Finite Sample properties of simplified Telser estimator in SUR model, Technical Report No. 127, Statistical Research Group, Hiroshima University.

前川功一 (1984 c), 一般線型回帰モデルにおける2段階推定量と最尤推定量, 広島大学経済学部紀要, 年報経済学, 第5巻, 27-37.

Maekawa, K., (1985), Edgeworth expansion for the OLS estimator in a time series regression model, to appear in Econometric Theory Vol. 1, No. 2.

Magnus, J. R., (1978), Maximum Likelihood estimation of the GLS model with

unknow parameters in the disturbance covariance matrix, Journal of Econometrics, 7, 281-312.

Mariano R. S., (1982), Analytical small-sample distribution theory in econometrics: The simultaneous-equation case, International Economic Review, 23, 503-533.

Metha, J. S. and Swamy, P. A. V. B., (1976), Further evidence on the relative efficiencies of Zellner's seemingly unrelated regressions estimator. Jour. Amer. Statist, Assoc., 71, 634-638.

西尾　敦 (1981), 時系列モデルの推定量の比較, 数理科学, No. 219, 41-46.

Park, R. E. and Mitchell, B. M., (1980), Estimating the autocorrelated error model with trended data, Journal of Econometrics, 13, 185-201.

Phillips, P. C. B., (1977a), An approximation to the finite sample distribution of Zellner's seemingly unrelated regression estimator, Journal of Econometrics, 6, 147-164.

Phillips, P. C. B., (1977b), Approximations to some finite sample distributions associated with a first order stochastic difference equation, Econometrica 45, 463-485.

Phillips, P. C. B., (1977c), A general theorem in the theory of asymptotic expansions as approximations to the finite sample distributions of econometric estimators, Econometrica, 45, 1517-1534.

Phillips, P. C. B., (1978), Edgeworth and saddlepoint approximations in the first order noncircular autoregression, Biometrika, 65, 91-98.

Phillips, P. C. B., (1979), The sampling distribution of forecasts from a first order autoregression, Journal of Econometrics, 9, 241-261.

Phillips, P. C. B., (1980), Finite sample theory and the distributions of alternative estimators of marginal propensity to consume, Review of Economic Studies, XLVII, 183-224.

Phillips, P. C. B., (1984), The exact distribution of the SUR estimator, mimeographed, Yale University, to appear in Econometrica.

Reinsel, G., (1980), Asymptotic properties of prediction errors for the multivariate model using estimated parameters, The Journal of the Royal Statistical Society, B, 42, 328-333.

Rothenberg, T. J., (1984), Approximate normality of generalized least squares estimates, Econometrica, 52, 811-825.

Sargan, J. D., (1975), Gram-Charlier approximations applied to t-ratios of k-class estimators, Econometrica, 43, 327-346.

Sargan, J. D., (1976) Econometric estimators and Edgeworth expansions, Econometrica, 44, 421-448.

Sargan, J. D., and Tse, Y. K., (1979), Some experience of numerical computation of Edgeworth approximations, London School of Economics, Discussion paper A21.

Sargan, J. D., (1980), Some approximations to the distribution of economic criteria which are asymptotically distributed as Chi-Squared, Econometrica, 45, 1107–1138.

Sawa, T., (1978), The exact moments of the least squares estimator for the autoregressive model, Journal of Econometrics, 8, 159–172.

Satchell, S. E., (1983), Some properties of Telser's estimator for seemingly unrelated regression models, mimeographed, Essex University.

Srivastava, V. K., (1970), The efficiency of estimating seemingly unrelated regression equations, Ann. Inst. Statist. Math., 22, 483–493.

Srivastava, V. K. and Upadhyaya, S., (1978), Large-sample approximations in seemingly unrelated regression equations, Ann. Inst. Statist. Math., 30, Part A, 89–96.

竹内 啓 (1974), 統計的推定の漸近理論, 教育出版株式会社.

竹内 啓 (1981), 漸近的最良推定論の構造, 数理科学 No. 219, 5–16.

Takeuchi, K. and Morimune, K., (1982), Third-order efficiency of the extened maximum likelihood estimators in a simultaneous equation system, Discussion Paper No. 176, Institute of Economic Research, Kyoto University, and Econometrica, 53, (1985), 177–200.

Tanaka, K., (1983), Asymptotic expansions associated with the AR(1) model with unknonw mean, Econometrica, 51, 1221–1231.

Tanaka, K., (1984a), An asymptotic expansion associated with the maximum likelihood estimators in ARMA models, The Journal of the Royal Statistical Society, B., 46, No. 1, 58–67.

田中勝人 (1984 b), 時系列統計量の分布の漸近展開——数式処理言語 REDUCE を使って——1984年4月, 数学会予稿集.

Tanaka, K., and Maekawa, K., (1984), Bias and mean square error of the predictor for autoregressive time series under misspecifications, Journal of Econometrics, 25, 327–351.

Taniguchi, M., (1983a), Third order asymptotic properties of BLUE and LSE for a regression model with ARMA residual, Technical Report No. 100, Statistical Research Group, Hiroshima University.

Taniguchi, M., (1983b), On the second order asymptotic efficieney of estimators of Gaussian ARMA process, The Annals of Statistics, 11, 157–169.

Taniguchi, M., (1984a), Validity of Edgeworth expansions and its applications for

time series statistics, Journal of Time Series Analysis, 5, 37–51.

Taniguchi, M., (1984b), Third order asymptotic properties of maximum likelihood estimators for Gaussian ARMA processes, Technical Report No. 109, Statistical Research Group, Hiroshima University, to appear in Journal of Mutivariate Analysis.

Taniguchi, M., (1984c), Berry-Esseen theorems for quadratic forms of Gaussian stationary processes, Technical Report No. 135, Statistical Research Group, Hiroshima University.

Taylor, W. E., (1977), Small sample properties of a class of two stage Aitken estimators, Econometrica, 45, 497–508.

Taylor, W. E., (1978), The heteroscedastic linear model: Exact finite sample results, Econometrica, 46, 663–675.

Taylor, W. E., (1980), Small sample considerations in estimation from panel data, Journal of Econometrics, 13, 203–223.

Taylor, W. E., (1983), On the relevance of finite sample distribution theory, Econometric Reviews, 2(1), 1–39.

Telser, L. G., (1964), Iterative estimation of a set of linear regression equations, Jour. Amer. Statist. Assoc., 58, No. 307.

Theil, H., (1971), Principles of econometrics, North-Hollands, Amsterdam.

Toyooka, Y., (1982), Second-order risk comparison of SLSE with GLSE and MLE in a regression with serial correlation, mimeographed, Osaka University.

Tse, Y. E., (1982), Edgeworth approximations in first-order stochastic difference equations with exogenous variables, Journal of Econometrics, 20, 175–195.

山内二郎(編), (1972), 統計数値表, 日本規格協会.

Yamamoto, T., (1976), Asymptotic mean square prediction error for an autoregressive model with estimated coefficients, Applied statistics 25, 123–127.

Zellner, A., (1962), An efficient method of estimating seemingly unrelated regressions and tests for aggregation bias, Jour. Amer. Statist. Assoc., 57, 348–368.

Zellner, A., (1963), Estimators for seemingly unrelated regressions: some finite sample results, Jour. Amer. Statist. Assoc., 58, 977–992.

回帰分析の漸近理論

広島大学経済研究双書　4

昭和60年3月20日 印刷
昭和60年3月30日 発行　（非売品）
昭和60年5月30日 改訂

著者　前川功一

編集兼発行者　広島大学経済学部
広島市中区東千田町1丁目1番89号

印刷所　中本総合印刷株式会社
広島市南区大州5丁目1番1号