Osaka University Knowledge Archive

Title	道路橋の走行荷重による不規則振動と衝撃係数に関する研究
Author(s)	川谷, 充郎
Citation	大阪大学, 1988, 博士論文
Version Type	VoR
URL	https://hdl.handle.net/11094/358
rights	
Note	

Osaka University Knowledge Archive : OUKA

https://ir.library.osaka-u.ac.jp/

Osaka University

道路橋の走行荷重による不規則振動と衝撃係数に関する研究

昭和62年12月

川　谷　充　郎

道路橋の走行荷重による不規則振動と衝撃係数に関する研究

昭和62年12月

川谷充郎

目　　次

第１章　序　論　1

１．１　走行荷重による橋梁の動的応答　1

１．２　道路橋の衝撃係数　2

１．２．１　衝撃係数の変遷　2

１．２．２　諸外国の規定　5

１．３　道路橋の走行荷重下の動的応答解析法　6

１．３．１　荷重の確率特性を考慮した解析　6

１．３．２　不規則振動解析　7

１．４　本研究の目的と内容　11

参考文献（第１章）　13

第２章　道路橋の路面凹凸の評価　16

２．１　緒　言　16

２．２　光学式路面プロフィルメータの試作と検定　16

２．２．１　光学式路面プロフィルメータ　16

２．２．２　プロフィルメータの問題点とその対策　19

２．２．３　データ処理法　20

２．２．４　プロフィルメータの検定　26

２．３　路面凹凸の測定　26

２．３．１　測定箇所　26

２．３．２　測定方法　27

２．３．３　測定結果　28

２．４　路面凹凸パワースペクトル密度関数　28

２．４．１　路面凹凸パワースペクトル　28

２．４．２　路面凹凸スペクトルの近似関数　28

２．５　結　言　37

参考文献（第２章）　38

第３章　道路橋の走行荷重下の動的応答に関する数値シミュレーションと
現地実験　39
３．１　緒　言　39
３．２　桁橋の走行荷重による動的応答解析　40
３．２．１　曲げ振動による動的応答　40
３．２．２　曲げねじり連成振動方程式に基づく解析　42
３．３　現地における動的応答実験と理論解析　44
３．３．１　実験概要　44
３．３．２　路面凹凸の測定とデータ処理　45
３．３．３　実験結果と解析結果　48
３．４　結　言　55
参考文献（第３章）　57

第４章　単純桁橋の走行荷重による不規則振動解析　59
４．１　緒　言　59
４．２　単純桁橋の単一走行荷重による不規則振動解析　60
４．２．１　走行荷重による橋梁の非定常連成振動方程式　60
４．２．２　状態方程式　63
４．２．３　状態ベクトルの共分散行列　65
４．２．４　橋梁の応答の２乗平均値　72
４．３　２自由度系車両の連行による単純桁橋の不規則振動解析　74
４．３．１　連行荷重による橋梁の非定常連成振動方程式　74
４．３．２　状態方程式　77
４．３．３　状態ベクトルの共分散行列　81
４．４　数値計算結果　92
４．４．１　単一走行車両による橋梁のたわみ２乗平均値応答　92
４．４．２　連行車両による橋梁のたわみ２乗平均値応答　97

4.5　単純桁橋の衝撃係数　100
4.5.1　衝撃係数の定義　100
4.5.2　解析モデル　102
4.5.3　路面凹凸パワースペクトル密度の衝撃係数に及ぼす影響　103
4.5.4　衝撃係数　104
4.6　結　言　106
参考文献（第4章）　108

第5章　連続桁橋の走行荷重による不規則振動解析　110
5.1　緒　言　110
5.2　桁橋の構造諸元調査とモデル化　111
5.2.1　実橋調査　111
5.2.2　桁橋モデル　113
5.3　不規則振動解析　115
5.3.1　固有振動数および固有振動モード　115
5.3.2　解析モデル　118
5.3.3　解析結果　119
5.4　結　言　126
参考文献（第5章）　127

第6章　斜張橋の自動車走行による動的応答と衝撃係数　129
6.1　緒　言　129
6.2　自動車走行による動的応答解析　131
6.2.1　解析上の仮定　131
6.2.2　橋と車の連成振動方程式　131
6.2.3　逐次積分　135
6.2.4　動的増幅率　136
6.3　現地振動実験　137
6.3.1　自由振動性状　137
6.3.2　動的増幅率　138

6.4　斜張橋の動的応答特性　138
6.4.1　構造モデルの形状・諸元　138
6.4.2　ケーブルの横振動およびプレストレスの影響　141
6.4.3　車の重量・固有振動の影響　147
6.4.4　構造形式別の自由振動性状の比較　149
6.4.5　単一走行荷重下の動的応答　150
6.4.6　連行荷重下の動的応答　156
6.4.7　L-20相当設計荷重列による動的増幅率　166
6.5　結　言　168
参考文献（第6章）　170

第7章　結　論　173

付録1　走行荷重による橋梁の曲げ振動　177
付録2　走行荷重による橋梁の曲げねじり連成振動　188
付録3　状態遷移行列と式(4.60)の解過程の誘導　206
付録4　外力変数ベクトル$z(t)$の共分散行列と路面凹凸のパワースペクトル密度との関係　209

謝　辞　216

図表一覧

図－1.1　各国衝撃係数（第14條参考）[13)]
図－1.2　各国等分布荷重（第10條参考）[13)]
図－1.3　各国の衝撃係数[14)]
図－1.4　Dynamic load allowance の実測値と示方書の規定関数との比較[15)]

表－1.1　道路橋設計荷重の変遷[14)]
表－1.2　道路橋の走行荷重下の動的応答に関する理論的研究比較

図－2.1　非接触型変位計
図－2.2　対称系プロフィルメータ
図－2.3　非対称系プロフィルメータ
図－2.4　光学式路面プロフィルメータ
図－2.5　欠測データの補正およびノイズの除去
図－2.6　非対称系測定値の対称系測定値への重ね合わせ原理[8)]
図－2.7　非対称系測定値の対称系測定値への重ね合わせ例
図－2.8　路面凹凸算定フローチャート
図－2.9(1)　路面凹凸図（ＥＡ5-11）　環状線恵美須町入口
図－2.9(2)　路面凹凸図（ＹＡ6-1）　大阪湾岸線大和川橋梁付近
図－2.9(3)　路面凹凸図（Ｇ62Ａ1）　守口線城北付近
図－2.10　実測路面凹凸パワースペクトル密度およびＩＳＯ評価基準
　(1)　環状線恵美須町入口
　(2)　大阪湾岸線大和川橋梁付近
　(3)　守口線城北付近
図－2.11　路面凹凸パワースペクトルとＩＳＯ評価基準
図－2.12　パワースペクトル密度と近似関数
図－2.13　近似関数のパラメータ分布

表－2.1　路面凹凸測定箇所
表－2.2　パラメータα，ｎ，βの値および標準偏差
表－2.3　スペクトルのパラメータ範囲

図－3.1　橋梁と車両の解析モデル
図－3.2　橋梁モデル断面図
図－3.3　神流川橋断面図
図－3.4　３ｍプロフィルメータ

図－3.5　３ｍプロフィルメータの寸法と路面凹凸測点番号
図－3.6　路面凹凸図
図－3.7　路面凹凸パワースペクトル密度関数
図－3.8　試験車寸法
図－3.9　神流川橋解析モデル
図－3.10(1)　静的載荷によるスパン中央のたわみ
図－3.10(2)　静的載荷によるスパン中央下フランジのひずみ
図－3.11　スパン中央のたわみの動的応答
図－3.12　動的増幅率（DIF）の定義
図－3.13　動的増幅率
図－3.14　曲げとねじりの固有振動数比とDIFの関係

表－3.1　試験車の動的特性
表－3.2　神流川橋の動的特性
表－3.3　神流川橋構造諸元

図－4.1　橋梁と走行荷重の解析モデル
図－4.2　状態ベクトルの共分散行列の第２項および第３項における積分領域
図－4.3　走行荷重の寸法
図－4.4　路面凹凸パワースペクトル密度とＩＳＯ評価基準
図－4.5　２乗平均値応答の他の解析結果との比較
図－4.6　路面凹凸パワースペクトルの相違による応答の変化
図－4.7　車両モデルの相違による応答の変化
図－4.8　走行速度の相違による応答の変化
図－4.9　支間長の動的応答に及ぼす影響
図－4.10　r.m.s.たわみ応答
図－4.11　路面凹凸パワースペクトルの相違による応答の変化
図－4.12　車両モデルの相違による応答の変化
図－4.13　荷重強度の相違による応答の変化
図－4.14　動的応答曲線
図－4.15　α値による衝撃係数の変化
図－4.16　β値による衝撃係数の変化
図－4.17　ｎ値による衝撃係数の変化
図－4.18　連行車両の衝撃係数への影響
図－4.19　橋梁モデルによる衝撃係数の差異（連行車両走行）

表－4.1　道路橋の構造諸元
表－4.2　走行荷重の構造諸元

表－4.3　車両諸元
表－4.4　橋梁モデル諸元
表－4.5　走行車両モデル諸元
表－4.6　（静たわみ）＋（動たわみ）の比較

図－5.1(1)　断面２次モーメントと支間長の関係（単純桁橋）
図－5.1(2)　単位長さ当たり重量と支間長の関係（単純桁橋）
図－5.2(1)　断面２次モーメントと支間長の関係（２径間連続桁橋）
図－5.2(2)　単位長さ当たり重量と支間長の関係（２径間連続桁橋）
図－5.3(1)　断面２次モーメントと支間長の関係（３径間連続桁橋）
図－5.3(2)　単位長さ当たり重量と支間長の関係（３径間連続桁橋）
図－5.4　固有振動数と最大径間長の関係
　(1)　単純桁橋
　(2)　２径間連続桁橋
　(3)　３径間連続桁橋
図－5.5　桁橋モデル
図－5.6　変断面桁概略図
図－5.7　路面凹凸スペクトル
図－5.8　モード次数による応答値の変化
　(1)　２径間連続桁橋
　(2)　３径間連続桁橋
図－5.9　不規則振動解析と動的応答解析の比較（単純桁橋）
図－5.10　不規則振動解析と動的応答解析の比較（２径間連続桁橋）
　(1)　第１径間中央点
　(2)　中間支点
図－5.11　不規則振動解析と動的応答解析の比較（３径間連続桁橋）
　(1)　第１径間中央点
　(2)　中間支点
図－5.12　等断面桁と変断面桁の固有振動数比較
図－5.13　等断面桁と変断面桁の応答値比較
図－5.14　たわみ応答と曲げモーメント応答の比較
図－5.15　径間長と応答値の関係（単一車両走行）
　(1)　単純桁橋
　(2)　２径間連続桁橋
　(3)　３径間連続桁橋
図－5.16　径間長と応答値の関係（２径間連続桁橋，連行車両走行）
図－5.17　固有振動数と応答値の関係
　(1)　単純桁橋

(2)　２径間連続桁橋
(3)　３径間連続桁橋

表－5.1　桁橋モデル
表－5.2　桁橋モデル
表－5.3　桁橋モデル

図－6.1　斜張橋の構造モデル
図－6.2　連行荷重列
図－6.3(1)　安治川斜張橋モデル
(a)　３段ケーブルの構造モデル
(b)　ケーブルの局部振動とプレストレスの影響を調べるための構造モデル
(c)　形式別比較をするための構造モデル
(d)　マルチケーブルの構造モデル
図－6.3(2)　かもめ大橋系モデル
(a)　２段ケーブルの構造モデル
(b)　マルチケーブルの構造モデル
図－6.4　ケーブルの横振動
図－6.5　固有振動モード（TYPE-3Si),初期張力T_0）
(1)　１次振動モード(f_1=0.360 Hz)
(2)　２次振動モード(f_2=0.389 Hz)
(3)　３次振動モード(f_3=0.498 Hz)
(4)　４次振動モード(f_4=0.647 Hz)
(5)　８次振動モード(f_8=0.726 Hz)
(6)　９次振動モード(f_9=0.922 Hz)
図－6.6　固有振動モード（TYPE-3Sii),初期張力T_2）
(1)　１次振動モード(f_1=0.357 Hz)
(2)　２次振動モード(f_2=0.366 Hz)
(3)　３次振動モード(f_3=0.378 Hz)
(4)　14次振動モード(f_{14}=0.398 Hz)
(5)　15次振動モード(f_{15}=0.495 Hz)
(6)　16次振動モード(f_{16}=0.691 Hz)
(7)　28次振動モード(f_{28}=0.727 Hz)
(8)　29次振動モード(f_{29}=0.913 Hz)
図－6.7　ケーブルの局部横振動を考慮した場合のDIFの比較（単一走行荷重）
図－6.8　重量パラメータによるDIFの変化
（TYPE-3A，単一走行荷重，ｖ＝30m／sec）
図－6.9　振動数パラメータによるDIFの変化

（TYPE-3A，単一走行荷重，ｖ＝30m／sec）
図－6.10　DIFの速度パラメータによる変化（単一走行荷重）
図－6.11　上段ケーブル支持条件の差異によるDIFの比較
（TYPE-3A，単一走行荷重）
図－6.12　L-20相当荷重列の作成
図－6.13　車頭間隔の差異による縁応力度のDIFの比較
（L-20相当荷重列，５台連行，Ｖ＝60km／hr）
図－6.14　トラクター・トレーラー車両総重量分布[29]（米国オハイオ州，1968年）
図－6.15　荷重台数ｈによるDIFの変化（TYPE-3B，11F，V=60km／hr，$\ell=vT_s$）
図－6.16　荷重台数ｈによるDIFの変化（TYPE-2K，10K，V=60km／hr，$\ell=vT_s$）
図－6.17　応力度影響線（TYPE-3B，11F）
図－6.18　応力度影響線（TYPE-2K，10K）
図－6.19　L-20相当荷重列

表－6.1　かもめ大橋の固有振動数と対数減衰率
表－6.2　動的増幅率の実験値と解析値の比較
（かもめ大橋，TYPE-10K，$\delta=0.076$）
表－6.3　構造モデルの諸元
表－6.4　斜張橋の対数減衰率
表－6.5　構造形式別調査内容
表－6.6(1)　初期張力T_0のときのケーブルの固有振動数
表－6.6(2)　ケーブルの１次固有振動数が$f_1=f_s=0.388$Hzのときの初期張力
表－6.7　斜張橋の固有振動数(Hz)
表－6.8　走行荷重諸元
表－6.9(1)　安治川斜張橋モデルの固有振動数(Hz)
表－6.9(2)　かもめ大橋系モデルの固有振動数(Hz)
表－6.10　車頭間隔
表－6.11　L-20相当荷重強度
表－6.12　ダンプトラックの固有振動数実測値
表－6.13　L-20相当荷重列（V=60km／hr）によるDIFと
道路橋示方書の規定を準用した場合との比較
（TYPE-3B，11F）
表－6.14　L-20相当荷重列（V=60km／hr）によるDIFと
道路橋示方書の規定を準用した場合との比較
（TYPE-2K，10K）

第１章　序　論

１．１　走行荷重による橋梁の動的応答

橋梁は空間をまたいで，移動荷重を通すことを目的とする構造物であり，荷重が移動することによる動的作用を受ける。すなわち，同じ荷重が静的に作用するよりも，橋梁各部の変位や応力が大きくなる。一般に構造物は，自然現象である地震および風による動的作用を受けるが，構造物の長大化と軽量化に伴い，それらの動的外力に対しては，いわゆる動的応答解析あるいは動的設計を導入して来ている。一方，橋梁に独特である走行荷重による動的作用は，強度設計において衝撃として考慮され，活荷重に衝撃係数を乗じて静的な設計荷重としている。その衝撃係数は支間長あるいは活荷重載荷長の逓減関数として規定されているが，近年，衝撃係数をより合理的に算定しようとする動向にある[1)-4)]。

橋梁の衝撃の問題はまず鉄道橋を対象として研究されたが[5)]，道路の整備ならびに交通量と自動車荷重の増大に伴い，道路橋の衝撃についても関心が持たれるようになった。道路橋の衝撃係数の定め方はその設計活荷重の性格から考えて，鉄道橋の場合よりもむずかしいと考えられる[2)]。すなわち，交通荷重の実態において荷重の大きさおよび車頭間隔が共に確率量である。さらに車両の橋梁への進入時の初期振動ならびに路面凹凸による橋梁の動的応答に与える影響について考えねばならない。その他，走行車両の振動特性および走行速度なども当然橋梁の動的応答に大きい影響を及ぼす。このように道路橋の衝撃に関与する要因が多く，かつ互いに複雑に関係するため，従来，実測結果の裏付けのもとに衝撃係数が定められて来た。

一方，1950年代以降の電子計算機の普及と共に，数値計算による理論的研究も進んだ。イリノイ大学では，Newmark，Sies，Veletsos などが中心となって道路橋の衝撃について10数年にわたって研究された。また，MIT でも Biggsを中心として現場実験と共に数値解析が行われた。これらの研究では[6)-9)]，走行車両の解析モデルとして実際に近い２軸モデルが用いられたり，対象橋梁として単純桁橋のみならず連続桁橋およびゲルバー桁橋についても解析された。これらの研究により，走行荷重下の道路橋の動的応答解析は決定論的には可能となった。

実際の道路橋の走行車両による振動現象は，路面凹凸および伸縮継手の路面不整により不規則振動となり，また車両の振動特性（重量，固有振動数，減衰定数），載荷台数およ

び車頭間隔が不確定なため決定論的手法では現象を的確に明かにできない。すなわち不規則振動解析ならびに確率論的手法が必要となる。

本章では以下において，道路橋の衝撃係数の変遷と諸外国の規定について述べ，さらに走行荷重下の動的応答に関する確率論的および不規則振動論的手法によるこれまでの研究を概観した後，本研究の目的および内容について記すこととする。

1.2 道路橋の衝撃係数

1.2.1 衝撃係数の変遷

道路橋の設計規準において，衝撃係数がどのように決められて来たのか，その変遷を調べる。衝撃係数は活荷重の割増し係数として規定されていることより，活荷重と組み合わせて考えるべきである。橋梁の衝撃はまず鉄道橋を対象として研究されていたため，道路橋の衝撃係数を定めるに当たって，鉄道橋に関する研究成果も利用され，またその影響を受けた。

アメリカにおいて，道路橋の衝撃係数が示方書に初めて規定されたのは1927年であった[" Specifications for Steel Highway Bridges, " the Conference Comittee representing the AASHO (American Association of State Highway Officials) and the AREA (American Railway Engineering Association)][10]。その衝撃係数は次式で表された。

$$i = \frac{15.24}{L+38.10} \leqq 0.3 \quad (\text{L in meter}) \tag{1.1}$$

このように衝撃係数を支間長の逓減関数として表すことは，鉄道橋における実験結果の包絡線として用いられていた。式(1.1)のレベルと限界値は，1922～25年にアイオア州立大学の A.H.Fuller が同州の道路橋において実施した測定結果に基づいて定められた。以後，今日に至るまでアメリカにおいては衝撃の評価式として式(1.1)が用いられている[11]。

一方，我が国においても，時を同じくして（大正15年，1926年），道路構造に関する細則案に，アメリカの場合と同様な支間長の逓減関数として，衝撃係数の規定が初めて設け

表－1.1　道路橋設計荷重の変遷[14)]

名称	橋の等級		活荷重				負載の方法	衝撃係数
	道路の種類	等級	車道			歩道		
			車両荷重		等分布荷重（大正8年，15年では群集荷重と称す）	群集荷重（昭和14年では，等分布荷重と称す）		
			自動車	転圧機				
明治19年8月（1886）園県道の築造標準（内務省訓令第13号）	国道 県道	規定なし	規定なし		車道・歩道の区分なし 400貫/坪（450kg/m²）		橋上満面に積載すす	規定なし
大正8年12月（1919）道路構造令及び街路構造令（内務省令）	街路	規定なし	3,000貫（11,250kg）	15t	15貫7尺²（≒613kg/m²） 径間に応じ相当軽減することを得			規定なし
	国道	〃	2,100貫（7,875kg）	12t	12貫/尺²（≒490kg/m²） 径間に応じ相当軽減することを得			
	府県道	〃	1,700貫（6,375kg）	別に規定なし	12貫/尺²（≒490kg/m²） 径間に応じ相当軽減することを得			
大正15年6月（1926）道路構造に関する細則案（内務省土木局）	街路	一等橋	12t	14t	○主桁，主構 $\frac{120,000}{170+l}$ ≦600kg/m² ○主桁，主構以外 600kg/m²	○主桁，主構 $\frac{100,000}{170+l}$ ≦500kg/m² ○主桁，主構以外 500kg/m²	1. 自動車は橋梁の縦方向に1台とする 2. 転圧機は1橋梁につき1台とし他の車両と同時に負載しない 3. 車両は横の方向に4台まで 4. 群集荷重は自動車転圧機の左右前後に等布する	$i=\frac{20}{60+l}$ ≦0.3 〔群集荷重，転圧載荷重は衝撃を生ぜしめない〕
	国道	二等橋	8t	11t	○主桁，主構 $\frac{100,000}{170+l}$ ≦500kg/m² ○主桁，主構以外 500kg/m²	○主桁，主構 $\frac{80,000}{170+l}$ ≦400kg/m² ○主桁，主構以外 400kg/m²		
	府県道	三等橋	6t	8t	二等橋に同じ	二等橋に同じ		
昭和14年2月（1939）鋼道路橋設計示方書案（内務省土木局）	国道及び小路（I）等以上の街路	一等橋	13t	17t	l<30m　500kg/m² 30m≦l≦120m　(545－1.5l)kg/m²		1. 自動車は縦方向に1台，横方向に制限しない 2. 転圧機は1橋1台で他の活荷重と同時に負載しない 3. 等分布荷重は自動車の前後左右に分布する。車道の床版縦桁の設計には考えない	$i=\frac{20}{50+l}$ 〔歩道の等分布荷重，転圧機荷重は衝撃を生ぜしめない〕
	府県道及び小路（II）等以上の街路	二等橋	9t	14t	l<30m　400kg/m² 30m≦l≦120m　(430－l)kg/m²			
	(注)小路(I)等……幅員8m以上の街路 小路(II)等……幅員4m以上8m未満の街路							

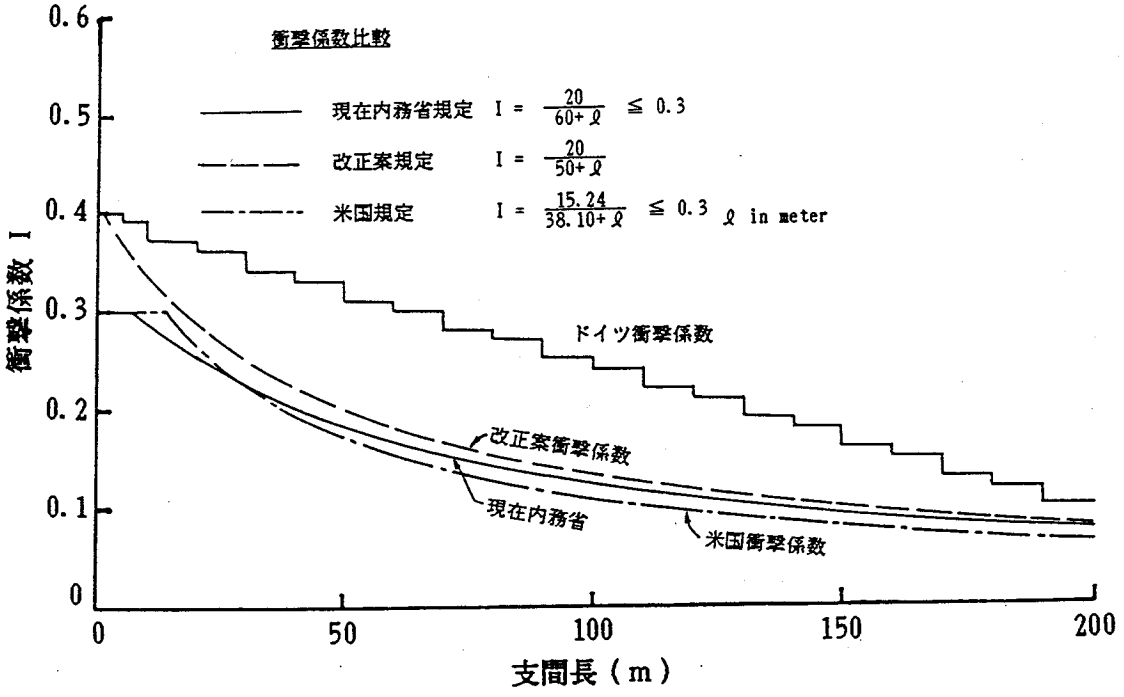
名称	橋の等級		活荷重							負載の方法	衝撃係数
	道路の種類	等級	車道						歩道		
			車両荷重	等分布荷重					群集荷重		
昭和31年5月（1956）鋼道路橋設計示方書（日本道路協会）	一級国道，二級国道，主要地方道	一等橋	20t（T-20）	荷重	線荷重	等分布荷重 l≦80	等分布荷重 l>80		500kg/m² 主桁 350kg/m²	1. 床及び床組の車道部はT荷重とし，自動車は縦方向に1台，横方向に制限しない 2. 主桁にはL荷重とし載荷範囲は制限しない。線荷重は1橋につき1個	$i=\frac{20}{50+l}$ 〔歩道の群集荷重は衝撃を生ぜしめない〕
				L-20	a×5,000 kg/m	a×350 kg/m²	a×(430-l) kg/m²				
	都道府県道市町村道	二等橋	14t（T-14）	L-14	一等橋の70%						
	(注)床及び床組の設計……T荷重 主桁の設計……L荷重			(注) $a=1-\frac{w-5.5}{50}$ (1≧a≧0.75) w＝L荷重の載荷重(m)							
昭和39年8月（1964）鋼道路橋設計示方書（日本道路協会）	同上		同上	荷重	主載荷荷重(幅5.5m) 線荷重 pkg/m²	等分布荷重 p kg/m² l≦80	等分布荷重 p kg/m² l>80	従載荷荷重 主車線荷重の50%	同上	同上	同上
				L-20	5,000	350	430-l≧300				
				L-14	一等橋の70%						
昭和47年3月（1972）道路橋示方書1共通編（日本道路協会）	一般国道，都道府県道市町村道	一等橋	20t（T-14）	同上					床版及び床組500kg/m² 主桁は下段にする	同上	橋種：鋼橋　衝撃係数 $i=\frac{20}{50+l}$　備考： 鉄筋コンクリート橋　$i=\frac{20}{50+l}$　T荷重 鉄筋コンクリート橋　$i=\frac{7}{50+l}$　L荷重 プレストレストコンクリート橋　$i=\frac{20}{50+l}$　T荷重 プレストレストコンクリート橋　$i=\frac{10}{25+l}$　L荷重
	都道府県道市町村道	二等橋	14t（T-14）								
	(注)床版及び床組の設計…T荷重 主桁の設計…L荷重			支間(m)	l≦80	60<l≦130	l>130				
				荷重(kg/m²)	350	430－l	300				
昭和48年4月（1973）特定の路線にかかる橋，高架の道路等の技術基準について（建設省都市局長道路局長）	湾岸道路 高速自動車国道 その他		43t（TT-43）							1. 床版及び床組の車道部はTT－43を縦方向1台，横方向2台とし横方向にT－20を負載する 2. 主桁にはL－20とし主載荷重部にTT－43を横方向に2台負載する	

られた[12]。 衝撃係数の変遷を活荷重のそれと共に表－1.1 に掲げる。衝撃係数は昭和14年に改訂されて[13]，現在使われている次式に示す評価式となった[14]。

$$i = \frac{20}{L+50} \tag{1.2}$$

さらに，昭和47年に道路橋示方書が統合され，L荷重の衝撃係数については，橋種によって異なる評価式を示した。

昭和14年の改訂時に衝撃係数の値は，図－1.1 に示すようにそれ以前よりも若干大きく設定された。このとき活荷重の内，車両荷重（T荷重に相当）は大きくなったにもかかわらず，図－1.2 に示すように等分布荷重はかなり小さくなった。その傾向はその後の示方書の改訂の度に繰り返された。

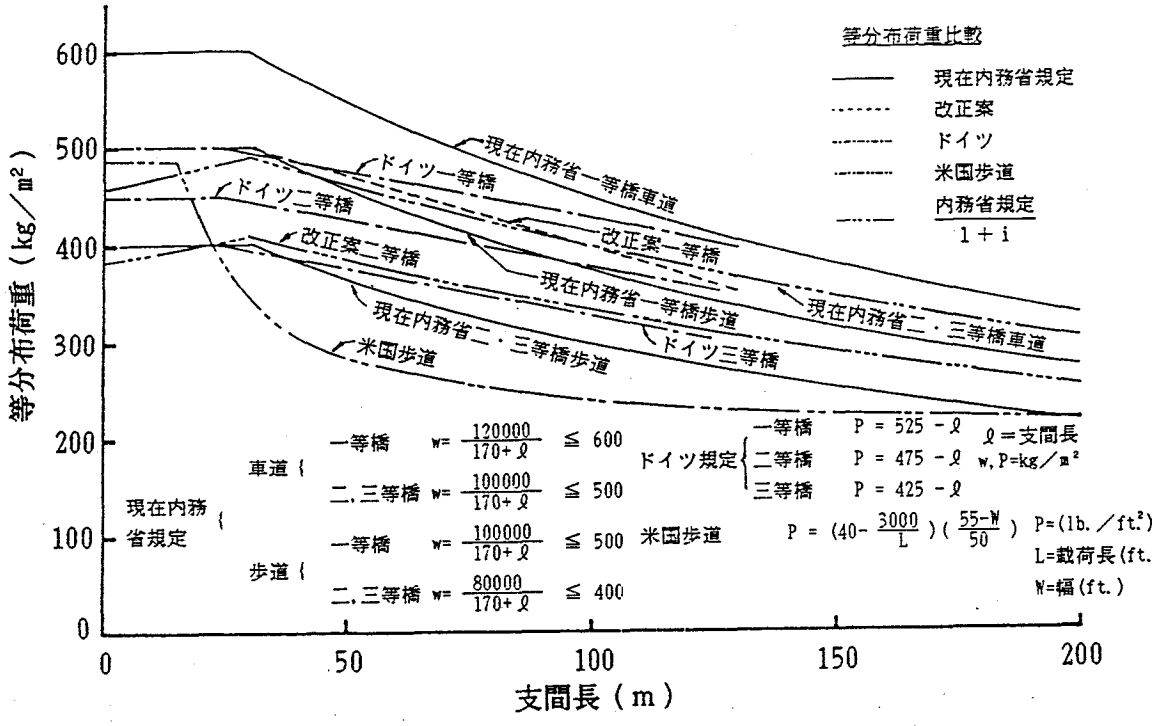


図－1.1　各国衝撃係数（第14條参考）[13]

1.2.2 諸外国の規定

我が国の衝撃係数の規定と共に，アメリカ，西ドイツ，フランスにおける現行の規定を併せて図－1.3 に示す。国によって衝撃係数はかなり異なった値となっているが，それはそれぞれの国による交通事情，道路状態および活荷重規定と関連づけて考えるべきものである。その内，西ドイツにおける衝撃係数は，図－1.1 に示すように，昭和14年時点で我が国およびアメリカよりかなり大きな値を採用していたが，現在では，図－1.3 に示すように，スパン長 0～50mの間に衝撃係数が 0.4～0.0 まで急激に減少し，50m以上のスパン長の場合は衝撃を考慮していない。

カナダのオンタリオ州の規準[15] では橋梁と車両の共振現象を考慮して，図－1.4 に示すように Dynamic load allowance を橋梁の第１次固有振動数の関数として表している。また，スイスにおいても，走行荷重による橋梁の動的応答の影響を，橋梁の基本固有振動数で表す傾向にある[16]。



図－1.2 各国等分布荷重（第10條参考）[13]

① 日　本　鋼　橋……$\frac{20}{50+L}$

② 日　本　プレストレストコンクリート橋……$\frac{10}{25+L}$

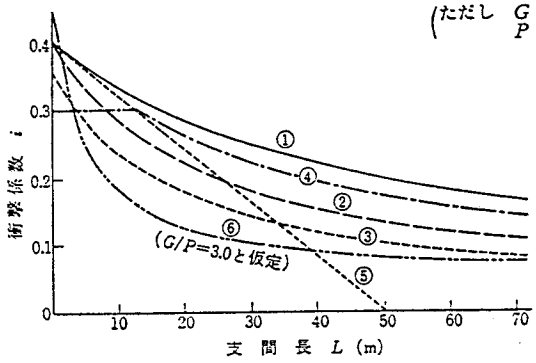
③ 日　本　鉄筋コンクリート橋……$\frac{7}{20+L}$

④ アメリカ(AASHTO)　鋼橋・コンクリート橋…$\frac{15.24}{L+38}$（ただし，0.3以下）

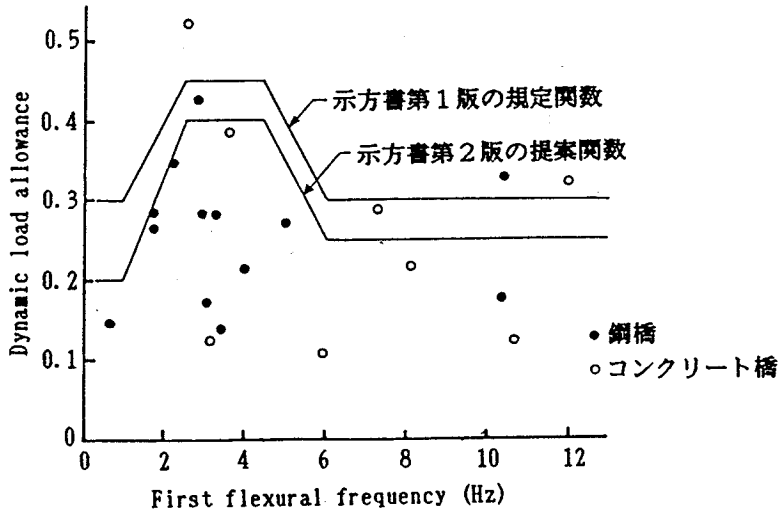
⑤ ドイツ(DIN 1072)　鋼橋・コンクリート橋……$0.4-0.008L$

⑥ フランス(Fascicule Special 60-17bis)　鋼橋・コンクリート橋……$\frac{0.4}{1+0.2L}+\frac{0.6}{1+4\frac{G}{P}}$

（ただし　G：死荷重　P：活荷重）



図－1.3　各国の衝撃係数[14)]



図－1.4　Dynamic load allowance の実測値と示方書の規定関数との比較[15)]

1.3　道路橋の走行荷重下の動的応答解析法

1.3.1　荷重の確率特性を考慮した解析

車両の重量，載荷台数および車頭間隔などを確率量として扱い，走行荷重による道路橋

の動的応答を確率論的に評価しようと試みた研究についてみてみる。

i) 山田・小堀[17] は自動車荷重列を車群に分割し，その車群台数，車頭間隔および車重をそれぞれ確率量として，シミュレーションによりランダム自動車荷重列を求めた。個々の荷重を１自由度振動系に仮定し，滑らかな橋面上をそれらの荷重列が走行することによる動的応答をシミュレーション解析し，衝撃係数の評価を行った。

ii) Tung[18] は車両の到着をポアソン過程とし，個々の車両の重量がすべて等しい一定力と仮定し，単純桁橋の動的応答振幅の確率密度関数を理論的に求めた。さらに，Tung[19] はポアソン到着の仮定では車頭時間が指数分布となるが，それをピアソンⅢ型分布に改良した一般化ポアソン交通モデルを用いて，同様に振幅の確率密度関数を求めた。

iii) Shinozuka & Kobori[20] は i)の解析法を改良した手法を用いて，車両の重量分布を考慮し，車両の到着を Tung の改良された一般化ポアソン過程と仮定してランダム自動車荷重列を求めた。個々の荷重を車軸の振動を考慮した２自由度系とし，さらにパワースペクトル密度からシミュレートされた不規則路面凹凸を有する道路橋の動的応答解析より，疲労の評価を行った。

１．３．２　不規則振動解析

前項のように道路橋の走行荷重による振動現象の確率論的解析法が進歩するなかで，路面凹凸の動的応答に及ぼす影響にも着目されて来た。実際の道路橋においては橋面上に不規則な路面凹凸を有しており，車両の諸特性もあいまって走行車両が不規則な振動を起こす。さらに，この走行車両によって橋梁に不規則振動が生ずる。すなわち，これは走行車両と橋梁の非定常連成不規則振動の問題となり，Shinozuka & Kobori[20] が行ったようにシミュレーション法によって連成振動の微分方程式を数値的に解くことができる。しかし，この現象が不規則振動であるためシミュレーション法による場合には，応答の２乗平均値を得るために，数多くのサンプル関数を求めてアンサンブル平均を行う必要がある。本田・小堀・山田[21] はこの方法により多径間連続桁橋を対象として高次振動まで考慮し，たわみ応答のみならず曲げモーメント応答の解析結果から衝撃係数の評価を行った。また最近，Inbanathan & Wieland[22] が荷重を質点と仮定してシミュレーション解析した例を報告している。

シミュレーション法ではサンプル関数に対する応答解析を繰り返す繁雑さを伴うため，

ここ20年来，不規則振動論を用いて走行車両による道路橋の動的応答を評価しようと試みられて来た。それらを解析手法別に述べることにする。

i) 小西・山田・篠塚・小堀[23]は不規則な路面凹凸を考慮した訳ではないが，橋梁に周期力をもついくつかの荷重が載荷される場合に，周期荷重の位相差がランダムであるとして，確率論の立場より衝撃係数が橋梁の支間長によって逓減されることを示した。

ii) 山田・小堀[24] は i)の考え方を発展させ，不規則振動論を用いて初めて走行車両による道路橋の振動解析を行った。そこでは路面凹凸を平均値０の定常ランダム過程とみなしてパワースペクトル密度で表わし，車両と橋梁の連成振動を考慮するが，車両はある固定した位置で橋梁に作用するものと仮定して，車両の走行による影響を無視した定常連成不規則振動解析を行った。支間長の増大と共に載荷台数が増し，その動的荷重の相殺作用によって衝撃係数が逓減することを示した。

iii) Nakai & Kotoguchi[25] は外力特性を橋梁応答より求めておき，曲線桁橋の不規則振動解析結果に基づいて，衝撃係数の評価を行った。

iv) Frýba[26),27)] は路面凹凸および車両の周波数特性を考慮せずに，車両が橋梁に及ぼす作用力の特性をパワースペクトル密度あるいは共分散の形で与え，車両の走行に伴う非定常性のみを考慮した解析を行った。

v) 吉村・彦坂・吉村・江村[28]は車両と橋梁の連成を無視し，路面凹凸上を走行して振動する車両が橋面に与える外力を定常ランダム過程としてパワースペクトル密度で表わした。また，車両が橋上を走行することによる非定常性を考慮して，単純桁橋の非定常不規則振動解析を行った。

小堀・梶川[29] は同様の解析手法により，振動の大きい橋梁形式の一つであるランガー桁橋を対象として不規則振動解析を行い，振動感覚について考察した。

vi) 吉村・彦坂・内谷[30]は車両と橋梁の連成効果ならびに車両走行による非定常性を共に考慮して，道路橋の非定常連成ランダム振動を初めて不規則振動論により解析した。路面の不規則凹凸を平均値０の定常確率ガウス過程と仮定し，ランダム過程のサンプル関数を時間領域においてフーリエ級数で表示する手法を提案した。これにより任意時刻の応答の２乗平均値を求めた。彦坂・吉村・内谷[31] はこの解法を連行車両の場合に拡張し，その解析結果により衝撃係数について考察した。

vii) 岡林[32]は vi)と同じく車両と橋梁の連成効果を考慮した非定常不規則振動の解析手法を提案した。すなわち，路面凹凸関数として白色雑音過程を入力とする一種のフィル

ターである路面系を導入し，この定常応答過程により路面凹凸をモデル化した。次に，橋梁－車両系と路面系を合成して，状態空間でベクトル表示された確率微分方程式から誘導される共分散方程式を基礎式として，非定常応答解析を行った。岡林らはこの解法を高次振動まで考慮した場合に適用して[33]，モード間の連成の非定常応答に及ぼす影響について調べ，さらに連行車両の場合に拡張して[34]，衝撃係数について考察した。

以上の研究の中で，車両と橋梁の連成効果を考慮して非定常不規則振動解析を行った吉村・彦坂・内谷の研究[30),31)] および 岡林の研究[32)-34)]は，現象をより厳密に表現しようとしたものであるが，走行車両の解析モデルを１自由度振動系と仮定しており，Wen[7)] がシミュレーション解析の中で使用した２軸モデルを非定常連成不規則振動解析に取り入れなかった。 また， 路面凹凸パワースペクトル密度として名神高速道路の完成直後における実測値[35)] をモデル化したパワースペクトル密度を使用しているが，これは かなり良好な路面凹凸状態を示している。 さらに，岡林の示した解析法では[32)-34)]， 路面凹凸関数を白色雑音過程を入力とする確率微分方程式の定常解過程によりモデル化しているため，パワースペクトル密度関数が $S(\Omega)=A/(\Omega^2+a^2)$ となり，分母の指数部が２に限定され，実測路面凹凸の特性と合わない場合もあると思われる。このように解析モデルに問題点を含んだまま，解析法を連行車両の場合に拡張しても衝撃係数を適切に評価できないと考えられる。

viii) 本研究の第４章において，それらの問題点を克服して，新たな解析手法を定式化した[36)]。すなわち， 路面凹凸を有する橋梁と走行車両に関する連成振動の微分方程式より，状態ベクトル表示を用いた振動方程式を誘導し，線形微分方程式の理論より得られるこの解過程を用いて，直接，応答の共分散行列を求める。本解析手法によると，路面凹凸のパワースペクトル密度をどのような形で与えられても，そのまま用いることが可能である。また，走行車両の解析モデルとして，大型トラックの前後輪を考慮した２自由度振動系を用いる。

本節で取り上げた理論解析法の特徴をまとめて表－1.2 に掲げる。

表－1.2　道路橋の走行荷重下の動的応答に関する理論的研究比較

（１）荷重の確率特性を考慮した解析

著者	発表年	荷重列	応答解析	荷重モデル	路面凹凸
山田・小堀[17]	1965	ｼﾐｭﾚｰｼｮﾝによる荷重列(車群)	シミュレーション	１自由度系	平滑
Tung[18),19)]	1967 1969	ﾎﾟｱｿﾝ過程(車重一定)	動的応答振幅のp. d. f.	集中荷重	――
Shinozuka & Kobori[20)]	1972	ｼﾐｭﾚｰｼｮﾝによるﾗﾝﾀﾞﾑ荷重列 (車頭間隔ﾎﾟｱｿﾝⅢ型)	シミュレーション	２自由度系 (車軸の振動考慮)	不規則凹凸

（２）不規則振動解析

著者	発表年	橋と車の連成	非定常性 (荷重移動)	応答解析	荷重モデル	路面凹凸
本田・小堀・山田[21)]	1983	○	○	シミュレーション	２自由度系 (車軸の振動考慮)	実測の平均的スペクトルのモデル化
Inbanathan & Wieland[22)]	1987	×	○	シミュレーション	１質点	外力スペクトル
小西・山田・篠塚・小堀[23)]	1959	×	×	解析的 (位相を確率量)	周期力	――
山田・小堀[24)]	1967	○	×	不規則振動論	２自由度系 (車軸の振動考慮)	名神実測スペクトルのモデル化
Nakai & Kotoguchi[25)]	1975	×	×	〃	外力特性を橋梁応答により算出	――
Frýba[26),27)]	1968 1976	×	○	〃	ﾊﾟﾜｰｽﾍﾟｸﾄﾙまたは共分散で与える	――
吉村虎・彦坂・吉村健・江村[28)]	1975	×	○	〃	１自由度系	名神実測スペクトルのモデル化
小堀・梶川[29)]	1976	×	○	〃	２自由度系 (車軸の振動考慮)	〃
吉村・彦坂・内谷[30),31)]	1977 1979	○	○	ランダム応答のフーリエ級数表示	１自由度系	〃
岡林[32)-34)]	1979 1980 1983	○	○	状態ベクトルの確率微分方程式から得られる共分散方程式	１自由度系	〃 $Sr(\Omega)=A/(\Omega^2+a^2)$
小松・川谷[36)]	1982	○	○	状態ﾍﾞｸﾄﾙ表示の微分方程式の解過程から共分散	２自由度系 (前後輪考慮)	任意

1.4　本研究の目的と内容

本論文においては，道路橋の走行荷重による動的応答の評価を行い，それを設計に反映させるときに用いる衝撃係数について考察する。対象とする橋梁形式は，単純桁橋および連続桁橋と斜張橋である。桁橋の走行荷重による動的応答に大きな影響を及ぼす要因として，橋面上の不規則な路面凹凸に着目する。路面凹凸を有する橋梁の走行荷重による動的応答は，橋梁と走行荷重の非定常連成不規則振動となり，本研究において，不規則振動論に基づく新たな解析法を定式化している。また橋梁と走行車両の共振作用の動的応答に及ぼす影響についても考察する。

斜張橋は，第２次世界大戦後ドイツにおいて発達し，我が国においても，この20年間に数多くの建設例をみるに至った比較的新しい橋梁形式である。主桁をケーブルにより弾性支持した構造形式であり，主桁，塔およびケーブルの各要素の衝撃係数について不明な点が残されている。斜張橋の中央支間長は100～500m の広範囲にわたり，その基本固有周期が比較的長く，それに相当する車頭間隔（共振車頭間隔）を保持する連行荷重による斜張橋の動的応答解析結果に基づき衝撃係数について考察する。

本研究の次章以降の内容は次の通りである。

第２章では，路面凹凸を測定するための光学式路面プロフィルメータを試作する。従来の測定方法は，水準測量，多車輪式プロフィルメータの使用および振動特性既知の自動車走行時における車の振動スペクトルを用いる方法などである。しかし，これらの方法では，一般交通流を阻害せずに長波長までの路面凹凸を測定できない。本プロフィルメータは，レーザー光線による非接触型変位計を４個用いた光学式プロフィルメータであり，最高速度30km/h，0.4mm の精度で，短波長から長波長まで(0.25～50m) の路面凹凸を測定できるものである。阪神高速道路において，本プロフィルメータを用いて路面凹凸を測定し，パワースペクトル密度を算出する。実測パワースペクトルを関数近似し，関数の各パラメータ値の範囲を求める。

第３章では，走行荷重下の橋梁の動的応答解析における橋梁と走行荷重の解析モデルの妥当性を検証するために，実橋において試験車走行による動的応答および橋面凹凸の実測を行い，その実験結果と解析結果との比較検討を行う。実験結果と比較するための動的応答解析では，曲げ振動方程式のみならず曲げねじり連成振動方程式を用いて定式化する。大型ダンプトラックの解析モデルとして，前輪１軸・後輪２軸の２自由度振動系を用い，

他の簡易モデルを用いた場合と比較検討する。実験値と比較した解析値により，路面凹凸の動的応答に及ぼす影響の大きいことを確認する。

第４章では，走行車両による橋梁の非定常連成不規則振動に関する新たな解析手法を定式化する。すなわち，路面凹凸を有する単純桁橋と走行車両に関する連成振動の微分方程式より，状態ベクトル表示を用いた振動方程式を誘導し，線形微分方程式の理論より得られるこの解過程を用いて，直接，応答の共分散行列を求める。本解法による２乗平均値応答を他の解法による解析結果と比較して，本解析手法の妥当性を検証する。第２章で得られた路面凹凸パワースペクトル密度のパラメータ値の２乗平均値応答に及ぼす影響を明かにし，単純桁橋の衝撃係数について考察する。

第５章では，前章において示された単純桁橋に関する不規則振動解析法を連続桁橋に拡張し，桁橋の走行荷重による非定常連成不規則振動解析を行う。また，解析対象となる連続桁橋の構造諸元に関する有用なデータがほとんど見あたらないため，振動解析を行うに先立ち，桁橋の構造諸元実態調査を行い，その統計処理結果に基づき，桁橋モデルを作成する。それらの桁橋の解析モデルを用いた２乗平均値応答解析結果より，連続桁橋の中間支点における曲げモーメント応答および支間中央における応答が，車両の固有振動との共振により大きくなることを明らかにする。

第６章では，斜張橋の走行荷重下の動的応答特性を明らかにするために，理論的ならびに実験的研究を行う。理論的研究については，斜張橋を平面構造系の離散質量系(lumped mass system)に理想化し，マトリックス変形法により橋の強制振動方程式を導く。さらに，１台の自動車を１自由度振動系と仮定して，モード法により橋と車の連成振動方程式を求め，これを Newmark-β 法を用いて逐次積分して斜張橋の動的応答を求める。

以上の解析法の妥当性を検証するため，わが国で初めてのマルチケーブル斜張橋である大阪市のかもめ大橋において，橋の完成直後に現地振動実験を行う。

実際に道路橋に載荷する走行荷重は，その荷重の大きさとそれぞれの車頭間隔が，時間的にランダムに変動するようないわゆる不規則連行荷重列である。連行荷重による橋桁の動的増幅率は単一荷重走行の場合に比べてかなり小さいと報告されている。しかし，斜張橋のように低次固有振動数が比較的小さい場合には，走行速度と車頭間隔との関係によっては，必ずしもそうとは限らないと考えられる。そこで，数値計算に際しては，もっとも影響の大きい共振車頭間隔（橋の対称１次固有周期に相当する車頭間隔）を保持する連行荷重について考えている。

第７章では，以上の各章における検討を総括して，本論文の結論を導いている。

参考文献（第１章）

1) 山田善一：橋梁の衝撃，土木構造物の振動と安全性，土木学会関西支部・中部支部，pp.91-102，1966.5.

2) 伊藤　学：走行車両に対する橋梁の動的応答，橋梁の動的応答，日本鋼構造協会，pp.377-401，1969.12.

3) 土木学会編：構造物の安全性・信頼性，第２編　荷重，第４章　橋の衝撃，pp.86-100，1976.10.

4) 小西一郎編：鋼橋　基礎編Ⅰ，２章　荷重，２．４　衝撃，pp.25-39，丸善，1977.7.

5) 大地羊三：鉄道橋の衝撃係数，鉄道技術研究所報告，第 370号，1963.10.

6) Biggs, J.M., Suer, H.S. and Louw, J.M.: The vibration of simple span highway bridges, J. of Struc. Div., Proc. of ASCE, Vol.83, No.ST2, pp.1186/1-32, March, 1957.

7) Wen, R.K.: Dynamic response of beams traversed by two-axle loads, J. of Engg. Mech. Div., Proc. of ASCE, Vol.86, No.EM5, pp.91-111, Oct., 1960.

8) Wen, R.K. and Toridis, T.: Dynamic behavior of cantilever bridges, J. of Engg. Mech. Div., Proc. of ASCE, Vol.88, No.EM4, pp.27-43, Aug., 1962.

9) Veletsos, A.S. and Haung, T.: Analysis of dynamic response of highway bridges, J. of Engg. Mech. Div., Proc. of ASCE, Vol.96, No.EM5, pp.593-620, Oct., 1970.

10) Progress Report of the Committee on Deflection Limitations of Bridges of the Structural Division : Deflection limitations of bridges, J. of Struct. Div., Proc. of ASCE, Vol.84, No.ST3, pp.1633/1-20, May, 1958.

11) AASHTO(American Association of State Highway and Transport Officials) : Standard Specifications for Highway Bridges, Washington, D.C., 1983.

12) 横山功一・井上純三・藤城　隆・永原　隆：橋の衝撃荷重に関する試験調査報告書［I-1987］，土木研究所資料，第2426号，1987.1.

13) 内務省土木局：鋼道路橋設計示方書案，土木学会誌，第25巻，第5号，pp.499-，1939.5.

14) 日本道路協会：道路橋示方書・同解説，Ⅰ共通編，pp.23-27，392-393，1980.2.

15) Billing, J.R.: Dynamic loading and testing of bridges in Ontario, Canadian J. of Civ. Engg., Vol.11, No.4, pp.833-843, Dec., 1984.

16) Cantieni, R.: Dynamic load testing of highway bridges, IABSE Periodica, pp.57-72, 3/1984.

17) 山田善一・小堀為雄：ランダム自動車荷重列による道路橋の衝撃に関する研究，土木学会論文集，第 119号，pp.1-9，1965.7.
18) Tung,C.C.: Random response of highway bridges to vehicle loads, J. of Engg. Mech. Div., Proc. of ASCE, Vol.93, No.EM5, pp.79-94, Oct., 1967.
19) Tung,C.C.: Response of highway bridges to renewal traffic loads, J. of Engg. Mech. Div., Proc. of ASCE, Vol.95, No.EM1, pp.41-57, Feb., 1969.
20) Shinozuka,M. and Kobori,T.: Fatigue analysis of highway bridges, Proc. of JSCE, No.208, pp.137-148, Dec., 1972.
21) 本田秀行・小堀為雄・山田善一：多径間連続桁橋の動的応答と衝撃係数に関する考察，土木学会論文報告集，第 331号，pp.65-73，1983.3.
22) Inbanathan,M.J. and Wieland,M.: Bridge vibration due to vehicle moving over rough surface, J. of Struct. Engg., Proc. of ASCE, Vol.113, No.9, pp.1994-2000, Sept., 1987.
23) 小西一郎・山田善一・篠塚正宣・小堀為雄：橋の衝撃係数に関する確率論的一考察，土木学会論文集，第62号，pp.1-5，1959.5.
24) 山田善一・小堀為雄：活荷重に対する道路橋の動的応答－衝撃係数－に関する考察，土木学会論文集，第 148号，pp.40-50，1967.12.
25) Nakai,H. and Kotoguchi,H.: Dynamic response of horizontally curved girder bridges under random traffic flows, Proc. of JSCE, No.244, pp.117-128, Dec., 1975.
26) Frýba,L.: Non-stationary vibrations of bridges under random moving load, Final Report of 8th IABSE Congress, New York, pp.1223-1236, Sept., 1968.
27) Frýba,L.: Non-stationary response of a beam to a moving random force, J. of Sound and Vibration, Vol.46, No.3, pp.323-338, 1976.
28) 吉村虎蔵・彦坂　熙・吉村　健・江村康博：不規則振動論による道路橋の走行荷重応答解析（第１報）－単一荷重を受ける単純桁橋－，九州大学工学集報，第48巻，第６号，pp.741-746，1975.12.
29) 小堀為雄・梶川康男：単一動荷重に対する道路橋の振動感覚，土木学会論文報告集，第 248号，pp.11-23，1976.4.
30) 吉村虎蔵・彦坂　熙・内谷　保：単一走行車両による道路橋の非定常ランダム応答の解析，土木学会論文報告集，第 258号，pp.35-44，1977.2.
31) 彦坂　熙・吉村虎蔵・内谷　保：連行自動車荷重による単純桁橋の非定常ランダム応答と衝撃係数，土木学会論文報告集，第 290号，pp.31-41，1979.10.
32) 岡林隆敏：単一走行車両による道路橋の二乗平均応答解析，土木学会論文報告集，第 286号，pp.15-26，1979.6.
33) 岡林隆敏・中井一彦・籠　修道：高次振動を考慮した道路橋の単一走行車両による非定常r.m.s.応答，土木学会論文報告集，第 296号，pp.13-24，1980.4.

34) 岡林隆敏・山口実浩：連行車両による道路橋の二乗平均応答解析，土木学会論文報告集，第 334号，pp.1-11，1983.6.
35) 川合平夫・森崎健二：自動車走行路面の性質と振動乗心地への関連性，三菱重工技報，Vol.2，No.2，pp.20-28，1965.
36) Komatsu,S. and Kawatani,M.: Nonstationary random response of highway bridges under moving vehicles, Technology Reports of the Osaka University, Vol.32, No.1648, pp.151-158, March, 1982.

第２章　道路橋の路面凹凸の評価

２．１　緒　言

道路橋の走行荷重による動的応答に大きな影響を及ぼす路面不整については，20数年前より，自動車の乗心地や走行性に関連して調査報告されている[1)-3)]。 また最近，橋の動的応答に関連して，橋面不整が測定されているが[4),5)]， 未だ基礎資料として充分とは言えない現状である。それらの測定方法は，水準測量，多車輪式プロフィルメータの使用および振動特性既知の自動車走行時における車の振動スペクトルを用いる方法などである。しかし，これらの方法では，一般交通流を阻害せずに長波長までの路面凹凸を測定できない。これが，未だ広範囲に統計データを収集できない原因と考えられる。

本研究では，レーザー光線による非接触型変位計を用いた光学式路面プロフィルメータを試作する[6)-10)]。 本プロフィルメータは，最高速度30km／h，0.4mmの精度で，短波長から長波長まで(0.25～50m)の路面凹凸を測定できるものである。阪神高速道路において，本プロフィルメータを用いて路面凹凸を測定する。測定された路面凹凸データを統計学的に処理し，パワースペクトル密度により整理してその特性を明らかにする。さらに，実測パワースペクトルを関数近似し，関数の各パラメータ値の範囲を求める。

２．２　光学式路面プロフィルメータの試作と検定

２．２．１　光学式路面プロフィルメータ

（１）非接触型変位計

図－2.1 に示すように，He－Ne気体レーザ光線を鉛直面に対して45°の角度で路面に照射し，その反射光を受光レンズで集めてイメージセンサ上に像を結ばせる。イメージセンサは自己走査型フォトダイオードアレイであり， 512個の光検出素子が28μm の間隔で並べられており，受光素子の位置を測定することにより，変位計から路面までの距離が求められる。キャリブレーションの結果，この非接触型変位計は，約0.16mmの分解能を有することが分かった。

（２）プロフィルメータの原理

ｉ）対称系プロフィルメータ

図－2.2 のように３個の非接触型変位計を一直線上に等間隔δ_sで配置し，それぞれ路面までの距離h_A，h_B，h_Cを測定する。基準線を直線ＡＢとすると，Ｃ点の高さY_Cは，

$$
\begin{aligned}
Y_C &= 2Y_B - Y_A - (h_A - 2h_B + h_C) \\
&= - (h_A - 2h_B + h_C) = u_1
\end{aligned}
\tag{2.1}
$$

で与えられる。プロフィルメータがδ_sだけ前進すると，h_B'，h_C'，h_D' が測定され，基準線からＤ点までの高さY_Dは次式で与えられる。

$$
\begin{aligned}
Y_D &= 2Y_C - Y_B - (h_B' - 2h_C' + h_D') \\
&= Y_C + u_1 - 0 + u_2 \\
&= Y_C + \sum_{i=1}^{2} u_i
\end{aligned}
\tag{2.2}
$$

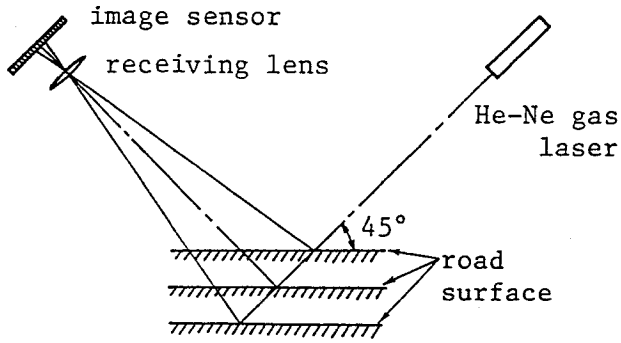
このようにδ_sずつ離れた地点の基準線からの高さが，Ｄ点の高さと同様に順次計算される。上の２式において，u_iはプロフィルメータの高さやピッチングの変化の影響を受けずに，変位計のワーキングレンジ内ならば得られる測定値に関する特性値である。

ii）非対称系プロフィルメータ

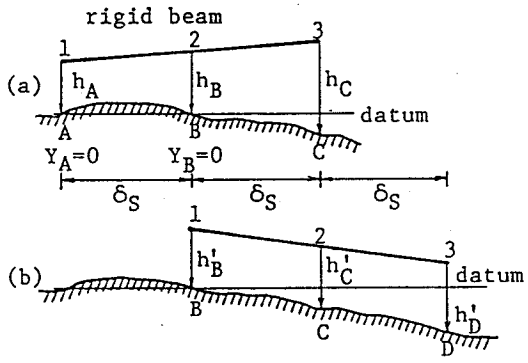
短波長の波の測定は，δ_sを小さくすることにより可能であるが，路面粗度の影響は避けがたく，測定精度が悪くなる。そこで図－2.3 のような非対称系プロフィルメータにより，短波長の波を測定できるようにする。測定値h_A，h_B，h_Cより，直線ＡＢを基準線としたときのＣ点の高さY_Cは次式により示される。

$$
\begin{aligned}
Y_C &= \frac{m}{m-1} Y_B - \frac{1}{m-1} Y_A + w_1 \\
w_1 &= - (h_C - \frac{m}{m-1} h_B + \frac{1}{m-1} h_A)
\end{aligned}
\tag{2.3}
$$

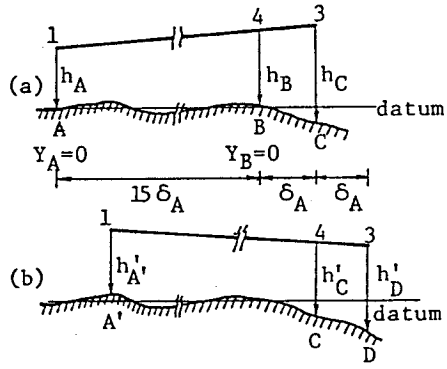
プロフィルメータがδ_Aだけ前進すると，h_A'，h_C'，h_D' が測定され，基準線からＤ点までの高さY_Dは次式で与えられる。



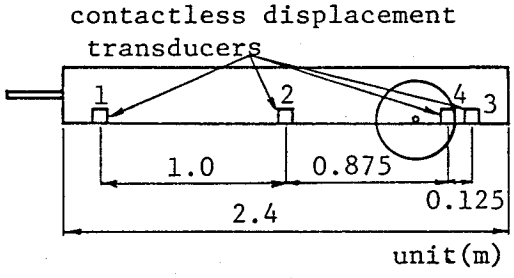
図－2.1　非接触型変位計



図－2.2　対称系プロフィルメータ



図－2.3　非対称系プロフィルメータ



図－2.4　光学式路面プロフィルメータ

$$Y_D = \frac{m}{m-1} Y_C - \frac{1}{m-1} Y_A' + w_2$$
$$w_2 = -\left(h_D' - \frac{m}{m-1} h_C' + \frac{1}{m-1} h_A' \right) \tag{2.4}$$

ここで，w_1，w_2 は非対称系における測定値に関する特性値である。また，$Y_A' = 0$ と仮定する。このようにδ_A ずつ離れた地点の高さが順次求まる。非対称系プロフィルメータでは，路面粗度の影響が大きく，長波長までの波を測定できない。そこで，長波長の波を対称系，短波長の波を非対称系プロフィルメータで測定し，それらを重ね合わせることにより広範囲の波長の波を測定できる。

（３）光学式路面プロフィルメータ

図－2.4 のような光学式路面プロフィルメータを製作した。本プロフィルメータにより0.125m毎の路面凹凸を測定できる。 CH.1，CH.2，CH.3で対称系，CH.1，CH.4，CH.3で非対称系の機能を有する。 本プロフィルメータの操作はマイコンで制御し， 測定データもＲＡＭに記憶し，それをマイコン本体に装備しているカセット磁気テープに転送し保存する。

２.２.２　プロフィルメータの問題点とその対策

（１）基準線の傾きの影響

前項で仮定した基準線は必ずしも水平ではないので，計算された路面の高さは，基準線の傾きを含むことになる。これを補正するために，測定区間の始点と終点を水準測量することによって基準線の傾きを補正できる。

（２）非対称系における初期値の影響

非対称系プロフィルメータ（図－2.3） において，ＡＢ間の基準線からの高さを測定開始時に０と仮定しているために誤差が生じる。しかし，この誤差は，測定開始点より離れるに従い減少するため，測定区間の20m手前から測定開始することにより，この誤差の影響を無視できる程度に小さくすることができる。

（３）車体のひずみの影響

プロフィルメータの車体に永久ひずみがあれば，変位計は一直線に並ばないことになり，前項の測定原理が成立しない。そこで，定盤上における４個の変位計の測定値を基準値とし，式(2.1)～式(2.4)におけるh_iに（h_i－基準値ｉ）を代入することにより，この問題は解決する。

（４）基準値の測定誤差

この基準値測定に含まれる誤差が，路面凹凸に２次放物線的な誤差を生じさせる。この誤差の補正には，測定区間の$\ell/2$点を水準測量し，$\ell/2$点の路面凹凸値がこの測量値に合うように基準値を決定する。

２．２．３　データ処理法

（１）ノイズの除去

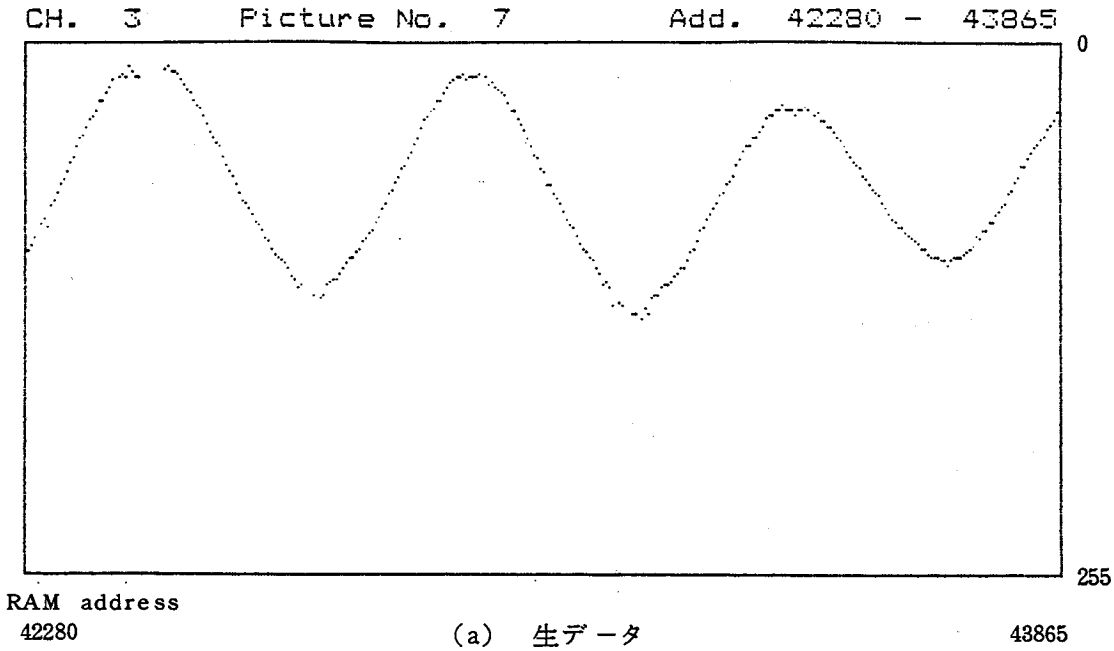
測定で得た生データには，どうしても路面粗度の影響などにより欠測が起こったり，ノイズが入ったりする。そこで，データ解析に先立ち，欠測の補正およびノイズの除去を行わねばならない。欠測の補正およびノイズの除去には，それらの前後のデータを用いて線形補間を行う。生データならびに，欠測の補正およびノイズの除去を行ったデータを図－2.5 に示す。

（２）１ｍごとおよび 0.125ｍごとの平均値

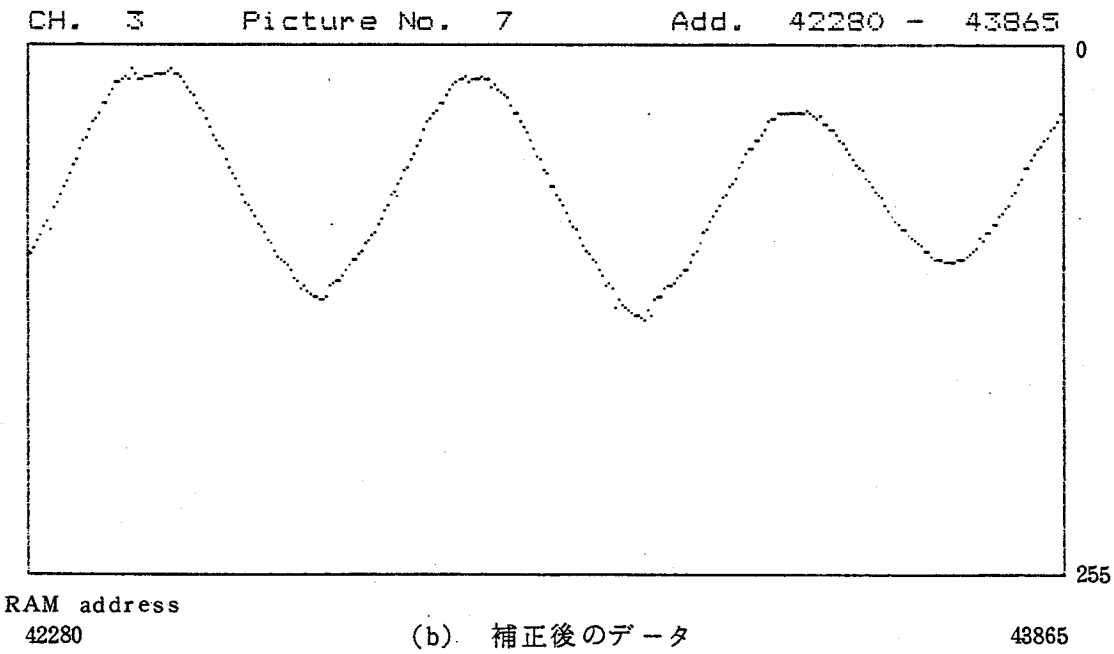
２．２．１項で示したように，本プロフィルメータの測定原理は，３個の非接触型変位計が一直線上に配置されていることにより，δ_s およびδ_A ごとの路面の高さを順次求めるものである。実際の測定に際しては，ステップ間隔の誤差，プロフィルメータの横方向への動き，それに路面粗度の影響を受け，中央と後の変位計は，１つ前のステップにおいて測定したものと同一の地点を測定するとは限らない。これでは２．２．１項の理論が成立しないことになるが，これらの影響を極力抑えるために，前後$\pm\delta_s/2$ および $\pm\delta_A/2$区間内で，その測定値の平均値h_iをとり，それを各地点の測定値とする。

本研究では，$\delta_s=1$ｍ，$\delta_A=0.125$ｍ であるので，１ｍごとおよび 0.125ｍごとの平

均値を算出して，ＲＡＭの空領域に記憶する。



(a) 生データ



(b) 補正後のデータ

図－2.5 欠測データの補正およびノイズの除去

（３）対称系および非対称系の路面凹凸値

以上のようにして求まった１ｍごとの値を用いて，対称系の路面凹凸を算出する。その結果について，基準線の傾きを補正したとき，測定区間の$\ell/2$点の路面凹凸が，水準測量に合うように，基準値を調整する。

0.125m ごとの測定値を用いた非対称系の路面凹凸値についても，基準線の傾きおよび基準値の測定誤差の影響を，対称系の場合と同様に除去する。

（４）対称系と非対称系の路面凹凸値の重ね合わせ

対称系プロフィルメータは，長波長の測定が可能であり，非対称系プロフィルメータにより短波長の波を測定する。　この特性を利用して，対称系プロフィルメータによってδ_S(1m)ごとの路面凹凸値を定め，非対称系プロフィルメータで求まるδ_A(0.125m)ごとの波形をこの上に重ねることにより短波長から長波長までの路面凹凸が求められる。具体的な方法は以下に示す通りである。

図－2.6 において，

j :　δ_S ごとの位置（1, 2, 3, ･･･），

i :　δ_A ごとの位置（1, 2, 3, ･･･, δ_S/δ_A），

$\bar{Y}_S(j)$:　対称系によって求められるδ_S ごとの路面の高さ，

$\bar{Y}_A(j,i)$:　非対称系によって求められるδ_A ごとの路面の高さ，

$\bar{\bar{Y}}_A(j)$:　j 点の前後 $\pm\delta_S/2$区間における$\bar{Y}_A(j,i)$ の平均値，

とすると，$\bar{Y}_S(j)$ と$\bar{\bar{Y}}_A(j)$ とは理論的に一致するので，次のような補正が必要となる。

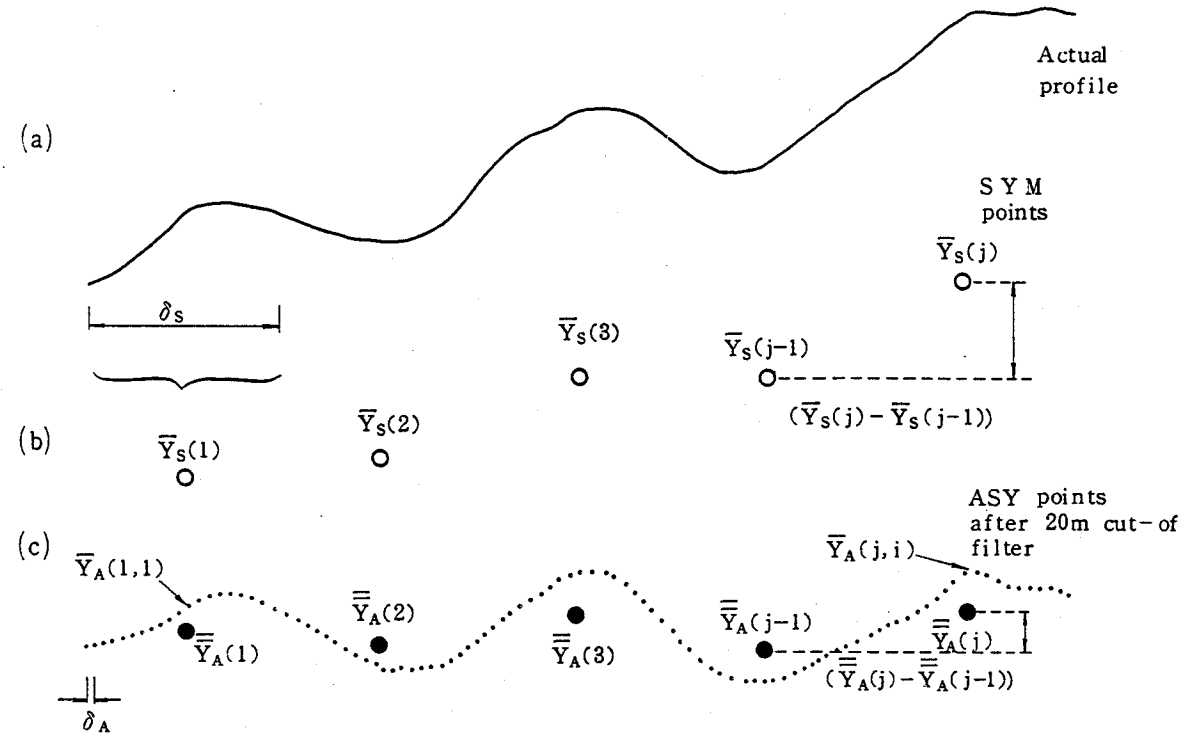
傾きの補正

$$R_{ji} = [\ \{\bar{Y}_S(j+1)-\bar{Y}_S(j)\} - \{\bar{\bar{Y}}_A(j+1)-\bar{\bar{Y}}_A(j)\}\ ]\left(\frac{\delta_A}{\delta_S}\right)i \qquad (2.5)$$

初期値の補正

$$Y_R(j,1) = \bar{Y}_S(j) \qquad (2.6)$$

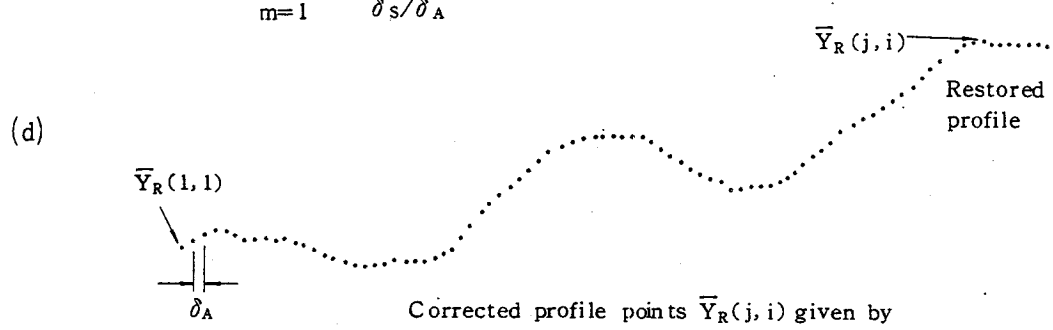
これらの補正によって対称系と非対称系を重ね合わせて求められる路面の凹凸を$Y_R(j,i)$とすると，



Correction (R_{ji}) to be added to filtered ASY points $\bar{Y}_A(j,i)$ in the restoration process over step lengths δ_S between ASY profile point averages $\bar{\bar{Y}}_A(j-1)$ and $\bar{\bar{Y}}_A(j)$ is given by:

$$R_{ji} = [\ (\bar{Y}_S(j)-\bar{Y}_S(j-1)\ ) - (\bar{\bar{Y}}_A(j)-\bar{\bar{Y}}_A(j-1)\ )\ ](\delta_A / \delta_S)i \qquad \text{For } i = 1, 2, \cdots, \delta_S/\delta_A$$

$$\text{Where } \bar{\bar{Y}}_A(j) = \sum_{m=1}^{\delta_S/\delta_A} \frac{\bar{Y}_A(j,m)}{\delta_S/\delta_A}$$



Corrected profile points $\bar{Y}_R(j,i)$ given by

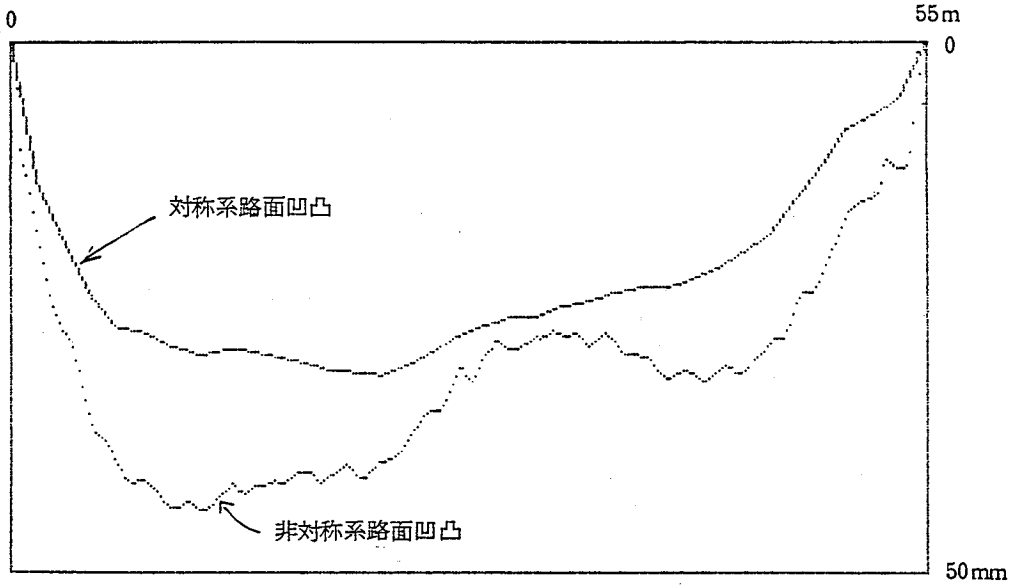
$$Y_R(j,i) = \bar{Y}_A(j,i) + R_{ji} + \{\bar{Y}_S(j) - \bar{Y}_A(j,1)\}$$

Where

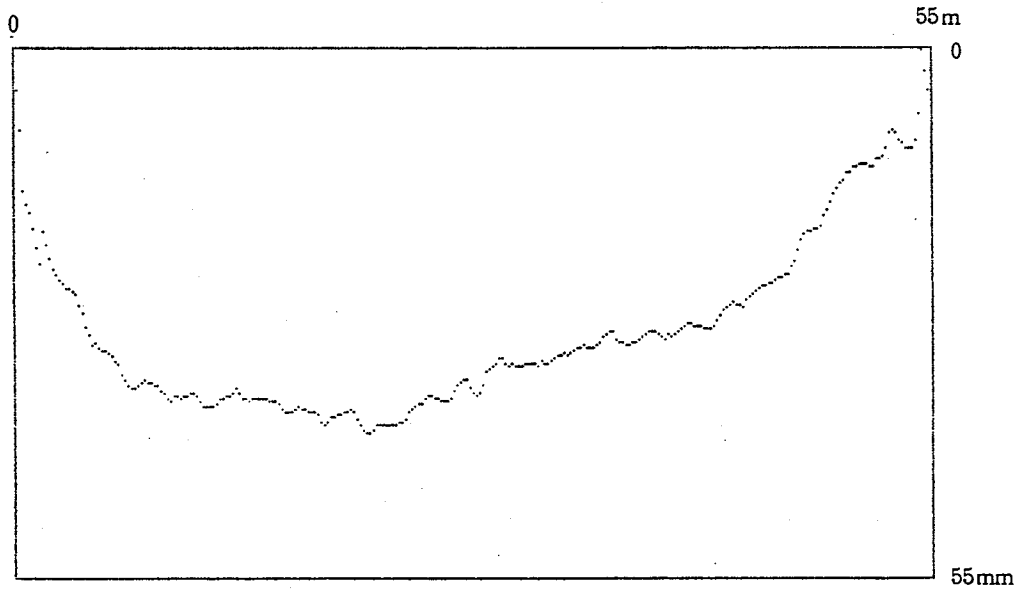
$j = 1, 2, \cdots\cdots$

$i = 1, 2, \cdots\cdots, \delta_S/\delta_A$

図－2.6　非対称系測定値の対称系測定値への重ね合わせ原理[8)]



（1）　対称系測定値および非対称系測定値



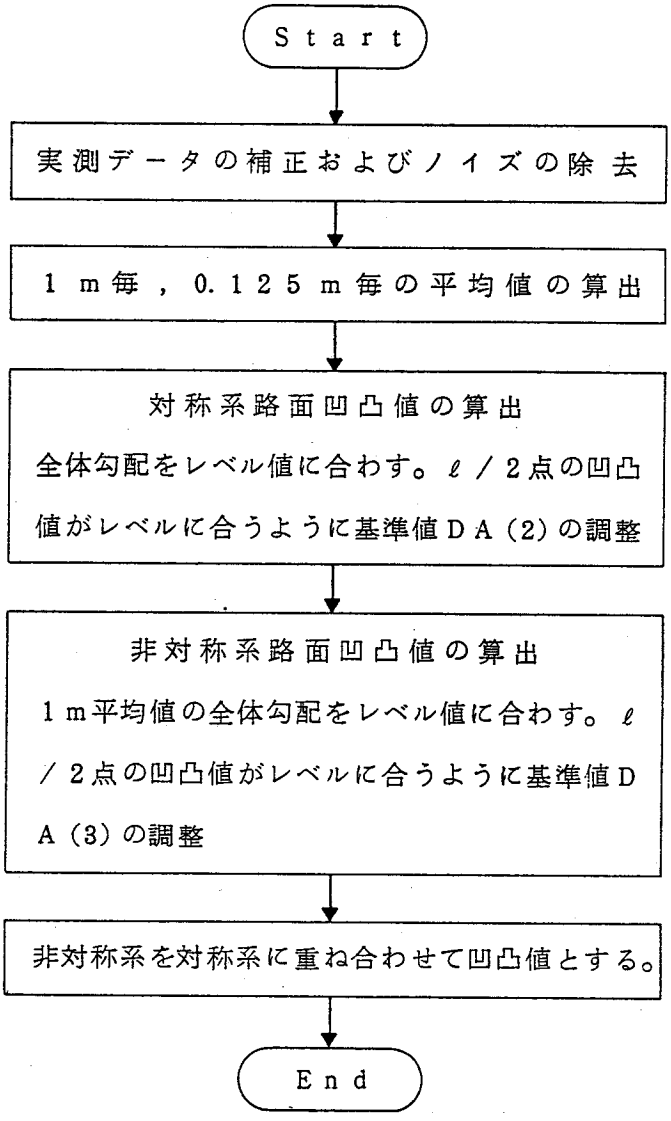
（2）　重ね合わせた路面凹凸

図－2.7　非対称系測定値の対称系測定値への重ね合わせ例

$$Y_R(j,i) = \bar{Y}_A(j,i) + R_{ji} + (\bar{Y}_S(j) - \bar{Y}_A(j,1)) \qquad (2.7)$$

となる。対称系測定値と非対称系測定値の重ね合わせの例を図－2.7 に示す。

以上に述べた路面凹凸算定のフローチャートを図－2.8 に示す。



図－2.8　路面凹凸算定フローチャート

2.2.4 プロフィルメータの検定

本プロフィルメータの測定結果を，水準測量により求められた路面凹凸と比較検討して，本プロフィルメータは，最高速度30km／h，0.4mmの精度で，短波長から長波長まで(0.25～50m）の路面凹凸を測定できることを確認した[9),10)]。

2.3 路面凹凸の測定[11),12)]

2.3.1 測定箇所

阪神高速道路において，公団基準に照らして種々の状態の路面凹凸を選定し，表－2.1に示す３箇所において路面凹凸の測定を行った。

（１）環状線恵美須町入口

悪い路面として選んだ恵美須町入口は，橋長21mの２車線の直線桁橋である。高架橋への急な昇り坂であり，路面はかなり古く，外観も路面状態は悪かった。

（２）大阪湾岸線大和川橋梁付近

良い路面として選んだ大阪湾岸線は，橋長50mの６車線の直線桁橋である。開通後６ケ月しか経過しておらず，交通量も少なく，路面状態は非常に良かった。

表－2.1 路面凹凸測定箇所

測定年月日	測定箇所	路面状態
S.58. 3. 8	環状線恵美須町入口進入側道	極めて悪い
S.58. 3.11	大阪湾岸線大和川橋梁付近本線	良
S.58.12.10	守口線城北付近本線	種々の状態有り

（３）守口線城北付近

守口線では，隣接している所に種々の舗装状態がある箇所を選定した。下り線桁管理番号が，守Ｇ62，守Ｇ63，守Ｇ64，および上り線守Ｇ58の４箇所である。桁橋はいずれも橋長35m，総幅員17.6mの４車線のほぼ直線路で下り方向にやや低くなっている。

縦断方向路面凹凸の良悪の判定データがないために，測定対象の選定条件として，わだち堀れおよびひび割れ等による舗装点検結果を用いた。橋体，線形，交通条件の同一なものの内より，舗装点検結果において路面状態の「悪い」，「普通」，「良い」ものを選んだ。舗装状態が「悪い」とされる守Ｇ62は，わだち堀量が20mm以上であり，阪神高速道路公団の補修基準を上回り，路面凹凸測定後の昭和59年１月に補修された。「良い」とされる守Ｇ58は，昭和58年10月に路面舗装を打ち替えたばかりで，路面凹凸性状は良好である。「普通」なものとしてわだち堀量17mmの守Ｇ63，同12mmの守Ｇ64を選定した。

２．３．２　測定方法

総測定区間長としては，測定区間長に，４つの変位計測定値の平均化距離を考慮して，測定開始点前0.5m，同終了点後2.5m，さらに初期誤差の除去区間として20mを加えた長さになる。各測定区間の開始点と終了点およびその中央点で水準測量を行った。

測定時間は，一般交通に伴う振動の影響を極力おさえること，レーザの受光条件が良好などの理由で，通行車両の少ない深夜に行った。

プロフィルメータのサンプリング時間間隔，走行速度については，試作検定結果より，２msec，20～30km／h で行った[9),10)]。

測定ラインは自動車の車輪の走行頻度が比較的高い所として，環状線恵美須町入口および大阪湾岸線大和川橋梁付近においては，

Ａライン　…　路肩より内側0.8m

Ｂライン　…　中央境界線より0.9m

の位置に設けた。また，守口線城北付近では

ＡおよびＣライン　…　左境界線より内側0.7m

ＢおよびＤライン　…　中央境界線より1.0m

の位置に設けた（Ａ，Ｂは下り，Ｃ，Ｄは上りである）。

2.3.3 測定結果

各測定箇所の代表的な路面凹凸の全体勾配を除去した図を図－2.9(1)～(3) に示す。図－2.9(1)より，環状線恵美須町入口における路面凹凸量はやはり大きい。図－2.9(2),(3)より，大阪湾岸線大和川橋梁付近および守口線城北付近の路面凹凸は，橋梁の支間長を1/2波長とする半波形を示している。

2.4 路面凹凸パワースペクトル密度関数[11),12)]

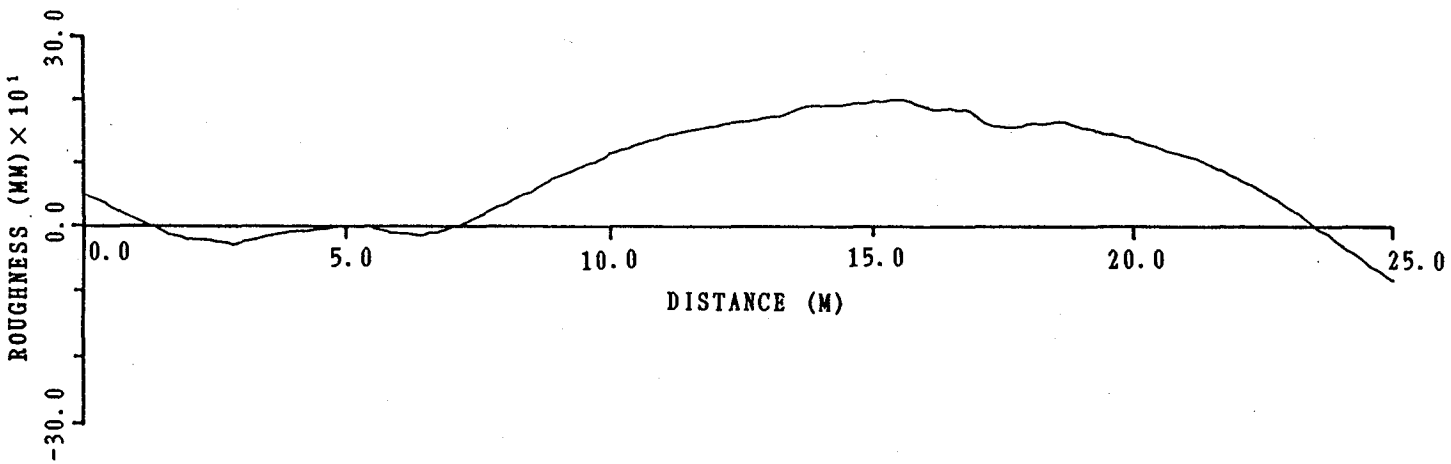
2.4.1 路面凹凸パワースペクトル

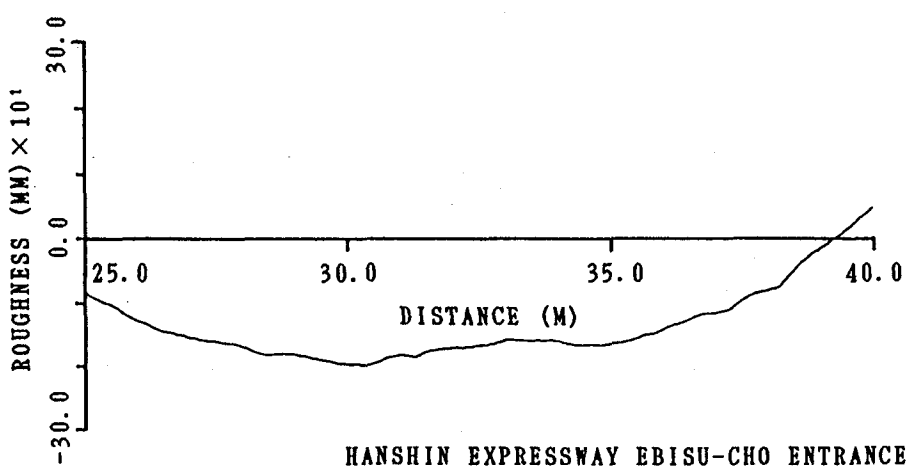
路面凹凸の性状については，路面を平均値０の定常ランダム過程とみなして，パワースペクトル密度で表す方法が一般的である。測定された路面凹凸波形をＦＦＴ法（高速フーリエ変換法）を用いてスペクトル解析し，そのパワースペクトルを求める。各測定箇所ごとに測定ラインによる比較が出来るように，路面凹凸スペクトルを重ね合わせて図－2.10(1)～(3)に示す。路面凹凸の良否の判定基準として用いられる ISO評価基準[13)] をこれらの図に併記する。これは走行自動車の乗心地より決められたものである。参考のために，名神高速道路の舗装完了直後に測定された路面凹凸パワースペクトル密度を[2)] ISO評価基準とともに図－2.11に示す。また，路面凹凸パワースペクトル密度を周波数領域において 0～4c/mの範囲で積分し，その平方根より路面凹凸の標準偏差が求められ，これにより簡易的に路面凹凸の良否が判定できる。得られた凹凸の標準偏差を表－2.2 の右欄に掲げる。

2.4.2 路面凹凸スペクトルの近似関数

（１）近似関数

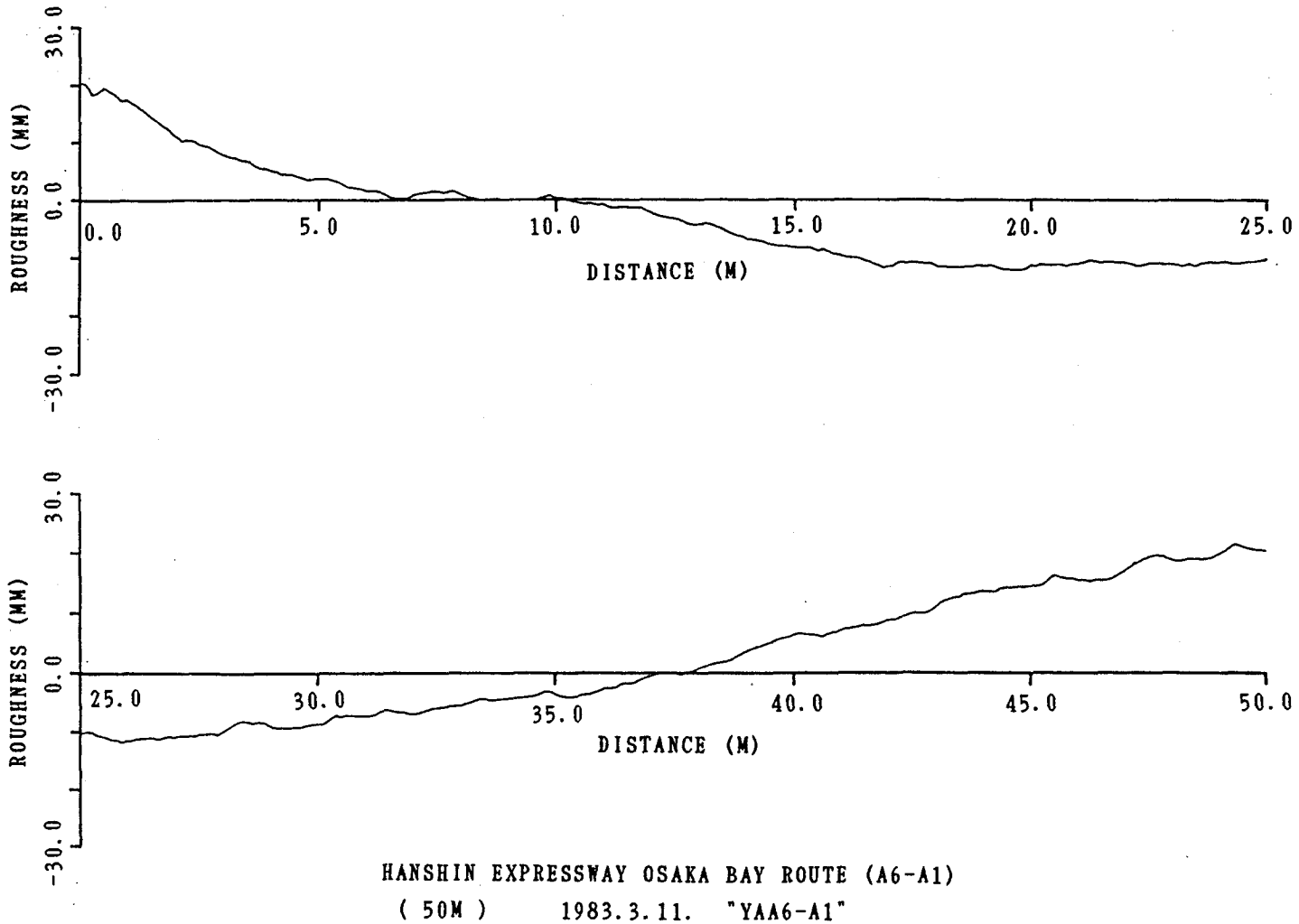
路面凹凸の性状を評価するため，得られたパワースペクトル密度$S_{z_0}(\Omega)$を指数関数に近似し，次式で表す。



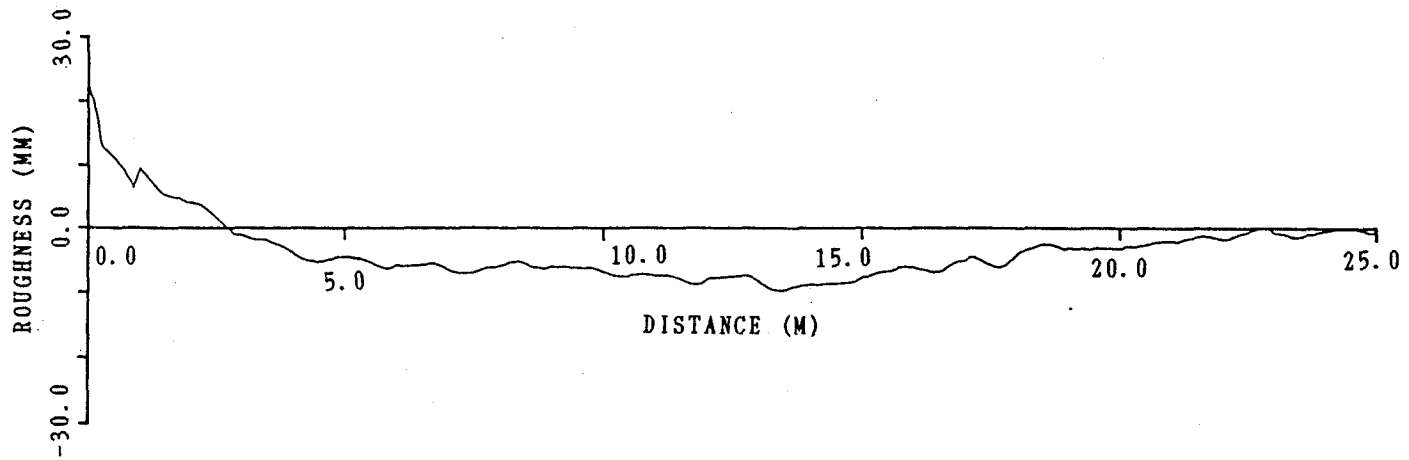


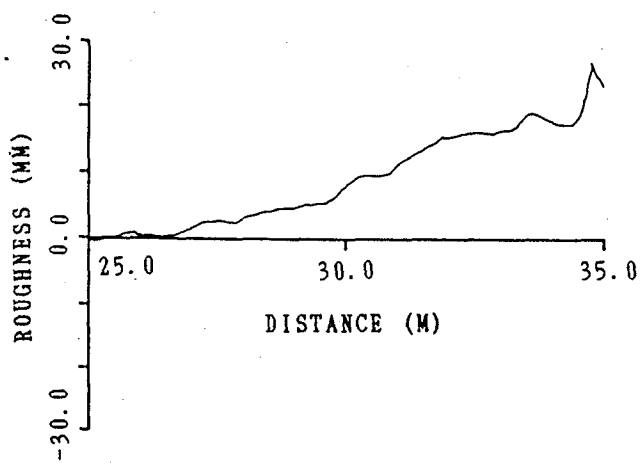
HANSHIN EXPRESSWAY EBISU-CHO ENTRANCE ROAD (A5-A11) 2ND
(40M)　　1983.3.8.　"EHA5-112"

図－2.9(1)　路面凹凸図（ＥA5-11）　環状線恵美須町入口



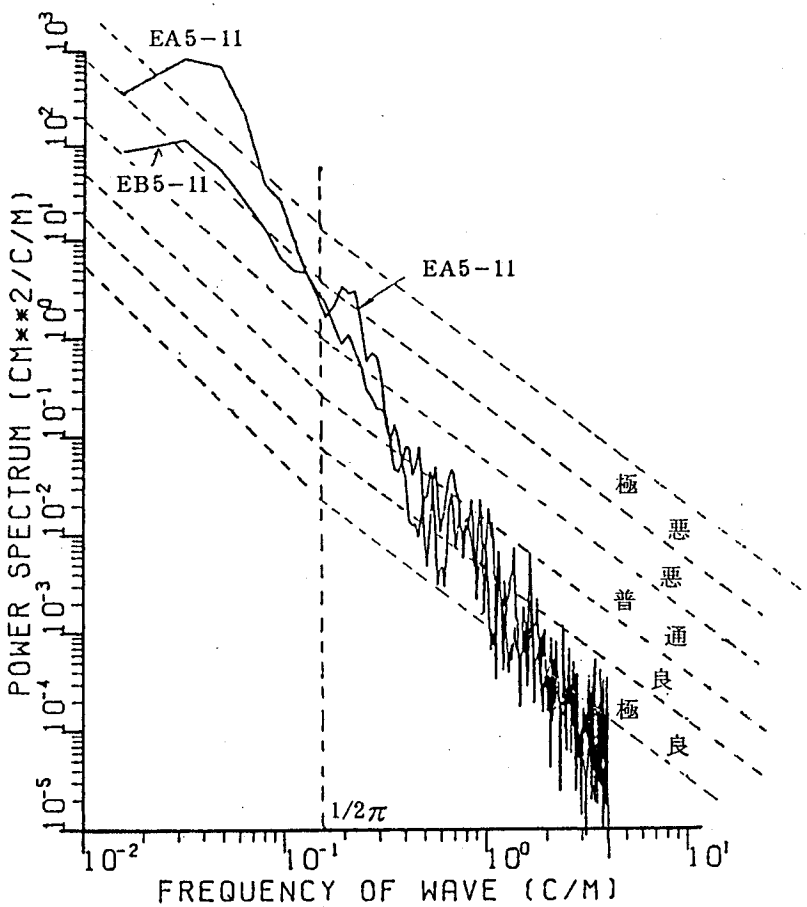
図－2.9(2) 路面凹凸図（ＹA6-1） 大阪湾岸線大和川橋梁付近



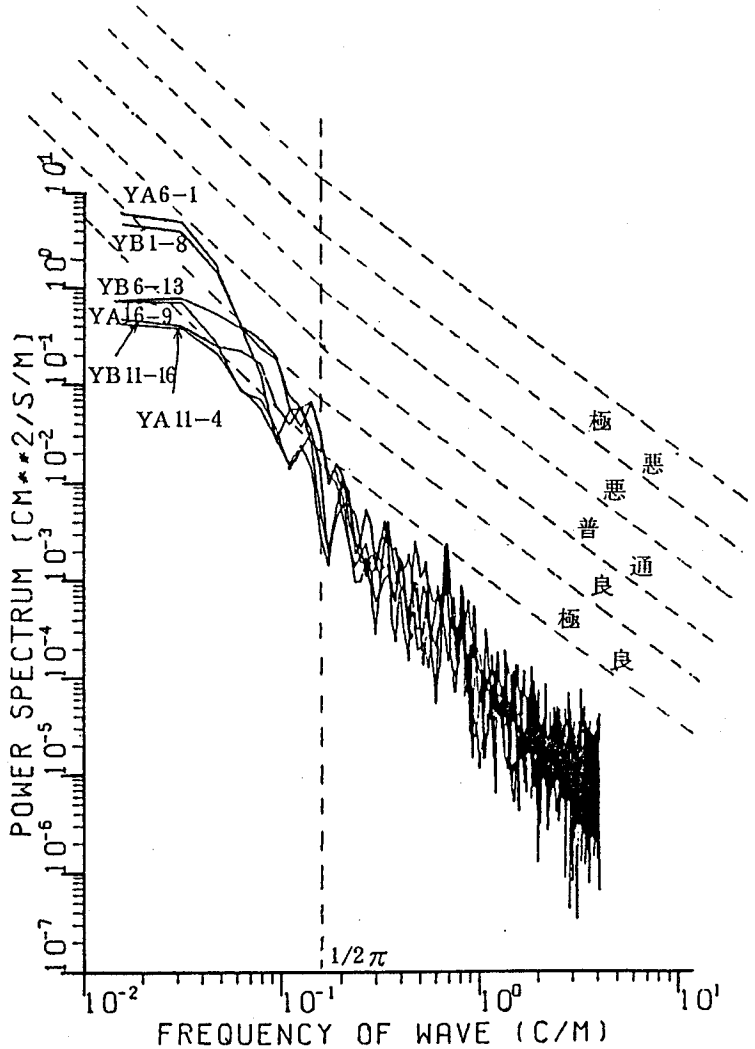


HANSHIN EXPRESSWAY MORIGUCHI LINE (A3-A1) 1ST
(35M) 1983.12.10. "PR62A1"

図－2.9(3) 路面凹凸図（G62A1） 守口線城北付近

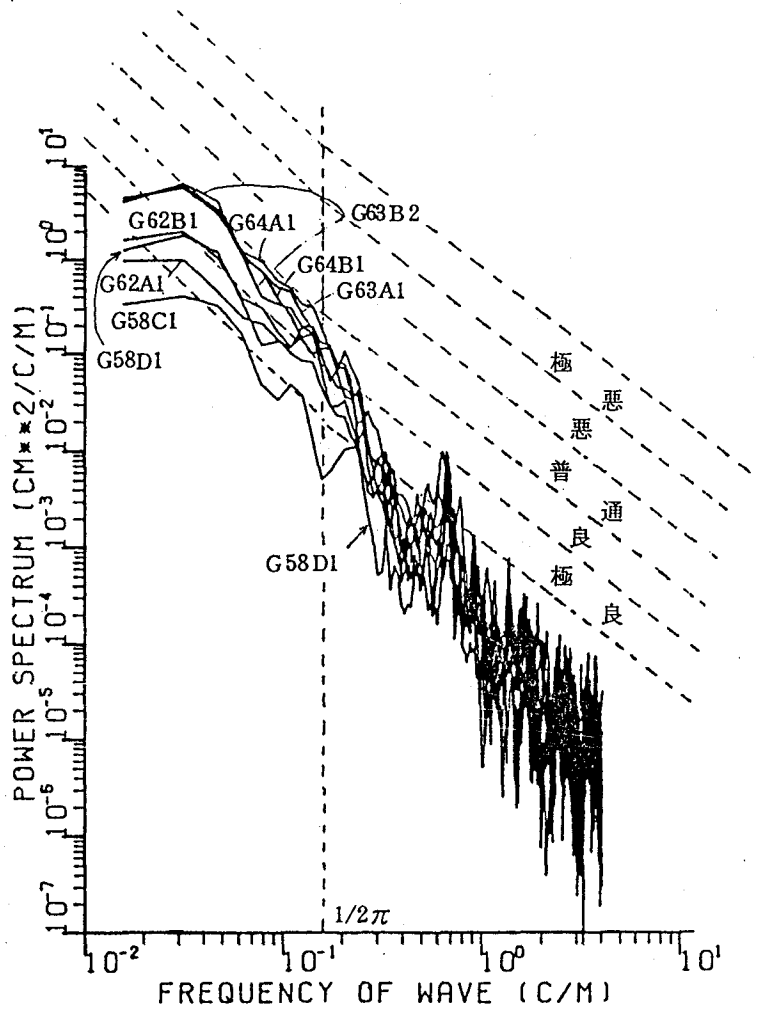


(1)　環状線恵美須町入口



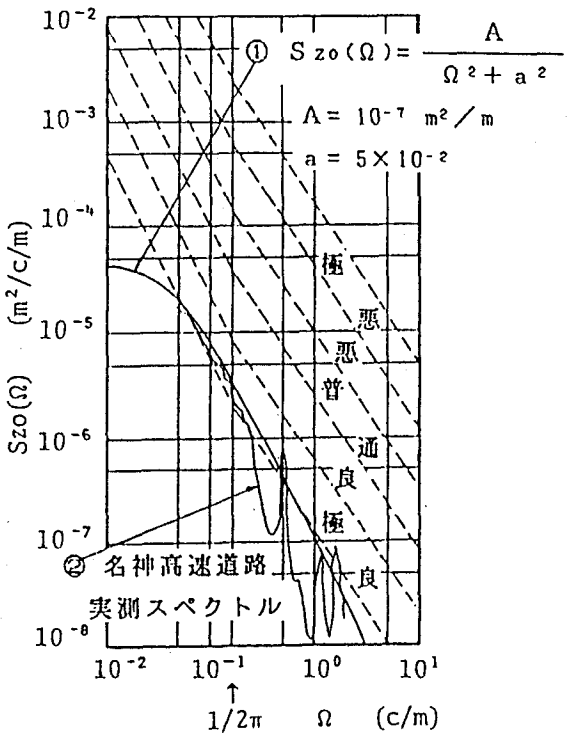
(2)　大阪湾岸線大和川橋梁付近

図−2.10　実測路面凹凸パワースペクトル密度およびＩＳＯ評価基準



(3)　守口線城北付近

図－2.10　実測路面凹凸パワースペクトル密度
およびＩＳＯ評価基準



図－2.11　路面凹凸パワースペクトルとＩＳＯ評価基準

表－2.2　パラメータα，n，βの値および標準偏差

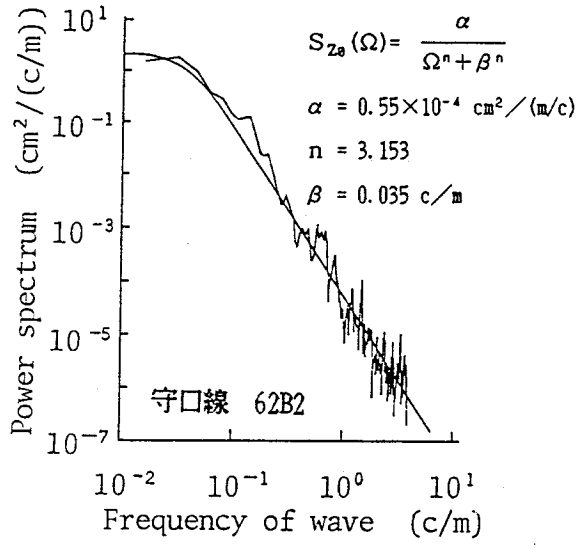
	桁 No.	α (cm²/(m/c))	n	β (c/m)	標準偏差 (mm)
恵美須町入口	A-5-A11-2	0.004952	3.161	0.025	58.6
	B-5-B11	0.002746	3.210	0.035	23.2
	平均	0.003849	3.185	0.0303	40.9
大阪湾岸線大和川橋梁付近	A6-A1	0.000102	2.401	0.005	4.99
	A11-A4	0.000077	2.380	0.025	1.51
	A16-A9	0.000106	2.424	0.02	1.87
	A16-A9-2	0.000108	2.301	0.01	2.13
	B1-B8	0.000113	2.239	0.005	4.48
	B6-B13	0.000118	1.923	0.005	2.18
	B11-B16	0.000108	2.072	0.015	1.75
	B11-B16-2	0.000146	2.145	0.015	2.08
	平 均	0.000110	2.236	0.013	2.62
守口線	62A1	0.000102	2.804	0.035	2.42
	A2	0.000094	3.085	0.045	2.95
	B1	0.000074	2.981	0.03	3.21
	B2	0.000055	3.153	0.035	3.06
	平 均	0.000081	3.006	0.036	2.91
	63A1	0.000229	3.097	0.04	5.35
	A2	0.000208	2.975	0.035	5.21
	B2	0.000114	3.107	0.03	5.35
	平 均	0.000184	3.060	0.035	5.30
	64A1	0.000282	2.766	0.04	5.43
	B1	0.000306	2.427	0.015	5.30
	B2	0.000256	2.588	0.02	5.25
	平 均	0.000281	2.593	0.02	5.33
	58C1	0.000217	2.469	0.05	1.62
	C2	0.000145	2.451	0.04	1.57
	D1	0.000146	2.517	0.02	3.09
	平 均	0.000169	2.479	0.037	2.12

$$S_{z0}(\Omega) = \frac{\alpha}{\Omega^n + \beta^n} \tag{2.8}$$

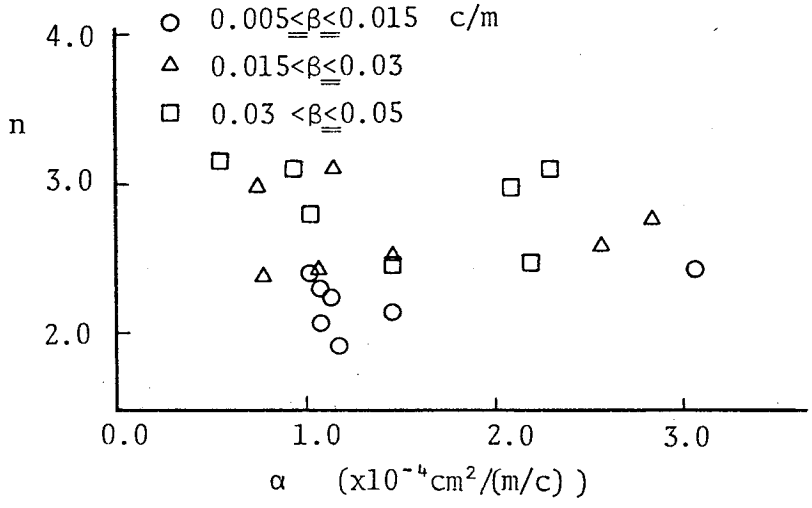
ここに，Ωは路面周波数，αは路面の平坦性を表す平滑度パラメータ，nは周波数によるパワーの分布を示す指数，βはΩ→0のとき，$S_{z0}(\Omega)$が無限大に発散しないための分布

形状パラメータを表す。実測パワースペクトル密度のうち，路面周波数が0.157c/m以上のデータを用いて最小２乗法により，式(2.8) のβを省略して係数αとnを求める。さらに，路面周波数の小さい領域において実測パワースペクトル密度が式(2.8) によく適合するようにβを決定する。

実測路面凹凸のパワースペクトル密度とその近似関数式(2.8) の一例を図－2.12に重ねて示す。本研究において得られた路面凹凸スペクトルの近似関数のパラメータα，n，βを表－2.2 に掲げる。



図－2.12 パワースペクトル密度と近似関数



図－2.13 近似関数のパラメータ分布

表－2.3　スペクトルのパラメータ範囲

	実測スペクトル	文献 4)	解析範囲
α	0.000055～0.0003	0.001 ～ 0.06	0.0001～0.003
n	1.9 ～ 3.1	1.3 ～ 2.5	1.5 ～ 3.0
β	0.005 ～ 0.05	0.06 ～ 0.08	0.01 ～ 0.08

（２）近似関数のパラメータ値と路面凹凸の評価

表－2.2 において恵美須町での測定結果は，α値が他の場合に比べて１桁も大きく，測定場所は目視によっても極めて路面凹凸の状態は悪かったが，そこは本線ではなく入口側道であり，走行車は徐行するので使用上問題はない。そこで，恵美須町での測定結果を除いてパラメータの分布を図－2.13に示す。パラメータα，n，βの値から路面凹凸性状を一概に判断はできないが，α，nの値が大きい程，またβ値が小さい程スペクトル密度が大きく，路面凹凸が大きくなる傾向がある。図－2.13においてβ値の大きさにより３段階に分けた場合，それぞれのグループにおいてα値はおおよそ 1.0×10^{-4}～3.0×10^{-4} cm^2／(m/c) の範囲にばらついている。そして，β値が小さい場合はn値も比較的小さく，逆にβ値が大きい場合はn値も大きい傾向がある。式(2.8) から明らかに，n値とβ値の影響がある程度消し合い，むやみに路面凹凸を大きくすることにはならない傾向にある。

平均的に，大阪湾岸線大和川橋梁付近ではα値，n値が他に比較して小さく，路面の良好さを表している。守口線城北付近の路面凹凸に関して，阪神高速道路公団の補修基準を上回り舗装状態が「悪」とされたG62は同じく「普通」とされたG63に比較して，標準偏差およびα値，n値共に小さく，縦断方向路面凹凸は比較的良いと判断される。舗装状態の評価基準として横断方向のわだち堀れおよびひび割れのみならず，縦断方向の凹凸も併せて考慮するのが良いと思われる。

本研究において得られたパラメータα，β，nの範囲を文献4)で示された範囲と共に表－2.3 に掲げる。ここでの実測α値は文献4)における値より１桁から２桁小さいが，これは阪神高速道路と一般国道・県道との差異によるものと考えられる。文献4)におけるnの平均値は1.94であり，また ISO評価基準の勾配は路面周波数が$1/2\pi$ c/mより大きい高周波域では約1.5，$1/2\pi$ c/m より小さい領域では約2.0 である。しかし，今回の測定結果では

n値が小さい所でも平均2.2 で，全体的にn値が大きく，路面凹凸スペクトルの勾配がきつくなっている。路面凹凸波形は，橋梁供用後ある程度の交通荷重を受けると，支間長ごとに現れる継手部の断差を有し，かつ前述のように支間長を 1/2波長とする半波形を示す。このことよりn値は支間長の影響を受ける。今回の測定対象の支間長は恵美須町で21m，湾岸線で50m，守口線で35mであった。以上のように今回得られた路面凹凸スペクトル密度のパラメータの特性は，阪神高速道路における数例の測定結果であり，今後の測定データの蓄積によりパラメータの分布性状をさらに定量的に明らかにすべきであると考える。

第4章において，橋梁の走行荷重による不規則振動のパラメトリック解析を行うが，そこで用いる路面凹凸スペクトルのパラメータ値を，本研究で得られた値および文献4)の値を参考にして表－2.3 の右欄に掲げるように決定した。

2.5 結 言

本章において明らかになった事項は次の通りである。

(1) レーザー光線による非接触型変位計を4個用いた光学式路面プロフィルメータを試作した。本プロフィルメータは，最高速度30km／h，0.4mmの精度で，短波長から長波長まで(0.25～50m)の路面凹凸を測定できるものである。

(2) 路面凹凸状態の異なる阪神高速道路の3箇所において，本プロフィルメータにより路面凹凸を測定した。その特性をパワースペクトル密度の近似関数 $S_{z0}(\Omega)=\alpha/(\Omega^n+\beta^n)$ の各パラメータにより評価できた。

(3) 今回の実測により得られたパラメータα値およびβ値は，文献 4）の値よりかなり小さく，逆にn値は文献 4）の場合より大きい値が目だつ。これらの傾向は，阪神高速道路と一般国道・県道との差異によるものと考えられる。

(4) 橋梁の走行荷重下の不規則振動に用いる路面凹凸スペクトルのパラメータ値の範囲を，本研究で得られた値および文献 4）の値を参考にして決定した。

参考文献（第２章）

1) 兼重一郎：道路面凹凸特性の解析，いすず技報，No.50，pp.1-7，1967.

2) 川合平夫・森崎健二：自動車走行路面の性質と振動乗心地への関連性，三菱重工技報，Vol.2，No.2，pp.20-28，1965.

3) 望月常次・栗原克行：路面の凹凸の計測法，自動車技術，Vol.34，No.11，pp.1184-1189，1980.

4) 本田秀行・城戸隆良・梶川康男・小堀為雄：道路橋の路面凹凸パワースペクトル密度に関する調査，土木学会論文報告集，第315号，pp.149-155，1981.11.

5) 本田秀行・梶川康男・小堀為雄：道路橋の伸縮装置部の凹凸性状，土木学会論文報告集，第324号，pp.173-176，1982.8.

6) Still,P.B. and Winnert,M.A.: Development of a contactless displacement transducer, TRRL Laboratory Report, No.690, 1975.

7) Dickerson,R.S. and Mace,D.G.W.: A high-speed road profilometer-preliminary description, TRRL Supplementary Report, No.182, 1976.

8) Still,P.B. and Jordan,P.G.: Evaluation of the TRRL high-speed profilometer, TRRL Laboratory Report, No.922, 1980.

9) 川谷充郎・小松定夫：光学式路面プロフィルメータの試作と路面不整の統計学的研究，第38回土木学会年次学術講演会講演概要集，Ⅰ-262，1983.9.

10) Komatsu,S. and Kawatani,M.: Road profilometer with optical displacement transducers, Technology Reports of the Osaka University, Vol.33, No.1731, pp.377-384, October, 1983.

11) 小松定夫：路面不整の統計学的特性と道路橋の衝撃係数に関する研究，大阪大学工学部土木工学科研究報告書，1985.3.

12) 川谷充郎・小菅　朗・嶋田玲志・小松定夫：路面不整の統計学的特性と道路橋の衝撃係数，構造工学論文集，Vol.33A，pp.459-466，1987.3.

13) ISO(International Organization for Standardization) : Proposals for generalized road inputs to vehicles, ISO/TC108/WG9 Document No.5, 1972.

第３章　道路橋の走行荷重下の動的応答に関する数値シミュレーションと現地実験

３．１　緒　言

これまでの橋梁の走行荷重による動的応答に関する理論的および実験的研究によれば，動的応答は，橋梁と自動車の振動特性，走行速度，車頭間隔および路面凹凸などの影響を受ける[1)-6)]。 近年，路面凹凸を考慮した道路橋の走行荷重による動的応答について，数多くのシミュレーション解析[7),8)] あるいは不規則振動論に基づく研究[9)-14)]がなされている。それらの結果は，路面凹凸の良否により，橋梁の動的応答が著しく相違することを明らかにしている。それにもかかわらず，自動車走行による橋梁の動的たわみおよび動的ひずみの実測と，それに対応する理論解析値との比較検討を，路面凹凸の影響を含めて行ったものは極めて少ない現状である[15)]。

本章では，橋梁と走行荷重の解析モデルの妥当性を検証するために，実橋において試験車走行による動的応答および橋面凹凸の実測を行い，その実験結果と解析結果との比較検討を行う。通常の道路橋は２車線以上の車線を有するために，偏心走行による動的応答は，橋桁の曲げ振動ではなく曲げねじり連成振動となる。実験結果と比較するための動的応答解析では，曲げ振動方程式のみならず曲げねじり連成振動方程式を用いて定式化する。また，動的応答に大きな影響を及ぼす大型ダンプトラックを適切に表現できるように，前輪１軸・後輪２軸の２自由度系の解析モデルを用い，他の簡易モデルを用いた場合との比較検討についても述べる。

衝撃係数は設計活荷重に対する割増し係数として定義されていることより，単一走行荷重による動的応答解析から，衝撃係数について考察することは適切ではない。設計活荷重に相当する荷重強度を有する走行荷重列により動的応答解析を行うのが実際的である。そこで動的応答解析の定式化は，複数台の荷重が連なって走行する連行荷重の場合について行う。

3.2　桁橋の走行荷重による動的応答解析

3.2.1　曲げ振動による動的応答

路面凹凸を有する桁橋の走行荷重下の曲げ振動を，モード法により解析する[16),17)]。解析上の主な仮定は次の２点である。

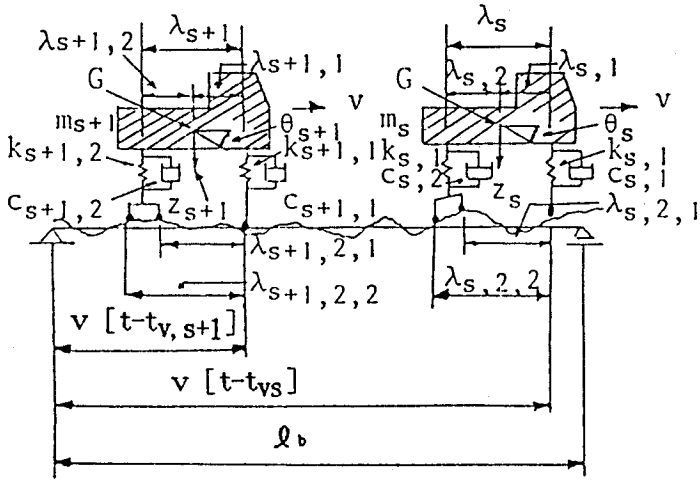
(i) 桁橋は橋長 ℓ_b にわたって等断面の棒モデルとする。

(ii) 走行荷重のモデル化に当り，実際のダンプトラックの軸数に合わせて，前輪１軸・後輪２軸を考慮した２自由度振動系にモデル化する。

図－3.1 に示す端支点からの距離ｘにおける，橋桁の曲げ振動による動的たわみは次式で表せる。

$$y(t,x) = \sum_i q_i(t)\,\phi_i(x) \tag{3.1}$$

ここに，時間関数 $q_i(t)$ は一般化座標であり，$\phi_i(x)$ は第ｉ次固有振動モードである。



図－3.1　橋梁と車両の解析モデル

一定速度ｖで走行する荷重列による橋の動的応答について，$q_i(t)$ に関する次の微分方程式が成立する。

$$\ddot{q}_i + 2h_i\omega_i\dot{q}_i + \omega_i^2 q_i = \frac{1}{M_i}\sum_{j=1}^{h}\sum_{s=1}^{2}\sum_{k=1}^{ax(s)}\phi_i(x_{jsk})P_{jsk}(t) \qquad (3.2)$$

$$(i = 1, 2, \cdots\cdots, n)$$

ここに，ω_i：橋梁の第 i 次固有円振動数，

h_i：橋梁の第 i 次モードに対する減衰定数，

$M_i = mA\int_0^{\ell_b}\phi_i^2(x)\,dx$　（m は橋梁の単位体積当り質量，A は橋桁の断面積），

h：荷重台数，

ax(s)：前・後輪の軸数。この場合，ax(1)=1，ax(2)=2，

$x_{jsm} = v(t-t_{vj}) - \lambda_{jsm}$，

$P_{jsk}(t) = \frac{1}{ax(s)}P_{js}(t)$　（$P_{js}(t)$ は前・後輪の接地力）。

等断面の単純桁橋を対象とする場合，固有振動モードは正弦関数によって表すことができる。

$$\phi_i(x) = \sin\frac{i\pi x}{\ell_b} \qquad (3.3)$$

それで，一般化質量M_iは次式のようにモード次数に関係なく一定値となる。

$$M_i = mA\int_0^{\ell_b}\phi_i^2(x)\,dx = \frac{mA\ell_b}{2} \qquad (3.4)$$

走行車両を図－3.1 に示すように２自由度系にモデル化し，ばね下質量は無視する。j 番目の車両のばね上質量の重心Gの鉛直変位z_jと回転変位θ_j（時計方向を正）に関する運動方程式は次式となる。

$$\left.\begin{aligned} &m_{vj}\ddot{z}_j + \sum_{s=1}^{2}v_{js}(t) = 0 \\ &m_{vj}\gamma_j^2\ddot{\theta}_j - \sum_{s=1}^{2}(-1)^s\lambda_{js}v_{js}(t) = 0 \qquad (j=1, 2, \cdots\cdots, h) \end{aligned}\right\} (3.5)$$

ここにおいて，

$$v_{js}(t) = k_{vjs}\{z_j - (-1)^s \lambda_{js}\theta_j - \frac{1}{ax(s)}\sum_{m=1}^{ax(s)} y_{vjsm}\}$$

$$+c_{vjs}\{\dot{z}_j - (-1)^s \lambda_{js}\dot{\theta}_j - \frac{1}{ax(s)}\sum_{m=1}^{ax(s)} \dot{y}_{vjsm}\} \qquad (3.6)$$

車輪接地点の変位 y_{vjsm} は，橋桁変位 $y(t, x_{jsm})$ と路面凹凸 $z_0(x_{jsm})$ により次式となる。

$$y_{vjsm} = y(t, x_{jsm}) - z_0(x_{jsm})$$

$$= \sum_i q_i(t)\phi_i(x_{jsm}) - z_0(x_{jsm}) \qquad (3.7)$$

$$(j=1,2,\cdots,h,\ s=1,2,\ m=1,ax(s))$$

また，前・後輪の接地力は次式で表される。

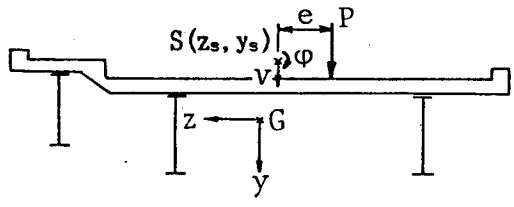
$$P_{js}(t) = (1 - \frac{\lambda_{js}}{\lambda_j})m_{vj}g + v_{js}(t) \qquad (j=1,2,\cdots,h,\ s=1,2) \qquad (3.8)$$

ここに，g：重力加速度。

式(3.6)～(3.8)を用いて式(3.2)と(3.5)を連立させると，橋と車両の連成振動の微分方程式を導くことができる。これを Newmark-β 法を用いて逐次積分し[18]，橋の動的応答を求める（付録1参照）。

3.2.2 曲げねじり連成振動方程式に基づく解析

図－3.2 に示すように，橋梁断面に関して重心を原点とし，鉛直下向きをy軸にとる。水平方向の振動を無視すると，水平重心軸回りの曲げとせん断中心回りのねじりに関する連成振動方程式は次式となる[19]。



図－3.2 橋梁モデル断面図

$$
\left.
\begin{aligned}
&EI_z \frac{\partial^4 v}{\partial x^4} + mA \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} + mAz_s \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = q_y(t,x) \\
&EC_w \frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^4} - GK \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + mAz_s \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} + mI_s \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = m_x(t,x)
\end{aligned}
\right\} (3.9)
$$

ここで，z_s ：せん断中心のｚ座標，

EI_z：ｚ軸回りの曲げ剛性，

GK：ねじり剛性，

EC_w：そり剛性，

$I_s = I_G + A(z_s^2+y_s^2)$ ：せん断中心回りの極慣性モーメント，

I_G ：重心G回りの極慣性モーメント，

$q_y(t,x)$：鉛直下向きの外力，

$m_x(t,x)$：ｘ軸（橋軸）回りのモーメント外力。

曲げ変形v およびねじり変形φについて，それぞれ一般化座標$a_n(t)$および$c_n(t)$と橋桁の境界条件を満足する基準関数$v_n(x)$および$\varphi_n(x)$を用いて次式のように表す。

$$
\left.
\begin{aligned}
v(t,x) &= \sum_n a_n(t)\, v_n(x) \\
\varphi(t,x) &= \sum_n c_n(t)\, \varphi_n(x)
\end{aligned}
\right\} (3.10)
$$

偏心走行荷重による橋の曲げねじり連成振動の微分方程式は，橋の粘性減衰を考慮すると次式となる。

$$
\left.
\begin{aligned}
&\ddot{a}_n(t) + 2h_{bn}p_{bn}\dot{a}_n(t) + p_{bn}^2 a_n(t) + z_s \ddot{c}_n(t) \\
&\qquad = \frac{2}{mA\ell_b} \sum_{j=1}^{h} \sum_{s=1}^{2} \sum_{k=1}^{ax(s)} v_n(x_{jsk}) P_{jsk}(t) \\
&\ddot{c}_n(t) + 2h_{tn}p_{tn}\dot{c}_n(t) + p_{tn}^2 c_n(t) + \frac{z_s}{\gamma_s^2} \ddot{a}_n(t) \\
&\qquad = \frac{2}{mI_s\ell_b} \sum_{j=1}^{h} \sum_{s=1}^{2} \sum_{k=1}^{ax(s)} \varphi_n(x_{jsk}) P_{jsk}(t)\, e
\end{aligned}
\right\} (3.11)
$$

ここに，

$p_{bn} = \left(\frac{n\pi}{\ell_b}\right)^2 \left[\frac{EI_z}{mA}\right]^{1/2}$ ：曲げの固有振動数（前項のω_iと同じ），

$$p_{tn} = \frac{n\pi}{\ell_b}\left[\frac{GK}{mI_s}\left\{\left(\frac{n\pi}{k}\right)^2+1\right\}\right]^{1/2}$$ ：ねじりの固有振動数，

$$k = \ell_b\left[\frac{GK}{EC_w}\right]^{1/2},$$

h_{bn}，h_{tn}：曲げおよびねじりの減衰定数，

$\gamma_s^2 = I_s/A$，

e：せん断中心から載荷点までの距離。

他の記号は前項の曲げ振動のみの場合と同様である。２自由度系にモデル化した走行荷重の運動方程式は前項の式(3.5)および(3.6)と同様である。

$$\left.\begin{aligned} & m_{vj}\,\ddot{z}_j + \sum_{s=1}^{2} v_{js}(t) = 0 \\ & m_{vj}\,\gamma_j^2\,\ddot{\theta}_j - \sum_{s=1}^{2}(-1)^s\lambda_{js}v_{js}(t) = 0 \qquad (j=1,2,\cdots\cdots,h) \end{aligned}\right\} \quad (3.5)$$

$$\begin{aligned} v_{js}(t) = {} & k_{vjs}\left\{z_j - (-1)^s\lambda_{js}\theta_j - \frac{1}{ax(s)}\sum_{m=1}^{ax(s)} y_{vjsm}\right\} \\ & + c_{vjs}\left\{\dot{z}_j - (-1)^s\lambda_{js}\dot{\theta}_j - \frac{1}{ax(s)}\sum_{m=1}^{ax(s)} \dot{y}_{vjsm}\right\} \end{aligned} \quad (3.6)$$

ただし，車輪接地点の変位 y_{vjsm} は，ねじり変形による成分を含めて次式となる。

$$\begin{aligned} y_{vjsm} &= v(t,x_{jsm}) + \varphi(t,x_{jsm})e - z_0(x_{jsm}) \\ &= \sum_g a_g(t)v_g(x_{jsm}) + \sum_g c_g(t)\varphi_g(x_{jsm})e - z_0(x_{jsm}) \qquad (3.12) \\ &\qquad (j=1,2,\cdots,h,\ s=1,2,\ m=1,ax(s)) \end{aligned}$$

曲げ振動の場合と同様に，式(3.6)，(3.12)および(3.8)を用いて式(3.11)と(3.5)を連立させて，路面凹凸を考慮した，橋と車両の連成振動方程式を導くことができる（付録２参照）。

３．３　現地における動的応答実験と理論解析

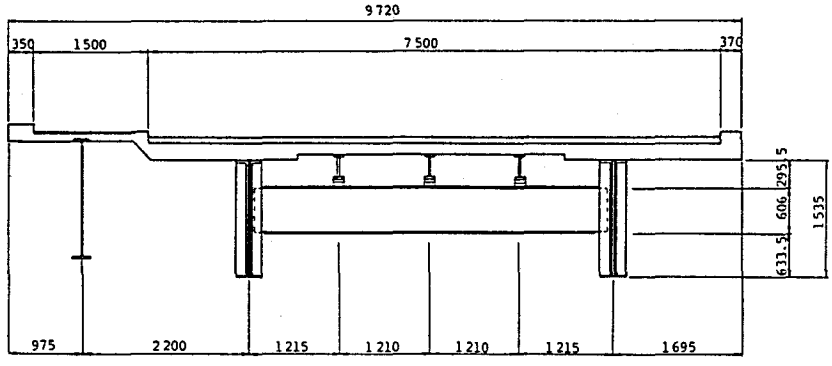
３．３．１　実験概要

現地実験は，国道17号線の利根川に架かる神流川橋（埼玉県児玉郡）において実施した。

本橋は支間長22.2mの単純桁が18連の非合成プレートガーダー橋であり，橋台から２径間目を対象橋梁とした。神流川橋の断面図を図－3.3 に示す。歩道を片側に有する非対称断面である。

路面凹凸に関して，本実験時においては前章の光学式路面プロフィルメータができておらず，建設省で標準型と認めている３ｍプロフィルメータ[20] を用い，さらに３ｍ間隔の水準測量の結果と併せて，水準線を基準とした路面凹凸を算出した。

試験車の軸間距離および前・後輪重量を測定し，また，動的特性を求めるために，後輪２軸を高さ20cmの踏台から同時に落下させた後の減衰自由振動を加速度計により測定した。走行実験に先立ち，試験車を静的に載荷し，支間中央におけるたわみおよび下フランジのひずみを測定する。実測値と解析値を比較し，解析に用いる断面諸量の妥当性を確認する。試験車を走行させ，支間中央における動的たわみおよび動的ひずみを測定し，データレコーダに記録する。走行速度は30km/hおよび40km/hとするが，実際の速度は両支点上に設置したテープスイッチからのパルス記録より求める。試験車が橋を出た後の減衰自由振動を記録し，これより橋の固有振動数および対数減衰率を求める。



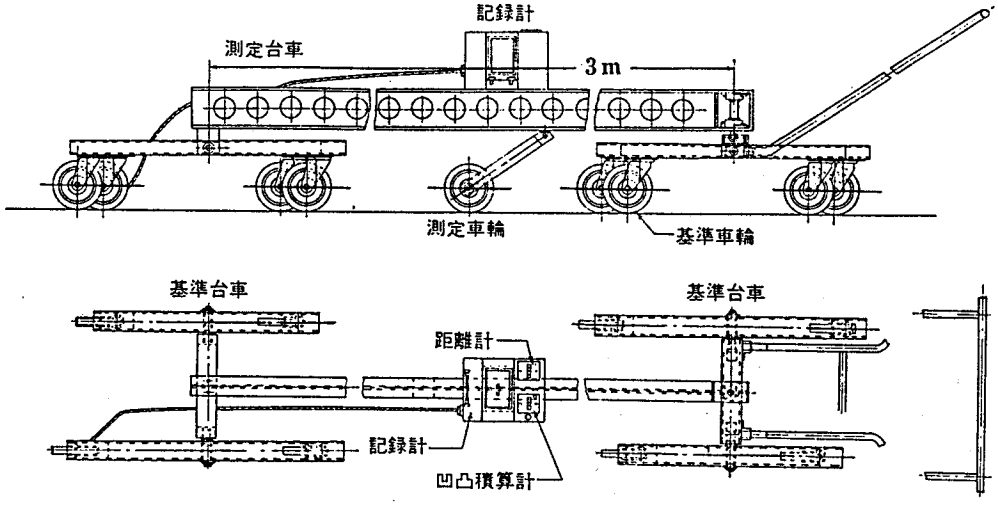
図－3.3　神流川橋断面図

３．３．２　路面凹凸の測定とデータ処理

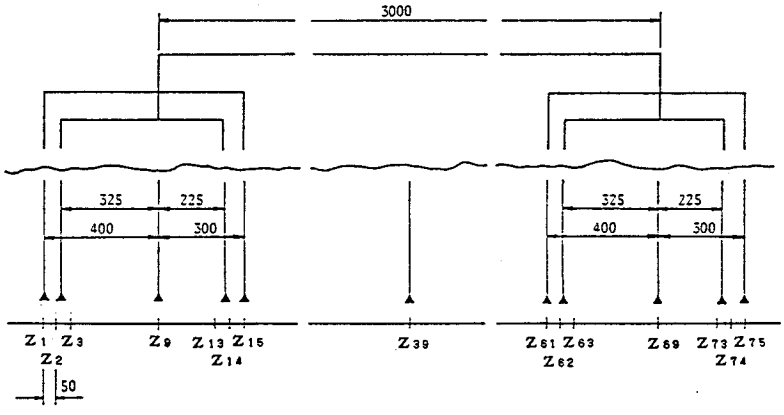
（１）３ｍプロフィルメータ

本実験において路面凹凸の測定に用いた３ｍプロフィルメータを図－3.4 に示す。３ｍプロフィルメータは，基準台車により記録計の位置を決め，その基準高さからの測定車輪

の上下動を測定するものである。基準高さ設定用の測定台車のスパン長が３ｍであることより，測定可能な路面波長は非常に短い。そこで，３ｍ間隔のレベル測量により長波長の路面凹凸を補って，水準線を基準とした路面凹凸を算出した。３ｍプロフィルメータの寸法および路面凹凸値番号を図－3.5 に示す。



図－3.4　３ｍプロフィルメータ



図－3.5　３ｍプロフィルメータの寸法と路面凹凸測点番号

（２）データ処理

路面凹凸ベクトル$\mathbf{z}$の要素z_iを５cm間隔に採ると，プロフィルメータによる５cm間隔の測定値ベクトル$\mathbf{a}$との関係は，a_{39}に関して次式となる。

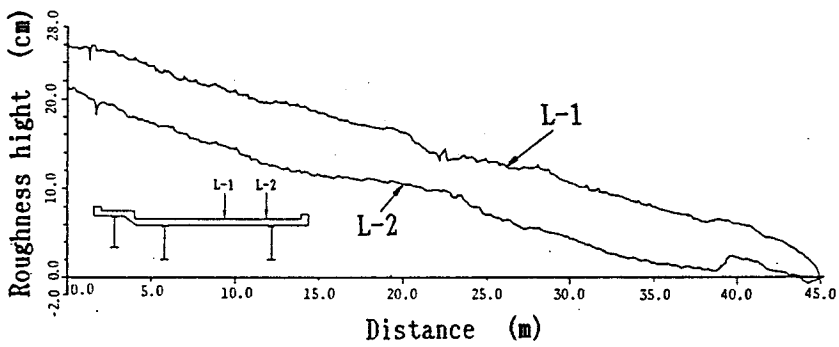
$$
\begin{aligned}
&2z_1+z_2+z_3+z_{13}+z_{14}+2z_{15}-16z_{39}\\
&+2z_{61}+z_{62}+z_{63}+z_{73}+z_{74}+2z_{75}\\
&=-16a_{39}
\end{aligned}
\tag{3.13}
$$

3×(j-1)m分（ｊは水準測量点の数）の路面凹凸を算出するために，路面凹凸ベクトル$\mathbf{z}$およびプロフィルメータ測定値ベクトル$\mathbf{a}$を次式のようにおく。

$$
\begin{aligned}
\mathbf{z} &= \{z_1;z_2;\cdots\cdots;z_i;\cdots\cdots;z_N\} \qquad (N=60\times(j-1)+1)\\
\mathbf{a} &= \{a_{39};a_{40};\cdots\cdots\cdots\cdots;a_{N-36}\}
\end{aligned}
\tag{3.14}
$$

式(3.13)の未知数をベクトル$\mathbf{z}$の要素について，１個ずつずらせた方程式を(N-74)個連立させることにより，$\mathbf{z}$に関するN元連立方程式が(N-74)個得られる。

未知数の数が方程式の数より多いために，この連立方程式は解けない。そこで，74個の仮定値を設定する。すなわち，$z_1, z_2, \cdots, z_{38}, z_{N-35}, \cdots, z_{N-1}, z_N$ の値をあらかじめ決定し，(N-74)元連立方程式を解くことにより，５cmごとの路面凹凸値が得られる。ところで，$z_1, z_2, \cdots, z_{38}, z_{N-35}, \cdots, z_{N-1}, z_N$ の仮定値は，３mプロフィルメータによるそれらの位置における測定値を，３mごとの水準測量値により補正して用いた。以上により算出された路面凹凸を図－3.6 に示す。



図－3.6　路面凹凸図

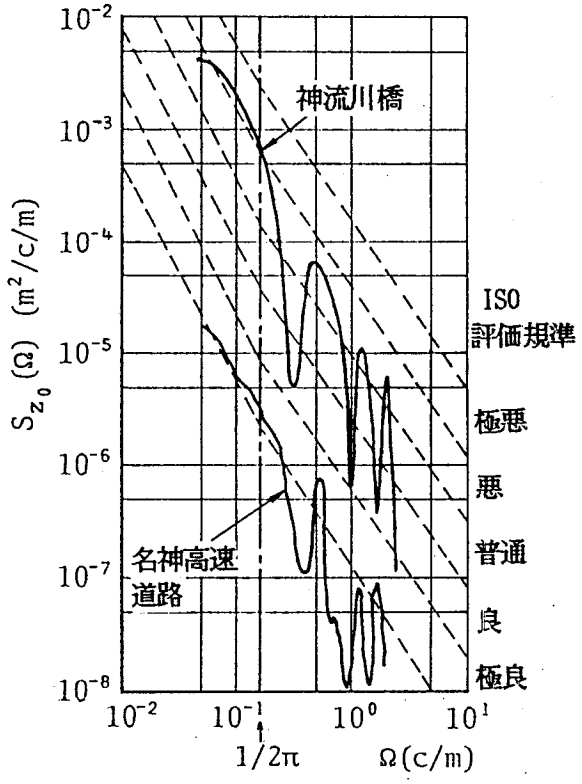
（３）路面凹凸パワースペクトル密度

前項において得られた路面凹凸について，高速フーリエ変換（ＦＦＴ）法によりパワースペクトル密度を計算し，図－3.7 に示す。図－3.7 には，ISO の路面凹凸評価基準[21]ならびに完成直後の名神高速道路の路面凹凸パワースペクトル密度[22] を併せて記す。神流川橋の路面凹凸はそれらと比較して，かなり大きいことが分かる。

３．３．３　実験結果と解析結果

（１）試験車の動特性

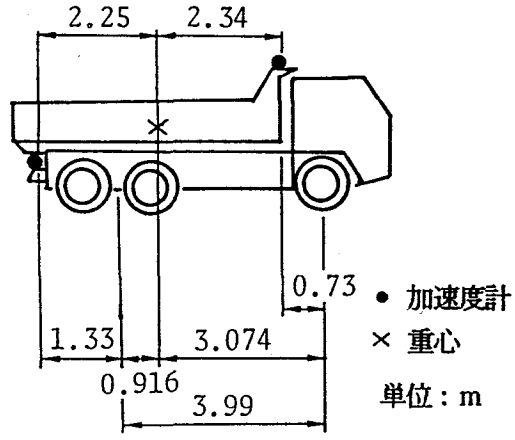
試験車の土砂満載時の前･後輪重量の測定値を表－3.1に掲げる。総重量20.7t(202.9kN)であった。これらの重量より試験車の重心位置を求め，重心と前後部加速度計との距離を算出した。これらの寸法を図－3.8 に示す。



図－3.7　路面凹凸パワースペクトル密度関数

土砂満載の試験車の後輪２軸を同時に高さ約20cmの踏台より落下させた後の減衰自由振動記録より，固有振動数と対数減衰率を求めた。前後部加速度記録より得られる固有振動数には差異があり，重心位置での値に換算した固有振動数を表－3.1 に掲げる。また，前後部加速度記録より重心位置での減衰自由振動波形を求め，これより算出した対数減衰率を同じく表－3.1 に掲げる。

試験車を１自由度振動系に近似し，かつ総重量がばね上にあると仮定して，試験車の総重量と固有振動数ならびに対数減衰率の測定値により，ばね定数と粘性減衰係数を算定した。実際のダンプトラックのばねは，往々にして補強され，また総重量がばね上にあると仮定したことにより算定されたばね定数は自動車の定格値よりもかなり大きくなっている。そこで，算定されたばね定数を，前・後輪ばね定数の定格値の比に配分した値をそれぞれ前・後輪のばね定数とした。ダンプトラックの粘性減衰係数は，定格として挙げられていないため，ここでは１自由度系として算定された値を前・後輪ばね定数に比に配分して，前・後輪の粘性減衰係数とした。それらのばね定数および粘性減衰係数を表－3.1に掲げる。



図－3.8　試験車寸法

表－3.1　試験車の動的特性

	質 量 (ton)	固有振動数 (Hz)	対数減衰率	ばね定数 (t/m)	減衰係数 (t sec/m)
前 輪	4.75	—	—	112.86	0.811
後 輪	15.95	—	—	645.66	4.642
合 計	20.70	3.016	0.428	758.52	5.453

（２）橋梁の自由振動性状と剛性

走行実験において，試験車が橋を出た後の減衰自由振動より得られた橋の曲げ１次固有振動数は，表－3.2 に掲げるように4.93Hzであり，このとき対数減衰率は 0.159であった。

神流川橋の解析モデルを図－3.9 に示す。本橋は橋軸方向に鋼桁断面が変化しているが，以下の解析において，等断面と仮定して，断面諸量は橋軸方向長さの重みをつけた平均値とする。

本橋は，非合成プレートガーダー橋であるが，床版は合成作用により橋の剛性に寄与するものである。試みに鋼桁のみを考慮した平均断面２次モーメント0.04816m^4を用いて計算した曲げ１次固有振動数は3.78Hzであり，実験値よりかなり小さくなる。床版の合成効果は，鋼とコンクリートのヤング係数比ｎによって定量的に評価するものとすると，ｎ＝20のとき，等断面と仮定した橋の曲げ１次固有振動数の計算値が 4.946Hzとなり，実験値に最も近くなる。ちなみに，コンクリート床版のポアソン比を$\nu_c=1/9$ と仮定すると，鋼とコンクリートのせん断弾性係数比は$n_g=17.143$ となり，これより，ねじり固有振動数の理論値は 5.048Hzとなる。このときの橋の構造諸元を表－3.3 に掲げる。

表－3.2　神流川橋の動的特性

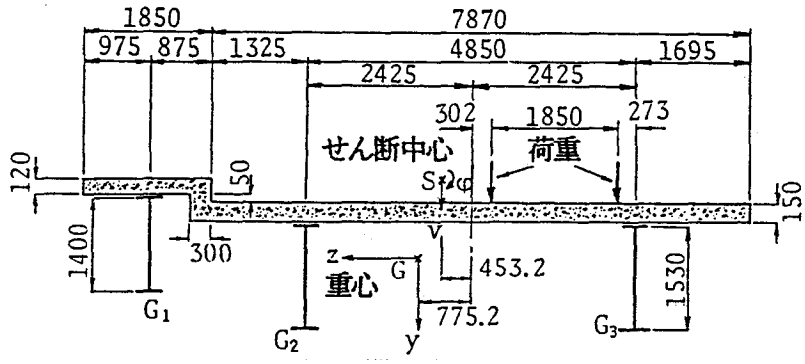
	実験値	解析値		
		床版の合成作用無視	床版の合成作用考慮	
	曲げ振動	曲げ振動	曲げ振動	ねじり振動
固有振動数(Hz)	4.93	3.78	4.946	5.048
対数減衰率	0.159	――――	――――	――――

表－3.3　神流川橋構造諸元

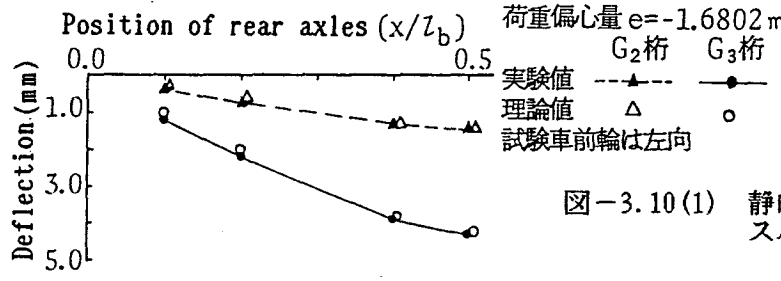
スパン長	ℓ_b(m)	22.2
単位長当り重量	mA(t/m)	7.048
ヤング係数比	n	20
せん断弾性係数比	n_g	17.143
断面積	A (m^2)	0.1900
断面２次モーメント	I_z(m^4)	0.08247
極慣性モーメント	I_s(m^4)	1.3683
ねじり抵抗	K (m^4)	0.71696×10^{-2}
曲げねじり抵抗	C_ω(m^6)	0.6048
減衰定数		0.0253

（３）静的載荷によるたわみおよびひずみ

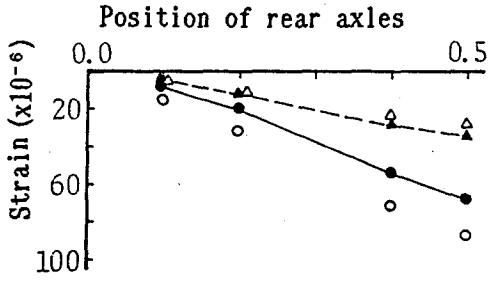
試験車を図－3.9 に示す位置に偏心載荷したときの主桁G_2，G_3の支間中央におけるたわみおよび下フランジのひずみの測定値を解析値と共に図－3.10(1)～(2)に示す。解析値は薄肉開断面材の曲げねじり理論[23] により算出したものである。たわみおよびひずみ共に偏心載荷の影響が顕著であり，G_3の応答値が G_2よりかなり大きい。たわみについては，解析値は実験値と良好な一致を示している。ひずみに関して G_2桁では，解析値の方が実験値よりも若干小さいが，G_3桁では逆に解析値の方が大きくなっている。すなわち，理論解析においてねじりの効果を過大に評価している。しかし，たわみにおける解析値と実験値の一致より，固有振動数の解析値を実験値に合うように，鋼とコンクリートのヤング係数比をｎ＝20と仮定して算出した表－3.3 の断面諸量は妥当であると考えられる。



図－3.9　神流川橋解析モデル



図－3.10(1)　静的載荷による
スパン中央のたわみ



図－3.10(2)　静的載荷による
スパン中央下フランジのひずみ

（４）試験車走行による動的応答

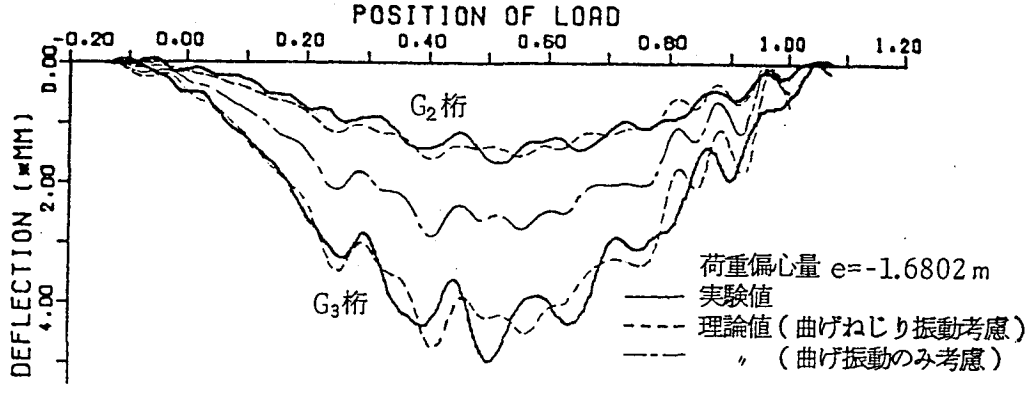
試験車が図－3.9 に示す位置を偏心走行したときの，主桁の支間中央における動的たわみ曲線の実測値を解析値と共に図－3.11に示す。解析値は曲げねじり連成振動を考慮した場合ならびに曲げ振動のみを考慮した場合も示す。

これらの解析において，逐次積分の際の初期条件として，橋梁は車両が進入するまで静止していると仮定するが，車両の初期振動は無視できないと考えられる。現地実験の対象橋梁が18連の単純桁橋の終端橋台から２径間目であることより，対象橋梁に進入する車両の初期条件を，手前の橋梁と車両との連成振動解析の結果として与える。

前項で記したように，路面凹凸は３ｍプロフィルメータの寸法に基づいて，５cmごとに求めている。しかし，走行自動車のタイヤはある有限の接地長をもって路面と接している。タイヤの接地長は，輪荷重やタイヤの空気圧あるいは走行速度などによって異なるが，道路橋示方書の活荷重（Ｔ荷重）の規定では接地長を20cmとしており[24]，また，本田･小堀･山田は30cmと仮定している[8]。 ここでは，タイヤの接地長を25cmと仮定して，５cm間隔に測定された路面凹凸値を５個ずつ移動平均して，動的応答解析の路面凹凸値としている。

解析において考慮するモード次数は，曲げ振動およびねじり振動について，それぞれ３次とした。走行自動車と橋梁の連成振動を表す連立微分方程式をNewmark-β法により逐次積分するとき，$\beta=1/4$ とし[18]，各時間間隔における収束判定は加速度について1/1000以内とした。

図－3.11より，静的応答の場合と同様に，偏心走行の影響によるねじり変形が大きく，G_3桁の応答値が G_2桁よりも大きい。 曲げねじり連成振動を考慮した解析値は，曲げ振動のみを考慮した場合よりも実験値に良く合うことが分かる。



図－3.11　スパン中央のたわみの動的応答

（５）動的増幅率

荷重の走行による橋梁の応答の動的効果は，荷重が静的に作用したときの応答値に対する割合として表される。その動的増幅率は Dynamic Amplification Factor(DAF)あるいは Dynamic Increment Factor (DIF) として表すことができ，たわみｙについては次のようになる。

$$DAF = y_{d,max}/y_{s,max} \tag{3.15}$$

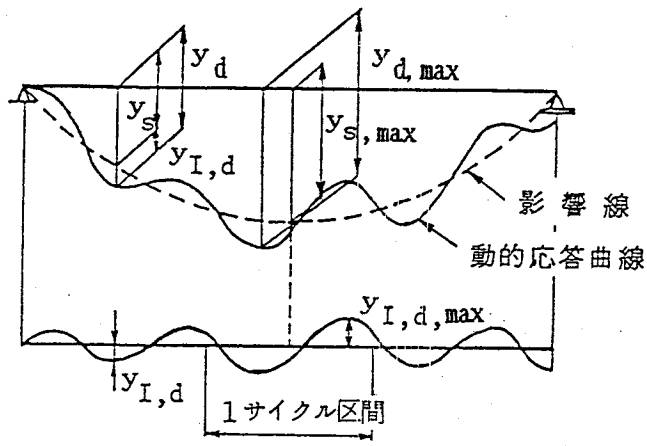
$$DIF = 1 + y_{I,d,max}/y_{s,max} \tag{3.16}$$

$$y_{I,d} = |y_d - y_s| \tag{3.17}$$

ここに，$y_{d,max}$，$y_{s,max}$は，それぞれ動的最大たわみおよび静的最大たわみであり，$y_{I,d,max}$ は，図－3.12に示すように，$y_{s,max}$ を含む１サイクル区間の$y_{I,d}$ の最大値である。

DAF の値は，動的応答の位相のずれにより 1.0よりも小さくなる可能性があり，動的効果の表現には適当ではない。そこで，ここでは DIFの値を動的増幅率として用いることにする[25]。

G_3 桁のたわみおよびひずみに関する動的増幅率DIF の実験値ならびに理論解析値を図－3.13に示す。理論解析において，走行荷重を後輪２軸まで考慮した２自由度系にモデル化すると，後輪１軸とした２自由度系モデルあるいは１自由度系モデルを用いた場合よりもよく実験値に一致し，走行荷重の本解析モデルの妥当性が示されている。また，路面平



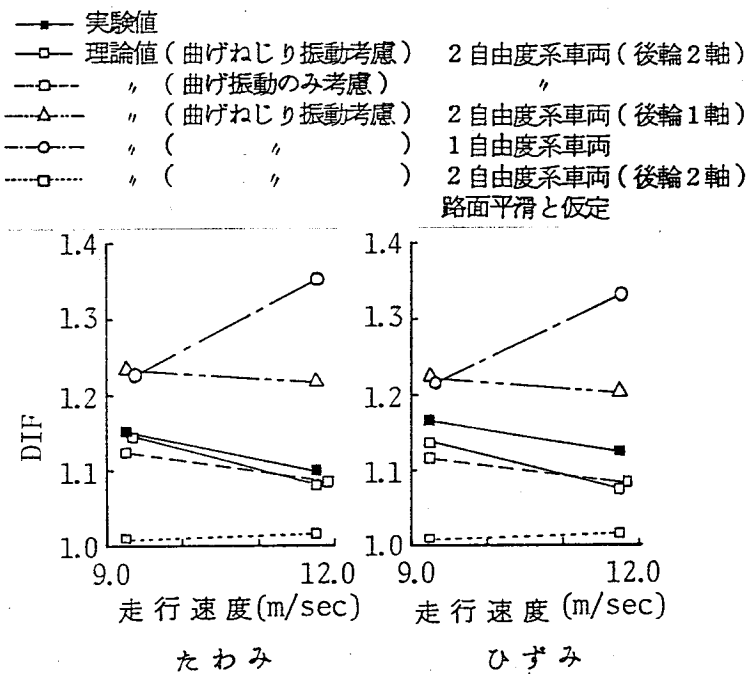
図－3.12　動的増幅率（DIF）の定義

滑と仮定した場合の DIFの解析値は，実験値および路面凹凸を考慮した場合よりもかなり小さくなり，走行荷重下の単純桁橋の動的応答に及ぼす路面凹凸の影響を無視し得ないことが分かる。

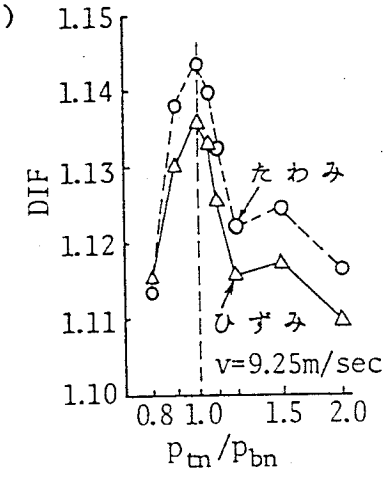
橋梁の曲げ振動のみを考慮した場合の動的応答値は，前述のごとく曲げねじり連成振動を考慮した場合とかなり異なるにもかかわらず，曲げ振動のみを考慮した解析によるDIFは，曲げねじり連成振動による DIFに近い値となる。これは，動的応答値と共に静的応答値も同程度に，偏心載荷に伴うねじり変形の影響を受けるために， DIFとしては，それ程変化しないものと考えられる。

（６）曲げとねじりの固有振動数比p_{tn}/p_{bn}の相違による動的増幅率の変化

神流川橋のp_{tn}/p_{bn}は1.021 であるが，この無次元パラメータの変化に伴う DIFの変化を図－3.14に示す。これより，p_{tn}/p_{bn} ＝1.0のとき DIFが最大になることが分かり，p_{tn}/p_{bn}が1.0 から離れるに従い DIFは減少する。



図－3.13 動的増幅率



図－3.14 曲げとねじりの固有振動数比とDIFの関係

3.4 結 言

本研究において，路面凹凸を有する道路橋の走行荷重による動的応答について，理論解析ならびに現地実験を実施し，解析モデルの妥当性について検討した。現地実験は，支間長22.2mの単純桁が18連よりなる神流川橋において実施された。得られた結果は以下の通りである。

（1） 理論解析において，橋の曲げ振動方程式に基づく定式化のみならず，荷重の偏心走行による動的応答解析のために，曲げねじり連成振動方程式に基づく定式化を行った。このとき，走行荷重の解析モデルとして，動的応答に大きな影響を及ぼす大型ダンプトラックを適切にモデル化できるように，前輪１軸・後輪２軸の２自由度振動系モデルを用いた。

（2） 路面凹凸の測定に３mプロフィルメータと３mごとの水準測量を併用し，水準線を基準とした路面凹凸を得ることができた。路面凹凸のパワースペクトル密度を算出し，ISO 評価基準および名神実測スペクトルと比較して，本橋の路面凹凸はかなり悪いことが分かった。

（3） 土砂満載の試験車の後輪２軸を同時に高さ20cmの踏台より落下させた後の減衰自由振動記録より，固有振動数3.016Hz および対数減衰率0.428 を求めた。重量測定結果を用いて，ばね定数と粘性減衰係数を算出した。

（4） 走行実験において，試験車が橋を出た後の減衰自由振動より得られた橋の曲げ１次固有振動数は4.93Hzであり，このとき対数減衰率は0.159 であった。

本橋は非合成プレートガーダー橋であるが，床版は合成作用により橋の剛性に寄与するものである。この床版の合成効果は鋼とコンクリートのヤング係数比ｎによって定量的に評価するものとすると，ｎ＝20のとき，等断面と仮定した橋の曲げ１次固有振動数の計算値が4.946Hz となり，実験値に近くなった。

（5） 試験車を静的に偏心載荷して，主桁G_2 およびG_3 のスパン中央におけるたわみおよびひずみを測定した。それらの実験値を，薄肉開断面材の曲げねじり理論により算出した解析値と比較する。たわみの解析値は実験値とよく一致しており，鋼とコンクリートのヤング係数比を20と仮定して算出した断面諸量は妥当であると考えられる。

（6） 試験車走行による主桁の動的たわみ曲線の実測値を解析値と比較すると，曲げねじり振動を考慮した解析値は，曲げ振動のみを考慮した場合よりも実験値に良く合うこ

とが分かった。

（7） 動的増幅率DIF の実験値と解析値との比較より，走行荷重を後輪２軸まで考慮した２自由度系にモデル化すると，他の簡易モデルを用いた場合よりもよく実験値に一致し，本解析モデルの妥当性が示された。また，路面平滑と仮定した場合のDIF の解析値は，実験値および路面凹凸を考慮した場合よりもかなり小さくなり，走行荷重下の単純桁橋の動的応答に及ぼす路面凹凸の影響を無視し得ないことが分かった。曲げ振動のみを考慮した解析によるDIF は，曲げねじり連成振動によるDIF に近い値となることが分かった。

（8） 曲げとねじりの固有振動数比p_{tn}/p_{bn}の変化に伴うDIF の変化を調べると，$p_{tn}/p_{bn}=1.0$ のときDIF が最大になることが分かり，p_{tn}/p_{bn}が1.0から離れるに従いDIF は減少した。これにより曲げとねじりの連成効果が認められた。

参考文献（第３章）

1) 山田善一：橋梁の衝撃，土木構造物の振動と安全性，土木学会関西支部・中部支部，pp.91-102，1966.5.

2) 伊藤　学：走行車両に対する橋梁の動的応答，橋梁の動的応答，日本鋼構造協会，pp.377-401，1969.12.

3) Biggs, J.M., Suer, H.S. and Louw, J.M.: The vibration of simple span highway bridges, J. of Struc. Div., Proc. of ASCE, Vol.83, No.ST2, pp.1186/1-32, March, 1957.

4) Wen, R.K.: Dynamic response of beams traversed by two-axle loads, J. of Engg. Mech. Div., Proc. of ASCE, Vol.86, No.EM5, pp.91-111, Oct., 1960.

5) Wen, R.K. and Toridis, T.: Dynamic behavior of cantilever bridges, J. of Engg. Mech. Div., Proc. of ASCE, Vol.88, No.EM4, pp.27-43, Aug., 1962.

6) Veletsos, A.S. and Haung, T.: Analysis of dynamic response of highway bridges, J. of Engg. Mech. Div., Proc. of ASCE, Vol.96, No.EM5, pp.593-620, Oct., 1970.

7) 成田信之・桂樹正隆・江本　勝：路面凹凸を考慮した橋梁の衝撃係数，土木技術資料，Vol.20, No.3, pp.27-32, 1978.3.

8) 本田秀行・小堀為雄・山田善一：多径間連続桁橋の動的応答と衝撃係数に関する考察，土木学会論文報告集，第 331号，pp.65-73, 1983.3.

9) 山田善一・小堀為雄：活荷重に対する道路橋の動的応答－衝撃係数－に関する考察，土木学会論文集，第 148号，pp.40-50, 1967.12.

10) Nakai, H. and Kotoguchi, H.: Dynamic response of horizontally curved girder bridges under random traffic flows, Proc. of JSCE, No.244, pp.117-128, Dec., 1975.

11) Frýba, L.: Non-stationary vibrations of bridges under random moving load, Final Report of 8th IABSE Congress, New York, pp.1223-1236, Sept., 1968.

12) 小堀為雄・梶川康男：単一動荷重に対する道路橋の振動感覚，土木学会論文報告集，第 248号，pp.11-23, 1976.4.

13) 吉村虎蔵・彦坂　熙・内谷　保：単一走行車両による道路橋の非定常ランダム応答の解析，土木学会論文報告集，第 258号，pp.35-44, 1977.2.

14) 岡林隆敏：単一走行車両による道路橋の二乗平均応答解析，土木学会論文報告集，第 286号，pp.15-26, 1979.6.

15) 成田信之・桂樹正隆・江本　勝：Ｉ共通編－衝撃係数の再検討に関する実橋実験－，土木技術資料，Vol.22, No.5, pp.21-27, 1980.5.

16) Norris, C.H., Hansen, R.J., Holley, Jr.M.J., Biggs, J.M., Namyet, S. and Minami, J.K.: Structural Design for Dynamic Loads, McGraw-Hill, Inc., 1959.

17) Biggs, J. M.: Introduction to Structural Dynamics, McGraw-Hill, Inc., 1964.
18) Newmark, N. M.: A method of computation for structural dynamics, J. of Engg. Mech. Div., Proc. of ASCE, Vol.85, No.EM3, pp.67-94, July, 1959.
19) 川井忠彦：薄肉開断面材の弾性力学，生産研究，Vol.16，No.1，pp.14-18，28，No.2，pp.14-25，1964.1,2.
20) 成田信之・池村雅司：路面の凹凸と自動車荷重（Ⅱ），土木研究所資料，No.800，1973.3.
21) ISO(International Organization for Standardization) : Proposals for generalized road inputs to vehicles, ISO/TC108/WG9 Document No.5, 1972.
22) 川合平夫・森崎健二：自動車走行路面の性質と振動乗心地への関連性，三菱重工技報，Vol.2，No.2，pp.20-28，1965.
23) 小松定夫：薄肉構造物の理論と計算Ⅰ，山海堂，1969.11.
24) 日本道路協会：道路橋示方書・同解説，Ⅰ共通編，1980.2.
25) 小松定夫・川谷充郎：斜張橋の自動車走行による動的応答と衝撃係数に関する研究，土木学会論文報告集，第 275号，pp.13-28，1978.7.
26) 川谷充郎・小松定夫・脇田雄一：偏心走行荷重による道路橋の動的応答に関する理論的及び実験的研究，土木学会第36回年次学術講演会講演概要集，I-178，1981.10.

第４章　単純桁橋の走行荷重による不規則振動解析

4.1　緒　言

前章で明らかにしたように道路橋の走行荷重による動的応答に，路面凹凸が大きな影響を及ぼす。実際の道路橋においては橋面上に不規則な路面凹凸を有しており，その上を走行する車両が不規則な振動を起こす。さらに，この走行車両によって橋梁に不規則振動が生ずる。すなわち，走行車両と橋梁の連成不規則振動となり，前章の式(3.2) と(3.5) の連立微分方程式がその基礎式である。さらに式(3.2) の右辺をみれば，車両から橋桁に作用する接地力$P_{jsk}(t)$に$\phi_i(x_{jsk})$ が掛かっている。この$\phi_i(x_{jsk})$ は車両の走行に伴う時間関数であることより，これは非定常連成不規則振動の問題となる[1),2)]。

前章で扱ったように，動的応答の実測値と比較するための解析であれば，実測された路面凹凸を１つのサンプル関数として用いて，連立微分方程式を逐次積分により数値的に解けばよい。しかし，不規則振動応答は本来確率量であり，その評価は期待値および２乗平均値などによって表され，不規則振動論により解析されるものである[1),2)]。 しかし，ここで取り扱う現象が非定常連成不規則振動であるため，過去において不規則振動論による解析が困難とされて来た。そこで，Shinozuka & Kobori[3)]および本田・小堀・山田[4)]はシミュレーション法により応答の評価を行った。シミュレーション法では，応答の２乗平均値をアンサンブル平均により算出するために，数多くのサンプル関数に対する応答解析を繰り返す繁雑さを伴う。

第１章の 1.3.2項で記したように，ここ20年来，不規則振動論を用いて，走行車両による橋梁の非定常連成不規則振動応答の評価が試みられて来た[5)]。それらの内には，荷重の走行に伴う非定常性を無視して定常解を求めたり[5)]，あるいは橋と車両の連成振動を無視した解析[6)]もあったが，吉村・彦坂・内谷[7)]および岡林[8)]はそれぞれ独自の手法により，非定常性および橋と車両の連成を考慮した解析を行った。 それらの解析においては，１．３．２ 項で指摘したように，車両の解析モデルならびに路面凹凸パワースペクトル密度のモデルに不適切な点があった。

本章において，走行車両による橋梁の非定常連成不規則振動に関する新たな解析手法を定式化した[9)]。すなわち，路面凹凸を有する橋梁と走行車両に関する連成振動の微分方程

式より，状態ベクトル表示を用いた振動方程式を誘導し，線形微分方程式の理論より得られるこの解過程を用いて，直接，応答の共分散行列を求める。本解析手法によると，路面凹凸のパワースペクトル密度をどのような形で与えられても，そのまま用いることが可能である。また，走行車両の解析モデルとして，前章でも用いたように大型トラックの前後輪を考慮した２自由度振動系を用いる。

前章の動的応答解析において，荷重の偏心走行による曲げねじり連成振動を考慮した定式化を行い，動的応答値が実験値によく合うことを確認した。ところで，動的増幅率DIFについては，曲げ振動のみを考慮した解析値が，曲げねじり連成振動を考慮した場合に近い値となることも明らかにした。そこで，本章においては，曲げ振動のみを考慮した場合について，不規則振動論に基づく解析の定式化を行うこととする。

４．２　単純桁橋の単一走行荷重による不規則振動解析

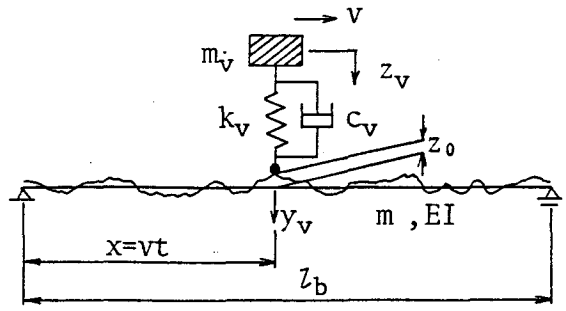
前章の動的応答解析の定式化において，車両の解析モデルとして前輪１軸・後輪２軸を考慮した２自由度振動系を用い，さらにそれが連なって走行する連行荷重の場合を扱った。ここでは不規則振動論に基づく解析手法について述べることを目的とするため，車両の解析モデルとしては，簡単な１自由度振動系を用い，また単一走行の場合を扱う。次節において，本解析手法を前・後輪を考慮した２自由度系モデルが連行する場合に拡張する。

４．２．１　走行荷重による橋梁の非定常連成振動方程式

図－4.1 に示すように，１自由度系に仮定した１台の走行荷重による橋梁の曲げ振動応答の定式化を，前章の 3.2.1項と同様に行う。

図－4.1 に示す支間長 ℓ_b の単純桁橋の任意点ｘの動的たわみ $y(t,x)$ は，第ｉ次固有振動モード $\phi_i(x)$ および一般化座標 $q_i(t)$ により次式で表せる。

$$y(t,x) = \sum_i q_i(t)\,\phi_i(x) \qquad (3.1)$$



図－4.1　橋梁と走行荷重の解析モデル

1台の車両が一定速度vで橋梁上を走行する場合の，橋梁の動的応答について，$q_i(t)$に関する次の微分方程式が成立する。

$$\ddot{q}_i + 2h_i\omega_i\dot{q}_i + \omega_i^2 q_i = \frac{1}{M_i}\phi_i(vt)P(t) \qquad (i = 1, 2, \cdots\cdots, n) \tag{4.1}$$

ここに，　$P(t) = m_v(g - \ddot{z}_v)$，　(4.2)

m_v ；車両の質量，

z_v ；車両の鉛直変位，

g ；重力加速度，

他の記号は，前章の 3.2.1項の場合と同じである。

一方，車両に関する運動方程式は，次式で与えられる。

$$m_v\ddot{z}_v + c_v(\dot{z}_v - \dot{y}_v + \dot{z}_0) + k_v(z_v - y_v + z_0) = 0 \tag{4.3}$$

ここに，

$$y_v = y(t, vt) = \sum_i q_i(t)\phi_i(vt) \tag{4.4}$$

なお，$y(t,x)$ は，鉛直下向きを正，路面凹凸$z_0(x)$は，鉛直上向きを正とする。

車両の固有円振動数を$\omega_v=(k_v/m_v)^{1/2}$，減衰定数を$h_v=c_v/2(m_v k_v)^{1/2}$と表せば，式(4.3) は次のように表される。

$$\ddot{z}_v + 2h_v\omega_v\dot{z}_v + \omega_v^2 z_v = 2h_v\omega_v\dot{y}_v + \omega_v^2 y_v - 2h_v\omega_v\dot{z}_0 - \omega_v^2 z_0 \tag{4.5}$$

非定常ランダム過程$q_i(t)$および$z_v(t)$の任意時刻tにおける平均値$\overline{q}_i(t)$，$\overline{z}_v(t)$は次式で与えられる。

$$\overline{q}_i(t) = E[q_i(t)], \qquad \overline{z}_v(t) = E[z_v(t)] \tag{4.6}$$

平均値からの$q_i(t)$，$z_v(t)$の偏差を$\widetilde{q}_i(t)$，$\widetilde{z}_v(t)$とすれば，$q_i(t)$，$z_v(t)$はそれぞれ，

$$q_i(t) = \overline{q}_i(t) + \widetilde{q}_i(t), \qquad z_v(t) = \overline{z}_v(t) + \widetilde{z}_v(t) \tag{4.7}$$

と表され，さらに次式が成立する。

$$y(t,x) = \overline{y}(t,x) + \widetilde{y}(t,x), \qquad y_v(t) = \overline{y}_v(t) + \widetilde{y}_v(t) \tag{4.8}$$

ここに，

$$\left.\begin{aligned} &\overline{y}(t,x) = \sum_i \overline{q}_i(t)\phi_i(vt), \qquad \widetilde{y}(t,x) = \sum_i \widetilde{q}_i(t)\phi_i(vt) \\ &\overline{y}_v(t) = \overline{y}(t,vt), \qquad \widetilde{y}_v(t) = \widetilde{y}(t,vt) \end{aligned}\right\} \tag{4.9}$$

路面凹凸を平均値0の定常確率過程とすることより，$E[z_0(vt)] = 0$が成立し，さらに$E[\dot{z}_0(vt)] = 0$と仮定する。式(4.1)および(4.5)の両辺の各項の期待値をとれば，路面凹凸を考えない場合の橋梁と車両の連成振動を表す次式を得る。

$$\left.\begin{aligned} &\ddot{\overline{q}}_i + 2h_i\omega_i\dot{\overline{q}}_i + \omega_i^2\overline{q}_i = \frac{1}{M_i}\phi_i(vt)m_v(g - \ddot{\overline{z}}_v) \\ &\qquad\qquad (i = 1, 2, \cdots\cdots, n) \\ &\ddot{\overline{z}}_v + 2h_v\omega_v\dot{\overline{z}}_v + \omega_v^2\overline{z}_v = 2h_v\omega_v\dot{\overline{y}}_v + \omega_v^2\overline{y}_v \end{aligned}\right\} \tag{4.10}$$

式(4.1)および式(4.5)から式$(4.10)_{1,2}$をそれぞれ辺々差し引くことにより，偏差$\widetilde{q}_i(t)$，$\widetilde{z}_v(t)$に関する微分方程式を次式のように得る。

$$\left.\begin{aligned} &\ddot{\widetilde{q}}_i + 2h_i\omega_i\dot{\widetilde{q}}_i + \omega_i^2\widetilde{q}_i = -\frac{m_v}{M_i}\phi_i(vt)\ddot{\widetilde{z}}_v \\ &\qquad\qquad (i = 1, 2, \cdots\cdots, n) \\ &\ddot{\widetilde{z}}_v + 2h_v\omega_v\dot{\widetilde{z}}_v + \omega_v^2\widetilde{z}_v \\ &\qquad = 2h_v\omega_v\dot{\widetilde{y}}_v + \omega_v^2\widetilde{y}_v - 2h_v\omega_v\dot{z}_0(vt) - \omega_v^2 z_0(vt) \end{aligned}\right\} \tag{4.11}$$

式(4.11)$_{1,2}$ が，橋梁と車両の非定常連成ランダム振動を表す微分方程式である。

4.2.2 状態方程式

橋梁と走行車両の非定常連成振動系における状態ベクトルおよび外力変数ベクトルを次のようにおく。

$$\begin{bmatrix} \tilde{q}_1 \\ \tilde{q}_2 \\ \vdots \\ \tilde{q}_n \\ \dot{\tilde{q}}_1 \\ \dot{\tilde{q}}_2 \\ \vdots \\ \dot{\tilde{q}}_n \\ \tilde{z}_v \\ \dot{\tilde{z}}_v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_n \\ w_{n+1} \\ w_{n+2} \\ \vdots \\ w_{2n} \\ w_{2n+1} \\ w_{2n+2} \end{bmatrix} = \mathbf{w}(t), \quad \begin{bmatrix} z_0(vt) \\ \dot{z}_0(vt) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} = \mathbf{z}(t) \quad (4.12)$$

ここに，nは橋梁の振動モード次数である。

式(4.12)を用いると，橋梁と車両の連成振動の微分方程式(4.11)は，次式のような状態方程式として表される[10)-12)]。

$$
\begin{bmatrix} \dot{w}_1 \\ \dot{w}_2 \\ \vdots \\ \dot{w}_n \\ \hline \dot{w}_{n+1} \\ \dot{w}_{n+2} \\ \vdots \\ \dot{w}_{2n} \\ \hline \dot{w}_{2n+1} \\ \dot{w}_{2n+2} \end{bmatrix}
=
\left[\begin{array}{cccc|cccc|cc}
 & & & & 1 & & & 0 & & \\
 & & 0 & & & 1 & & & & 0 \\
 & & & & 0 & & \ddots & 1 & & \\
\hline
a_1+b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} & c_1+d_{11} & d_{12} & \cdots & d_{1n} & e_1 & f_1 \\
b_{21} & a_2+b_{22} & \cdots & b_{2n} & d_{21} & c_2+d_{22} & \cdots & d_{2n} & e_2 & f_2 \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\
b_{n1} & b_{n2} & \cdots b_{n,n-1} & a_n+b_{nn} & d_{n1} & d_{n2} & \cdots d_{n,n-1} & c_n+d_{nn} & e_n & f_n \\
\hline
0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 \\
g_1 & g_2 & \cdots & g_n & h_1 & h_2 & \cdots & h_n & -\omega_v^2 & -2h_v\omega_v
\end{array}\right]
\begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_n \\ \hline w_{n+1} \\ w_{n+2} \\ \vdots \\ w_{2n} \\ \hline w_{2n+1} \\ w_{2n+2} \end{bmatrix}
+
\left[\begin{array}{cc}
 & \\
0 & \\
 & \\
\hline
e_1 & f_1 \\
e_2 & f_2 \\
\vdots & \vdots \\
e_n & f_n \\
\hline
0 & 0 \\
-\omega_v^2 & -2h_v\omega_v
\end{array}\right]
\begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix}
\tag{4.13}
$$

ここに,

$$
\left.
\begin{aligned}
a_i &= -\omega_i^2 & e_i &= \frac{m_v}{M_i}\,\omega_v^2\phi_i(vt) \\
b_{ig} &= -\frac{m_v}{M_i}\,\omega_v^2\phi_i(vt)\phi_g(vt) & f_i &= \frac{m_v}{M_i}\,2h_v\omega_v\phi_i(vt) \\
c_i &= -2h_i\omega_i & g_g &= \omega_v^2\phi_g(vt) \\
d_{ig} &= -\frac{m_v}{M_i}\,2h_v\omega_v\phi_i(vt)\phi_g(vt) & h_g &= 2h_v\omega_v\phi_g(vt)
\end{aligned}
\right\}
\tag{4.14}
$$

式(4.13)を簡単に表すと，

$$\dot{\mathbf{w}}(t) = \mathbb{A}(t)\mathbf{w}(t) + \mathbb{B}(t)\mathbf{z}(t) \tag{4.15}$$

となる。また，初期条件として $t=t_0$ における状態ベクトルが次のように与えられる。

$$\mathbf{w}(t_0) = \mathbf{w}_0 \tag{4.16}$$

4.2.3 状態ベクトルの共分散行列

式(4.16)の初期条件のもとでの状態方程式(4.15)の解過程は，線形微分方程式の理論より次式で表される。

$$\mathbf{w}(t) = \Phi(t, t_0)\mathbf{w}_0 + \int_{t_0}^{t} \Phi(t, \tau)\mathbb{B}(\tau)\mathbf{z}(\tau)d\tau \tag{4.17}$$

ここで，$\Phi(t, \tau)$は状態遷移行列である（付録3参照）[10)-12)]。

次に，状態ベクトル$\mathbf{w}(t)$ の共分散行列を求める。

$$\begin{aligned}\mathbf{w}(t_1)\mathbf{w}^T(t_2) = {} & \Phi(t_1, t_0)\mathbf{w}_0\mathbf{w}_0^T\Phi^T(t_2, t_0) \\ & + \int_{t_0}^{t_1} \Phi(t_1, \tau)\mathbb{B}(\tau)\mathbf{z}(\tau)\mathbf{w}_0^T\Phi^T(t_2, t_0)d\tau \\ & + \int_{t_0}^{t_2} \Phi(t_1, t_0)\mathbf{w}_0\mathbf{z}^T(s)\mathbb{B}^T(s)\Phi^T(t_2, s)ds \\ & + \int_{t_0}^{t_1}\int_{t_0}^{t_2} \Phi(t_1, \tau)\mathbb{B}(\tau)\mathbf{z}(\tau)\mathbf{z}^T(s)\mathbb{B}^T(s)\Phi^T(t_2, s)d\tau ds\end{aligned} \tag{4.18}$$

ただし，添字“T” は転置ベクトルあるいは転置行列を表す。ここで，両辺の期待値をとると状態ベクトル$\mathbf{w}(t)$ の共分散行列は，次のように記述される。

$$
\begin{aligned}
\mathbb{R}_w(t_1, t_2) &= E\left[\mathbf{w}(t_1)\mathbf{w}^T(t_2)\right] \\
&= \Phi(t_1, t_0)\mathbf{W}_0\Phi^T(t_2, t_0) \\
&\quad + \int_{t_0}^{t_1} \Phi(t_1, \tau)\mathbb{B}(\tau)E\left[\mathbf{z}(\tau)\mathbf{w}_0^T\right]\Phi^T(t_2, t_0)d\tau \\
&\quad + \int_{t_0}^{t_2} \Phi(t_1, t_0)E\left[\mathbf{w}_0\mathbf{z}^T(s)\right]\mathbb{B}^T(s)\Phi^T(t_2, s)ds \\
&\quad + \int_{t_0}^{t_1}\int_{t_0}^{t_2} \Phi(t_1, \tau)\mathbb{B}(\tau)E\left[\mathbf{z}(\tau)\mathbf{z}^T(s)\right]\mathbb{B}^T(s)\Phi^T(t_2, s)d\tau ds
\end{aligned}
\tag{4.19}
$$

ここで，

$$
\mathbf{W}_0 = E\left[\mathbf{w}_0\mathbf{w}_0^T\right] \tag{4.20}
$$

この共分散行列の式(4.19)において，第１項には初期条件$\mathbf{w}_0$ の共分散行列$\mathbf{W}_0$ が含まれる。これについては，車両が橋梁に進入する前の堅い路盤上の走行車両の振動方程式の解，すなわち，定常解により得られる。また，第２項および第３項には，初期条件$\mathbf{w}_0$ と外力変数ベクトル$\mathbf{z}(t)$ の共分散行列$E\left[\mathbf{z}(\tau)\mathbf{w}_0^T\right]$あるいは$E\left[\mathbf{w}_0\mathbf{z}^T(s)\right]$ がそれぞれあらわれる。さらに，第４項には外力変数ベクトル$\mathbf{z}(t)$ の共分散行列が含まれる。以下において，式(4.19)の第４項，第１項および第２・３項の順に，それらの内容を，路面凹凸パワースペクトル密度を用いて表すように変形する。

（１）外力変数ベクトル$\mathbf{z}(t)$ に関する共分散行列

式(4.19)の右辺第４項において，外力変数ベクトル$\mathbf{z}(t)$ の共分散行列を求めなければならない。

$$
\mathbf{z}(t) = \begin{bmatrix} z_0(vt) \\ \dot{z}_0(vt) \end{bmatrix} \tag{4.12$_2$}
$$

$z_0(vt)$は路面凹凸であり，これは前述のごとく定常確率過程と仮定することができる。さらに，$\dot{z}_0(vt)$も定常確率過程と仮定する。

$\mathbf{z}(t)$ の共分散行列を要素により表すと，

$$E[\mathbf{z}(\tau)\mathbf{z}^T(s)] = \begin{bmatrix} E[z_0(v\tau)z_0(vs)] & E[z_0(v\tau)\dot{z}_0(vs)] \\ E[\dot{z}_0(v\tau)z_0(vs)] & E[\dot{z}_0(v\tau)\dot{z}_0(vs)] \end{bmatrix} \tag{4.21}$$

いま，$z_0(vt)$と$\dot{z}_0(vt)$が共にエルゴード性を有すると仮定すると，式(4.21)の各要素は路面凹凸のパワースペクトル密度を用いて，次のように表すことができる（付録４参照）[13]。

$$\left.\begin{aligned}
E[z_0(v\tau)z_0(vs)] &= R_{z_0z_0}(s-\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\pi v} S_{z_0}\left(\frac{\omega}{2\pi v}\right) e^{j\omega(s-\tau)} d\omega \\
E[\dot{z}_0(v\tau)z_0(vs)] &= R_{\dot{z}_0z_0}(s-\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} (-j\omega) \frac{1}{2\pi v} S_{z_0}\left(\frac{\omega}{2\pi v}\right) e^{j\omega(s-\tau)} d\omega \\
E[z_0(v\tau)\dot{z}_0(vs)] &= R_{z_0\dot{z}_0}(s-\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} j\omega \frac{1}{2\pi v} S_{z_0}\left(\frac{\omega}{2\pi v}\right) e^{j\omega(s-\tau)} d\omega \\
E[\dot{z}_0(v\tau)\dot{z}_0(vs)] &= R_{\dot{z}_0\dot{z}_0}(s-\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} \omega^2 \frac{1}{2\pi v} S_{z_0}\left(\frac{\omega}{2\pi v}\right) e^{j\omega(s-\tau)} d\omega
\end{aligned}\right\} \tag{4.22}$$

ここで，jは虚数単位，

$\frac{1}{2\pi v} S_{z_0}\left(\frac{\omega}{2\pi v}\right)$は路面凹凸のパワースペクトル密度を表す。

そこで，

$$\begin{bmatrix} 1 & j\omega \\ -j\omega & \omega^2 \end{bmatrix} = \boldsymbol{\omega} \tag{4.23}$$

とおくと，$\mathbf{z}(t)$ の共分散行列は次式で示される。

$$E[\mathbf{z}(\tau)\mathbf{z}^T(s)] = \int_{-\infty}^{\infty} \boldsymbol{\omega} \frac{1}{2\pi v} S_{z_0}\left(\frac{\omega}{2\pi v}\right) e^{j\omega(s-\tau)} d\omega \tag{4.24}$$

したがって，式(4.19)の第４項は，式(4.24)を代入することにより次式となる。

$$\int_{t_0}^{t_1}\int_{t_0}^{t_2}\Phi(t_1,\tau)\mathbb{B}(\tau)E\left[\mathbf{z}(\tau)\mathbf{z}^T(s)\right]\mathbb{B}^T(s)\Phi^T(t_2,s)d\tau ds$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty}\mathbb{H}(t_1,\omega)\omega\frac{1}{2\pi v}S_{z_0}\left(\frac{\omega}{2\pi v}\right)\mathbb{H}^{*T}(t_2,\omega)d\omega \qquad (4.25)$$

ここに,

$$\mathbb{H}(t,\omega) = \int_{t_0}^{t}\Phi(t,\tau)\mathbb{B}(\tau)e^{-j\omega\tau}d\tau \qquad (4.26)$$

ただし，添字“*” は共役複素数を表す。

（２）初期ベクトル$\mathbf{w}_0$ に関する共分散行列

ここでは，車両が橋梁に進入する際の初期条件，すなわち式(4.19)の第１項$\mathbf{W}_0$ について述べる。まず，車両が橋梁に進入するとき，橋梁は静止していると考える。車両は橋梁に進入するまで橋梁上と同様の路面凹凸を有する堅い路盤上を走行して来て，橋梁に進入するときには定常状態に達しているものとする。

路面凹凸を有する堅い路盤上を走行する車両の振動方程式は，式$(4.11)_2$ より次式となる。

$$\ddot{\tilde{z}}_v + 2h_v\omega_v\dot{\tilde{z}}_v + \omega_v^2\tilde{z}_v = -2h_v\omega_v\dot{z}_0(vt) - \omega_v^2 z_0(vt) \qquad (4.27)$$

この車両－路面系の状態ベクトルおよび外力変数ベクトルを次のようにおくと，

$$\begin{bmatrix}\tilde{z}_v\\ \dot{\tilde{z}}_v\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}w_{2n+1}\\ w_{2n+2}\end{bmatrix} = \mathbf{w}_2(t), \quad \begin{bmatrix}z_0(vt)\\ \dot{z}_0(vt)\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}z_1\\ z_2\end{bmatrix} = \mathbf{z}(t) \qquad (4.28)$$

車両－路面系の状態方程式は次式となる。

$$\begin{bmatrix}\dot{w}_{2n+1}\\ \dot{w}_{2n+2}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0 & 1\\ -\omega_v^2 & -2h_v\omega_v\end{bmatrix}\begin{bmatrix}w_{2n+1}\\ w_{2n+2}\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}0 & 0\\ -\omega_v^2 & -2h_v\omega_v\end{bmatrix}\begin{bmatrix}z_1\\ z_2\end{bmatrix}$$

(4.29)

なお，この状態方程式は，橋梁－車両－路面系の状態方程式(4.13)において，橋梁に関する項を0としたものに等しい。式(4.29)を簡単に表すと，

$$\dot{\mathbf{w}}_2(t) = \mathbf{A}_{22}\mathbf{w}_2(t) + \mathbb{B}_2\mathbf{z}(t) \tag{4.30}$$

となる。車両が橋梁に進入する時刻を$t_0=0$ にとると，この車両－路面系の初期時刻は $t=-\infty$ と考えることができ，このときの状態ベクトルを$\mathbb{0}$とする。すなわち，車両－路面系の初期条件は，

$$\mathbf{w}_2(-\infty) = \mathbb{0} \tag{4.31}$$

で表される。この初期条件のもとでの車両－路面系の状態方程式の解過程は次の通りである。

$$\mathbf{w}_2(t_0) = \mathbf{w}_{20} = \int_{-\infty}^{t_0} \Phi_2(t_0, r)\mathbb{B}_2\mathbf{z}(r)dr \tag{4.32}$$

また，橋梁－車両－路面系の初期条件式(4.16)は，

$$\mathbf{w}_0 = \begin{bmatrix} \mathbb{0} \\ \mathbf{w}_{20} \end{bmatrix} \tag{4.33}$$

と表せるから，式(4.20)は，

$$\mathbf{W}_0 = E[\mathbf{w}_0\mathbf{w}_0^T] = E\left[\begin{bmatrix} \mathbb{0} \\ \mathbf{w}_{20} \end{bmatrix} [\mathbb{0} \quad \mathbf{w}_{20}^T]\right]$$

$$= \begin{bmatrix} \mathbb{0} & \mathbb{0} \\ \mathbb{0} & E[\mathbf{w}_{20}\mathbf{w}_{20}^T] \end{bmatrix} \tag{4.34}$$

と表される。ここで，$\mathbf{w}_{20}$の共分散行列は次式となる。

$$E[\mathbf{w}_{20}\mathbf{w}_{20}^T]$$

$$= \int_{-\infty}^{t_0}\int_{-\infty}^{t_0} \Phi_2(t_0, \xi)\mathbb{B}_2 E[\mathbf{z}(\xi)\mathbf{z}^T(\eta)]\mathbb{B}_2^T\Phi_2^T(t_0, \eta)d\xi d\eta \tag{4.35}$$

車両が橋梁に達するまでに走行して来た路盤上の路面凹凸は，橋梁上の路面凹凸と同じパワースペクトルを有していると仮定すると，$E[\mathbf{z}(\xi)\mathbf{z}^T(\eta)]$ は，式(4.24)とまったく同様に表される。

$$E[\mathbf{z}(\xi)\mathbf{z}^T(\eta)] = \int_{-\infty}^{\infty} \omega \frac{1}{2\pi v} S_{z0}\left(\frac{\omega}{2\pi v}\right) e^{j\omega(\eta-\xi)} d\omega \tag{4.36}$$

式(4.36)を用いると，式(4.35)の $E[\mathbf{w}_{20}\mathbf{w}_{20}^T]$ は次のように表される。

$$E[\mathbf{w}_{20}\mathbf{w}_{20}^T] = \int_{-\infty}^{\infty} \mathbb{H}_2(t_0, \omega)\, \omega \frac{1}{2\pi v} S_{z0}\left(\frac{\omega}{2\pi v}\right) \mathbb{H}_2^{*T}(t_0, \omega) d\omega \tag{4.37}$$

ここに，

$$\mathbb{H}_2(t_0, \omega) = \int_{-\infty}^{t_0} \Phi_2(t_0, \xi)\, \mathbb{B}_2\, e^{-j\omega\xi} d\xi \tag{4.38}$$

（３）共分散行列の式(4.19)の第２項，第３項について

前述のように，$\mathbf{w}(t)$ の共分散行列の式(4.19)の第２項および第３項を求めるには，初期条件 $\mathbf{w}_0$ と外力変数ベクトル $\mathbf{z}(t)$ の共分散を求めなければならない。

式(4.19)の第２項，第３項は式(4.32)および式(4.33)を用いて次のようになる。

$$(\text{第２項}) = \int_{t_0}^{t_1} \Phi(t_1, \tau)\, \mathbb{B}(\tau)\, E[\mathbf{z}(\tau)\mathbf{w}_0^T]\, \Phi^T(t_2, t_0) d\tau$$

$$= \int_{t_0}^{t_1} \Phi(t_1, \tau)\, \mathbb{B}(\tau)\, [\mathbf{0}\ \ E[\mathbf{z}(\tau)\mathbf{w}_2^T(t_0)]]\, \Phi^T(t_2, t_0) d\tau$$

$$= \int_{t_0}^{t_1} \Phi(t_1, \tau)\, \mathbb{B}(\tau)\, [\mathbf{0}\ \ E[\mathbf{z}(\tau) \int_{-\infty}^{t_0} \mathbf{z}^T(r)\, \mathbb{B}_2^T \Phi_2^T(t_0, r) dr]]\, \Phi^T(t_2, t_0) d\tau$$

$$= \int_{t_0}^{t_1} \int_{-\infty}^{t_0} \Phi(t_1, \tau)\, \mathbb{B}(\tau)\, [\mathbf{0}\ \ E[\mathbf{z}(\tau)\mathbf{z}^T(r)]\, \mathbb{B}_2^T \Phi_2^T(t_0, r)]\, \Phi^T(t_2, t_0) dr d\tau \tag{4.39}$$

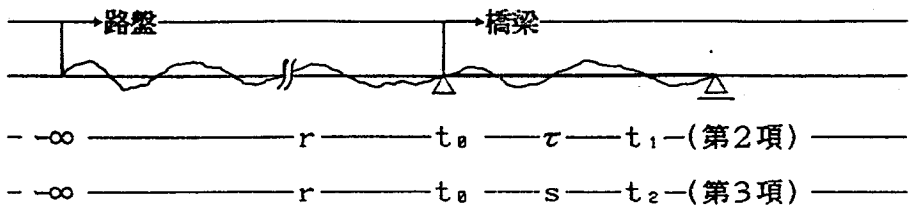
$$(\text{第3項}) = \int_{t_0}^{t_2} \Phi(t_1, t_0) E\left[\mathbf{w}_0 \mathbf{z}^T(s)\right] \mathbb{B}^T(s) \Phi^T(t_2, s) ds$$

$$= \int_{t_0}^{t_2} \Phi(t_1, t_0) \begin{bmatrix} \mathbb{0} \\ E\left[\mathbf{w}_2(t_0) \mathbf{z}^T(s)\right] \end{bmatrix} \mathbb{B}^T(s) \Phi^T(t_2, s) ds$$

$$= \int_{t_0}^{t_2} \Phi(t_1, t_0) \begin{bmatrix} \mathbb{0} \\ E\left[\int_{-\infty}^{t_0} \Phi_2(t_0, r) \mathbb{B}_2 \mathbf{z}(r) dr \mathbf{z}^T(s)\right] \end{bmatrix} \mathbb{B}^T(s) \Phi^T(t_2, s) ds$$

$$= \int_{t_0}^{t_2} \int_{-\infty}^{t_0} \Phi(t_1, t_0) \begin{bmatrix} \mathbb{0} \\ \Phi_2(t_0, r) \mathbb{B}_2 E\left[\mathbf{z}(r) \mathbf{z}^T(s)\right] \end{bmatrix} \mathbb{B}^T(s) \Phi^T(t_2, s) dr ds \tag{4.40}$$

$\mathbf{w}_2(t_0)$は式(4.32)で示されるように，時刻$-\infty$ からt_0までの積分によって得られる。ところが，第2項および第3項の積分領域は，それぞれ時刻t_0からt_1あるいはt_2までである。このことは，図－4.2 に示すように第2項および第3項に含まれる期待値$E\left[\mathbf{z}(\tau)\mathbf{z}^T(r)\right]$，$E\left[\mathbf{z}(r)\mathbf{z}^T(s)\right]$の時刻$\tau$およびsとrの領域が異なることを示す。



図－4.2　状態ベクトルの共分散行列の第2項および第3項における積分領域

ここで，堅い路盤上と橋面上の路面凹凸が同じ統計学的特性を有すると仮定すると，定常確率過程$\mathbf{z}(t)$ はエルゴード性を有すると考えているので，式(4.39)および式(4.40)中の$E\left[\mathbf{z}(\tau)\mathbf{z}^T(r)\right]$あるいは$E\left[\mathbf{z}(r)\mathbf{z}^T(s)\right]$ は，外力変数ベクトルに関する共分散行列を求めた式(4.24)と同様にして，次のように表せる。

$$E[\mathbf{z}(\tau)\mathbf{z}^T(r)] = \int_{-\infty}^{\infty} \boldsymbol{\omega}^T \frac{1}{2\pi v} S_{z0}\left(\frac{\omega}{2\pi v}\right) e^{j\omega(\tau-r)} d\omega \tag{4.41}$$

$$E[\mathbf{z}(r)\mathbf{z}^T(s)] = \int_{-\infty}^{\infty} \boldsymbol{\omega} \frac{1}{2\pi v} S_{z0}\left(\frac{\omega}{2\pi v}\right) e^{j\omega(s-r)} d\omega \tag{4.42}$$

式(4.41)および式(4.42)をそれぞれ式(4.39)および(4.40)に代入すると，

$$(\text{第2項}) = \int_{t_0}^{t_1} \int_{-\infty}^{t_0} \boldsymbol{\Phi}(t_1, \tau)\mathbb{B}(\tau)$$

$$\times \left[\mathbb{0} \int_{-\infty}^{\infty} \boldsymbol{\omega}^T \frac{1}{2\pi v} S_{z0}\left(\frac{\omega}{2\pi v}\right) e^{j\omega(\tau-r)} d\omega \, \mathbb{B}_2^T \boldsymbol{\Phi}_2^T(t_0, r) \right] \boldsymbol{\Phi}^T(t_2, t_0) dr d\tau$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \mathbb{H}^*(t_1, \omega) \left[\mathbb{0} \quad \boldsymbol{\omega}^T \frac{1}{2\pi v} S_{z0}\left(\frac{\omega}{2\pi v}\right) \mathbb{H}_2^T(t_0, \omega) \right] d\omega \, \boldsymbol{\Phi}^T(t_2, t_0)$$

(4.43)

$$(\text{第3項}) = \int_{t_0}^{t_2} \int_{-\infty}^{t_0} \boldsymbol{\Phi}(t_1, t_0) \begin{bmatrix} \mathbb{0} \\ \boldsymbol{\Phi}_2(t_0, r)\mathbb{B}_2 \int_{-\infty}^{\infty} \boldsymbol{\omega} \frac{1}{2\pi v} S_{z0}\left(\frac{\omega}{2\pi v}\right) e^{j\omega(s-r)} d\omega \end{bmatrix}$$

$$\times \mathbb{B}^T(s) \boldsymbol{\Phi}^T(t_2, s) dr ds$$

$$= \boldsymbol{\Phi}(t_1, t_0) \int_{-\infty}^{\infty} \begin{bmatrix} \mathbb{0} \\ \mathbb{H}_2(t_0, \omega) \boldsymbol{\omega} \frac{1}{2\pi v} S_{z0}\left(\frac{\omega}{2\pi v}\right) \end{bmatrix} \mathbb{H}^{*T}(t_2, \omega) d\omega$$

(4.44)

4.2.4 橋梁の応答の2乗平均値

式(4.25), (4.34), (4.43)および(4.44)を式(4.19)に代入すると $\mathbf{w}(t)$ の共分散行列が次

のように得られる。

$$\mathbb{R}_w(t_1, t_2) = E\,[\mathbf{w}(t_1)\mathbf{w}^T(t_2)]$$

$$= \Phi(t_1, t_0)\begin{bmatrix} \mathbb{0} & \mathbb{0} \\ \mathbb{0} & \int_{-\infty}^{\infty} \mathbb{H}_2(t_0, \omega)\,\boldsymbol{\omega}\,\frac{1}{2\pi v}\,S_{z0}\left(\frac{\omega}{2\pi v}\right)\mathbb{H}_2^{*T}(t_0, \omega)\,d\omega \end{bmatrix}$$

$$\times \Phi^T(t_2, t_0)$$

$$+ \int_{-\infty}^{\infty} \mathbb{H}^*(t_1, \omega)\,[\,\mathbb{0} \quad \boldsymbol{\omega}^T\,\frac{1}{2\pi v}\,S_{z0}\left(\frac{\omega}{2\pi v}\right)\mathbb{H}_2^T(t_0, \omega)\,]\,d\omega\,\Phi^T(t_2, t_0)$$

$$+ \Phi(t_1, t_0)\int_{-\infty}^{\infty}\begin{bmatrix} \mathbb{0} \\ \mathbb{H}_2(t_0, \omega)\,\boldsymbol{\omega}\,\frac{1}{2\pi v}\,S_{z0}\left(\frac{\omega}{2\pi v}\right) \end{bmatrix}\mathbb{H}^{*T}(t_2, \omega)\,d\omega$$

$$+ \int_{-\infty}^{\infty} \mathbb{H}(t_1, \omega)\,\boldsymbol{\omega}\,\frac{1}{2\pi v}S_{z0}\left(\frac{\omega}{2\pi v}\right)\mathbb{H}^{*T}(t_2, \omega)\,d\omega \qquad (4.45)$$

ここに,

$$\boldsymbol{\omega} = \begin{bmatrix} 1 & j\omega \\ -j\omega & \omega^2 \end{bmatrix} \qquad (4.23)$$

$$\mathbb{H}(t, \omega) = \int_{t_0}^{t} \Phi(t, \tau)\,\mathbb{B}(\tau)\,e^{-j\omega\tau}d\tau \qquad (4.26)$$

$$\mathbb{H}_2(t_0, \omega) = \int_{-\infty}^{t_0} \Phi_2(t_0, \xi)\,\mathbb{B}_2\,e^{-j\omega\xi}d\xi \qquad (4.38)$$

状態ベクトル$\mathbf{w}(t)$ の共分散行列の式(4.45)より，橋梁のたわみに関する不規則変動量の２乗平均値を求めるために必要な要素を$\mathbb{R}_w(t_1, t_2)$より選んで次のように表す。なお，ここでは橋梁のｎ次振動モードまで考慮している。

たわみに関する要素：$R_{q_i q_k}(t_1, t_2) = E[\tilde{q}_i(t_1)\tilde{q}_k(t_2)]$ (4.46)

$(i, k = 1, 2, \cdots, n)$

よって，変位 $y(t, x)$ の共分散関数は，それぞれ次式となる。

$$R_y(t_1, t_2) = E[\sum_i \tilde{q}_i(t_1)\phi_i(x)\sum_k \tilde{q}_k(t_2)\phi_k(x)]$$

$$= \sum_i \sum_k \phi_i(x)\phi_k(x) E[\tilde{q}_i(t_1)\tilde{q}_k(t_2)]$$

$$= \sum_i \sum_k \phi_i(x)\phi_k(x) R_{q_i q_k}(t_1, t_2) \quad (4.47)$$

ゆえに，橋梁の任意点xにおけるたわみの不規則変動量の２乗平均値は，式(4.47)において $t_1 = t_2 = t$ とおくと次式で求められる。

$$R_y(t, t) = \sum_i \sum_k \phi_i(x)\phi_k(x) R_{q_i q_k}(t, t) \quad (4.48)$$

また，橋桁の任意点の曲げモーメントの２乗平均値は式(4.48)より次式となる。

$$R_M(t, t) = \sum_i \sum_k \phi''_i(x)\phi''_k(x) R_{q_i q_k}(t, t) \quad (4.49)$$

ここに，

$$\phi''_i(x) = \frac{d^2}{dx^2}\phi_i(x)$$

４．３　２自由度系車両の連行による単純桁橋の不規則振動解析

前節の１自由度系車両の単一走行による橋梁の非定常連成不規則振動解析を，前・後輪を考慮した２自由度モデルが連行する場合に拡張する。

４．３．１　連行荷重による橋梁の非定常連成振動方程式

２自由度振動系にモデル化された車両が連行することによる橋梁の連成振動方程式は，前章の３．２．１項で示したように次式となる。

$$\ddot{q}_i + 2h_i\omega_i\dot{q}_i + \omega_i^2 q_i = \frac{1}{M_i}\sum_{j=1}^{h}\sum_{s=1}^{2}\sum_{k=1}^{ax(s)}\phi_i(x_{jsk})P_{jsk}(t) \quad (3.2)$$

$$(i = 1, 2, \cdots\cdots, n)$$

$$\left.\begin{aligned} & m_{vj}\ddot{z}_j + \sum_{s=1}^{2} v_{js}(t) = 0 \\ & m_{vj}\gamma_j^2\ddot{\theta}_j - \sum_{s=1}^{2}(-1)^s\lambda_{js}v_{js}(t) = 0 \\ & \qquad\qquad (j = 1, 2, \cdots\cdots, h) \end{aligned}\right\} (3.5)$$

ここで，非定常ランダム過程$q_i(t)$，$z_j(t)$，$\theta_j(t)$の任意時刻tにおける平均値は次式で与えられる。

$$\bar{q}_i(t) = E[q_i(t)],\ \bar{z}_j(t) = E[z_j(t)],\ \bar{\theta}_j(t) = E[\theta_j(t)] \quad (4.50)$$

平均値からの$q_i(t)$，$z_j(t)$，$\theta_j(t)$の偏差を $\tilde{q}_i(t), \tilde{z}_j(t), \tilde{\theta}_j(t)$ とすれば

$$\left.\begin{aligned} & q_i(t) = \bar{q}_i(t) + \tilde{q}_i(t), \quad z_j(t) = \bar{z}_j(t) + \tilde{z}_j(t) \\ & \theta_j(t) = \bar{\theta}_j(t) + \tilde{\theta}_j(t) \end{aligned}\right\} (4.51)$$

と表される。さらに橋梁の任意点xのたわみ$y(t,x) = \sum_i q_i(t)\phi_i(x)$より，

$$y(t, x_{jsm}) = \bar{y}(t, x_{jsm}) + \tilde{y}(t, x_{jsm}) \quad (4.52)$$

式(3.2)および(3.5)の両辺の各項の期待値をとれば，$E[z_0(vt)] = 0$，$E[\dot{z}_0(vt)] = 0$ と仮定することにより，路面凹凸を考慮しない場合の橋梁と連行荷重の連成振動を表す次式を得る。

$$\left.\begin{aligned} & \ddot{\bar{q}}_i + 2h_i\omega_i\dot{\bar{q}}_i + \omega_i^2\bar{q}_i = \frac{1}{M_i}\sum_{j=1}^{h}\sum_{s=1}^{2}\sum_{k=1}^{ax(s)}\phi_i(x_{jsk})\bar{P}_{jsk}(t) \\ & \qquad\qquad (i = 1, 2, \cdots\cdots, n) \\ & m_{vj}\ddot{\bar{z}}_j + \sum_{s=1}^{2}\bar{v}_{js}(t) = 0 \\ & m_{vj}\gamma_j^2\ddot{\bar{\theta}}_j - \sum_{s=1}^{2}(-1)^s\lambda_{js}\bar{v}_{js}(t) = 0 \\ & \qquad\qquad (j = 1, 2, \cdots\cdots, h) \end{aligned}\right\} (4.53)$$

ここに，

$$
\left.
\begin{aligned}
\bar{P}_{jsk}(t) &= \frac{1}{ax(s)}\{(1-\frac{\lambda_{js}}{\lambda_j})m_{vj}g + \bar{v}_{js}(t)\} \\
\bar{v}_{js}(t) &= k_{vjs}\{\bar{z}_j - (-1)^s\lambda_{js}\bar{\theta}_j - \frac{1}{ax(s)}\sum_{m=1}^{ax(s)}\bar{y}_{vjsm}\} \\
&\quad + c_{vjs}\{\dot{\bar{z}}_j - (-1)^s\lambda_{js}\dot{\bar{\theta}}_j - \frac{1}{ax(s)}\sum_{m=1}^{ax(s)}\dot{\bar{y}}_{vjsm}\} \\
\bar{y}_{vjsm} &= \bar{y}(t,x_{jsm}) = \sum_g \bar{q}_g(t)\phi_g(x_{jsm})
\end{aligned}
\right\} \quad (4.54)
$$

式(4.53)を数値積分により解くと，路面凹凸のない滑らかな場合の橋梁と走行荷重の動的応答を求めることができる。

さて，式(3.2) および (3.5) から式(4.53) をそれぞれ辺々差し引くことにより，偏差 $\tilde{q}_i(t)$，$\tilde{z}_j(t)$，$\tilde{\theta}_j(t)$に関する微分方程式が次式のように得られる。

$$
\left.
\begin{aligned}
&\ddot{\tilde{q}}_i + 2h_i\omega_i\dot{\tilde{q}}_i + \omega_i^2\tilde{q}_i = \frac{1}{M_i}\sum_{j=1}^{h}\sum_{s=1}^{2}\sum_{k=1}^{ax(s)}\phi_i(x_{jsk})\tilde{P}_{jsk}(t) \\
&\qquad\qquad (i = 1, 2, \cdots\cdots, n) \\
&m_{vj}\ddot{\tilde{z}}_j + \sum_{s=1}^{2}\tilde{v}_{js}(t) = 0 \\
&m_{vj}\gamma_j^2\ddot{\tilde{\theta}}_j - \sum_{s=1}^{2}(-1)^s\lambda_{js}\tilde{v}_{js}(t) = 0 \\
&\qquad\qquad (j = 1, 2, \cdots\cdots, h)
\end{aligned}
\right\} \quad (4.55)
$$

ここに，

$$
\left.
\begin{aligned}
\tilde{P}_{jsk}(t) &= \frac{1}{ax(s)}\tilde{v}_{js}(t) \\
\tilde{v}_{js}(t) &= k_{vjs}\{\tilde{z}_j - (-1)^s\lambda_{js}\tilde{\theta}_j - \frac{1}{ax(s)}\sum_{m=1}^{ax(s)}\tilde{y}_{vjsm}\} \\
&\quad + c_{vjs}\{\dot{\tilde{z}}_j - (-1)^s\lambda_{js}\dot{\tilde{\theta}}_j - \frac{1}{ax(s)}\sum_{m=1}^{ax(s)}\dot{\tilde{y}}_{vjsm}\} \\
\tilde{y}_{vjsm} &= \tilde{y}(t,x_{jsm}) - z_0(x_{jsm}) \\
&= \sum_g \tilde{q}_g(t)\phi_g(x_{jsm}) - z_0(x_{jsm})
\end{aligned}
\right\} \quad (4.56)
$$

式(4.55)が，連行車両による橋梁の非定常連成ランダム振動を表す微分方程式である。

4.3.2 状態方程式

橋梁と走行荷重の非定常連成系における状態ベクトル$\mathbf{w}(t)$ および外力変数ベクトル$\mathbf{z}(t)$ を次のようにおく。

$$
\begin{aligned}
\mathbf{w}(t) &= \{\tilde{q}_1;\tilde{q}_2;\ \cdots\ ;\tilde{q}_n;\dot{\tilde{q}}_1;\dot{\tilde{q}}_2;\ \cdots\ ;\dot{\tilde{q}}_n;\tilde{z}_1;\dot{\tilde{z}}_1;\tilde{\theta}_1;\dot{\tilde{\theta}}_1;\ \cdots\ ;\\
&\qquad \tilde{z}_h;\dot{\tilde{z}}_h;\tilde{\theta}_h;\dot{\tilde{\theta}}_h\}\\
&= \{w_1;w_2;\ \cdots\ ;w_n;w_{n+1};w_{n+2};\ \cdots\ ;w_{2n};w_{2n+1};w_{2n+2};w_{2n+3};\\
&\qquad w_{2n+4};\ \cdots\ ;w_{2n+4h-3};w_{2n+4h-2};w_{2n+4h-1};w_{2n+4h}\}\\
\mathbf{z}(t) &= \{z_0[v(t-t_{v1})];z_0[v(t-t_{v1})-\lambda_{121}];z_0[v(t-t_{v1})-\lambda_{122}];\\
&\qquad \dot{z}_0[v(t-t_{v1})];\dot{z}_0[v(t-t_{v1})-\lambda_{121}];\dot{z}_0[v(t-t_{v1})-\lambda_{122}];\\
&\qquad \text{----------};\\
&\qquad z_0[v(t-t_{vh})];z_0[v(t-t_{vh})-\lambda_{h21}];z_0[v(t-t_{vh})-\lambda_{h22}];\\
&\qquad \dot{z}_0[v(t-t_{vh})];\dot{z}_0[v(t-t_{vh})-\lambda_{h21}];\dot{z}_0[v(t-t_{vh})-\lambda_{h22}]\}\\
&= \{z_1;z_2;z_3;z_4;z_5;z_6;\ \cdots\ ;\\
&\qquad z_{6h-5};z_{6h-4};z_{6h-3};z_{6h-2};z_{6h-1};z_{6h}\}
\end{aligned}
\tag{4.57}
$$

式(4.57)を用いると，橋梁と走行荷重の連成振動の微分方程式(4.55)は次のような状態方程式として表される。

$$
\begin{pmatrix} \dot{w}_1 \\ \dot{w}_2 \\ \vdots \\ \dot{w}_n \\ \hline \dot{w}_{n+1} \\ \dot{w}_{n+2} \\ \vdots \\ \dot{w}_{2n} \\ \hline \dot{w}_{2n+1} \\ \dot{w}_{2n+2} \\ \dot{w}_{2n+3} \\ \dot{w}_{2n+4} \\ \vdots \\ \dot{w}_{2n+4h-3} \\ \dot{w}_{2n+4h-2} \\ \dot{w}_{2n+4h-1} \\ \dot{w}_{2n+4h} \end{pmatrix}
=
\left(\begin{array}{c:c:c}
\mathbf{0} & \begin{matrix} 1 & & 0 \\ & 1 & \\ 0 & & 1 \end{matrix} & \mathbf{0} \\ \hdashline
\begin{matrix} a_1+b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & a_2+b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ & & & b_{n-1,n} \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots b_{n,n-1} & a_n+b_{nn} \end{matrix} & \begin{matrix} c_1+d_{11} & d_{12} & \cdots & d_{1n} \\ d_{21} & c_2+d_{22} & \cdots & d_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ & & & d_{n-1,n} \\ d_{n1} & d_{n2} & \cdots d_{n,n-1} & c_n+d_{nn} \end{matrix} & \begin{matrix} \frac{e_{11}}{M_1} & \frac{f_{11}}{M_1} & \frac{g_{11}}{M_1} & \frac{h_{11}}{M_1} & \cdots & \frac{e_{1h}}{M_1} & \frac{f_{1h}}{M_1} & \frac{g_{1h}}{M_1} & \frac{h_{1h}}{M_1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{e_{n1}}{M_n} & \frac{f_{n1}}{M_n} & \frac{g_{n1}}{M_n} & \frac{h_{n1}}{M_n} & \cdots & \frac{e_{nh}}{M_n} & \frac{f_{nh}}{M_n} & \frac{g_{nh}}{M_n} & \frac{h_{nh}}{M_n} \end{matrix} \\ \hdashline
\begin{matrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \frac{e_{11}}{m_{v1}} & \frac{e_{21}}{m_{v1}} & \cdots & \frac{e_{n1}}{m_{v1}} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \frac{g_{11}}{m_{v1}\gamma_1^2} & \frac{g_{21}}{m_{v1}\gamma_1^2} & \cdots & \frac{g_{n1}}{m_{v1}\gamma_1^2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \frac{e_{1h}}{m_{vh}} & \frac{e_{2h}}{m_{vh}} & \cdots & \frac{e_{nh}}{m_{vh}} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \frac{g_{1h}}{m_{vh}\gamma_h^2} & \frac{g_{2h}}{m_{vh}\gamma_h^2} & \cdots & \frac{g_{nh}}{m_{vh}\gamma_h^2} \end{matrix} & \begin{matrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \frac{f_{11}}{m_{v1}} & \frac{f_{21}}{m_{v1}} & \cdots & \frac{f_{n1}}{m_{v1}} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \frac{h_{11}}{m_{v1}\gamma_1^2} & \frac{h_{21}}{m_{v1}\gamma_1^2} & \cdots & \frac{h_{n1}}{m_{v1}\gamma_1^2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \frac{f_{1h}}{m_{vh}} & \frac{f_{2h}}{m_{vh}} & \cdots & \frac{f_{nh}}{m_{vh}} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \frac{h_{1h}}{m_{vh}\gamma_h^2} & \frac{h_{2h}}{m_{vh}\gamma_h^2} & \cdots & \frac{h_{nh}}{m_{vh}\gamma_h^2} \end{matrix} & \begin{matrix} 0 & 1 & 0 & 0 & & & & \\ p_1 & q_1 & r_1 & s_1 & & & \mathbf{0} & \\ 0 & 0 & 0 & 1 & & & & \\ t_1 & u_1 & x_1 & y_1 & & & & \\ & & & & \ddots & & & \\ & & & & & 0 & 1 & 0 & 0 \\ & & \mathbf{0} & & & p_h & q_h & r_h & s_h \\ & & & & & 0 & 0 & 0 & 1 \\ & & & & & t_h & u_h & x_h & y_h \end{matrix}
\end{array}\right)
\begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_n \\ \hline w_{n+1} \\ w_{n+2} \\ \vdots \\ w_{2n} \\ \hline w_{2n+1} \\ w_{2n+2} \\ w_{2n+3} \\ w_{2n+4} \\ \vdots \\ w_{2n+4h-3} \\ w_{2n+4h-2} \\ w_{2n+4h-1} \\ w_{2n+4h} \end{pmatrix}
$$

$$
+\begin{bmatrix}
 & & & 0 & & & \\
\cdots & \frac{k_{vj1}}{M_1} & \frac{k_{vj2}}{2M_1} & \frac{k_{vj2}}{2M_1} & \frac{c_{vj1}}{M_1} & \frac{c_{vj2}}{2M_1} & \cdots \\
 & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \\
\cdots & \frac{k_{vj1}}{M_n} & \frac{k_{vj2}}{2M_n} & \frac{k_{vj2}}{2M_n} & \frac{c_{vj1}}{M_n} & \frac{c_{vj2}}{2M_n} & \cdots \\
 & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \\
\cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\
\cdots & \frac{-k_{vj1}}{m_{vj}} & \frac{-k_{vj2}}{2m_{vj}} & \frac{-k_{vj2}}{2m_{vj}} & \frac{-c_{vj1}}{m_{vj}} & \frac{-c_{vj2}}{2m_{vj}} & \cdots \\
\cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\
\cdots & \frac{-\lambda_{j1}k_{vj1}}{m_{vj}\gamma_j^2} & \frac{\lambda_{j2}k_{vj2}}{2m_{vj}\gamma_j^2} & \frac{\lambda_{j2}k_{vj2}}{2m_{vj}\gamma_j^2} & \frac{-\lambda_{j1}c_{vj1}}{m_{vj}\gamma_j^2} & \frac{\lambda_{j2}c_{vj2}}{2m_{vj}\gamma_j^2} & \frac{\lambda_{j2}c_{vj2}}{2m_{vj}\gamma_j^2} \cdots \\
 & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots &
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix}
\vdots \\
z_{6j-5} \\
z_{6j-4} \\
z_{6j-3} \\
z_{6j-2} \\
z_{6j-1} \\
z_{6j} \\
\vdots
\end{bmatrix}
\tag{4.58}
$$

ここに,

$$
\left.
\begin{aligned}
a_i &= -\omega_i^2 \\
b_{ig} &= -\frac{1}{M_i}\sum_{j=1}^{h}\sum_{s=1}^{2}\sum_{k=1}^{ax(s)}\phi_i(x_{jsk})\left(\frac{1}{ax(s)}\right)^2 k_{vjs}\sum_{m=1}^{ax(s)}\phi_g(x_{jsm}) \\
c_i &= -2h_i\omega_i \\
d_{ig} &= -\frac{1}{M_i}\sum_{j=1}^{h}\sum_{s=1}^{2}\sum_{k=1}^{ax(s)}\phi_i(x_{jsk})\left(\frac{1}{ax(s)}\right)^2 c_{vjs}\sum_{m=1}^{ax(s)}\phi_g(x_{jsm}) \\
e_{ij} &= \sum_{s=1}^{2}\sum_{k=1}^{ax(s)}\phi_i(x_{jsk})\frac{1}{ax(s)}k_{vjs} \\
f_{ij} &= \sum_{s=1}^{2}\sum_{k=1}^{ax(s)}\phi_i(x_{jsk})\frac{1}{ax(s)}c_{vjs} \\
g_{ij} &= -\sum_{s=1}^{2}\sum_{k=1}^{ax(s)}(-1)^s\phi_i(x_{jsk})\frac{1}{ax(s)}k_{vjs}\lambda_{js} \\
h_{ij} &= -\sum_{s=1}^{2}\sum_{k=1}^{ax(s)}(-1)^s\phi_i(x_{jsk})\frac{1}{ax(s)}c_{vjs}\lambda_{js} \\
p_j &= -\frac{1}{m_{vj}}\sum_{s=1}^{2}k_{vjs} \\
q_j &= -\frac{1}{m_{vj}}\sum_{s=1}^{2}c_{vjs} \\
r_j &= \frac{1}{m_{vj}}\sum_{s=1}^{2}(-1)^s\lambda_{js}k_{vjs} \\
s_j &= \frac{1}{m_{vj}}\sum_{s=1}^{2}(-1)^s\lambda_{js}c_{vjs} \\
t_j &= \frac{1}{m_{vj}\gamma_j^2}\sum_{s=1}^{2}(-1)^s\lambda_{js}k_{vjs} \\
u_j &= \frac{1}{m_{vj}\gamma_j^2}\sum_{s=1}^{2}(-1)^s\lambda_{js}c_{vjs} \\
x_j &= -\frac{1}{m_{vj}\gamma_j^2}\sum_{s=1}^{2}\lambda_{js}^2 k_{vjs} \\
y_j &= -\frac{1}{m_{vj}\gamma_j^2}\sum_{s=1}^{2}\lambda_{js}^2 c_{vjs}
\end{aligned}
\right\} \quad (4.59)
$$

式(4.58)を簡単に表すと,

$$\dot{\mathbf{w}}(t) = \mathbb{A}(t)\mathbf{w}(t) + \mathbb{B}(t)\mathbf{z}(t) \qquad (4.60)$$

となる。

また，初期条件としては車両が橋梁に入るごとに，

$$\mathbf{w}(t_{v1}) = \mathbf{w}_{01} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \hline w_{2n+1} \\ w_{2n+2} \\ w_{2n+3} \\ w_{2n+4} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{w}(t_{v2}) = \mathbf{w}_{02} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \hline w_{2n+1} \\ w_{2n+2} \\ w_{2n+3} \\ w_{2n+4} \\ w_{2n+5} \\ w_{2n+6} \\ w_{2n+7} \\ w_{2n+8} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \cdots\cdots,$$

$$\mathbf{w}(t_{vk}) = \mathbf{w}_{0k} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \hline w_{2n+1} \\ \vdots \\ w_{2n+4k} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \cdots\cdots, \quad \mathbf{w}(t_{vh}) = \mathbf{w}_{0h} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \hline w_{2n+1} \\ \vdots \\ w_{2n+4h} \end{bmatrix} \tag{4.61}$$

という状態ベクトルが与えられるものとする。この初期条件について詳しくは後述する（４．３．３項（２）参照）。

４．３．３　状態ベクトルの共分散行列

式(4.61)の一般的な初期条件のもとでの状態方程式(4.60)の解過程は，前節の場合と同様に線形微分方程式の理論より次式で表される。

$$\mathbf{w}(t) = \Phi(t, t_0)\mathbf{w}_{0k} + \int_{t_0}^{t} \Phi(t, \tau)\mathbb{B}(\tau)\mathbf{z}(\tau)d\tau \tag{4.62}$$

ここで，k：着目時間tまでに橋に進入した荷重台数

次に状態ベクトル$\mathbf{w}(t)$ の共分散行列を前節の場合と同様に求める。

$$
\begin{aligned}
\mathbb{R}_{\mathbf{w}}(t_1, t_2) &= E\left[\mathbf{w}(t_1)\mathbf{w}^T(t_2)\right] \\
&= \Phi(t_1, t_0)\mathbb{W}_0\Phi^T(t_2, t_0) \\
&\quad + \int_{t_0}^{t_1} \Phi(t_1, \tau)\mathbb{B}(\tau)E\left[\mathbf{z}(\tau)\mathbf{w}_{0,k2}^T\right]\Phi^T(t_2, t_0)d\tau \\
&\quad + \int_{t_0}^{t_2} \Phi(t_1, \tau)E\left[\mathbf{w}_{0,k1}\mathbf{z}^T(s)\right]\mathbb{B}^T(s)\Phi^T(t_2, s)ds \\
&\quad + \int_{t_0}^{t_1}\int_{t_0}^{t_2} \Phi(t_1, \tau)\mathbb{B}(\tau)E\left[\mathbf{z}(\tau)\mathbf{z}^T(s)\right]\mathbb{B}^T(s)\Phi^T(t_2, s)d\tau\, ds
\end{aligned}
$$

ここで，　(4.63)

$$
\mathbb{W}_0 = E\left[\mathbf{w}_{0,k1}\mathbf{w}_{0,k2}^T\right] \tag{4.64}
$$

以後，$k_1 = k_2 = k$ として式の展開を行う。

（１）外力変数ベクトル$\mathbf{z}(t)$に関する共分散行列

式(4.63)の右辺第４項において，外力変数ベクトル$\mathbf{z}(t)$ の共分散行列を求めなければならない。$\mathbf{z}(t)$ の共分散行列を要素により表すと，

$$
E\left[\mathbf{z}(\tau)\mathbf{z}^T(s)\right]
$$

$$
= E\left[\begin{bmatrix}
z_0\{v(\tau-t_{v1})\} \\
z_0\{v(\tau-t_{v1})-\lambda_{121}\} \\
z_0\{v(\tau-t_{v1})-\lambda_{122}\} \\
\dot{z}_0\{v(\tau-t_{v1})\} \\
\dot{z}_0\{v(\tau-t_{v1})-\lambda_{121}\} \\
\dot{z}_0\{v(\tau-t_{v1})-\lambda_{122}\} \\
\vdots \\
z_0\{v(\tau-t_{vp})\} \\
z_0\{v(\tau-t_{vp})-\lambda_{p21}\} \\
z_0\{v(\tau-t_{vp})-\lambda_{p22}\} \\
\dot{z}_0\{v(\tau-t_{vp})\} \\
\dot{z}_0\{v(\tau-t_{vp})-\lambda_{p21}\} \\
\dot{z}_0\{v(\tau-t_{vp})-\lambda_{p22}\} \\
\vdots \\
z_0\{v(\tau-t_{vh})\} \\
z_0\{v(\tau-t_{vh})-\lambda_{h21}\} \\
z_0\{v(\tau-t_{vh})-\lambda_{h22}\} \\
\dot{z}_0\{v(\tau-t_{vh})\} \\
\dot{z}_0\{v(\tau-t_{vh})-\lambda_{h21}\} \\
\dot{z}_0\{v(\tau-t_{vh})-\lambda_{h22}\}
\end{bmatrix}
\begin{matrix}
[\cdots\cdots & z_0\{v(s-t_{vq})\} & z_0\{v(s-t_{vq})-\lambda_{q21}\} \\
 & z_0\{v(s-t_{vq})-\lambda_{q22}\} & \dot{z}_0\{v(s-t_{vq})\} \\
 & \dot{z}_0\{v(s-t_{vq})-\lambda_{q21}\} & \dot{z}_0\{v(s-t_{vq})-\lambda_{q22}\} \cdots]]
\end{matrix}
$$

(4.65)

前節の場合と同様に式(4.65)の各要素は，路面凹凸パワースペクトル密度を用いて表すことができるが，このとき，フーリエ変換の微分法則および拡大定理と共にフーリエ変換の移動定理を用いる（付録４参照）。

$$E\left[\mathbf{z}(\tau)\mathbf{z}^{T}(s)\right] = \int_{-\infty}^{\infty} \boldsymbol{\omega}_{\tau s} \frac{1}{2\pi v} S_{z0}\left(\frac{\omega}{2\pi v}\right) e^{j\omega(s-\tau)} d\omega \tag{4.66}$$

$\boldsymbol{\omega}_{\tau s}$マトリックスの内，行要素が第ｐ台目および列要素が第ｑ台目に関する要素は，次式の通りである。

$$\boldsymbol{\omega}_{epq} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\omega}_{pq} & j\omega\boldsymbol{\omega}_{pq} \\ -j\omega\boldsymbol{\omega}_{pq} & \omega^{2}\boldsymbol{\omega}_{pq} \end{bmatrix} \exp\{j\omega(t_{vp}-t_{vq})\}$$

$$\boldsymbol{\omega}_{pq} = \begin{bmatrix} 1 & \exp\{-j\frac{\omega}{v}\lambda_{q21}\} & \exp\{-j\frac{\omega}{v}\lambda_{q22}\} \\ \exp\{j\frac{\omega}{v}\lambda_{p21}\} & \exp\{j\frac{\omega}{v}(\lambda_{p21}-\lambda_{q21})\} & \exp\{j\frac{\omega}{v}(\lambda_{p21}-\lambda_{q22})\} \\ \exp\{j\frac{\omega}{v}\lambda_{p22}\} & \exp\{j\frac{\omega}{v}(\lambda_{p22}-\lambda_{q21})\} & \exp\{j\frac{\omega}{v}(\lambda_{p22}-\lambda_{q22})\} \end{bmatrix} \tag{4.67}$$

$\boldsymbol{\omega}_{\tau s}$の行の大きさは時刻$\tau$に橋上にある荷重に対応する行要素をとり，列の大きさは時刻ｓに橋上にある荷重に対応する列要素をとる。

したがって，式(4.63)の第４項は，式(4.66)を代入することにより次式となる。

$$\begin{aligned}(\text{第４項}) &= \int_{t_0}^{t_1}\int_{t_0}^{t_2} \boldsymbol{\Phi}(t_1,\tau)\mathbb{B}(\tau)E\left[\mathbf{z}(\tau)\mathbf{z}^{T}(s)\right]\mathbb{B}^{T}(s)\boldsymbol{\Phi}^{T}(t_2,s)d\tau ds \\ &= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{t_0}^{t_1}\int_{t_0}^{t_2} \boldsymbol{\Phi}(t_1,\tau)\mathbb{B}(\tau)\boldsymbol{\omega}_{\tau s}\mathbb{B}^{T}(s)\boldsymbol{\Phi}^{T}(t_2,s)e^{j\omega(s-\tau)}d\tau ds \\ &\quad \times \frac{1}{2\pi v} S_{z0}\left(\frac{\omega}{2\pi v}\right)d\omega \end{aligned} \tag{4.68}$$

いまτ，ｓについての積分を橋梁上にある車の台数によって分けると$\boldsymbol{\omega}$マトリックスが決まる。

$$(\text{第４項}) = \int_{-\infty}^{\infty}\left\{\int_{t_{v1}}^{t_{v2}} \boldsymbol{\Phi}(t_1,\tau)\mathbb{B}(\tau)e^{-j\omega\tau}d\tau\right.\left[\boldsymbol{\omega}_{\tau 1,s1}\int_{t_{v1}}^{t_{v2}} \mathbb{B}^{T}(s)\boldsymbol{\Phi}^{T}(t_2,s)e^{j\omega s}ds\right.$$

$$+ \text{-------} + \omega_{\tau 1,sk} \int_{t_{vk}}^{t_2} \mathbb{B}^T(s)\Phi^T(t_2,s)\, e^{j\omega s} ds\,]$$

$$+ \int_{t_{v2}}^{t_{v3}} \Phi(t_1,\tau)\mathbb{B}(\tau)\, e^{-j\omega\tau} d\tau\ [\,\omega_{\tau 2,s1} \int_{t_{v1}}^{t_{v2}} \mathbb{B}^T(s)\Phi^T(t_2,s)\, e^{j\omega s} ds$$

$$+ \text{-------} + \omega_{\tau 2,sk} \int_{t_{vk}}^{t_2} \mathbb{B}^T(s)\Phi^T(t_2,s)\, e^{j\omega s} ds\,]$$

$$+ \int_{t_{vk}}^{t_1} \Phi(t_1,\tau)\mathbb{B}(\tau)\, e^{-j\omega\tau} d\tau\ [\,\omega_{\tau k1,s1} \int_{t_{v1}}^{t_{v2}} \mathbb{B}^T(s)\Phi^T(t_2,s)\, e^{j\omega s} ds$$

$$+ \text{-------} + \omega_{\tau k1,sk} \int_{t_{vk}}^{t_2} \mathbb{B}^T(s)\Phi^T(t_2,s)\, e^{j\omega s} ds\,]\ \}$$

$$\times \frac{1}{2\pi v} S_{z0}\left(\frac{\omega}{2\pi v}\right) d\omega$$

ここで,

$$\left.\begin{aligned} t_0 &= t_{v1} < \tau_1 < t_{v2} < \tau_2 < t_{v3} < \text{-----} < t_{vk} < \tau_k < t_1 \\ t_0 &= t_{v1} < s_1 < t_{v2} < s_2 < t_{v3} < \text{-----} < t_{vk} < s_k < t_2 \end{aligned}\right\} \quad (4.69)$$

$$(\text{第4項}) = \int_{-\infty}^{\infty} \{\mathbb{H}(t_1,\omega)_{\tau 1}\,[\,\omega_{\tau 1,s1}\mathbb{H}^{*T}(t_2,\omega)_{s1} + \cdots + \omega_{\tau 1,sk}\mathbb{H}^{*T}(t_2,\omega)_{sk}\,]$$

$$+ \mathbb{H}(t_1,\omega)_{\tau 2}\,[\,\omega_{\tau 2,s1}\mathbb{H}^{*T}(t_2,\omega)_{s1} + \cdots + \omega_{\tau 2,sk}\mathbb{H}^{*T}(t_2,\omega)_{sk}\,]$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$+ \mathbb{H}(t_1,\omega)_{\tau k}\,[\,\omega_{\tau k,s1}\mathbb{H}^{*T}(t_2,\omega)_{s1} + \cdots + \omega_{\tau k,sk}\mathbb{H}^{*T}(t_2,\omega)_{sk}\,]\ \}$$

$$\times \frac{1}{2\pi v} S_{z0}\left(\frac{\omega}{2\pi v}\right) d\omega \qquad (4.70)$$

ここに,

$$\left.\begin{aligned} \mathbb{H}(t_1,\omega)_{\tau m} &= \int_{t_{vm}}^{t_{v,m+1}} \Phi(t_1,\tau)\mathbb{B}(\tau)\, e^{-j\omega\tau} d\tau \\ \mathbb{H}^*(t_2,\omega)_{sm} &= \int_{t_{vm}}^{t_{v,m+1}} \Phi(t_2,s)\mathbb{B}(\tau)\, e^{j\omega s} ds \end{aligned}\right\} \quad (4.71)$$

（２）初期ベクトル$\mathbf{w}_{0k}$に関する共分散行列

ここでは，車両が橋梁に進入する際の初期条件，すなわち式(4.63)の第１項$\mathbf{W}_0$について述べる。まず，１台目の車両が橋梁に進入するまで橋梁は静止しているものと考える。各車両は橋梁に進入するまで橋梁上と同様の確率特性を有する路面凹凸上を走行して来て，橋梁に進入するときには，定常状態に達しているものとする。

路面凹凸を有する堅い路盤上を走行する車両の振動方程式は，各車両ごとに次式が成り立つ。

$$\left.\begin{aligned} & m_{vk}\ddot{\tilde{z}}_k + \sum_{s=1}^{2}\tilde{v}_{ks}(t) = 0 \\ & m_{vk}\gamma_k^2\ddot{\tilde{\theta}}_k - \sum_{s=1}^{2}(-1)^s\lambda_{ks}\tilde{v}_{ks}(t) = 0 \\ & \qquad\qquad (k=1,2,\cdots\cdots,h) \end{aligned}\right\} (4.55)_{2,3}$$

$$\begin{aligned} \tilde{v}_{ks}(t) &= k_{vks}\{\tilde{z}_k - (-1)^s\lambda_{ks}\tilde{\theta}_k - \frac{1}{ax(s)}\sum_{m=1}^{ax(s)} z_0(x_{ksm})\} \\ &\quad + c_{vks}\{\dot{\tilde{z}}_k - (-1)^s\lambda_{ks}\dot{\tilde{\theta}}_k - \frac{1}{ax(s)}\sum_{m=1}^{ax(s)} \dot{z}_0(x_{ksm})\} \end{aligned} \qquad (4.56)_2$$

この車両－路面系の状態ベクトルおよび外力変数ベクトルを次のようにおくと，

$$\left.\begin{aligned} & \begin{pmatrix} \tilde{z}_k \\ \dot{\tilde{z}}_k \\ \tilde{\theta}_k \\ \dot{\tilde{\theta}}_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} w_{2n+4k-3} \\ w_{2n+4k-2} \\ w_{2n+4k-1} \\ w_{2n+4k} \end{pmatrix} = \mathbf{w}_k(t), \\ & \begin{pmatrix} z_0\{v(t-t_{vk})\} \\ z_0\{v(t-t_{vk})-\lambda_{k21}\} \\ z_0\{v(t-t_{vk})-\lambda_{k22}\} \\ \dot{z}_0\{v(t-t_{vk})\} \\ \dot{z}_0\{v(t-t_{vk})-\lambda_{k21}\} \\ \dot{z}_0\{v(t-t_{vk})-\lambda_{k22}\} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z_{6k-5} \\ z_{6k-4} \\ z_{6k-3} \\ z_{6k-2} \\ z_{6k-1} \\ z_{6k} \end{pmatrix} = \mathbf{z}_k(t) \end{aligned}\right\} (4.72)$$

車両－路面系の状態方程式は次式となる。

$$
\begin{bmatrix} \dot{w}_{2n+4k-3} \\ \dot{w}_{2n+4k-2} \\ \dot{w}_{2n+4k-1} \\ \dot{w}_{2n+4k} \end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix}
0 & 1 & 0 & 0 \\
-\dfrac{1}{m_{vk}}\sum_{s=1}^{2} k_{vks} & -\dfrac{1}{m_{vk}}\sum_{s=1}^{2} c_{vks} & \dfrac{1}{m_{vk}}\sum_{s=1}^{2}(-1)^s \lambda_{ks} k_{vks} & \dfrac{1}{m_{vk}}\sum_{s=1}^{2}(-1)^s \lambda_{ks} c_{vks} \\
0 & 0 & 0 & 1 \\
\dfrac{1}{m_{vk}\gamma_k^2}\sum_{s=1}^{2}(-1)^s \lambda_{ks} k_{vks} & \dfrac{1}{m_{vk}\gamma_k^2}\sum_{s=1}^{2}(-1)^s \lambda_{ks} c_{vks} & -\dfrac{1}{m_{vk}\gamma_k^2}\sum_{s=1}^{2}\lambda_{ks}^2 k_{vks} & -\dfrac{1}{m_{vk}\gamma_k^2}\sum_{s=1}^{2}\lambda_{ks}^2 c_{vks}
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix} w_{2n+4k-3} \\ w_{2n+4k-2} \\ w_{2n+4k-1} \\ w_{2n+4k} \end{bmatrix}
$$

$$
+
\begin{bmatrix}
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\dfrac{-k_{vk1}}{m_{vk}} & \dfrac{-k_{vk2}}{2m_{vk}} & \dfrac{-k_{vk2}}{2m_{vk}} & \dfrac{-c_{vk1}}{m_{vk}} & \dfrac{-c_{vk2}}{2m_{vk}} & \dfrac{-c_{vk2}}{2m_{vk}} \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\dfrac{-\lambda_{k1} k_{vk1}}{m_{vk}\gamma_k^2} & \dfrac{\lambda_{k2} k_{vk2}}{2m_{vk}\gamma_k^2} & \dfrac{\lambda_{k2} k_{vk2}}{2m_{vk}\gamma_k^2} & \dfrac{-\lambda_{k1} c_{vk1}}{m_{vk}\gamma_k^2} & \dfrac{\lambda_{k2} c_{vk2}}{2m_{vk}\gamma_k^2} & \dfrac{\lambda_{k2} c_{vk2}}{2m_{vk}\gamma_k^2}
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix} z_{6k-5} \\ z_{6k-4} \\ z_{6k-3} \\ z_{6k-2} \\ z_{6k-1} \\ z_{6k} \end{bmatrix}
\qquad (4.73)
$$

式(4.73)を簡単に表すと次式となる。

$$\dot{\mathbf{w}}_k(t) = \mathbf{A}_k\mathbf{w}_k(t) + \mathbf{B}_k\mathbf{z}_k(t) \tag{4.74}$$

この車両が橋梁に進入する時刻を$t=t_{vk}$にとると，この車両－路面系の初期時刻は$t=-\infty$と考えることができ，このときの状態ベクトルを$\mathbf{0}$とする。すなわち，車両－路面系の初期条件は，

$$\mathbf{w}_k(-\infty) = \mathbf{0} \tag{4.75}$$

で表される。この初期条件のもとでの車両－路面系の状態方程式の解過程は次の通りである。

$$\mathbf{w}_k(t_{vk}) = \mathbf{w}_{k0} = \int_{-\infty+t_{vk}}^{t_{vk}} \mathbf{\Phi}_k(t_{vk},r)\mathbf{B}_k\mathbf{z}_k(r)dr \tag{4.76}$$

また，橋梁－車両－路面系の初期条件式(4.61)の一般形は

$$\mathbf{w}_{0k} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \cdots \\ \mathbf{w}_{10} \\ \vdots \\ \mathbf{w}_{k0} \end{bmatrix} \tag{4.77}$$

ここで，着目時間をtとすると，$t<t_{vj}$の$\mathbf{w}_{j0}$は影響を及ぼさないので無視する。これより，式(4.64)は次式となる。

$$\mathbf{W}_0 = E\left[\mathbf{w}_{0k}\mathbf{w}_{0k}^T\right] = E\left[\begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{w}_{10} \\ \mathbf{w}_{20} \\ \vdots \\ \mathbf{w}_{k0} \end{bmatrix} \left[\mathbf{0}\ \mathbf{w}_{10}^T\ \mathbf{w}_{20}^T\ \cdots\cdots\ \mathbf{w}_{k0}^T\right]\right] \tag{4.78}$$

式(4.78)において，$\mathbf{w}_{0k}$の共分散行列を求めるわけであるが，この場合，車両相互の連成はないので$E\left[\mathbf{w}_{k0}\mathbf{w}_{j0}^T\right]=\mathbf{0}\ (k\neq j)$が成立し，各々の車両に関する$E\left[\mathbf{w}_{k0}\mathbf{w}_{k0}^T\right]$だけが意味を持つ。これらが対角上に４行４列のマトリックスとして並ぶ。

$$E\left[\mathbf{w}_{k0}\mathbf{w}_{k0}^T\right]$$

$$= \int_{-\infty+t_{vk}}^{t_{vk}} \int_{-\infty+t_{vk}}^{t_{vk}} \mathbf{\Phi}_k(t_{vk},\xi)\mathbf{B}_k E\left[\mathbf{z}_k(\xi)\mathbf{z}_k^T(\eta)\right]\mathbf{B}_k^T\mathbf{\Phi}_k^T(t_{vk},\eta)d\xi d\eta \tag{4.79}$$

$$E\left[\mathbf{z}_k(\xi)\mathbf{z}_k^T(\eta)\right] = \int_{-\infty}^{\infty} \boldsymbol{\omega}_{ekk} \frac{1}{2\pi v} S_{z0}\left(\frac{\omega}{2\pi v}\right) e^{j\omega(\eta-\xi)} d\omega \tag{4.80}$$

ここで,

$$\boldsymbol{\omega}_{ekk} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\omega}_{kk} & j\omega\boldsymbol{\omega}_{kk} \\ -j\omega\boldsymbol{\omega}_{kk} & \omega^2\boldsymbol{\omega}_{kk} \end{bmatrix} \tag{4.81}$$

$\boldsymbol{\omega}_{kk}$は，式(4.67)$_2$ においてpおよびqを共にkとおけばよい。

式(4.80)を用いると，$E\left[\mathbf{w}_{k0}\mathbf{w}_{k0}^T\right]$ は次のように表される。

$$E\left[\mathbf{w}_{k0}\mathbf{w}_{k0}^T\right] = \int_{-\infty}^{\infty} \mathbb{H}_k(t_{vk},\omega)\boldsymbol{\omega}_{ekk} \frac{1}{2\pi v} S_{z0}\left(\frac{\omega}{2\pi v}\right) \mathbb{H}_k^{*T}(t_{vk},\omega) d\omega \tag{4.82}$$

ここに,

$$\mathbb{H}_k(t_{vk},\omega) = \int_{-\infty+t_{vk}}^{t_{vk}} \boldsymbol{\Phi}_k(t_{vk},\xi)\mathbb{B}_k e^{-j\omega\xi} d\xi \tag{4.83}$$

*：共役複素数を表す。

（３）共分散行列の式(4.63)の第２項，第３項について

$\mathbf{w}(t)$ の共分散行列の式(4.63)の第２項，第３項を求めるには，初期条件$\mathbf{w}_{0k}$と外力変数ベクトル$\mathbf{z}(t)$ の共分散を求めなければならない。

式(4.63)の第２項は式(4.72)$_2$ および(4.76)を用いて次のようになる。

$$(\text{第２項}) = \int_{t_0}^{t_1} \boldsymbol{\Phi}(t_1,\tau)\mathbb{B}(\tau)E\left[\mathbf{z}(\tau)\mathbf{w}_{0k}^T\right]\boldsymbol{\Phi}^T(t_2,t_0)d\tau$$

$$\mathbf{z}(\tau)\mathbf{w}_{0k}^T = \begin{bmatrix} \mathbf{z}_{nvt} \\ \vdots \\ \mathbf{z}_k \\ \vdots \\ \mathbf{z}_{nv\ell} \end{bmatrix}$$

$$\cdot\left[\,0 \cdots\cdots 0 \;\vdots\; \int_{-\infty+t_{v1}}^{t_{v1}} \mathbf{z}_1^T(r)\mathbb{B}_1^T\boldsymbol{\Phi}_1^T(t_{v1},r)dr \cdots\cdots \int_{-\infty+t_{vk}}^{t_{vk}} \mathbf{z}_k^T(r)\mathbb{B}_k^T\boldsymbol{\Phi}_k^T(t_{vk},r)dr\right]$$

$$-\infty+t_{v1} < r < t_{v1}$$

$$-\infty \leqq r-t_{v1} \leqq 0 \tag{4.84}$$

ここで，n_{vt}, $n_{v\ell}$ は時刻τに橋上にある荷重の先頭車と最後尾車の番号。

上式の期待値をとると，

$$E\left[\mathbf{z}(\tau)\mathbf{w}_{0k}^{T}\right]$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \omega_{\tau k}^{(T)} \frac{1}{2\pi v} S_{z0}\left(\frac{\omega}{2\pi v}\right) e^{j\omega\tau}$$

$$\times \begin{bmatrix} \mathbb{0} & \vdots & \int_{-\infty+t_{v1}}^{t_{v1}} \mathbb{B}_1^T \Phi_1^T(t_{v1}, r)\, e^{-j\omega r} dr & & \mathbb{0} \\ & & & \ddots & \\ & & \mathbb{0} & & \int_{-\infty+t_{vk}}^{t_{vk}} \mathbb{B}_k^T \Phi_k^T(t_{vk}, r)\, e^{-j\omega r} dr \end{bmatrix} d\omega \tag{4.85}$$

ここで，$\omega_{\tau k}$は式(4.66)内に現れる$\omega_{\tau s}$マトリックスの内，行の大きさは時刻τに橋上にある荷重に対応する行のみ考え，列の大きさは時刻t_2までに橋梁に入ったすべての荷重に対応する列を考える。また，$\omega_{\tau k}^{(T)}$ は$\omega_{\tau k}$の内，６行６列毎の要素が転置行列となっている。

$$E\left[\mathbf{z}(\tau)\mathbf{w}_{0k}^{T}\right]$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \omega_{\tau k}^{(T)} \frac{1}{2\pi v} S_{z0}\left(\frac{\omega}{2\pi v}\right) e^{j\omega\tau} \begin{bmatrix} \mathbb{0} & \vdots & \mathbb{H}_1^T(t_{v1}, \omega) & & \mathbb{0} \\ & & & \ddots & \\ & & \mathbb{0} & & \mathbb{H}_k^T(t_{vk}, \omega) \end{bmatrix} d\omega \tag{4.86}$$

上式を用いて

$$(\text{第２項}) = \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \int_{t_0}^{t_1} \Phi(t_1, \tau)\, \mathbb{B}(\tau)\, \omega_{\tau k}^{(T)} e^{j\omega\tau} d\tau \right\} \frac{1}{2\pi v} S_{z0}\left(\frac{\omega}{2\pi v}\right)$$

$$\times \begin{bmatrix} \mathbb{0} & \vdots & \mathbb{H}_1^T(t_{v1}, \omega) & & \mathbb{0} \\ & & & \ddots & \\ & & \mathbb{0} & & \mathbb{H}_k^T(t_{vk}, \omega) \end{bmatrix} d\omega\, \Phi^T(t_2, t_0) \tag{4.87}$$

第４項の場合と同様に，τについての積分を橋梁上にある車の状態によって分けると次のようになる。

$$(\text{第２項}) = \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \int_{t_{v1}}^{t_{v2}} \Phi(t_1, \tau)\, \mathbb{B}(\tau)\, e^{j\omega\tau} d\tau\, \omega_{\tau 1, k}^{(T)} + \cdots\cdots \right.$$

$$+ \int_{t_{vk}}^{t_1} \Phi(t_1, \tau) \mathbb{B}(\tau) e^{j\omega\tau} d\tau \, \omega_{\tau k, k}{}^{(T)} \} \frac{1}{2\pi v} S_{z0}\left(\frac{\omega}{2\pi v}\right)$$

$$\times \begin{bmatrix} & \mathbb{H}_1{}^T(t_{v1}, \omega) & & \mathbb{0} \\ \mathbb{0} & & \ddots & \\ & \mathbb{0} & & \mathbb{H}_k{}^T(t_{vk}, \omega) \end{bmatrix} d\omega \, \Phi^T(t_2, t_0)$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \{ \mathbb{H}^*(t_1, \omega)_{\tau 1} \omega_{\tau 1, k}{}^{(T)} + \mathbb{H}^*(t_1, \omega)_{\tau 2} \omega_{\tau 2, k}{}^{(T)} + \cdots\cdots$$

$$+ \mathbb{H}^*(t_1, \omega)_{\tau k} \omega_{\tau k, k}{}^{(T)} \} \frac{1}{2\pi v} S_{z0}\left(\frac{\omega}{2\pi v}\right)$$

$$\times \begin{bmatrix} & \mathbb{H}_1{}^T(t_{v1}, \omega) & & \mathbb{0} \\ \mathbb{0} & & \ddots & \\ & \mathbb{0} & & \mathbb{H}_k{}^T(t_{vk}, \omega) \end{bmatrix} d\omega \, \Phi^T(t_2, t_0) \qquad (4.88)$$

第２項と同様にして第３項は次のようになる。

$$(\text{第３項}) = \Phi(t_1, t_0) \int_{-\infty}^{\infty} \begin{bmatrix} & \mathbb{0} & \\ \hline \mathbb{H}_1(t_{v1}, \omega) & & \mathbb{0} \\ & \ddots & \\ \mathbb{0} & & \mathbb{H}_k(t_{vk}, \omega) \end{bmatrix} \frac{1}{2\pi v} S_{z0}\left(\frac{1}{2\pi v}\right)$$

$$\times \{ \int_{t_0}^{t_2} \omega_{ks} \mathbb{B}^T(s) \Phi^T(t_2, s) e^{j\omega s} ds \} \, d\omega$$

$$= \Phi(t_1, t_0) \int_{-\infty}^{\infty} \begin{bmatrix} & \mathbb{0} & \\ \hline \mathbb{H}_1(t_{v1}, \omega) & & \mathbb{0} \\ & \ddots & \\ \mathbb{0} & & \mathbb{H}_k(t_{vk}, \omega) \end{bmatrix} \frac{1}{2\pi v} S_{z0}\left(\frac{1}{2\pi v}\right)$$

$$\times \{ \omega_{k,s1} \mathbb{H}^{*T}(t_2, \omega)_{s1} + \cdots\cdots + \omega_{k,sk} \mathbb{H}^{*T}(t_2, \omega)_{sk} \} \, d\omega$$

$$(4.89)$$

式(4.70)(4.78)(4.88)および(4.89)を式(4.63)に代入すると$\mathbf{w}(t)$の共分散行列が次のように得られる。

$$\mathbb{R}_w(t_1, t_2) = E\,[\mathbf{w}(t_1)\mathbf{w}^T(t_2)]$$

$$
= \Phi(t_1, t_0) \left(\begin{array}{c|ccc} 0 & & 0 & \\ \hline & E[\mathbf{w}_{10}\mathbf{w}_{10}^T] & & 0 \\ 0 & & \ddots & \\ & & E[\mathbf{w}_{k0}\mathbf{w}_{k0}^T] & \\ & & & \ddots \\ & 0 & & E[\mathbf{w}_{h0}\mathbf{w}_{h0}^T] \end{array} \right) \Phi^T(t_2, t_0)
$$

$$
+ \int_{-\infty}^{\infty} \{ \mathbb{H}^*(t_1, \omega)_{\tau 1} \boldsymbol{\omega}_{\tau 1, k}{}^{(T)} + \cdots\cdots + \mathbb{H}^*(t_1, \omega)_{\tau k} \boldsymbol{\omega}_{\tau k, k}{}^{(T)} \}
$$

$$
\times \frac{1}{2\pi v} S_{z0}\left(\frac{\omega}{2\pi v}\right) \left(\begin{array}{c|ccc} 0 & \mathbb{H}_1^T(t_{v1}, \omega) & & \\ & & \ddots & \\ & & & \mathbb{H}_k^T(t_{vk}, \omega) \end{array} \right) d\omega \, \Phi^T(t_2, t_0)
$$

$$
+ \Phi(t_1, t_0) \int_{-\infty}^{\infty} \left(\begin{array}{c|ccc} & & 0 & \\ \hline & \mathbb{H}_1(t_{v1}, \omega) & & 0 \\ & & \ddots & \\ & 0 & & \mathbb{H}_k(t_{vk}, \omega) \end{array} \right) \frac{1}{2\pi v} S_{z0}\left(\frac{\omega}{2\pi v}\right)
$$

$$
\times \{ \boldsymbol{\omega}_{k1, s1} \mathbb{H}^{*T}(t_2, \omega)_{s1} + \cdots\cdots + \boldsymbol{\omega}_{k1, sk} \mathbb{H}^{*T}(t_2, \omega)_{sk} \} \, d\omega
$$

$$
+ \int_{-\infty}^{\infty} \{ \mathbb{H}(t_1, \omega)_{\tau 1} [\boldsymbol{\omega}_{\tau 1, s1} \mathbb{H}^{*T}(t_2, \omega)_{s1} + \cdots + \boldsymbol{\omega}_{\tau 1, sk} \mathbb{H}^{*T}(t_2, \omega)_{sk}]
$$

$$
+ \cdots\cdots + \mathbb{H}(t_1, \omega)_{\tau k} [\boldsymbol{\omega}_{\tau k, s1} \mathbb{H}^{*T}(t_2, \omega)_{s1} + \cdots + \boldsymbol{\omega}_{\tau k, sk} \mathbb{H}^{*T}(t_2, \omega)_{sk}] \}
$$

$$
\times \frac{1}{2\pi v} S_{z0}\left(\frac{\omega}{2\pi v}\right) d\omega \tag{4.90}
$$

ここに，$\mathbb{H}(t_1, \omega)_{\tau m}$は式(4.71)で，$\mathbb{H}_k(t_{vk}, \omega)$は式(4.83)で，さらに$\boldsymbol{\omega}_{\tau s}$の要素は式(4.67)で示される。

4.4　数値計算結果

4.4.1　単一走行車両による橋梁のたわみ２乗平均値応答

4.2節および4.3節において定式化された走行荷重による橋梁の非定常連成不規則振動解析の妥当性，ならびに解析モデルの妥当性を検討するために，本項では単一走行車両の場合について数値計算を行う。

（１）解析モデル

数値計算に用いた単純桁橋の諸元を表－4.1 に掲げる。これらの構造諸元は合成桁橋標準設計書より概算された１車線あたりの値である[5]。橋梁の減衰定数はすべて0.02と仮定した。道路橋の動的応答に大きい影響を及ぼす走行車両として用いる大型トラックの諸元を表－4.2 に掲げる。２自由度系にモデル化した車両寸法を図－4.3 に示す。これは，前章において走行実験に使用された試験車の車両寸法と同じものである（図－3.8 参照）。

路面凹凸パワースペクトル密度を図－4.4 に示す。これは，第２章および第３章において，それぞれ実測された路面凹凸のパワースペクトル密度と比較するために示したものである（図－2.11および図－3.7 参照）。名神高速道路の完成直後に野州川橋において測定された路面凹凸スペクトル[14] およびそれを関数 $S_{z_0}(\Omega)=A/(\Omega^2+a^2)$ でモデル化したものである[8]。本節では他の解法との比較を行うために，従来の研究で頻繁に引用されている[15] 名神高速道路の路面凹凸スペクトルを用いることとする。

ここでは単純桁橋を対象とし，本解析手法の妥当性を示すことを目的とするために，数値計算において橋梁の第１次固有振動モードのみを考慮する。

（２）他の解析法との比較

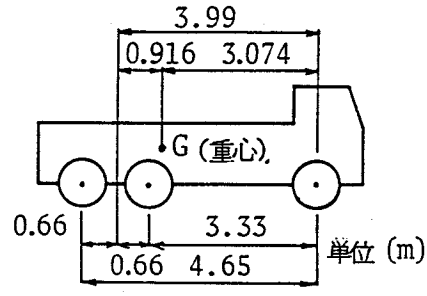
本解析法によって得られた支間中央のたわみの２乗平均値応答を，岡林の共分散方程式による解法[8]ならびにモンテカルロ法によるシミュレーションを用いて得られた結果と共に図－4.5 に示す。本解析法による２乗平均値はシミュレーションによる値と良い一致を示す。一方，岡林による結果は他の２つの解法による２乗平均値の変動の谷を結ぶ包絡線を示す。

表－4.1　道路橋の構造諸元

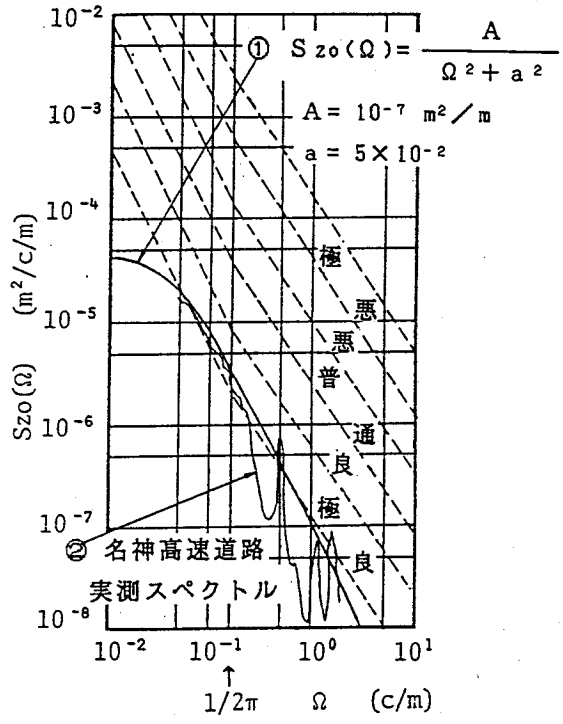
支間長	(m)	40	50	60	80	100
単位長さ当り重量	(t/m)	2.67	2.72	2.753	2.795	2.82
断面２次モーメント	(m^4)	0.1162	0.2010	0.3132	0.6205	1.0381
１次固有振動数	(Hz)	2.94	2.45	2.11	1.66	1.37

表－4.2　走行荷重の構造諸元

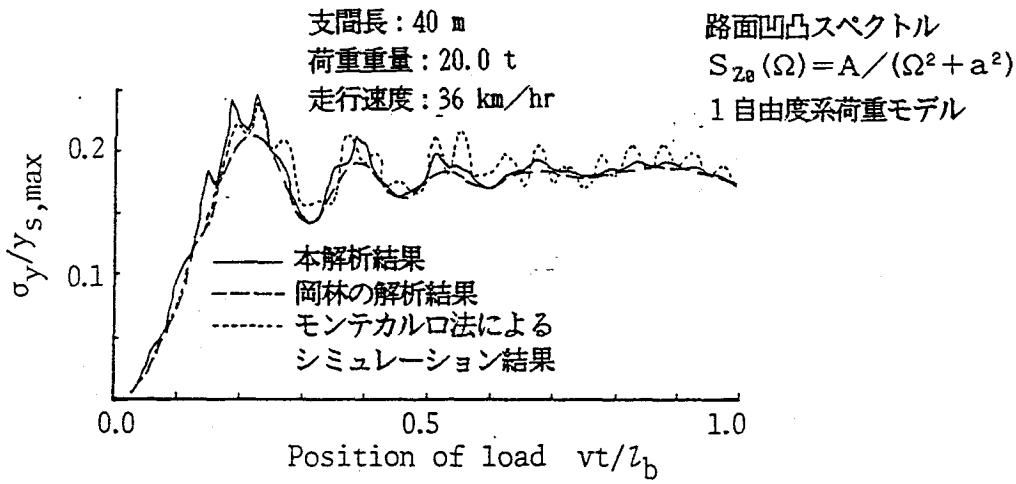
重量	$m_v g$	(t)	20.0	20.7
固有振動数	f_v	(Hz)	3.0	3.016
減衰定数	h_v		0.03	0.0681
ばね定数	k_{v1}	(t/m)	725.1	112.9
	k_{v2}		――	645.7
減衰係数	c_{v1}	(t·sec/m)	2.308	0.811
	c_{v2}		――	4.642
走行速度	V	(km/hr)	36	36, 60, 80



図－4.3　走行荷重の寸法



図－4.4　路面凹凸パワースペクトル密度
とＩＳＯ評価基準



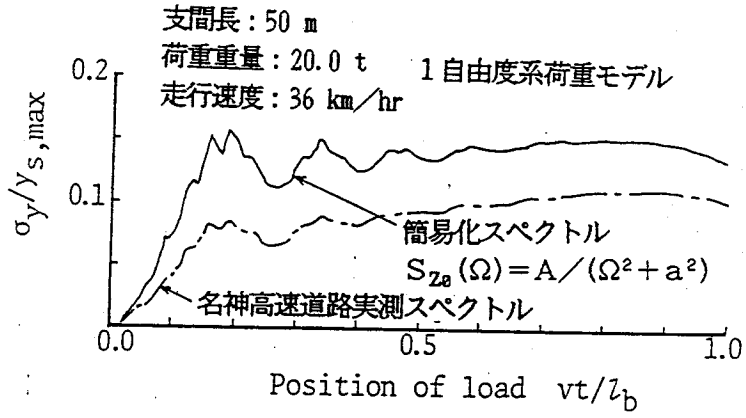
図－4.5　２乗平均値応答の他の
解析結果との比較

（３）路面凹凸パワースペクトル密度のモデル化の影響

図－4.4 に示す路面凹凸の実測値によるパワースペクトル密度を用いた場合と，それを $S_{z0}(\Omega)=A/(\Omega^2+a^2)$ にモデル化したパワースペクトル密度を用いた場合の本解析法による支間中央たわみの２乗平均値応答を図－4.6 に示す。図－4.4 に示すようなパワースペクトル密度のモデルを用いた場合は，実測値によるパワースペクトル密度を用いた場合よりも２乗平均値応答がかなり大きくなる。このことは，このような不規則振動解析に用いる路面凹凸パワースペクトル密度のモデル化に注意を要することを示唆している。さらに，どのような形でパワースペクトル密度を与えられても，そのまま用いることのできる本解析法の特徴が示されたものと思われる。

（４）走行車両のモデル化の影響

走行車両のモデル化の相違による，支間中央たわみの２乗平均値応答の変化を図－4.7 に示す。図中の記号の1-DEG，2-DEG-1-1および2-DEG-1-2 は，走行車両を１自由度振動系，前・後輪１軸の２自由度振動系および前輪１軸・後輪２軸の２自由度系にそれぞれモデル



図－4.6 路面凹凸パワースペクトルの相違による応答の変化

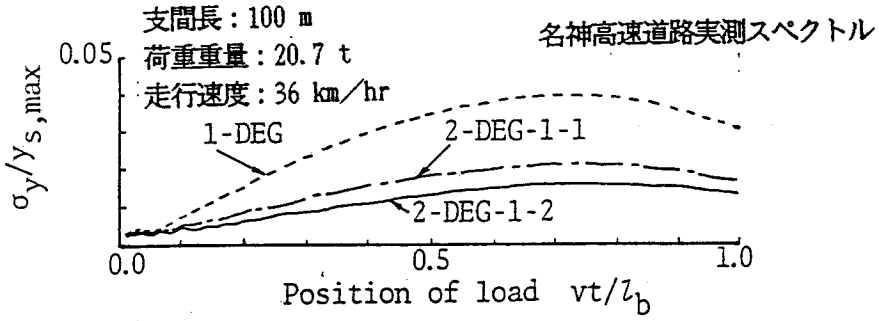
化した場合を表わす。図－4.7 より，走行車両のモデル化の相違により橋梁のたわみの２乗平均値応答にかなりの差を生じ，特に，前輪１軸・後輪２軸の２自由度系としてモデル化した場合は，１自由度系モデルの場合と比較して２乗平均値応答が約４割となっている。ここで対象とした 100mの支間長は単純桁橋の適用限界に近い値であると考えられることより，単純桁橋の動的応答を考える場合，大型トラックの軸数に合わせて走行車両を２自由度系にモデル化する必要があると考えられる。

（５）走行速度の影響

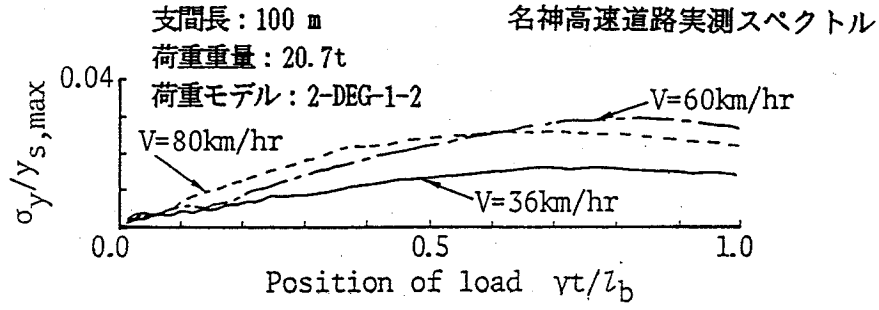
車両の走行速度を36,60,80km/hとした場合の橋の支間中央たわみの２乗平均値応答の変化を図－4.8 に示す。荷重位置が3ℓ／5点を過ぎた後において，速度60km／h の場合が80 km／h の場合よりもσ_y／$y_{s,max}$は大きくなっているが，他の荷重位置においては，走行速度と共にσ_y／$y_{s,max}$は大きくなっている。

（６）支間長による動的応答の変化

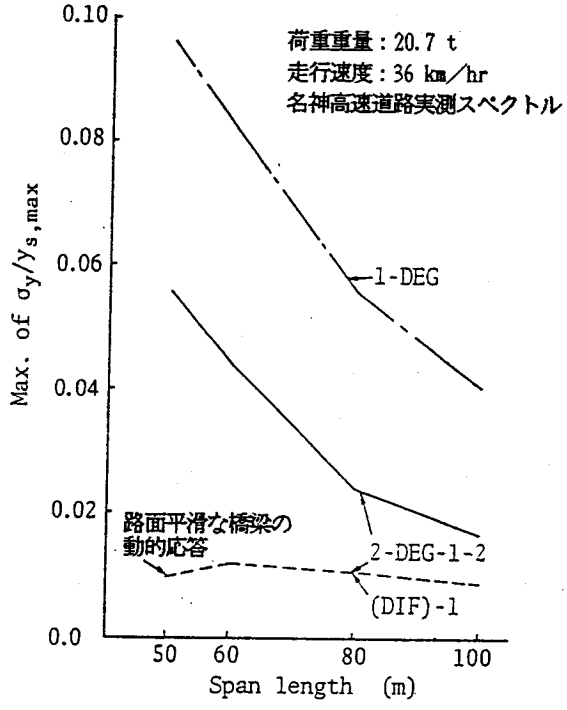
単純桁橋の支間長によるたわみ２乗平均値応答の最大値の変化を図－4.9 に示す。図中



図－4.7　車両モデルの相違による応答の変化



図－4.8　走行速度の相違による応答の変化



図－4.9　支間長の動的応答に及ぼす影響

の破線は路面凹凸を無視した場合の動的応答のシミュレーションにより得られる（動的増幅率）－１である。（動的増幅率）－１の支間長に対する変化は僅かであるのに対して，２乗平均値応答の最大値は支間長が大きくなるのに伴って急激に減少し，支間長が大きくなると橋梁の動的応答に及ぼす路面凹凸の影響が小さくなることを示している。

４．４．２　連行車両による橋梁のたわみ２乗平均値応答

前項において単一走行車両の場合について，本解析手法および解析モデルの妥当性が確認された。ここでは，連行車両の場合について同様に本解析手法および解析モデルの妥当性の検討を行うものとする。

（１）解析モデル

数値計算に用いる単純桁橋は，単一走行車両の場合と同様に表－4.1 に掲げる構造諸元を有する。走行車両については表－4.3 に掲げる諸元を有するものを用いる。車頭間隔は，設計活荷重Ｌ－20相当荷重列（20ｔ，15ｔ）の場合と同一の14mとする。走行速度は，交通工学上そのような車頭間隔で走行し得る最大速度40km/h[16] に近い 10m/sとする。２自由度系にモデル化する場合，軸間距離を図－4.3 に示すものと同一とし，ただし，前・後輪重量分配比を１：４とする[17]。また，ばね定数および粘性減衰係数の前・後輪への分配比も，１：４とした。

路面凹凸パワースペクトル密度は，前項と同様の図－4.4 に示すものを用いる。

表－4.3　車両諸元

重　量　　(t)	20.0 , 15.0 33.2,24.2,18.9 27.4,26.7,29.0
固有振動数　(Hz) 減衰定数 走行速度(m/sec) 車頭間隔(m)	3.0 0.03 10.0 14.0

（２）他の解法との比較

路面凹凸パワースペクトルモデル$S_{z_0}(\Omega)=A/(\Omega^2+a^2)$を用いた場合の支間中央におけるたわみの２乗平均値応答について本解法，岡林の共分散方程式による解法[18]およびシミュレーションによる解法の結果を図－4.10に示す。これより本解析結果は，共分散方程式による解よりも若干大きい値を示すが，シミュレーションによる解のほぼ上限に相当し，本解析値は安全側の値を与える。

（３）路面凹凸パワースペクトル密度のモデル化の影響

図－4.11によると，単一走行車両の場合と同様に図－4.4 に示す実測路面スペクトルをそのまま用いた場合の本解析結果は，それをモデル化したスペクトル$S_{z_0}(\Omega)=A/(\Omega^2+a^2)$を用いた場合よりもかなり小さくなり，実測値を入力データとして用いることができる本解法の特徴が示されている。

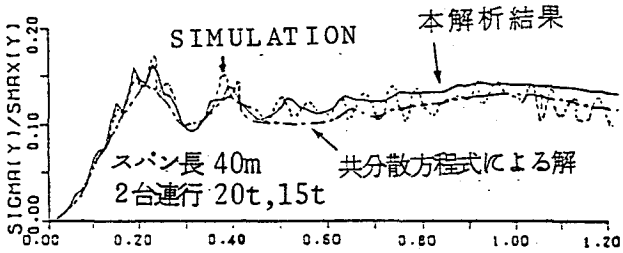
（４）走行車両のモデル化の影響

図－4.12より，車両を２自由度系にモデル化した場合は１自由度系にモデル化した場合と比較して，たわみの２乗平均値応答が約6～7割となる。連行荷重による単純桁橋の動的応答を考える場合も大型トラックの実際の軸数に合わせて走行車両を２自由度系にモデル化する必要がある。

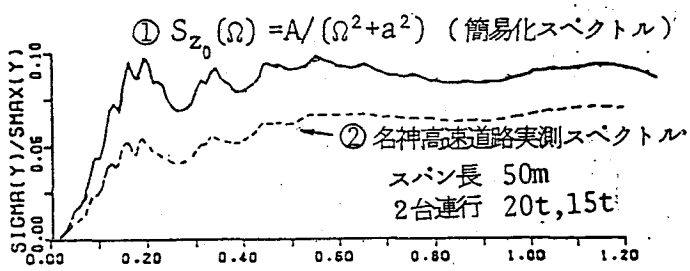
（５）荷重強度の影響

設計活荷重Ｌ－20相当荷重列(20t, 15t, 15t) を用いた場合および実交通流の重量測定資料[19] より比較的荷重強度の大きい２種類の連行荷重列を用いた場合の支間中央のたわみの２乗平均値応答を図－4.13に示す。

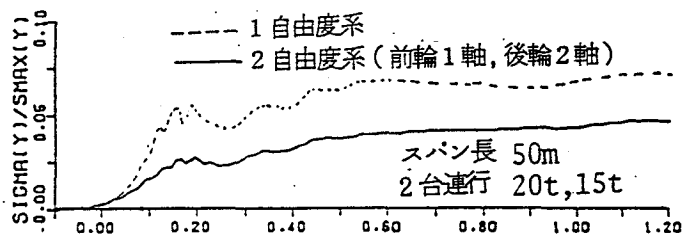
３種類の連行荷重列の平均荷重強度はそれぞれ16.7ｔ，25.4ｔおよび27.7ｔである。平均荷重強度が大きくなる程，たわみの２乗平均値応答を静的最大応答値で除した値は小さくなる傾向がある。ただし，先頭車が橋梁から出た後（$vt/\ell_b>1.0$）において，連行荷重列の平均荷重強度の相違による応答の差異は小さい。



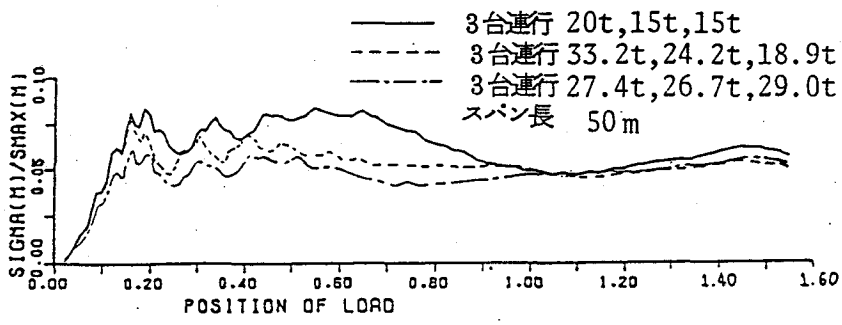
図－4.10　r.m.s.たわみ応答



図－4.11　路面凹凸パワースペクトルの相違による応答の変化



図－4.12　車両モデルの相違による応答の変化



図－4.13　荷重強度の相違による応答の変化

4.5　単純桁橋の衝撃係数

4.2節および4.3節で定式化された路面凹凸を有する道路橋の走行荷重下の非定常連成不規則振動解析ならびに解析モデルの妥当性が前節で確認された。
本節では，第2章で得られた路面凹凸パワースペクトル密度関数式(2.8) のパラメータ値（表－2.3 参照）の2乗平均値応答に及ぼす影響を調べ，さらに単純桁橋の衝撃係数について考察する。

4.5.1　衝撃係数の定義

走行自動車荷重による単純桁橋の動的応答により，衝撃係数を次式で定義する[20]。

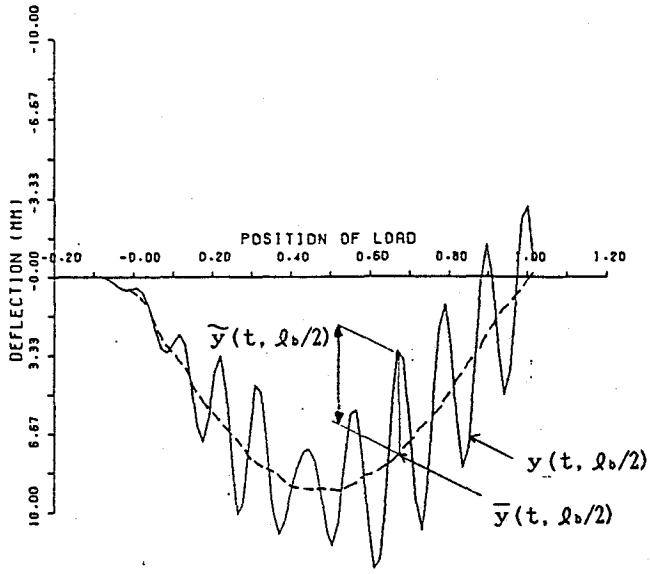
$$i = \frac{y_{d,max}}{y_{s,max}} - 1 \tag{4.91}$$

ここに，iは衝撃係数，$y_{s,max}$ は支間中央点の静たわみの最大値，$y_{d,max}$ は支間中央点の動たわみの最大値である。衝撃係数は強度設計において，活荷重による最大応力に対する割増係数として用いられることより応力あるいは曲げモーメント応答により評価すべきものである。ところで，前章のたわみおよびひずみに関する動的増幅率を比較すると，図－3.13あるいは図－3.14より明らかなように，解析値では高々0.01程度，たわみに関する動的増幅率の方が大きくなっている。ここでは安全側として，たわみ応答に着目して衝撃係数の評価を行う。

動たわみの期待値は，式$(4.8)_1$に示されるように，路面凹凸を考えない場合の走行車両による橋梁の動的応答解析結果 $\overline{y}(t, \ell_b/2)$により与えられる。支間中央点の動たわみ $y(t, \ell_b/2)$ は，図－4.14に示すように，期待値 $\overline{y}(t, \ell_b/2)$と偏差 $\widetilde{y}(t, \ell_b/2)$との和で表される。すなわち，

$$y(t, \ell_b/2) = \overline{y}(t, \ell_b/2) + \widetilde{y}(t, \ell_b/2) \tag{4.92}$$

$\overline{y}(t, \ell_b/2)$の動的変動の評価は，前章の式(3.16)で定義される動的増幅率 DIFを用いて表すことができる。前節の単一走行荷重の場合，図－4.9 に示すように路面凹凸を考慮し



図－4.14　動的応答曲線

ない場合の (DIF)-1の値は0.01程度であり，かつ支間長に対する変化も僅かである。ここでは衝撃係数の評価に，$\bar{y}(t, \ell_b/2)$の動的変動の影響を無視する。$\tilde{y}(t, \ell_b/2)$は平均値 0，分散 $\sigma_y^2(t, \ell_b/2)$により与えられる確率量であり，正規分布するものと仮定すると，偏差 $\tilde{y}(t, \ell_b/2)$が $2\sigma_y(t, \ell_b/2)$を越える確率は4.55%となる。したがって，ここでは衝撃係数を次式で定義する。

$$i = \frac{2\sigma_y(t_d, \ell_b/2)}{y_s(t_s, \ell_b/2)} \tag{4.93}$$

ここに，t_dは$\sigma_y(t, \ell_b/2)$が最大となる時刻，t_sは静たわみが最大となる時刻である。t_dとt_sは一般に異なり，式(4.93)より得られる i 値は衝撃係数として過大になる。そこで，ここでは静たわみが最大となる時刻における偏差の r.m.s.値(root meen square value)の２倍によって，衝撃係数を次式のように定義する。

$$i = \frac{2\sigma_y(t_s, \ell_b/2)}{y_{s.max}} \tag{4.94}$$

4.5.2. 解析モデル

解析対象とした橋梁モデルは，阪神高速道路公団の標準設計計算書[21)-25)] より得た４種の単純桁橋である（表-4.4参照）。前述のごとく，ここではたわみ応答に着目するため，数値計算において橋梁の第１次固有振動モードのみを考慮する。走行車両モデルは前輪１軸ならびに後輪２軸を考慮した２自由度系モデルである。道路橋示方書のＬ荷重を考慮して，単一走行車両の場合は重量を20ｔ，連行車両の場合は車頭間隔14ｍの車両列の中央車両重量を20ｔ，その前後の車両重量を15ｔとして（表－4.5 参照），載荷台数は橋梁に満載状態になるように支間長により決めた。

路面凹凸パワースペクトル密度は，第２章において，実測路面凹凸から算出されたパワースペクトル密度をモデル化した次式を用いる。

$$S_{z_0}(\Omega) = \frac{\alpha}{\Omega^n + \beta^n} \tag{2.8}$$

ここで，パラメータα，ｎ，βには第２章の表－2.3に掲げられている値を用いる。

表－4.4 橋梁モデル諸元

No	支間長 (m)	形 式	断面2次モーメント (m^4)	単位重量 (t／m)	1次固有振動数 (Hz)	減衰定数
1	35	単純合成Ｉ桁	0.1043	1.771	4.46	0.02
2	40	単純合成Ｉ桁	0.1586	2.251	3.74	0.02
3	65	単純合成箱桁	0.4461	6.597	1.39	0.02
4	72	鋼床版箱桁	0.2804	3.861	1.17	0.02

表－4.5 走行車両モデル諸元

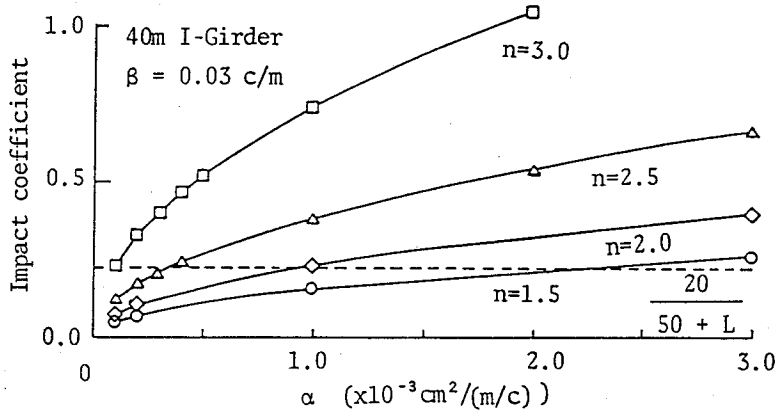
総重量(t)	20.0	15.0
自由度	2	2
固有振動数(Hz)	3.0	3.0
慣性モーメント(tm^2)	50.94	36.21
走行速度(m/s)	10.0	10.0
減衰定数	0.03	0.03

注）．慣性モーメントは、軸間距離3.99ｍ、
前後輪重量分配比 1:4として算出した。
また、ばね定数も 1:4に分配したので、
回転に関する固有振動数も 3.0Hzとなる。

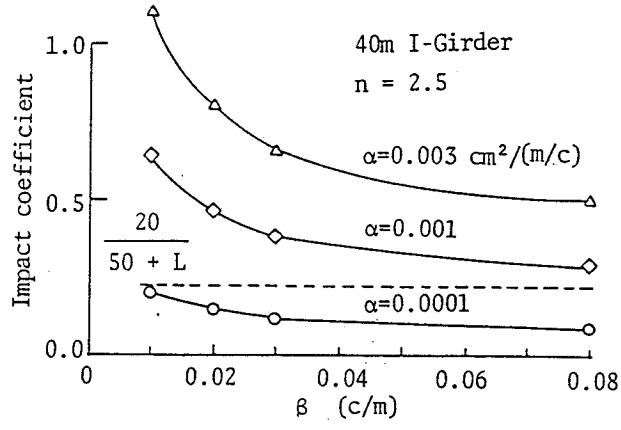
4.5.3 路面凹凸パワースペクトル密度の衝撃係数に及ぼす影響

支間長40mの合成I桁橋について，路面凹凸パワースペクトル密度の各パラメータα，n，βによる単一車両走行時の衝撃係数の差異を図－4.15～4.17に示す。図中の破線は道路橋示方書[17]（以下「道示」という。）による衝撃係数の値を示している。本解析手法では，動的応答の共分散行列は，式(4.45)に示すように路面凹凸パワースペクトル密度と直接関係付けられているために，そのパラメータαに比例する。式(4.94)を考慮すると衝撃係数は $\sqrt{\alpha}$ に比例することが分かる。図－4.15～4.17より，n値の動的応答に与える影響が大きく，α値の大小だけで路面凹凸の良否を判断することは難しいことが分かる。また，β値が0.03c/m 以下ではβ値の衝撃係数に与える影響も大きく無視できない。

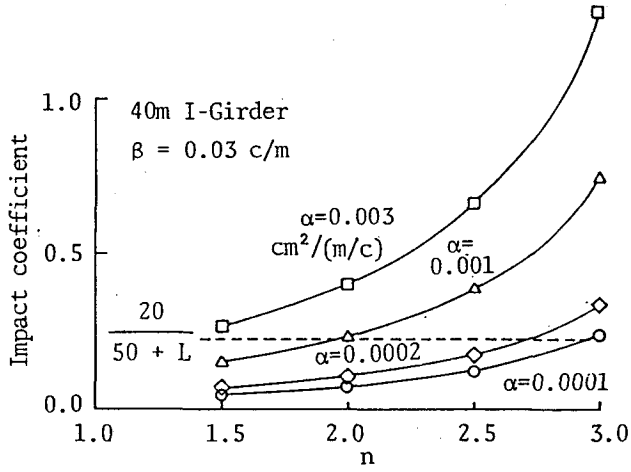
以上の解析結果より，次項以降において用いる路面凹凸パワースペクトル密度のパラメータ値として，橋梁の動的応答が大きくなるように組合せを考える。第2章におけるパラメータの実測値の組合せを参考として，$\alpha=3.0\times10^{-3}\mathrm{cm^2/(m/c)}$，n＝2.5，β＝0.02c/m とした。



図－4.15　α値による衝撃係数の変化



図－4.16　β値による衝撃係数の変化



図－4.17　n値による衝撃係数の変化

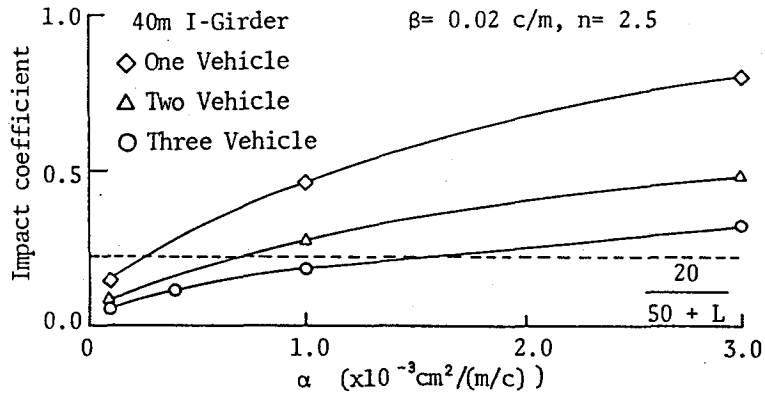
4.5.4　衝撃係数

支間長40mの場合，橋梁に荷重を満載すると３台連行となるので，２台連行の場合についても解析してその結果を図－4.18に示す。単一車両走行に比べて２台連行で40%，３台連行で60%の衝撃係数の低下がみられ，連行車両の影響の大きいことが分かる。

図－4.18において，解析値はαが大きくなると，破線で示す道示の衝撃係数を越えるようになる。解析値が最大となる $\alpha=3.0\times10^{-3}$ cm²/(m/c) において，（静たわみ）＋（たわみの動的成分）を道示の衝撃係数を用いた場合と比較して表－4.6 に示す。図－4.18において衝撃係数の解析値が道示の規定値を越えているが，（静たわみ）＋（たわみの動的成分）は道示の衝撃係数を用いた値を越えず，道示の衝撃係数は十分な安全性を有していることが分かる。

支間長による衝撃係数の差異を図－4.19に示す。Ｉ桁 35m,40m橋において解析値は，破線で示す道示の衝撃係数より大きくなっている。Ｉ桁 35m橋についても，Ｉ桁 40m橋の場合と同様に（静たわみ）＋（たわみの動的成分）の比較を行なうと，道示の衝撃係数を用いたときの2.26cmに対して，解析値を用いたときは1.54cmとなった。

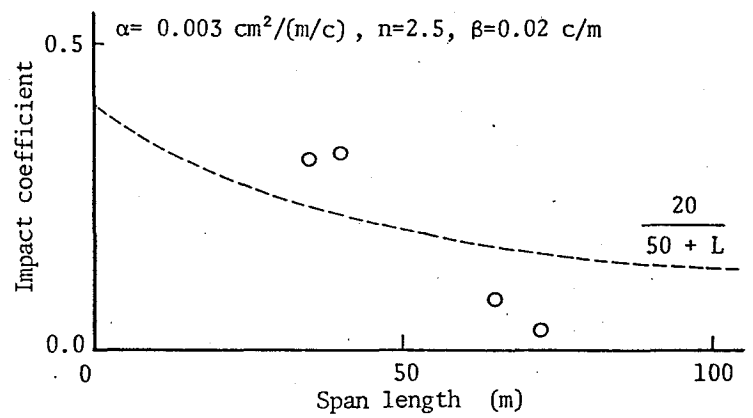
これらの解析における路面凹凸パワースペクトル密度のパラメータ値は $\alpha=3.0\times10^{-3}$ cm²/(m/c)，n=2.5, β=0.02c/m であり，実測の路面に比べて路面凹凸の大きい場合に相当する。このことより通常の整備されている路面の場合，道路橋示方書の衝撃係数は安全側となる。



図－4.18　連行車両の衝撃係数への影響

表－4.6　（静たわみ）＋（動たわみ）の比較

対象橋梁　I桁40m橋　幅員 8.7m 断面2次モーメント　I＝0.3172×10⁹ cm⁴ ヤング係数　E＝2.1×10⁶ kg／cm²			
	静たわみ (cm)	衝撃係数	静たわみ ＋動たわみ (cm)
道示による設計時	1.954	0.222	2.39
単一車両走行時	0.8006	0.809	1.45
2台連行時	1.179	0.484	1.75
3台連行時	1.325	0.322	1.75



図－4.19　橋梁モデルによる衝撃係数の差異（連行車両走行）

4.6 結 言

本章で得られた事項を以下に列挙する。

(1) 路面凹凸を有する単純桁橋の走行荷重による非定常連成不規則振動解析の定式化を行った。走行荷重として，前輪１軸・後輪２軸の２自由度振動系モデルが連行する場合まで解析できる。

(2) 本解析法による２乗平均値応答は，他の解法による結果と一致し，本解析法の妥当性が確認できた。

(3) 路面凹凸パワースペクトル密度として実測路面凹凸から計算されたパワースペクトル密度を用いた場合の２乗平均値応答は，$S_{z0}(\Omega)=A/(\Omega^2+a^2)$にモデル化したパワースペクトル密度を用いた場合よりかなり小さくなり，不規則振動解析に用いる路面凹凸パワースペクトル密度のモデル化に注意を要することを明らかにした。さらに，どのような形でパワースペクトル密度を与えられても，そのまま用いることのできる本解析法の特徴が示された。

(4) 走行車両を前輪１軸・後輪２軸の２自由度系としてモデル化した場合は，１自由度系モデルの場合と比較して２乗平均値応答が約４割となった。単純桁橋の動的応答を考える場合，大型トラックの軸数に合わせて走行車両を２自由度系にモデル化する必要がある。

(5) 単純桁橋のたわみ２乗平均値応答の最大値は支間長が大きくなるのに伴って急激に減少する。支間長が大きくなると橋梁の動的応答に及ぼす路面凹凸の影響が小さくなることを示している。

(6) 連行荷重列による２乗平均値応答を静的最大応答値で除した値は，平均荷重強度が大きくなる程，小さくなる傾向がある。

(7) たわみの２乗平均値応答より算出される衝撃係数の，路面凹凸パワースペクトル密度関数 $S_{z0}(\Omega)=\alpha/(\Omega^n+\beta^n)$ の各パラメータα，n，βによる変化をみれば，n値の動的応答に与える影響が大きく，α値の大小だけで路面凹凸の良否を判断することは難しいことが分かる。また，β値が0.03c/m 以下ではβ値の衝撃係数に与える影響も大きく無視できない。

(8) 橋梁の動的応答が大きくなるような路面凹凸パワースペクトル密度のパラメータ値の組合せを $\alpha=3.0\times10^{-3}cm^2/(m/c)$，n=2.5，$\beta$=0.02c/m とした。

（9） 支間長による衝撃係数の差異を調べると，Ｉ桁 35m，40m橋において解析値は，道路橋示方書の衝撃係数より大きくなっている。それらの場合，（静たわみ）＋（たわみの動的成分）の値は，道路橋示方書の衝撃係数を用いたときの値よりも小さくなった。通常の整備されている路面の場合，道路橋示方書の衝撃係数は安全側となることが分かった。

参考文献（第４章）

1) 星谷　勝：確率論的手法による構造解析，鹿島出版会，1973.

2) 星谷　勝：確率論的手法による振動解析，鹿島出版会，1974.

3) Shinozuka, M. and Kobori, T.: Fatigue analysis of highway bridges, Proc. of JSCE, No.208, pp.137-148, 1972.12.

4) 本田秀行・小堀為雄・山田善一：多径間連続桁橋の動的応答と衝撃係数に関する考察，土木学会論文報告集，第 331号，pp.65-73，1983.3.

5) 例えば，山田善一・小堀為雄：活荷重に対する道路橋の動的応答－衝撃係数－に関する考察，土木学会論文集，第 148号，pp.40-50，1967.12.

6) 吉村虎蔵・彦坂　熙・吉村　健・江村康博：不規則振動論による道路橋の走行荷重応答解析（第１報）－単一荷重を受ける単純桁橋－，九州大学工学集報，第48巻，第６号，pp.741-746，1975.12.

7) 吉村虎蔵・彦坂　熙・内谷　保：単一走行車両による道路橋の非定常ランダム応答の解析，土木学会論文報告集，第 258号，pp.35-44，1977.2.

8) 岡林隆敏：単一走行車両による道路橋の二乗平均応答解析，土木学会論文報告集，第 286号，pp.15-27，1979.6.

9) Komatsu, S. and Kawatani, M.: Nonstationary random response of highway bridges under moving vehicles, Technology Reports of the Osaka University, Vol.32, No.1648, pp.151-158, March, 1982.

10) 有本　卓：線形システム理論（数理解析とその周辺１），産業図書，1974.

11) 椹木義一・添田　喬・中溝高好：確率システム制御の基礎，日新出版，1975.

12) Arnold, L.: Stochastic Differential Equations: Theory and Applications, John Wiley & Sons, Inc., New York, 1974.

13) 日野幹雄：スペクトル解析，朝倉書店，1977.

14) 川合平夫・森崎健二：自動車走行路面の性質と振動乗心地への関連性，三菱重工技報，Vol.2, No.2, pp.20-28, 1965.

15) 小堀為雄・梶川康男：単一動荷重に対する道路橋の振動感覚，土木学会論文報告集，第 248号，pp.11-23，1976.4.

16) 高速道路調査会・交通現象研究小委員会：交通現象に影響をおよぼす諸要因について，1964.3.

17) 日本道路協会：道路橋示方書・同解説，Ⅰ共通編，1980.2.

18) 岡林隆敏・山口実浩：連行車両による道路橋の二乗平均応答解析，土木学会論文報告集，第 334号，pp.1-11，1983.6.

19) 成田信之・横山功一・桂樹正隆：交通振動に関する試験調査報告書（Ⅱ－1976），土木研究所資料，第1232号，1977.3.

20) 彦坂　熙・吉村虎蔵・内谷　保：連行自動車荷重による単純桁橋の非定常ランダム応答と衝撃係数，土木学会論文報告集，第 290号，pp.31－41，1979.10.
21) 阪神高速道路公団：鋼単純合成げた標準設計(案)設計計算書・35m，1967.5.
22) 阪神高速道路公団：鋼単純合成Ｉ桁標準設計計算書，1980.3.
23) 阪神高速道路公団：鋼単純合成箱げた標準設計計算書，1980.3.
24) 阪神高速道路公団：鋼床版（開リブ）単純箱げた標準設計計算書，1981.3.
25) 阪神高速道路公団：鋼床版（Ｕ型リブ）単純箱げた標準設計計算書，1981.3.

第５章　連続桁橋の走行荷重による不規則振動解析

5.1　緒　言

道路橋の自動車走行による動的影響は，強度設計において衝撃として考慮され，衝撃係数を用いて設計活荷重を割増している。我が国の道路橋示方書において，衝撃係数は支間長あるいは活荷重載荷長の逓減関数として表されている[1]。しかし，橋梁の固有振動数や走行車両の振動特性が動的応答に大きな影響を及ぼすことは明らかである。カナダ・オンタリオ州の規準では，橋梁の１次固有振動数を用いて動的影響を評価しており[2]，スイスにおいてもそのような動向にある[3]。

一方，道路橋の動的応答に影響を及ぼす要因として，車両の走行速度や車頭間隔[4]などと共に路面凹凸が考えられ，近年，その路面凹凸を考慮した動的応答の評価が行われてきている[5]。実際の道路橋は，橋面上に不規則な路面凹凸を有しており，車両通過時に橋梁に不規則な振動が生じる。ここ20年来，このような走行車両による橋梁の動的応答を，不規則振動論を用いて解析しようと試みられてきた[6]。不規則振動論による既往の研究では，解析方法の提示が主な目的であったため，解析対象はほとんどが単純桁橋に限定されている。連続桁橋については，Hayashikawa and Watanabe[7]が理想化された解析モデルを対象に動的応答解析法について研究し，本田・小堀・山田[8]が実際的な現象をシミュレーション法により数値計算し，衝撃係数について考察している。しかし，シミュレーション法では，数多くの路面凹凸サンプル波形を作成して動的応答解析を繰り返すという繁雑さを伴う。

そこで本章において，前章において示された単純桁橋に関する解析法[9),10)]を連続桁橋に拡張し，桁橋の走行荷重による非定常連成不規則振動解析を行う。また，解析対象となる連続桁橋の構造諸元に関する有用なデータがほとんど見あたらないため，振動解析を行うに先立ち，桁橋の構造諸元実態調査を行い，その統計処理結果に基づき，桁橋モデルを作成する。

5.2　桁橋の構造諸元調査とモデル化

5.2.1　実橋調査

阪神高速道路公団を通じて，橋梁メーカー，重工業会社から入手した実橋資料をもとに，桁橋の構造諸元（断面２次モーメント，単位長さ当たり重量など）調査を行う。得られた構造諸元を，径間数，橋種（単純桁橋については合成桁，非合成桁，鋼床版桁，２径間および３径間連続桁橋については非合成桁），また連続桁橋では径間長比に分類する。最大径間長を横軸にとり，構造諸元をグラフに表し，回帰直線または回帰曲線を求める。構造諸元は，１車線当たりに換算している。

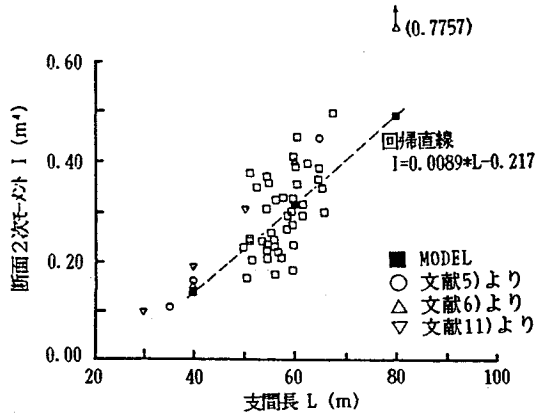
（1）断面２次モーメントおよび単位長さ当たり重量

ここでは，橋軸方向に変化する桁橋の断面２次モーメントを，長さの重みをつけて平均化した平均断面２次モーメントを用いて評価する。非合成桁橋については，コンクリートの合成効果を無視できないため，鋼とコンクリートのヤング係数比を７として断面２次モーメントを算出した。単位長さ当たり重量は，鋼重ならびに床版，舗装，地覆高欄，分離帯および添加物の重量の合計である。単純桁橋（合成桁），２径間連続桁橋および３径間連続桁橋に関する調査結果を図－5.1～5.3に示す。単純桁橋に関する図－5.1(1)(2)には，文献5),6),11）に挙げられている構造諸元を併せて記す。参考データのうち，文献11）の限界状態設計法分科会報告書に用いられた諸元が最近のデータであり，今回の調査結果より大きめの値となっているが，調査データのばらつきの範囲内にあることが分かる。

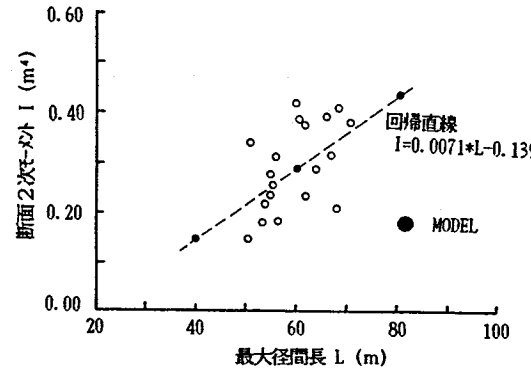
（2）固有振動数

以上で得られた平均断面２次モーメントおよび単位長さ当たり重量を用いて，桁橋の基本固有振動数を算出し，図－5.4(1)～(3)に示す。回帰曲線は，過去の調査例，相関係数の比較などから（-1/2）次関数を用いた。単純桁橋については，図中に文献 12),13)に示されている近似関数も併記した。

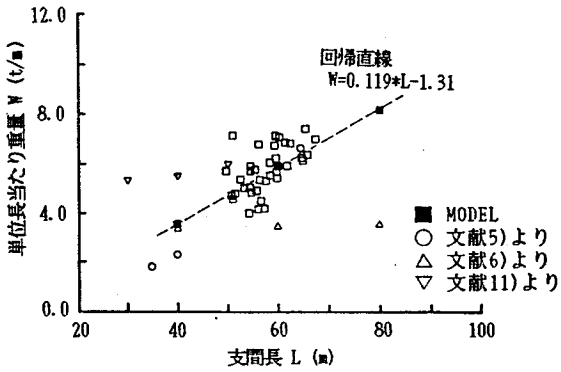
断面２次モーメントおよび単位長さ当たり重量の調査結果では，径間長に対するばらつきが大きかったが，これらの値から固有振動数を計算すると，ばらつきは比較的小さいものとなった。今回得られた固有振動数は，文献6)より概算された固有振動数ならびに文献



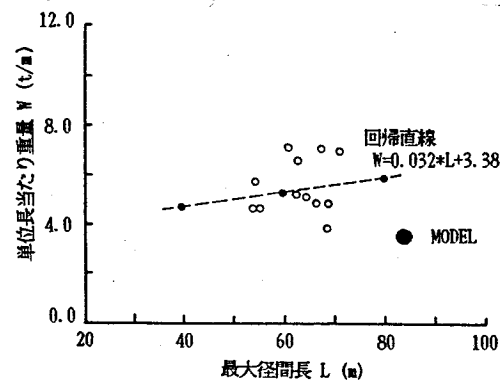
図－5.1(1)　断面２次モーメントと支間長の関係
（単純桁橋）



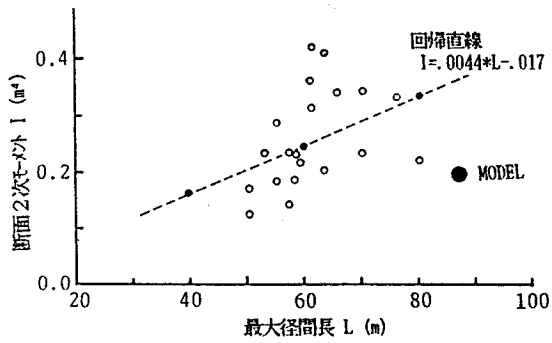
図－5.2(1)　断面２次モーメントと支間長の関係
（２径間連続桁橋）



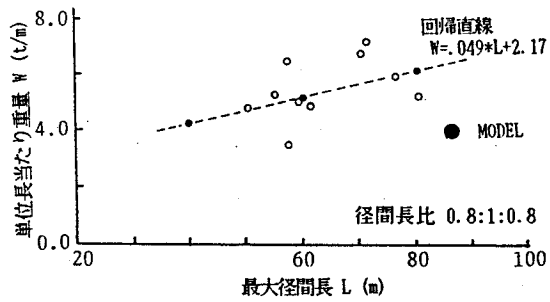
図－5.1(2)　単位長さ当たり重量と支間長の関係
（単純桁橋）



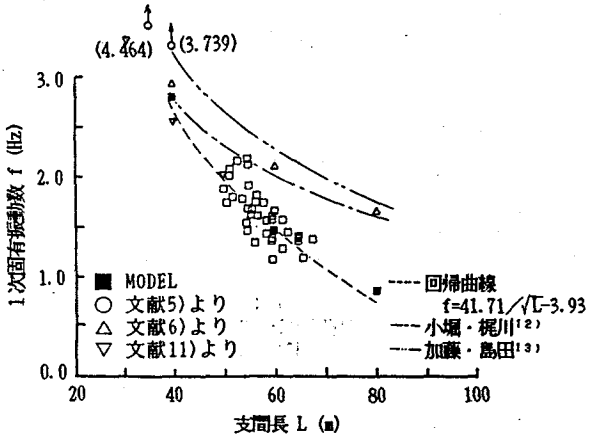
図－5.2(2)　単位長さ当たり重量と支間長の関係
（２径間連続桁橋）



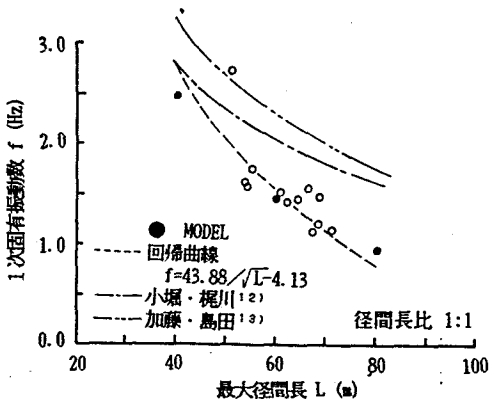
図－5.3(1)　断面２次モーメントと支間長の関係
（３径間連続桁橋）



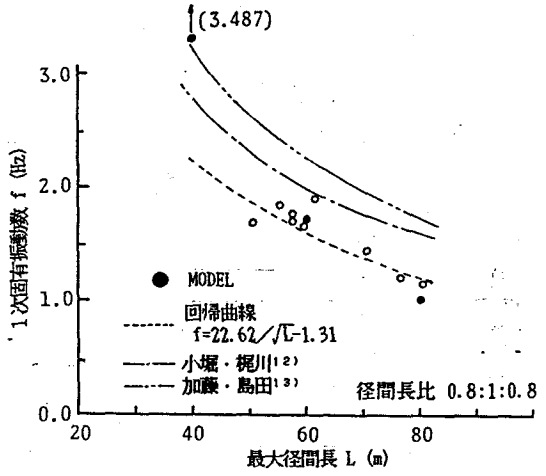
図－5.3(2)　単位長さ当たり重量と支間長の関係
（３径間連続桁橋）



(1)　単純桁橋



(2)　２径間連続桁橋



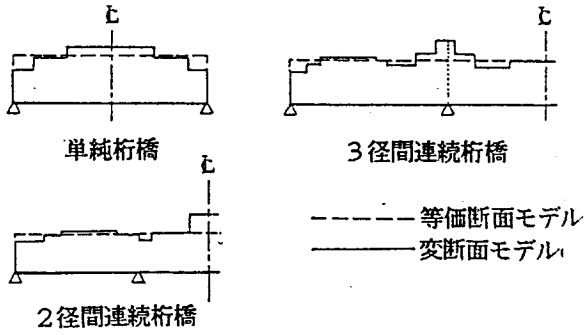
(3)　３径間連続桁橋

図－5.4　固有振動数と最大径間長の関係

12)，13)の関係式より小さい値となっているが，文献11）のデータと回帰曲線は良い一致を示している。

5.2.2　桁橋モデル

前節で調査した構造諸元に基づき，橋梁全体にわたり剛性一定と仮定した場合および断面変化を考慮した場合の桁橋モデルを作成する。桁橋モデルは，断面２次モーメントおよび単位長さ当たり重量の径間長との回帰直線から決定した。等価断面モデルの構造諸元を図－5.1～5.3に●■印で示している。作成したモデルの固有振動数を求めると，図－5.4(1)～(3)に示すように，それらの値は実橋の固有振動数のばらつきの範囲にあった。変断面モデルについては，断面変化位置および断面２次モーメントの変化を別途調査し，その



図－5.5　桁橋モデル

表－5.1　桁橋モデル

	スパン長		単位重量(t/m)(一車線当り)	断面2次モーメント(m⁴) 等断面	断面2次モーメント(m⁴) 変断面	断面変化数(変断面)	基本固有振動数(Hz)
単純桁	合成桁	40m	3.446	0.1375	Imax= .1620 Imin= .0950	5	2.81
		60m	5.826	0.3147	Imax= .3707 Imin= .2173	5	1.46
		80m	8.206	0.4918	Imax= .5793 Imin= .3396	5	0.86
	非合成桁	60m	5.876	0.3725	Imax= .4336 Imin= .2627	5	1.60
	鋼床版桁	60m	3.052	0.1947	Imax= .2420 Imin= .1280	5	1.58
2径間連続桁	40m:40m		4.652	0.1458	Imax= .2031 Imin= .1159	13	2.49
	50m:50m		4.970	0.2168	――	――	1.88
	60m:60m		5.288	0.2883	Imax= .4016 Imin= .2293	13	1.46
	60m:48m		5.938	0.2883	Imax= .4016 Imin= .1925	13	1.60
	70m:70m		5.606	0.3592	――	――	1.16
	80m:80m		5.924	0.4308	Imax= .6001 Imin= .3426	13	0.95
3径間連続桁	32m:40m:32m		4.126	0.1578	Imax= .2178 Imax= .1149	19	3.49
	60m:60m:60m		5.898	0.2454	Imax= .3227 Imin= .1961	19	1.28
	48m:60m:48m		5.105	0.2454	Imax= .3387 Imin= .1788	19	1.74
	36m:60m:36m		4.220	0.2454	Imax= .3475 Imin= .1929	19	2.23
	64m:80m:64m		6.089	0.3329	Imax= .4594 Imin= .2426	19	1.04

結果に基づいて断面変化を決定した。変断面モデルの概略図を図－5.5 に，さらに桁橋モデルの構造諸元を表－5.1 に示す。

これらの桁橋モデルについて妥当性の検証のため，別途調査した桁高と径間長の関係を用いて，死荷重および活荷重（衝撃を含む）載荷時の応力照査を行う。径間中央部および中間支点上での縁応力度は600～2500 kg/cm² となり，解析モデルとして妥当であると判断した。

5.3　不規則振動解析

前節で決定した桁橋の等価断面および変断面モデルを用いて，車両走行時の非定常連成不規則振動解析を行う。なお，解析結果はたわみおよび曲げモーメント応答の２乗平均値 σ_y，σ_Mをそれぞれ静的応答最大値 $y_{s,max}$，$M_{s,max}$ で除した無次元化応答 $\sigma_y/y_{s,max}$，$\sigma_M/M_{s,max}$により整理する。

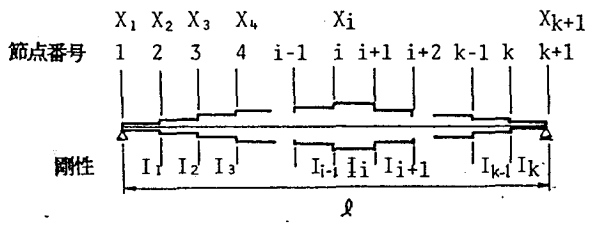
5.3.1　固有振動数および固有振動モード

（1）等価断面桁

単純桁橋について，周知のとおり振動モードを正弦関数により表現できる。

連続桁橋については，平井の提案する方法[14] により固有振動数を求め，m次振動モードを次の正弦級数で定義する。

$$\Phi_m(x)=\sum_n A_{mn} \sin \frac{n\pi x}{\ell} \tag{5.1}$$



図－5.6　変断面桁概略図

（2）変断面桁

単純桁橋について，図−5.6 に示すような変断面桁において任意の振動モード$\Phi_i(x)$（第 i 断面）を次の式で定義する[15]。

$$\Phi_i''(x)=\sum_n C_n\left(\frac{I_0}{I_i}\right)\left(\frac{n\pi}{\ell}\right)^2 \sin\frac{n\pi x}{\ell} \tag{5.2}$$

$$\Phi_i(x)=\sum_n C_n\left(\frac{I_0}{I_i}\sin\frac{n\pi x}{\ell}+A_{ni}x+B_{ni}\right) \tag{5.3}$$

境界条件および断面変化点での連続条件は，次のとおりである。

$$\left.\begin{array}{ll}\Phi_1(0)=0 & \Phi_k(\ell)=0\\ \Phi_i(x_{i+1})=\Phi_{i+1}(x_{i+1}) & \Phi_i'(x_{i+1})=\Phi_{i+1}'(x_{i+1})\end{array}\right\} \tag{5.4}$$

式(5.4) の条件を級数の各項が満足することより，次式が成立し，A_{ni}，B_{ni}を決定できる。

$$B_{n1}=0 \qquad A_{nk}\ell+B_{nk}=0 \tag{5.5)(5.6}$$

$$A_{ni}-A_{n,i+1}=I_0\left(\frac{1}{I_i}-\frac{1}{I_{i+1}}\right)\left(\frac{n\pi}{\ell}\right)\cos\frac{n\pi x_{i+1}}{\ell} \tag{5.7}$$

$$B_{n,i+1}-B_{ni}=I_0\left(\frac{1}{I_i}-\frac{1}{I_{i+1}}\right)\left\{\sin\frac{n\pi x_{i+1}}{\ell}-x_{i+1}\left(\frac{n\pi}{\ell}\right)\cos\frac{n\pi x_{i+1}}{\ell}\right\} \tag{5.8}$$

A_{ni}，B_{ni}の値はモード次数にかかわらず，一定値をとる。C_nについては，モード次数によって異なる値をとり，固有振動数を求める際に，同時に決定することができる。

はりの自由振動方程式は，

$$EI\,v^{\mathrm{IV}}-m\ddot{v}=0 \tag{5.9}$$

vを変数分離して，$v(x,t)=\Phi_i(x)\sin\omega t$とおくと，

$$EI\,\Phi_i^{\mathrm{IV}}(x)=m\omega^2\,\Phi_i(x) \tag{5.10}$$

ここで，$\Phi_i(x)=\sum_n C_n f_{ni}(x)$ とおき，座標関数として $f_{ni}(x)$ を選び，Galerkin 法を適用すると，式(5.10)は次式となる。

$$\int_{\ell} EI\,\Phi_i^{\mathrm{IV}}(x)\,f_{ni}(x)\,dx=\int_{\ell} m\omega^2\,\Phi_i(x)\,f_{ni}(x)\,dx \qquad (5.11)$$

モードの級数を第N項まで考慮すれば，nを1からNまで変化させることにより，以下の式を得る。

$$\begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & \cdots & D_{1N} \\ D_{21} & D_{22} & \cdots & D_{2N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ D_{N1} & D_{N2} & \cdots & D_{NN} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \\ \vdots \\ C_N \end{bmatrix} = 0 \qquad (5.12)$$

ここに，

$$D_{ij}=\int_{\ell} EI\,f_i^{\mathrm{IV}}(x)\,f_j(x)\,dx-\int_{\ell} m\omega^2 f_i(x)\,f_j(x)\,dx \qquad (5.13)$$

式(5.12)が自明でない解を持つことより，以下の振動数方程式が得られる。

$$\begin{vmatrix} D_{11} & D_{12} & \cdots & D_{1N} \\ D_{21} & D_{22} & \cdots & D_{2N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ D_{N1} & D_{N2} & \cdots & D_{NN} \end{vmatrix} = 0 \qquad (5.14)$$

式(5.14)より，固有振動数 ω_m を決定できる。

連続桁橋について，固有振動数および固有振動モードは，式(5.1)の正弦関数を式(5.3)の級数に置き換えて等価断面連続桁橋の場合と同様にして求めることができる。

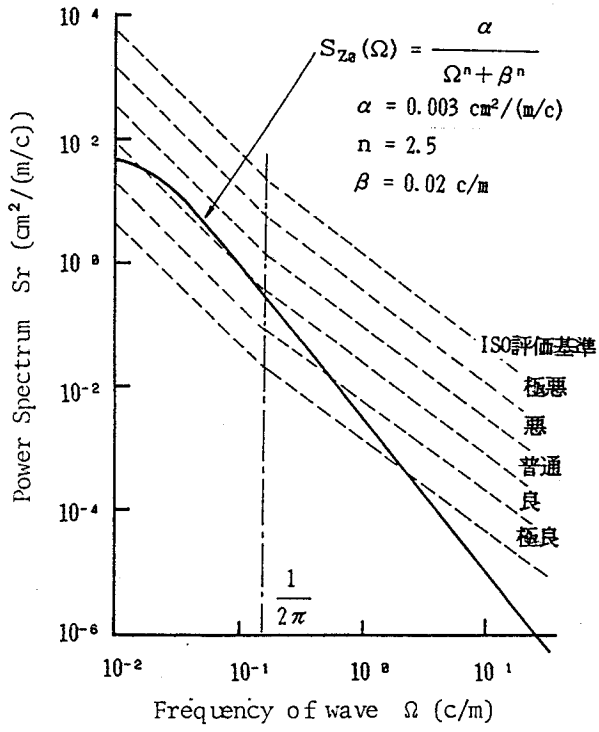
5.3.2 解析モデル

走行荷重は，実際のダンプトラックを適切にモデル化して，前輪１軸，後輪２軸を有する２自由度系モデルとする。その構造諸元は前章の表－4.5 の場合と同じとする。連行車両走行の場合，道路橋示方書のＬ荷重に相当するように，中央に20ｔ車，その前後に15ｔ車を車頭間隔14mで配置した。単一車両走行の場合は，20ｔ車を用いている。

また，路面凹凸スペクトルは，次式により表している。

$$S_{Z0}(\Omega) = \frac{\alpha}{\Omega^n + \beta^n} \tag{2.8}$$

ここに，Ωは路面周波数を表す。前章の4.5.3 項における検討に基づき，この式のパラメータ値をα=0.003 cm²/(m/c)，β=0.02 c/m，n=2.5 とする。この値は，昭和58年に阪神高速道路における路面凹凸実測結果に基づいて決定した。用いた路面凹凸スペクトルを，ＩＳＯ評価基準[16]とともに図－5.7 に示す。



図－5.7　路面凹凸スペクトル

5.3.3 解析結果

(1) モード次数による応答値の収束判定

連続桁橋の動的解析においては，高次振動の動的応答に及ぼす影響が大きく，動的応答を正確に評価するために，解析に用いるモード次数を決定しなければならない。本田・小堀・山田[8]は，大型自動車の周波数特性がばね上部で約２～４Hzの範囲であることから，２径間および３径間連続桁橋では４次振動まで考慮して解析している。本研究では，モード次数による応答値の変化を調べ，解析に用いるモード次数を決定する。

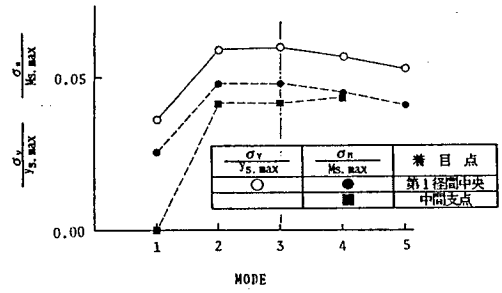
ここで用いた橋梁モデルは実橋データの中から表－5.2 に示す２橋を選んだ。荷重モデルとして表－4.5 に示す20ｔトラックの単一走行の場合とする。振動モード次数を変化させた場合の，径間中央部と中間支点上のたわみおよび曲げモーメントの応答を図－5.8 に示す。荷重モデルの固有振動数は 3.0Hzであり，今回の橋梁モデルでは 3.0Hzを超えるのが，２径間で３次モード，３径間で４次モードになる。 解析結果によると， このときに $\sigma_M/M_{s,max}$および$\sigma_y/y_{s,max}$の値は最大となるか，あるいはそれ以上のモードを考慮しても，$\sigma_M/M_{s,max}$および$\sigma_y/y_{s,max}$の値の変化は１～３％程度である。動的応答は，橋長およびその他の諸元により変化するが，モード次数を２径間連続桁橋では３次モード，３径間連続桁橋では５次モードまで考慮すれば，十分に応答を評価できると考えられる。さらに，単純桁橋についても曲げモーメント応答を求めるために，３次モードまで考慮する。

(2) 動的応答解析との比較

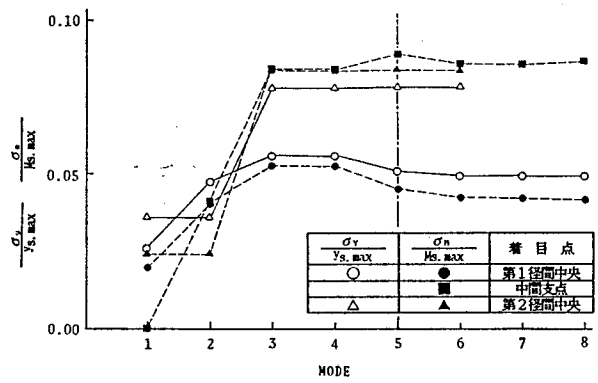
本解析法の妥当性を検証するために，乱数により発生させた路面凹凸を用いた動的応答

表－5.2 桁橋モデル

橋種	２径間連続桁橋	３径間連続桁橋
橋長	@53m×2=106m	@55m×3=165m
単位重量	4.45 t／m	4.52 t／m
断面２次モーメント	0.0994 m^4	0.1217 m^4



(1)　２径間連続桁橋

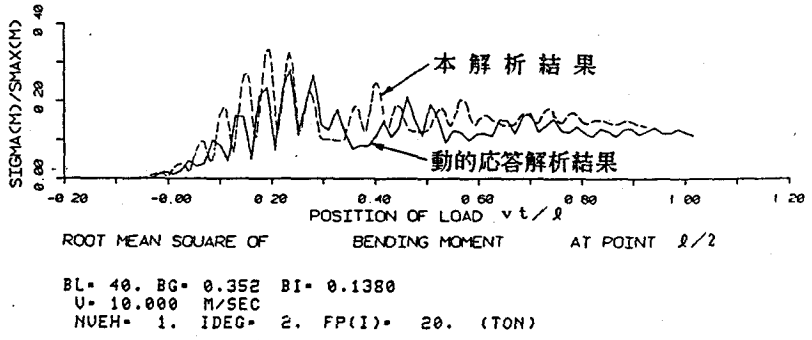


(2)　３径間連続桁橋

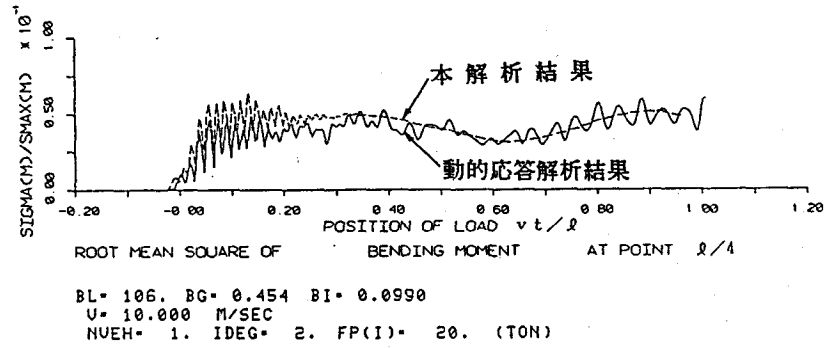
図－5.8　モード次数による応答値の変化

解析結果について，アンサンブル平均して２乗平均値を求め，本解析結果と比較検討を行う。車両は20ｔ車の１台走行とし，橋梁モデルとして，単純桁橋については，作成した橋梁モデルから40ｍ合成桁橋を用い，連続桁橋については表－5.2 に示す橋梁を使用した。なお，動的応答解析はNewmark-β法を用いた逐次積分により行い，$\beta=1/4$とした[17]。また，路面凹凸のサンプル関数の個数は，文献8),18)の結果を参考にして50個とした。

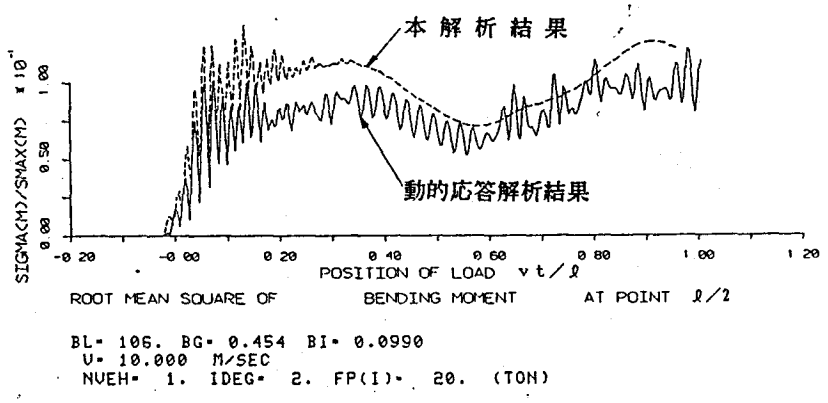
曲げモーメントに関する２乗平均値応答を図－5.9～5.11 に示す。車両が橋梁に進入した直後の２乗平均値応答は，本解析結果と動的応答解析結果共に変動が大きい。第１径間中央部および中間支点上の曲げモーメント応答は，車両が橋長の２～３割の位置を過ぎると変動が小さくなり，特に本解析結果の方が変動幅が小さい。動的応答解析結果は本解析結果のまわりに変動する値をとるが，それはサンプル関数の個数を50個に限定したためである。



図－5.9　不規則振動解析と動的応答解析の比較
（単純桁橋）

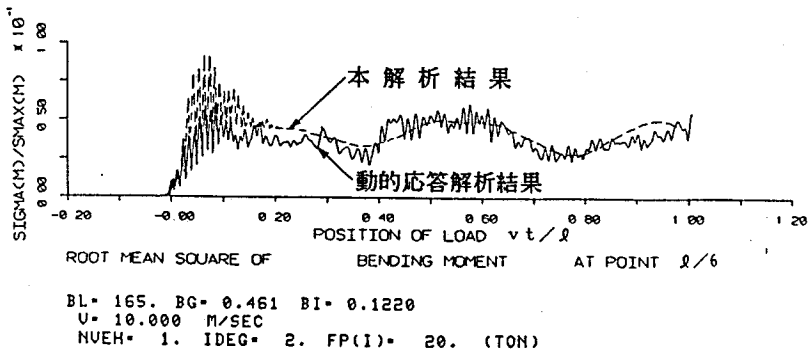


(1)　第１径間中央点

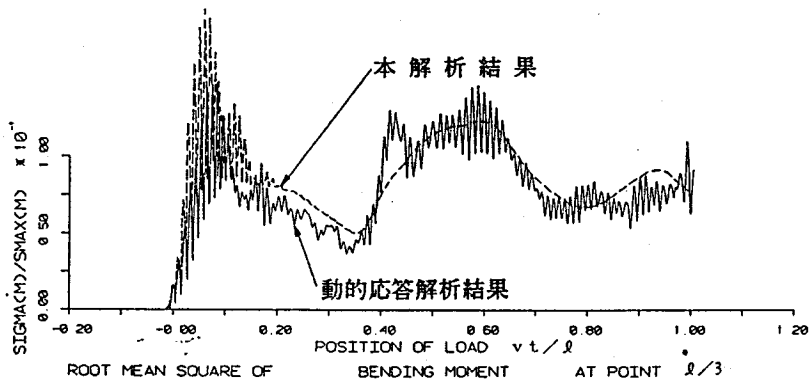


(2)　中間支点

図－5.10　不規則振動解析と動的応答解析の比較
（２径間連続桁橋）



(1) 第1径間中央点



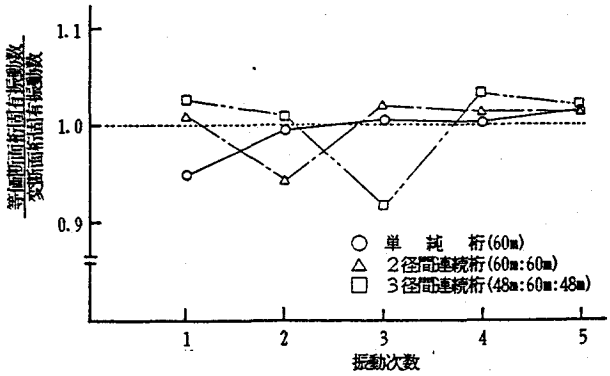
(2) 中間支点

図－5.11 不規則振動解析と動的応答解析の比較
（３径間連続桁橋）

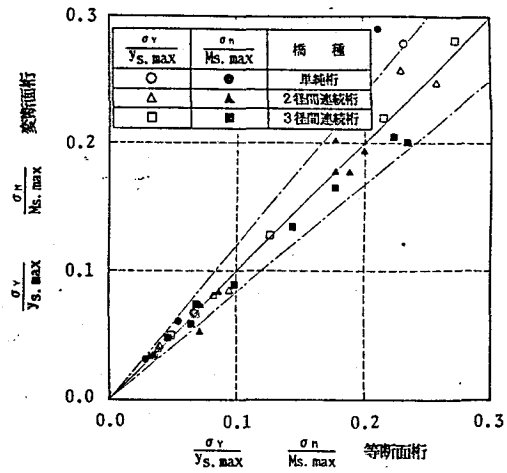
（3）等価断面モデルと変断面モデルの比較

等価断面モデルと変断面モデルにおける固有振動数の比較を図－5.12に示す。両者の固有振動数の差異は5～10%であった。

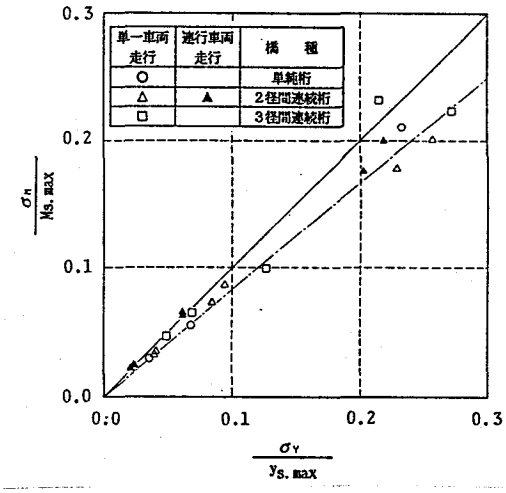
２乗平均値応答の両者の比較を図－5.13に示す。図中の一点鎖線は両者の差が20%となる場合である。両者の差異はほとんどが20%以下となったので，以下の解析では等価断面モデルを用いることにする。



図－5.12　等断面桁と変断面桁の固有振動数比較



図－5.13　等断面桁と変断面桁の応答値比較



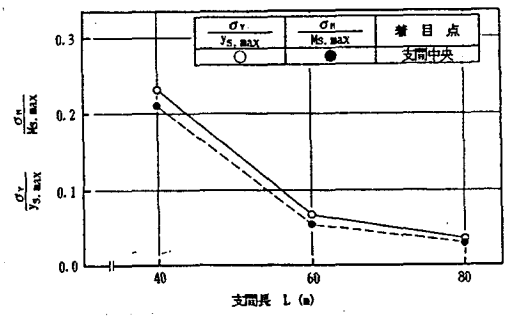
図－5.14　たわみ応答と曲げモーメント応答の比較

（4）たわみ応答と曲げモーメント応答の比較

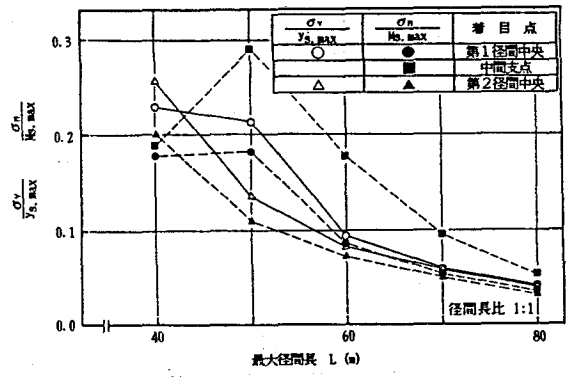
$\sigma_y/y_{s,max}$ と $\sigma_M/M_{s,max}$ を比較して図－5.14に示す。図中の一点鎖線は，両者の比が1.2：1.0の場合である。単一車両走行の場合の応答値はこの一点鎖線のまわりにばらつき，$\sigma_M/M_{s,max}$ に対する $\sigma_y/y_{s,max}$ の比の平均は1.17となった。連行車両の場合は，単一車両走行の場合より $\sigma_y/y_{s,max}$ と $\sigma_M/M_{s,max}$ の差異が小さくなり，両者の比の平均は約1.02となった。

（5）径間長の差異による応答値の比較

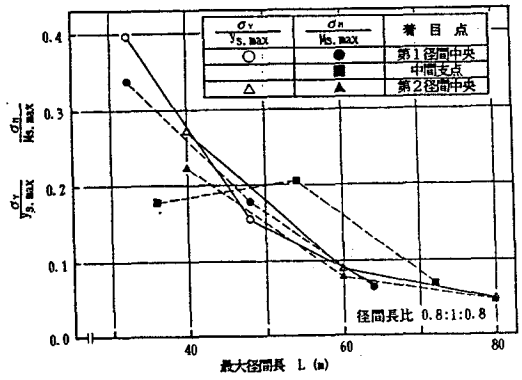
単一車両走行の場合の解析結果を図－5.15(1)～(3)に示す。支間中央部の応答値は，最大径間長が長くなるにつれて小さくなっているが，中間支点上曲げモーメント応答は，2



(1)　単純桁橋

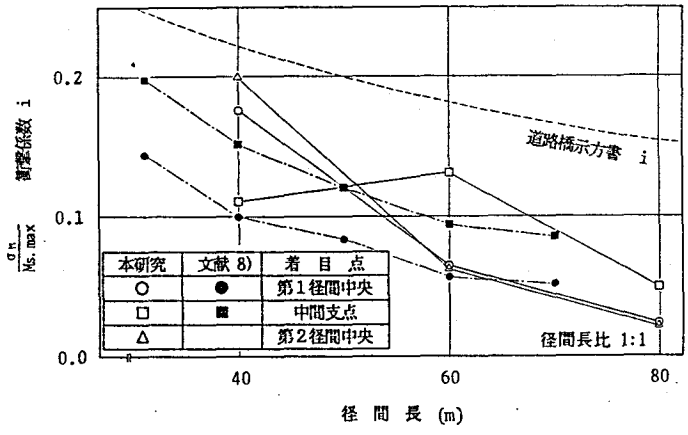


(2)　２径間連続桁橋



(3)　３径間連続桁橋

図－5.15　径間長と応答値の関係（単一車両走行）



図－5.16　径間長と応答値の関係
（２径間連続桁橋，連行車両走行）

径間連続桁橋の最大径間長50mおよび３径間連続桁橋の最大径間長60mで応答値が大きくなっており，他の着目点における応答とは異なる傾向にある。これらの場合，２径間連続桁橋の２次固有振動数が2.95Hz，３径間連続桁橋の３次固有振動数が3.30Hzであり，これらの固有振動数が車両の固有振動数 3.0Hzに近づいたため，橋梁と車両の共振により応答値が大きくなったものと考えられる。

２径間連続桁橋について，連行車両の場合の解析結果を図－5.16に示す。道路橋示方書および文献8)の衝撃係数と比較すると，本解析結果は径間長40m～60mでの変化率が大きくなっている。また，中間支点上での応答値の径間長に対する変化は，径間中央部の場合と異なり，単一車両走行の場合と同様の傾向がみられた。

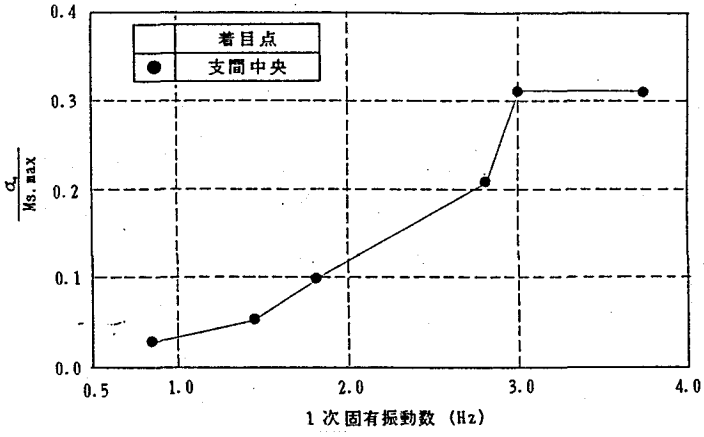
（6）固有振動数の差異による応答値の比較

５．２ 節の実橋構造諸元調査から得られた固有振動数には，ある程度のばらつきがみられた。橋梁の動的解析においては，前述のように車両および橋梁の固有振動数の影響が大きい。そこで，構造諸元調査で得られた固有振動数を回帰曲線から２σ（σ：標準偏差）の範囲で変化させた橋梁モデルを用いて，応答値の変化について考察を行う。ここで追加して用いた橋梁モデルの構造諸元を表－5.3 に掲げ，それらの２乗平均値を固有振動数に対してプロットして図－5.17に示す。車両モデルの固有振動数が３Hzであることから，単純桁橋では１次固有振動数，２径間および３径間連続桁橋ではそれぞれ２次および３次の固有振動数により整理した。

支間中央点での応答値は，固有振動数の増加に伴い漸増しているが，中間支点上では３Hzの場合に応答値は最大となり，３Hzを越えると減少していく傾向にある。また，スパン長が同じであっても固有振動数の差異により，２乗平均値の無次元化応答に最大約 0.11の差がみられた。

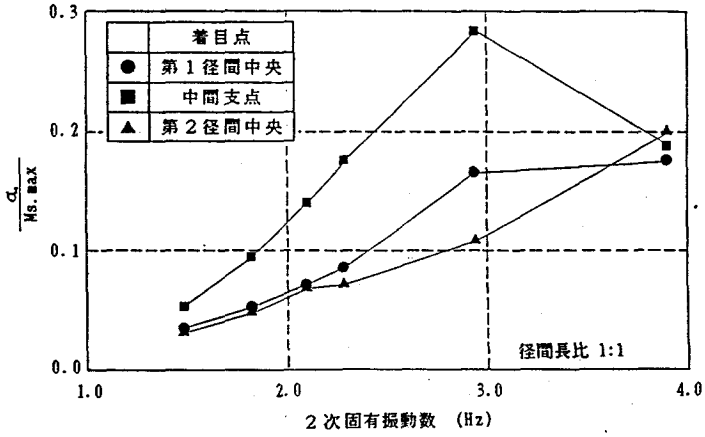
表－5.3　桁橋モデル

スパン長 (m)	単位重量 (t／m)	断面２次モーメント (m⁴)	基本固有振動数 (Hz)
40	3.446	0.1564	3.00
40	2.251	0.1586	3.74
60	5.275	0.4425	1.81
60:60	7.143	0.3283	1.34
48:60:48	6.722	0.1927	1.34
48:60:48	6.722	0.2675	1.58
48:60:48	6.722	0.3785	1.88

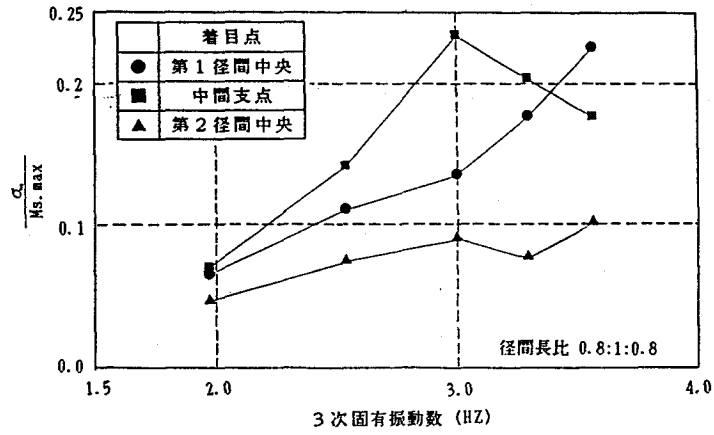


(1)　単純桁橋

図－5.17　固有振動数と応答値の関係



(2)　２径間連続桁橋



(3)　３径間連続桁橋

図－5.17　固有振動数と応答値の関係

5.4　結　言

本章により得られた結果を以下に示す。

(1)　単純桁橋ならびに２径間および３径間連続桁橋の実橋構造諸元調査を行った結果，断面２次モーメントおよび単位長さ当たり重量は，最大径間長に対してばらついたものとなったが，固有振動数を計算すると，ばらつきは比較的小さくなった。

(2)　実橋調査データに基づき，橋梁の解析モデルを作成した。

(3)　本解析結果と動的応答解析結果の比較を行うと，車両が橋梁に進入した直後の２乗平均値応答は共に変動が大きくなった。車両が橋長の２～３割の位置を過ぎるとその

変動は小さくなり，特に本解析結果では変動幅が小さく，動的応答解析結果はそのまわりにばらついた値となった。

（4） 実橋の断面変化に則した変断面桁モデルを用いた，不規則振動解析による２乗平均値応答結果は，等価断面桁モデルによる解析結果と20%以内の差異であった。

（5） 単一車両走行の場合に，たわみ応答が曲げモーメントに比べて約1.17倍の値となり，連行車両の場合は，両者の差異が小さくなり約1.02倍となった。

（6） 径間長および固有振動数の差異による応答値の変化を調べると，径間中央部と中間支点上での応答特性は異なっており，中間支点上での応答は車両の固有振動数と共振して大きくなった。

参考文献（第５章）

1) 日本道路協会：道路橋示方書・同解説，Ｉ共通編，pp.23-27，1980.2.

2) Billing, J.R. : Dynamic loading and testing of bridges in Ontario, Canadian J. of Civ. Engg., Vol.11., No.4, pp.833-843, Dec., 1984.

3) Cantieni, R. : Dynamic load testing of highway bridges, IABSE Periodica, pp.57-72, 1984.3.

4) 小松定夫・川谷充郎：斜張橋の自動車走行による動的応答と衝撃係数に関する研究，土木学会論文報告集，第 275号，pp.13-28，1978.7.

5) 例えば，川谷充郎・小菅　朗・嶋田玲志・小松定夫：路面不整の統計学的特性と道路橋の衝撃係数，構造工学論文集，Vol.33A，pp.459-466，1987.3.

6) 例えば，山田善一・小堀為雄：活荷重に対する道路橋の動的応答 － 衝撃係数 － に関する考察，土木学会論文集，第 148号 ,pp. 40－50，1967.12.

7) Hayashikawa, T. and Watanabe, N. : Dynamic behavior of continuous beams with moving loads, J. of Engg. Mech. Div., Proc of ASCE, Vol.107, No.EM1, pp.224-246, February, 1981.

8) 本田秀行・小堀為雄・山田善一：多径間連続桁橋の動的応答と衝撃係数に関する考察，土木学会論文報告集，第 331号，pp.65-73，1983.3.

9) Komatsu, S. and Kawatani, M. : Nonstationary random response of highway bridge under moving vehicle, Technology Report of the Osaka University, Vol.32, No.1648, pp.151-158, March, 1982.

10) 川谷充郎・小松定夫・和田博久：路面不整を有する単純桁橋の連行荷重による不規則振動，土木学会関西支部年次学術講演会講演概要，I-35，1981.6.

11) 日本道路協会・橋梁委員会・総括委員会・限界状態設計法分科会・荷重検討班：限界状態設計法分科会　荷重検討班　第一次報告書，pp.102-141，1986.11.
12) 小堀為雄・梶川康男：道路橋（鋼橋）の振動測定法とその特性，道路，pp.37-45，1974.7.
13) 加藤雅史・島田静雄：橋梁実測振動特性の統計解析，土木学会論文報告集，第311号，pp.49-58，1981.7.
14) 平井一男：結合法による弾性支承を有する連続ばりの動的解析，土木学会論文集，第 104号，pp.1-8，1964.4.
15) 土木学会：本州四国連絡橋鋼上部構造に関する調査研究報告書，別冊４，アーチの解析と吊橋解析の追補，1974.
16) ISO(International Organization for Standardization) : Proposals for generalized road inputs to vehicles, ISO/TC108/WG9 Document No.5, 1972.
17) Newmark, N.M. : A method of computation for structural dynamics, J. of Engg. Mech. Div., Proc. of ASCE, Vol.85, No.EM3, pp.67-94, July, 1959.
18) 岡林隆敏：単一走行車両による道路橋の二乗平均応答解析，土木学会論文報告集，第 286号，pp.15-27，1979.6.
19) 川谷充郎・嶋田玲志：桁橋の構造諸元実態調査と走行荷重による不規則振動，構造工学論文集，Vol.34A，1988.3（掲載予定）.

第６章　斜張橋の自動車走行による動的応答と衝撃係数

6.1　緒　言

斜張橋は主桁をケーブルにより補剛した構造形式と考えられ，実質的には，ケーブル定着点は主桁に対して弾性支承となっている。このような構造特性を有する斜張橋が，走行荷重下においてどのような動力学的性状を呈するかということは，斜張橋の衝撃係数とも関連して重要な事項である。

動力学的性状の基礎となる斜張橋の自由振動については，多くの理論的研究が報告されている[1)-3),6)-11),13)-19)]。その中には実橋について数値解析したものも多い。また，現地における自由振動実験もかなり行われている[1)-5),7),9)-10),12)-13)]。これらの理論的ならびに実験的研究により，斜張橋の固有振動数，固有振動モードならびに対数減衰率に関するデータが集積されつつある[1)-13)]。

一方，走行荷重下の動的応答に関しては，わが国で最初の斜張橋として 1960 年に建設された勝瀬橋において，伊藤・島田・熊沢[1)]が現地実験を行い，走行荷重による衝撃率について調べている。その後， 1968 年に完成された尾道大橋において大久保・榎波[3)]と牛尾・植田[4)]が， 1970 年に豊里大橋において小松・小林[5)]が，さらに 1975 年に大和橋において赤尾・栗田・加藤・松川・中西[9)]が，それぞれ現地実験を行い，走行荷重による衝撃係数について調べている。その結果によれば，衝撃係数が，３橋共３径間連続桁として道路橋示方書の算定法に従って求めた設計値よりも小さいことが認められた。

外国においては，西ドイツの Norderelbe橋において，1964年に H.K.Havemann[12)] が走行車両による動的応答実験を行い，主桁下フランジにおける応力の動的増幅率が走行速度と共に大きくなることを示している。 A.Pflüger[13)] は 1969 年に懸垂式モノレール用の斜張橋に関して，理想モデルについての数値解析および模型実験を行い，走行荷重モデルに対する動的応答を１ケースについて調べている。

以上のように，過去において，斜張橋の走行荷重による動的応答については，実験的研究が数例発表されているだけで，未だ系統的な研究が行われていない現状である。

そこで，本章においては，斜張橋の走行荷重下の動的応答特性を明らかにするために，理論的ならびに実験的研究を行うものである。理論的研究については，斜張橋を平面構造

系の離散質量系(lumped mass system)に理想化し，マトリックス変位法により橋の強制振動方程式を導く。さらに，１台の自動車を１自由度振動系と仮定して，モード法により橋と車の連成振動方程式を求め，これを Newmark-β 法を用いて逐次積分して斜張橋の動的応答を求める。その過程において，質量マトリックスの逆マトリックスの計算は，特殊の部分行列法により計算の効率化をはかる。

以上の解析法の妥当性を検証するため，わが国で初めてのマルチケーブル斜張橋である大阪市のかもめ大橋において，橋の完成直後に現地振動実験を行った。それにより得られた固有振動数，動的増幅率の実験値と本解析値を比較検討した。

斜張橋のケーブルは軸方向の縦振動のみではなく，軸に直角方向の局所的な横振動も起こすが，このケーブルの横振動が，構造系全体のたわみ，曲げモーメントおよびケーブル張力に関する動的増幅率に及ぼす影響について論ずる。また，ケーブルに導入されるプレストレスが全体構造系の各部の動的増幅率に与える効果について考える。

次に，車の振動特性，走行速度，荷重台数のパラメーターによる各種力学量の動的増幅率の変化を調べる。

さらに，代表的な４種の斜張橋形式について， L-20 相当設計荷重列による応力度の動的増幅率の値を算定し，構造形式による相違について調べた。また，参考のため，それらの動的増幅率と道路橋示方書の衝撃係数算定式(表1.8.6～7)を準用した場合の値とを比較した。

実際に道路橋に載荷する走行荷重は，その荷重の大きさとそれぞれの車頭間隔が，時間的にランダムに変動するようないわゆる不規則連行荷重列である。桁橋の走行荷重による動的挙動に関する従来の研究によれば，同一強度の荷重が，等間隔に走行する 2-5台の連行荷重による橋桁の動的増幅率は単一荷重走行の場合に比べてかなり小さいと報告されている[20]。 しかし，斜張橋のように低次固有振動数が比較的小さい場合には，走行速度と車頭間隔との関係によっては，必ずしもそうとは限らないと考えられる。それで，以上の数値計算に際しては，もっとも影響の大きい共振車頭間隔（橋の対称１次固有周期に相当する車頭間隔）を保持する連行荷重について考えている。

6.2　自動車走行による動的応答解析

斜張橋の走行荷重下の動的応答解析にあたって，斜張橋を図－6.1 に示すように平面構造系の離散質量系に理想化し，マトリックス変位法を適用する。1台の走行荷重を1自由度振動系と仮定して，モード法により橋と車の連成振動方程式を組み立てる。この連立微分方程式をNewmark-β法を用いて逐次積分し，斜張橋の動的応答を求めるものである。

6.2.1　解析上の仮定

斜張橋の振動解析は次の様な仮定に基づいて行う。

a) 横方向に対称な走行荷重を取り扱うので，斜張橋を平面構造系とする。

b) 微小変形理論による線形振動解析を行う。

c) 振動中のケーブルにおける完成時のサグの変化による張力の変化は無視する。

d) 主桁および塔の軸方向の伸縮は無視する。

e) 斜張橋を離散質量系として理想モデル化する。

6.2.2　橋と車の連成振動方程式

まず，D'Alembertの原理を適用して，次のような橋の強制振動方程式をマトリックス形式で誘導した。

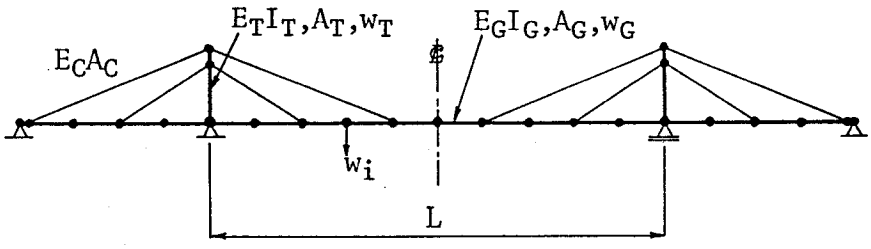
$$M_b\ddot{\omega} + C_b\dot{\omega} + K_b\omega = f \tag{6.1}$$

ここに，M_b，C_b，K_b はそれぞれ橋の質量，減衰，剛性を表すマトリックスであり，ω は節点の変位を表すベクトル，f は節点外力ベクトルである。なお，添字・は時間に関する偏導関数を表す。減衰マトリックスC_b は次式で表せると仮定する[23]。

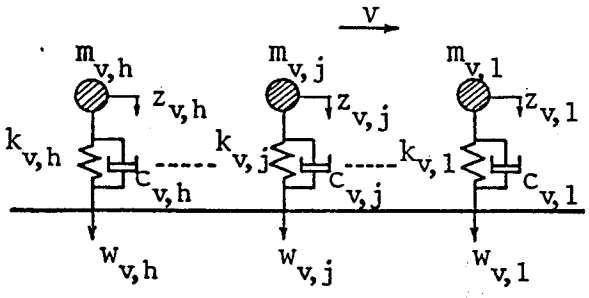
$$C_b = p_1 M_b + p_2 K_b \tag{6.2}$$

ここに，p_1，p_2 は比例定数である。

図－6.2 に示されるように，連行荷重列に含まれる各荷重をばね下質量を無視した1自由度振動系と考えると，第j番目の荷重の振動は次式で表せる。



図－6.1　斜張橋の構造モデル



図－6.2　連行荷重列

$$m_{vj}(\ddot{\Delta}_j+\ddot{w}_{vj})+c_{vj}\dot{\Delta}_j+k_{vj}\Delta_j=0$$

$$(j=1,2,\cdots,h) \tag{6.3}$$

したがって，第j番目の荷重により主桁に作用する外力f_{vj}は次式となる。

$$f_{vj}=m_{vj}g+c_{vj}\dot{\Delta}_j+k_{vj}\Delta_j \tag{6.4}$$

$$(j=1,2,\cdots,h)$$

ここに，m_{vj}，c_{vj}，k_{vj}はそれぞれ第j番目の荷重の質量，粘性減衰定数およびばね定数である。また，$\Delta_j=z_{vj}-w_{vj}$ であり，z_{vj}，w_{vj}は第j番目の荷重質点の鉛直方向変位および荷重載荷点における主桁の鉛直変位である。gは重力加速度である。

式(6.1)，(6.3)および(6.4)を連立させて解く過程においてモード法を用いるので，橋の各節点のたわみを次のように展開する。

$$w(t)=\sum_i \boldsymbol{\phi}_i a_i=\boldsymbol{\Phi}\boldsymbol{a} \tag{6.5}$$

ここに，$\boldsymbol{\phi}_i$ は第i次固有振動モードを表すベクトル，$\boldsymbol{\Phi}$はモーダルマトリックス，$\boldsymbol{a}$は一般化座標a_i を成分とするベクトルである。また，式(6.1) の右辺荷重項は次のように変形される。

$$\Phi^T f = \Phi^T \sum_j \left(m_{vj} g + c_{vj} \dot{\Delta}_j + k_{vj} \Delta_j \right) \boldsymbol{\psi}_j(t) \tag{6.6}$$

ここに，

$$\boldsymbol{\psi}_j(t) = \{0;\cdots;0;\psi_{kj};\psi_{k+1,j};0;\cdots;0\} \tag{6.7}$$

は荷重分配係数ベクトルで，ψ_{kj}，$\psi_{k+1,j}$ は任意の節点間にある集中荷重をそれらの節点反力に逆比例配分する係数である。時間の経過と共に荷重が移動するので，荷重の両側の節点も移動し，$\boldsymbol{\psi}_j(t)$は時間の関数となる。

また，荷重載荷点のたわみ $w_{vj}(t)$は，要素の両端点のたわみのみにより，次のように表されると仮定する。

$$w_{vj}(t) = \boldsymbol{\psi}_j^T(t)\,\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\psi}_j^T(t)\,\Phi\,\boldsymbol{a} \tag{6.8}$$

$$(j=1,2,\cdots,h)$$

式(6.8) を式(6.3) に代入し，式(6.6) と連立させて，マトリックス表示すると次式となる。

$$\underbrace{\left[\begin{array}{cccc|ccc}
m_{b1} & & & & & & \\
 & m_{b2} & & 0 & & & \\
 & & \ddots & & & 0 & \\
0 & & & m_{bn} & & & \\
\hline
m_{11} & m_{12} & \cdots & m_{1n} & m_{v1} & & 0 \\
 & \cdots & & & & \ddots & \\
m_{h1} & m_{h2} & \cdots & m_{hn} & 0 & & m_{vh}
\end{array}\right]}_{M^*}
\left[\begin{array}{c}
\ddot{a}_1 \\ \ddot{a}_2 \\ \vdots \\ \ddot{a}_n \\ \hline \ddot{\Delta}_1 \\ \vdots \\ \ddot{\Delta}_h
\end{array}\right]$$

$$+ \underbrace{\left[\begin{array}{cccc|ccc}
c_{b1} & & 0 & & -c_{11} & & -c_{1h} \\
 & c_{b2} & & & -c_{21} & & -c_{2h} \\
 & & \ddots & & \vdots & & \vdots \\
0 & & & c_{bn} & -c_{n1} & & -c_{nh} \\
\hline
 & & 0 & & c_{v1} & & 0 \\
 & & & & & \ddots & \\
 & & & & 0 & & c_{vh}
\end{array}\right]}_{C^*}
\left[\begin{array}{c}
\dot{a}_1 \\ \dot{a}_2 \\ \vdots \\ \dot{a}_n \\ \hline \dot{\Delta}_1 \\ \vdots \\ \dot{\Delta}_h
\end{array}\right]$$

$$
+\underbrace{\left(\begin{array}{ccc:ccc}
k_{b1} & & 0 & -k_{11} & & -k_{1h} \\
 & k_{b2} & & -k_{21} & & -k_{2h} \\
 & & \ddots & \vdots & & \vdots \\
0 & & k_{bn} & -k_{n1} & & -k_{nh} \\
\hdashline
 & & & k_{v1} & & 0 \\
 & 0 & & & \ddots & \\
 & & & 0 & & k_{vh}
\end{array}\right)}_{K^*}
\left(\begin{array}{c}
\alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \\ \hdashline \Delta_1 \\ \vdots \\ \Delta_h
\end{array}\right)
$$

$$
=\underbrace{\left(\begin{array}{c}
f_{11}+\cdots\cdots+f_{1h} \\
f_{21}+\cdots\cdots+f_{2h} \\
\vdots \\
f_{n1}+\cdots\cdots+f_{nh} \\
\hdashline
0
\end{array}\right)}_{f^*} \qquad (6.9)
$$

ここに，

$$
\left.\begin{array}{lll}
m_{bi}=\boldsymbol{\phi}_i{}^T M_b \boldsymbol{\phi}_i, & m_{ji}=m_{vj}\boldsymbol{\psi}_j{}^T(t)\boldsymbol{\phi}_i & \\
c_{bi}=\boldsymbol{\phi}_i{}^T C_b \boldsymbol{\phi}_i, & c_{ij}=c_{vj}\boldsymbol{\phi}_i{}^T\boldsymbol{\psi}_j(t) & (i=1,2,\cdots\cdots,n) \\
k_{bi}=\boldsymbol{\phi}_i{}^T K_b \boldsymbol{\phi}_i, & k_{ij}=k_{vj}\boldsymbol{\phi}_i{}^T\boldsymbol{\psi}_j(t) & (j=1,2,\cdots\cdots,h) \\
 & f_{ij}=m_{vj}\,g\,\boldsymbol{\phi}_i{}^T\boldsymbol{\psi}_j(t) &
\end{array}\right\} \qquad (6.10)
$$

式(6.9)のそれぞれの係数マトリックスM^*，C^*，K^*の左上および右下の部分対角マトリックスは，それぞれ橋および車の単独の振動に関する係数マトリックスであり，左下および右上の部分マトリックスは，橋と車の振動の連成に関与する係数マトリックスである。式(6.9) 単に書けば，通常の振動方程式のような次式となる。

$$
M^*\ddot{x}+C^*\dot{x}+K^*x=f^* \qquad (6.11)
$$

ここに，

$$x=\{a_1;a_2;\cdots\cdots;a_n;\Delta_1;\Delta_2;\cdots\cdots;\Delta_h\} \tag{6.12}$$

6.2.3 逐次積分

連立２階微分方程式(6.11)の解xを数値解析によって求めるのに，逐次積分の一方法である Newmark-β法 を用いるが，このとき，次の置きかえが必要である。

$$\ddot{x}=(M^*)^{-1}f^*-(M^*)^{-1}C^*\dot{x}-(M^*)^{-1}K^*x \tag{6.13}$$

ここで，M^* の逆マトリックス計算をしなければならない。M^* の成分の内，$\psi_j(t)$に関するものは荷重位置によって変化し，荷重が進行する各段階毎に逆マトリックスを計算すると，計算時間が多くかかる。しかし，M^* の成分の内で変化するものは一部なので，M^* の逆マトリックス計算は部分行列法により計算量を少なくできるような工夫を行った。それで，$(M^*)^{-1}f^*$と$(M^*)^{-1}C^*$については解析的に次式で与えた。

$$(M^*)^{-1}f^*=\left(\begin{array}{c}(f_{11}+\cdots+f_{1h})/m_{b1}\\(f_{21}+\cdots+f_{2h})/m_{b2}\\\vdots\\(f_{n1}+\cdots+f_{nh})/m_{bn}\\\hline f_1\\\vdots\\f_h\end{array}\right) \tag{6.14}$$

ここに，

$$f_j=-\sum_j(f_{i1}+\cdots+f_{ih})m_{ji}/m_{vj}m_{bi}\quad(j=1,2,\cdots,h) \tag{6.15}$$

$$
(M^*)^{-1}C^* = \left(\begin{array}{ccc|ccc}
\frac{c_{b1}}{m_{b1}} & & 0 & \frac{-c_{11}}{m_{b1}} & \cdots & \frac{-c_{1h}}{m_{b1}} \\
 & \frac{c_{b2}}{m_{b2}} & & \frac{-c_{21}}{m_{b2}} & \cdots & \frac{-c_{2h}}{m_{b2}} \\
 & & \ddots & & \cdots & \\
0 & & \frac{c_{bn}}{m_{bn}} & \frac{-c_{n1}}{m_{bn}} & \cdots & \frac{-c_{nh}}{m_{bn}} \\
\hline
\frac{-c_{b1}m_{11}}{m_{v1}m_{b1}} & \frac{-c_{b2}m_{12}}{m_{v1}m_{b2}} \cdots & \frac{-c_{bn}m_{1n}}{m_{v1}m_{bn}} & c_{n+1,n+1} & \cdots & c_{n+1,n+h} \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
\frac{-c_{b1}m_{h1}}{m_{vh}m_{b1}} & \frac{-c_{b2}m_{h2}}{m_{vh}m_{b2}} \cdots & \frac{-c_{bn}m_{hn}}{m_{vh}m_{bn}} & c_{n+h,n+1} & \cdots & c_{n+h,n+h}
\end{array}\right)
\tag{6.16}
$$

ここに，

$$
\left.\begin{aligned}
c_{n+j,n+j} &= \sum_j (c_{ij}m_{ji}/m_{vj}m_{bi}) + c_{vj}/m_{vj} \quad (j=1,2,\cdots,h) \\
c_{n+g,n+j} &= \sum_j (c_{ij}m_{gi}/m_{vg}m_{bi}) \quad (g,j=1,2,\cdots,h;\ g \neq j)
\end{aligned}\right\} \tag{6.17}
$$

$(M^*)^{-1}K^*$も$(M^*)^{-1}C^*$の場合とまったく同様にして求められる。また，積分時間間隔 Δtは考慮した最高次振動モードに対応する固有周期の1/5～1/6として[25]，収束精度1/1000以内で解を得た。

6.2.4 動的増幅率

動的増幅率の定義は，第３章の式(3.16)および式(3.17)に示すDIF とする。

斜張橋においては，ケーブルにより主桁および塔に軸方向力が作用することを考慮して，主桁および塔のたわみ，曲げモーメントのみならず，軸方向力と曲げモーメントによる各断面の縁応力度について動的増幅率を求める必要がある。

6.3 現地振動実験

大阪市のかもめ大橋において，完成直後に現地載荷実験および振動実験を行った[26]。それらの実測値と本動的解析法による計算値とを比較検討すれば以下の通りである。なお，本橋を図－6.3(2) に示す TYPE-10K の構造モデルに理想化して解析を行った。

6.3.1 自由振動性状

自動車後輪の自由落下により生ずる橋の減衰自由振動を測定し，橋の自由振動数と対数減衰率を求めた。中央径間 L/2点と L/4点において，総重量約 20tのダンプトラックの後輪を高さ約 20cm の踏台より落下させ，車の加速度および橋の各点のひずみを測定した。車の振動が十分減衰するまでの約４秒を経過してからの，橋の動的ひずみ記録より読み取った対称２次および３次固有振動数とそれに対応する対数減衰率を表－6.1 に示す。また，走行実験におけるトラック走行後の自由振動記録より対称１次固有振動数ならびにその際の対数減衰率を表－6.1 の上欄に掲げる。表中には，固有値解析より得られた理論値を（）内に併記してある。理論値と実験値とは良好な一致を示している。

表－6.1 より，かもめ大橋の対数減衰率δは，0.056～0.083 の範囲にあることが分かったので，次頁の DIF の理論解析においては対称１次振動の際の値δ=0.076と仮定した。

表－6.1 かもめ大橋の固有振動数と対数減衰率

振動次数	固有振動数 (Hz)	対数減衰率
対称１次	0.47 (0.42)	0.076
対称２次	0.99 (0.98)	0.083
対称３次	1.46 (1.47)	0.056

注）（）内は解析値

表－6.2 動的増幅率の実験値と解析値の比較（かもめ大橋，TYPE-10K，$\delta=0.076$）

断面			1台走行 $V=40$ km/hr			3台連行 $V=40$ km/hr, $l=vT_s$		
			① 実験値	② 解析値	①/②	① 実験値	② 解析値	①/②
主桁	C	北側	1.043	1.032	1.011	1.064	1.035	1.028
		南側	1.044		1.012	1.055		1.019
	D	北側	1.061	1.030	1.030	1.071	1.028	1.042
		南側	1.053		1.022	1.063		1.034
	F	北側	1.035	1.033	1.002	1.056	1.029	1.026
		南側	1.055		1.021	1.062		1.032
	H	北側	—	1.031	—	1.046	1.041	1.005
ケーブル	T_{CU}	上面	1.067	1.051	1.015	1.036	1.033	1.003
		下面	1.049		0.998	1.031		0.998
	T_{CL}	上面	1.037	1.031	1.006	1.034	1.027	1.007
		下面	1.046		1.015	1.054		1.026
	T_{SM}	下面	—	1.031	—	1.049	1.014	1.035

注）断面符号は図－6.3(2)を参照

6.3.2 動的増幅率

総重量約20tのダンプトラックを速度40km/hで1台単独走行および3台連行させた。そして，逆台形箱桁のボトムプレートの両側ウェブとの接合線から距離 3cm内側の位置における動的ひずみおよびケーブルの定着部付近における動的ひずみを同時に測定した。それらの結果より算定した DIF の実験値と，同じ自動車の振動特性および載荷状態をシミュレートした場合の DIF の解析値，さらに両者の比を表－6.2 に示す。

表－6.2 の結果より，DIF の実験値と解析値とは良い一致を示し，本理論解析法の妥当性が認められる。

6.4 斜張橋の動的応答特性

6.4.1 構造モデルの形状・諸元

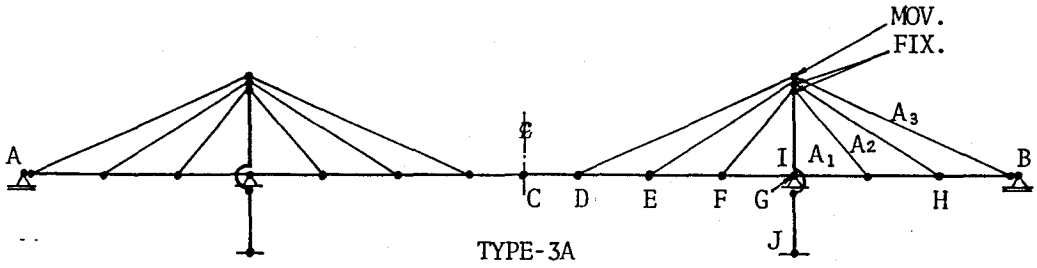
ここで対象とする斜張橋モデルは，安治川橋梁の第1次設計案である安治川斜張橋[27]（TYPE-3A,3Si),3Sii),3B,11F,11T），および大阪市のかもめ大橋（TYPE-10K）とそれを若干改変したモデル（TYPE-2K）である。

安治川斜張橋の各計画案については，3段ケーブル逆台形箱桁形式，11段ケーブル扁平箱桁形式，11段ケーブルトラス主構形式の3形式について検討する。ケーブルの局部横振動とプレストレス，および，車の振動特性の動的増幅率に及ぼす影響については，3段ケーブル逆台形箱桁形式（図－6.3(1)のTYPE-3A,3S）を対象として調べる。形式別比較を行う場合は，比較の対象とする11段ケーブル形式の主桁の節点数とほぼ同数に節点を設定した3段ケーブル逆台形箱桁形式の構造モデルを用いる（図－6.3(1)のTYPE-3B,11F,11T）。

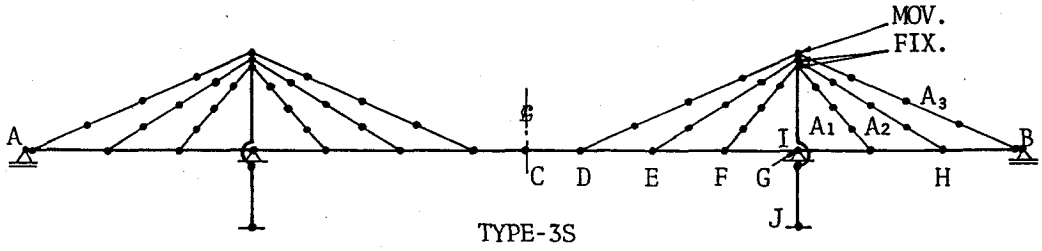
かもめ大橋モデルおよびその改変モデルについては，実橋モデルである10段ケーブル形式（図－6.3(2)のTYPE-10K）と，ケーブル総断面積を10段ケーブルの場合と等しくなるように改変した2段ケーブル形式（図－6.3(2)のTYPE-2K）の2形式について比較検討する。

以上の斜張橋モデルの諸元を表－6.3 に掲げる。なお，表－6.4 に掲げるように，既設斜張橋の対数減衰率の実測値が 0.02～0.10 の範囲にあることを参考にして，数値解析における対数減衰率を安全側に 0.02 と仮定した。

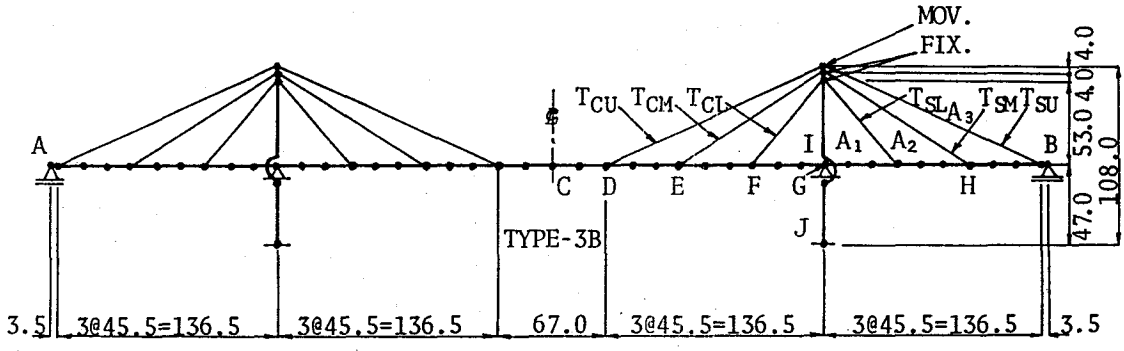
また，構造形式別の調査内容をまとめて表－6.5 に示す。



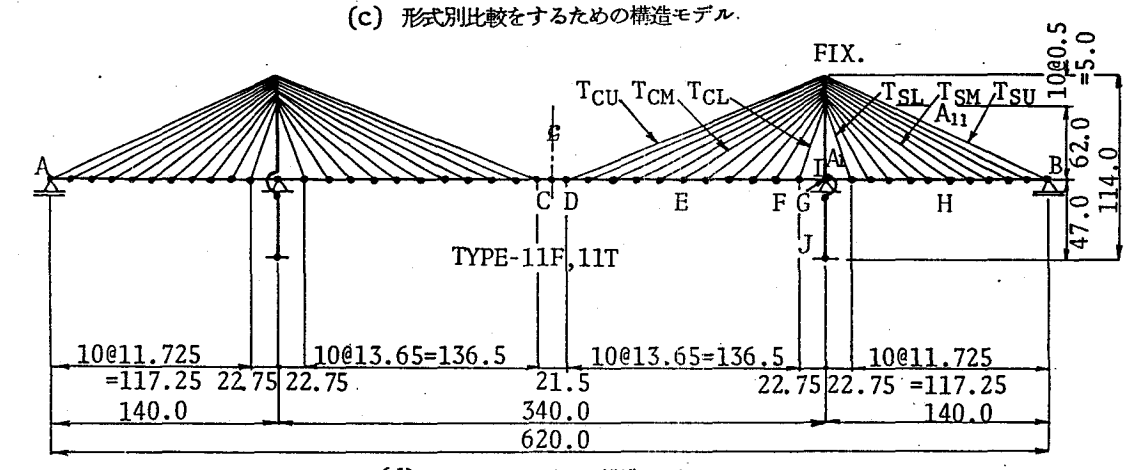
(a) 3段ケーブルの構造モデル



(b) ケーブルの局部横振動とブレストレスの影響を調べるための構造モデル

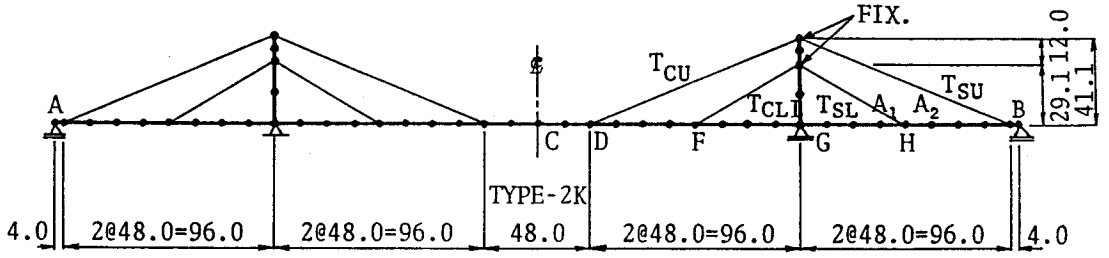


(c) 形式別比較をするための構造モデル

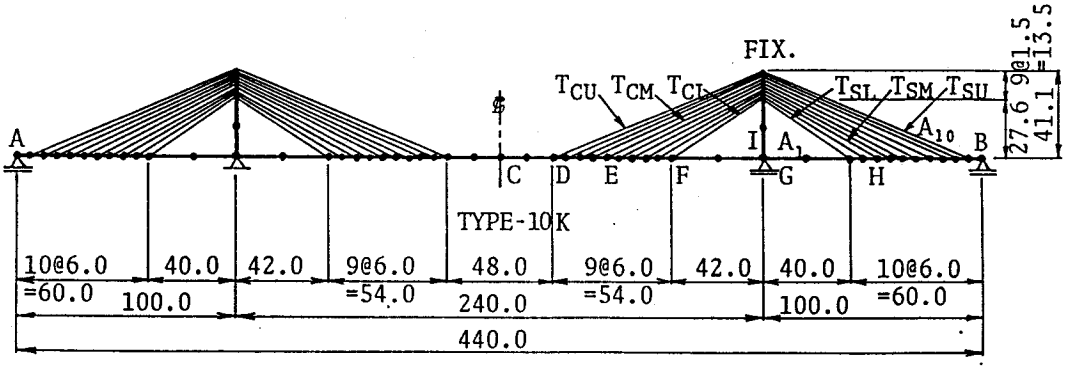


(d) マルチケーブルの構造モデル

図－6.3(1)　安治川斜張橋モデル



(a) 2 段ケーブルの構造モデル



(b) マルチケーブルの構造モデル

図－6.3(2)　かもめ大橋系モデル

表－6.3　構造モデルの諸元

構造モデル		安治川斜張橋モデル			かもめ大橋系モデル	
		TYPE-3A, 3B, 3S	TYPE-11F	TYPE-11T	TYPE-2K	TYPE-10K
主桁	形式	逆台形箱桁	扁平箱桁	トラス主構	逆台形箱桁	
	断面2次モーメント I_G(m⁴)	2.90	2.98	4.10	0.9414	
	単位長あたり重量 w_G(t/m)	20.0	21.6	22.0	14.243	
	断面積 A_G(m²)	0.994	1.214	0.400	0.571	
塔	断面位置	桁上		桁下	頂部	基部
	断面2次モーメント I_T(m⁴)	1.518		2.284	0.352	0.544
	単位長あたり重量 w_T(t/m)	9.40		13.7	3.82	4.19
	断面積 A_T(m²)	0.968		1.392	0.442	0.487
ケーブル	断面積 A_C(m²)	A_1 0.051 A_2 0.051 A_3 0.077	$A_{1\sim4}$ 0.0128 $A_{5\sim7}$ 0.0170 $A_{8\sim11}$ 0.0192		A_1 0.0308 A_2 0.0499	$A_{1\sim2}$ 0.0045 $A_{3\sim6}$ 0.0072 $A_{7\sim10}$ 0.0106
	ヤング係数 E_C(t/m²)	2.0×10^7			2.0×10^7	
対数減衰率 δ		0.02			0.02	

注）安治川斜張橋モデルの数値は，第1次基本設計において算定された等断面を採用したときのものである．

表－6.4　斜張橋の対数減衰率

橋名	架設年	対数減衰率
Norderelbe 橋[12]	1963	0.03 ～0.10
原耶大橋[2]	1966	0.02 ～0.03
尾道大橋[3]	1967	0.03 ～0.05
豊里大橋[5]	1970	0.051～0.087
荒川大橋[6]	1970	0.024～0.051
大和橋[9]	1974	0.068
かもめ大橋[26]	1975	0.056～0.083

表－6.5　構造形式別調査内容

橋名	形式	TYPE	図番	調査内容 自由振動	現地実験と比較の	ケーブル横振動およびプレストレスの影響	走行荷重の振動性状の影響	単一走行荷重	連行荷重列 L－20
モデル 安治川斜張橋	3段ケーブル逆台形箱桁	3A	図－6.3(1)(a)	○	－	○	○	－	－
	同上	3S	図－6.3(1)(b)	○	－	○	－	－	－
	同上	3B	図－6.3(1)(c)	○	－	－	－	○	○
	11段ケーブル扁平箱桁	11F	図－6.3(1)(d)	○	－	－	－	○	○
	11段ケーブルトラス主構	11T	同上	○	－	－	－	○	－
モデル かもめ大橋系	2段ケーブル逆台形箱桁	2K	図－6.3(2)(a)	○	－	－	－	－	○
	10段ケーブル逆台形箱桁	10K	図－6.3(2)(b)	○	○	－	－	－	○

6.4.2 ケーブルの横振動およびプレストレスの影響

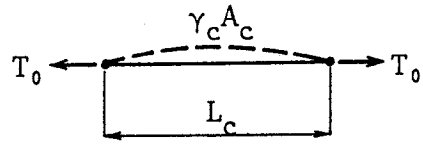
(1) ケーブルの固有振動数

斜張橋のケーブルには一般にプレストレスが導入されているので，そのような状態におけるケーブルの局部横振動が構造系全体の振動性状に及ぼす影響について調べる。このとき，次の2つの場合について考える。

i) TYPE-3A について，死荷重載荷時のケーブル張力を初期張力T_0とする。各ケーブルの初期張力としては，表−6.6(1)に示すような値を仮定する。ここで，安治川橋梁については架設工法が確定していないので，プレストレス量については，死荷重載荷時完成系について，概略の計算により推定したものである。ところで，ケーブルの局部横振動の第i次固有振動数f_iは次式で与えられる。

$$f_i = \frac{i}{2L_c}\sqrt{\frac{gT_0}{\gamma_c A_c}} \tag{6.18}$$

ここに，L_c，γ_c，A_c，はそれぞれケーブルの長さ，単位体積当り重量および断面積である。上式により計算されたケーブルの1次，2次および3次固有振動数 f_1，f_2，f_3を表−6.6(1)に掲げる。



図−6.4 ケーブルの横振動

表−6.6(1) 初期張力T_0のときのケーブルの固有振動数

ケーブル		L_C(m)	A_C(m²)	T_0(t)	f_1(Hz)	f_2(Hz)	f_3(Hz)
側径間	上段	149.51	0.077	2454.0	0.667	1.334	2.001
	中段	107.38	0.051	1702.3	0.951	1.901	2.852
	下段	69.85	0.051	1095.8	1.172	2.345	3.517
中央径間	上段	149.51	0.077	2454.0	0.667	1.334	2.001
	中段	107.38	0.051	1710.3	0.953	1.905	2.858
	下段	69.85	0.051	1252.7	1.253	2.507	3.760

表−6.6(2) ケーブルの1次固有振動数が$f_1=f_s=0.388$Hz のときの初期張力

ケーブル	f_1(Hz)	f_2(Hz)	f_3(Hz)	L_C(m)	A_C(m²)	T_2(t)
上段	0.388	0.776	1.164	149.51	0.077	830.2
中段	〃	〃	〃	107.38	0.051	283.7
下段	〃	〃	〃	69.85	0.051	120.0

ii) ケーブルの横振動が主桁と共振する場合の影響について調べるために，ケーブル横振動の１次固有振動数が，TYPE-3A の対称１次固有振動数 $f_s = 0.388$Hzとなるように，次式により初期張力 T_2 を決める。

$$T_2 = 0.6022\ L_c^2 \gamma_c A_c / g \qquad (6.19)$$

これに先立って，TYPE-3A の単独走行荷重による動的応答解析から，主桁はほぼ対称１次固有振動数で振動していることを確認した。上式(6.14)により算定した初期張力 T_2 を表－6.6(2)に示す。表－6.6(2)において f_1，f_2，f_3 はそれぞれケーブル横振動の基本振動数および２次，３次固有振動数を表す。

表－6.7　斜張橋の固有振動数(Hz)

次数	TYPE -3A	TYPE-3S i) T_0	TYPE-3S ii) T_2	次数	TYPE -3A	TYPE-3S i) T_0	TYPE-3S ii) T_2
1	0.359+	0.36003+	0.35660+	27		1.6663+	0.69995+
2	0.388*	0.38867*	0.36644*	28		1.7126*	0.72660*
3	0.498+	0.49764+	0.37795+	29		1.7135+	0.91255+
4	0.724*	0.64742*	0.37798*	30		1.7167*	0.91274*
5	1.095+	0.64986+	0.37801+	31		1.7176+	0.91274+
6	1.303*	0.65014*	0.37802*	32		2.0820*	0.91280+
7	1.677+	0.65033+	0.37803+	33		2.1091+	0.91280*
8	2.084*	0.72574*	0.37803*	34		2.1183*	0.91280+
9	2.133*	0.92242+	0.37807*	35		2.1685*	0.91280*
10	2.295+	0.92513*	0.37808+	36		2.2352+	0.91285+
11	2.500*	0.92764+	0.37810+	37		2.2367*	0.91285*
12	2.723+	0.92773*	0.37810*	38		2.2409+	0.91292+
13	3.920*	1.0915+	0.37870+	39		2.2420*	0.91292*
14	4.749+	1.1415*	0.39754*	40		2.2570+	0.91299*
15	4.749*	1.1426+	0.49537+	41		2.2582*	1.0893+
16		1.2011*	0.69137*	42		2.2895+	1.2978*
17		1.2011+	0.69824+	43		2.4925*	1.6652+
18		1.2023*	0.69852*	44		2.7105+	2.0904*
19		1.2030+	0.69853+	45		2.7584*	2.1684*
20		1.2197*	0.69857*	46		2.7587+	2.2837+
21		1.2208+	0.69857+	47		2.9492*	2.4900*
22		1.3014*	0.69861*	48		2.9493+	2.7087+
23		1.5683+	0.69862+	49		3.8980*	3.8972*
24		1.5692*	0.69863*	50		4.5259+	4.5178+
25		1.5693+	0.69864+	51		4.5265*	4.5184*
26		1.5695*	0.69962*				

注 1)　TYPE-3A：ケーブルの軸変形のみ考慮
　　TYPE-3S i)：ケーブルの横振動考慮（初期張力 T_0）
　　TYPE-3S ii)：ケーブルの横振動考慮（初期張力 T_2）
注 2)　*：対称固有振動モードに対応する．
　　+：逆対称固有振動モードに対応する．

（２）構造モデル全系の固有振動数と固有振動モード

TYPE-3A, TYPE-3Si), ii) について，ＱＲ法を用いた固有値計算によって固有振動数を求めた。静的たわみおよび静的曲げモーメントに対して５％以内の精度で収束させるためには，モード法による動的応答解析において考慮すべきモードの次数は，TYPE-3A では15次，TYPE-3Si), ii)ではケーブルの横振動の影響を含むので51次とした。それで，それらの次数までの固有振動数を表－6.7 に示す。

また，ケーブルの横振動を考慮したTYPE-3Si), ii)の固有振動モードの内，代表的なものを図－6.5(1)～(6) および図－6.6(1)～(8) に示す。図－6.5 は，初期張力が表－6.6 (1) に掲げるT_0 のときの固有振動モードである。ケーブルと主桁との共振も認められるが，図－6.5(4)および(6) の４次振動，９次振動のような，ケーブルのみの振動モードが他の次数においても存在する。図－6.6 は，ケーブルの１次振動数が橋の対称１次振動数に一致するように，初期張力T_2 を導入した場合である。１次，２次，14次，15次，28次および41次以上のモード以外の振動モードにおいては，主桁および塔の振動はほとんど認められず，ケーブルのみが振動するような振動モードである。３～13次はケーブルのみの１次振動モードに近く，16～27次はケーブルのみの２次振動モード，29～40次はケーブルのみの３次振動モードに近いと考えられる。

（３）走行荷重下の動的応答

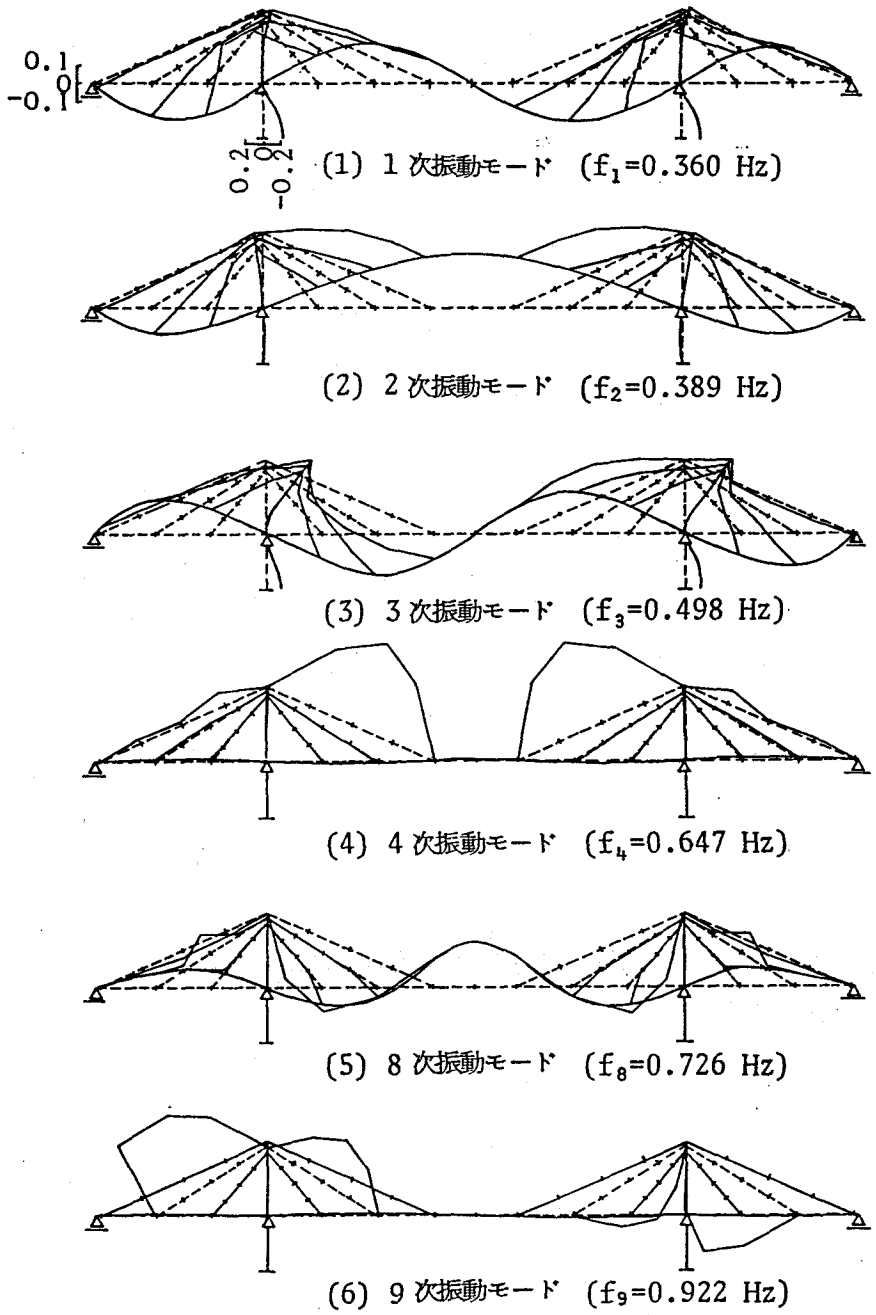
図－6.7(1)～(6)は，１台の走行荷重下のDIFの速度による変化を，TYPE-3A, 3Si), 3Sii)について比較したものである。走行荷重の諸元を表－6.8 に掲げる。これらの値は実在のトラックについて実測されたデータに基づくものである[5]。図－6.7 の横座標αは無次元速度パラメーターであって，次式で定義される。

表－6.8　走行荷重諸元

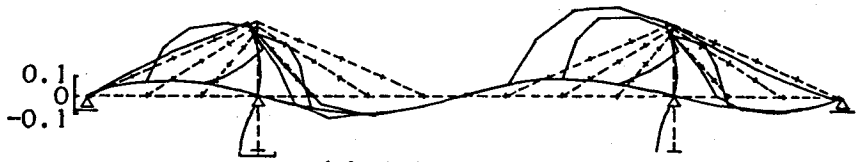
重　　量	(t)	16.0
ばね定数	(t/m)	630.0
固有振動数	(Hz)	3.1
対数減衰率		0.34

$$\alpha = vT_s / 2L \tag{6.20}$$

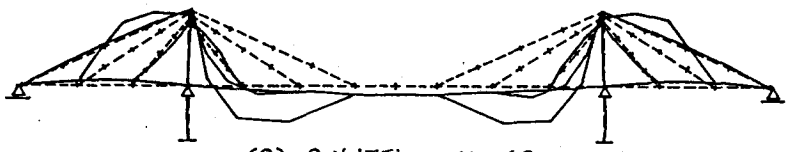
ここに，v：走行速度，T_s ：橋の対称１次固有振動周期，L：中央径間長。



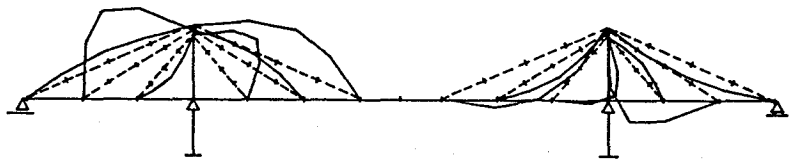
図－6.5 固有振動モード（TYPE-3Si），初期張力T_0）



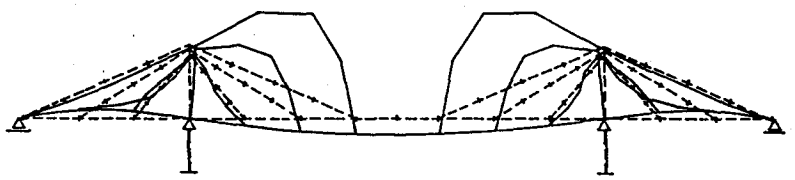
(1) 1 次振動モード (f_1=0.357 Hz)



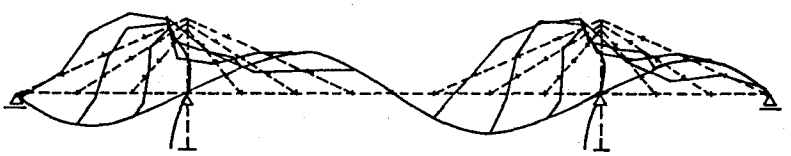
(2) 2 次振動モード (f_2=0.366 Hz)



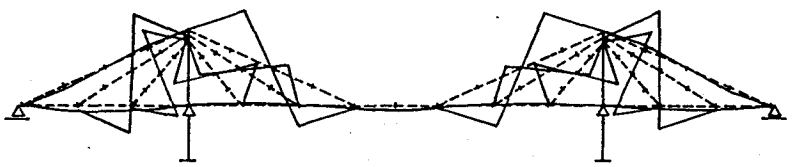
(3) 3 次振動モード (f_3=0.378 Hz)



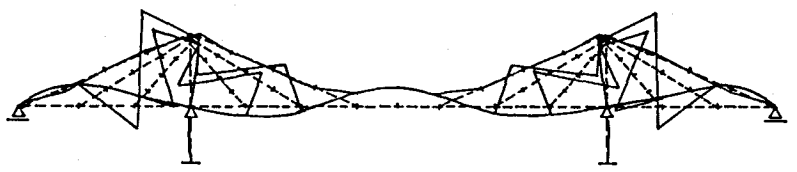
(4) 14 次振動モード (f_{14}=0.398 Hz)



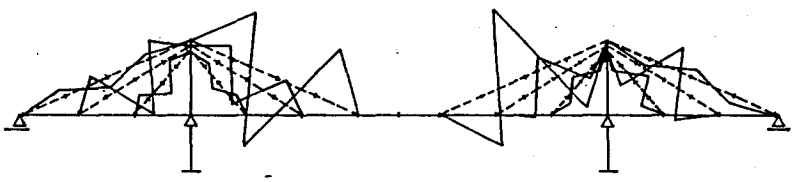
(5) 15 次振動モード (f_{15}=0.495 Hz)



(6) 16 次振動モード (f_{16}=0.691 Hz)

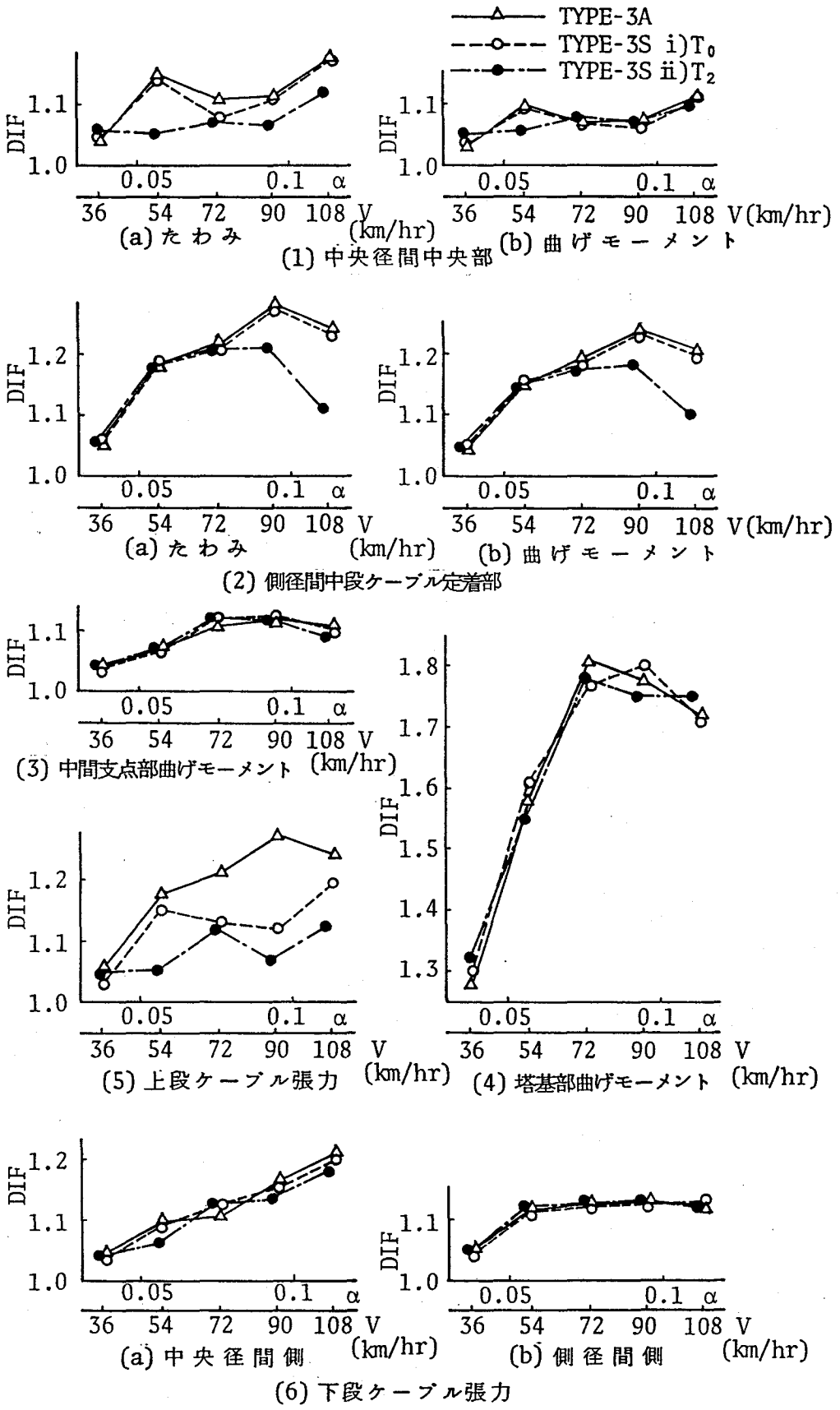


(7) 28 次振動モード (f_{28}=0.727 Hz)



(8) 29 次振動モード (f_{29}=0.913 Hz)

図－6.6 固有振動モード（TYPE-3Sii), 初期張力T_2）



図－6.7　ケーブルの局部横振動を考慮した場合の
DIF の比較（単一走行荷重）

i)主桁についてのDIF…… 図－6.7(1),(2)は主桁の中央径間中央部と側径間中段ケーブル定着部のたわみと曲げモーメントについてのDIF を示し，図－6.7(3)は同じく中間支点部の曲げモーメントについてのDIF を示す。これらの図を通して,TYPE-3AとTYPE-3Si) との差異はほとんどないことが分かる。すなわち，死荷重載荷時のケーブル張力を初期張力とした場合は，ケーブルの横振動を考慮しても，DIF にはほとんど影響しない。また，側径間中段ケーブル定着部のたわみならびに曲げモーメントのDIF について，TYPE-3Sii)はTYPE-3A,3Si)の２形式との間にどのような相違があるか図－6.7(2)において比較してみた。それによる走行速度90km/h以下ではほとんど相違なく，90km/h以上で顕著な相違が認められた。中央径間中央部と中間支点部の曲げモーメントおよびたわみのDIF の上記形式別の相違を調べると，図－6.7(1)および(3)に認められるようにほとんど相違がない。ケーブルの１次振動数が橋の対称１次振動数に一致するように初期張力T_2 を決めたTYPE-3Sii)の場合は，ケーブルがダンパーの役割をして，DIF が小さくなるものと思われるが，これは仮想の初期張力の場合に相当しているもので，実状はこれとかなり相違している。

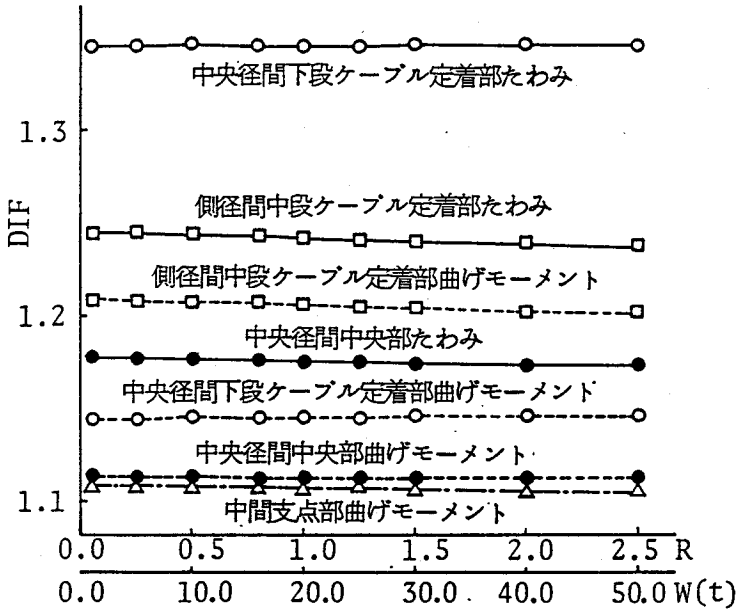
ii)塔についてのDIF ……図－6.7(4)は塔基部の曲げモーメントについてのDIF を示す。TYPE-3A,3Si),3Sii)は，速度のいかんにかかわらず，ほぼ互いに相等しいDIF値を示す。それで，ケーブルの横振動のDIF に及ぼす影響はほとんどないことが分かる。

iii)ケーブルについてのDIF ‥‥図－6.7(5) および(6)は上段ケーブルと下段ケーブルの張力についてのDIF を示す。下段ケーブルではTYPE-3A,3Si),3Sii)が相等しい DIF値をもつが，上段ケーブルではTYPE-3A,3Si),3Sii)の順にDIF 値は小さくなっている。

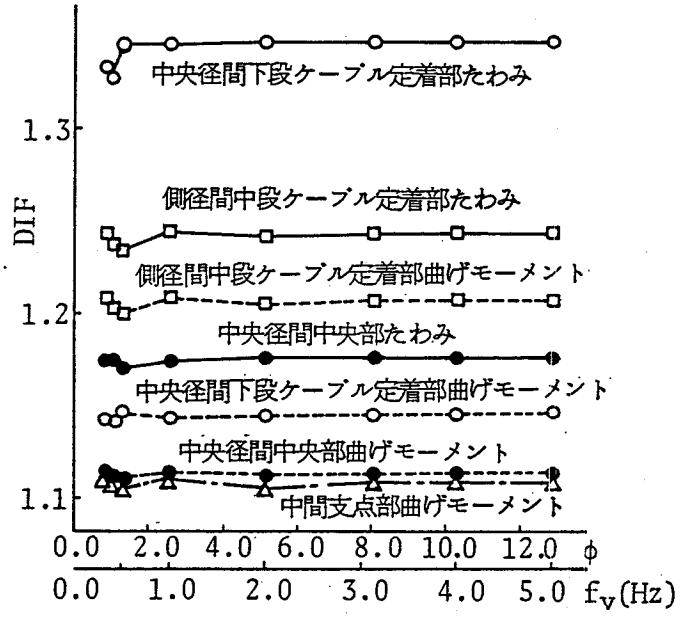
以上を総合して，実際の重量車の走行速度40～80km/hの範囲では，TYPE-3A,3Si),3Sii) の３つの場合の差異はほとんど認められず，ケーブルの横振動を考慮すれば，かえって動的増幅率が若干小さく現れるにすぎない。そこで，走行荷重による動的応答解析では，ケーブルと橋の固有振動数が接近しない場合には，ケーブルの横振動の影響を考えなくても良い。

6.4.3 車の重量・固有振動数の影響

車の重量，固有振動数の動的増幅率に及ぼす影響について調べるために，表－6.8 に掲



図－6.8　重量パラメータによるDIFの変化
（TYPE-3A，単一走行荷重，v＝30m／sec）



図－6.9　振動数パラメータによるDIFの変化
（TYPE-3A，単一走行荷重，v＝30m／sec）

げる走行荷重諸元の値を基準にして，車の重量と固有振動数を変化させる。

（１）車の重量の影響

車の重量に関する無次元パラメーターとして，次式で表わされるＲを採る。

$$R = W / w_G \tag{6.21}$$

ここに，W：車の重量，w_G ：後死荷重を含む橋桁の単位長当り重量。

TYPE-3A の斜張橋において，速度30m/sec(α=0.1136)で，荷重を橋の端Ａから走行させたときの，橋の各部のたわみおよび曲げモーメントに関するDIF を図－6.8 に示す。車の実際の重量は1～50tの範囲にあると考えられる。表－6.3に従い，TYPE-3Aの橋桁の単位長当り重量を20t/mとすると，Ｒは0.05～2.50の範囲にある。

図－6.8 より，荷重の重量がこの範囲内で変化しても，橋の各部力学量のDIF はほとんど変化しないことが分かる。これは，橋の規模が大きく，重量パラメーターＲが比較的小さい範囲にあるためと思われる。

（２）車の固有振動数の影響

車の固有振動数に関する無次元パラメーターとして，次式で表されるϕを採る。

$$\phi = f_v / f_s \tag{6.22}$$

ここに，f_v：車の固有振動数，f_s：橋の対称１次固有振動数。

前項（１）の場合と同様に荷重を走行させたときの，橋の各部のたわみおよび曲げモーメントに関するDIF を図－6.9 に示す。振動数パラメーターϕによるDIF の変化はほとんど認められない。

６．４．４　構造形式別の自由振動性状の比較

安治川斜張橋モデルのTYPE-3B, 11F, 11T およびかもめ大橋系モデルのTYPE-2K, 10K に対して固有値解析を行う。ケーブルの横振動を無視するので，以下のモード法解析において考慮した次数は，TYPE-3Bでは43次まで，TYPE-11F, 11Tでは49次まで，そして TYPE-2K では39次まで，TYPE-10Kでは37次までであり，それらを表－6.9(1), (2) にそれぞれ掲げる。

表－6.9(1)　安治川斜張橋モデルの固有振動数(Hz)

次数	TYPE -3B	TYPE -11F	TYPE -11T	次数	TYPE -3B	TYPE -11F	TYPE -11T
1	0.358+	0.351+	0.350+	26	11.804+	11.566+	13.424+
2	0.388*	0.383*	0.396*	27	12.994*	12.873*	14.949*
3	0.495+	0.620+	0.657+	28	14.496+	14.949+	17.363+
4	0.734*	1.007*	1.052*	29	15.817*	16.611*	19.293*
5	1.077+	1.178+	1.226+	30	16.225+	16.690+	19.385+
6	1.302*	1.324*	1.305*	31	16.833*	17.171*	19.947*
7	1.670+	1.684+	1.402*	32	18.498+	19.352+	22.483+
8	2.089*	2.107*	1.839+	33	18.594*	21.741*	25.261*
9	2.135*	2.232*	2.340*	34	18.604+	22.814+	26.506+
10	2.344+	2.286+	2.546+	35	19.690*	22.844*	26.540*
11	2.589*	2.451*	2.757*	36	20.881+	23.827+	27.686+
12	3.136+	3.032+	3.457+	37	20.986*	26.362*	30.633*
13	3.765*	3.795*	4.358*	38	22.372+	27.779+	32.280+
14	4.263+	4.248+	4.880+	39	22.828*	29.525*	34.307*
15	4.525*	4.417*	5.076*	40	24.691+	29.530+	34.314+
16	4.704+	5.079+	5.255+	41	24.708*	30.057*	34.929*
17	4.704*	5.259*	5.258*	42	25.190+	30.553+	35.506+
18	5.178+	5.261+	5.869+	43	25.280*	35.986*	38.517*
19	6.309*	6.183*	7.158*	44		35.986+	38.517+
20	7.291+	7.205+	8.345+	45		38.523*	41.818*
21	7.593*	7.371*	8.536*	46		38.523+	41.818+
22	8.089+	7.822+	9.067+	47		38.686*	44.959*
23	9.405*	9.205*	10.680*	48		40.888+	47.517+
24	10.749+	10.920+	12.676+	49		40.888*	47.517*
25	11.482*	11.455*	13.293*				

注）*：対称固有振動モードに対応する．
　　+：逆対称固有振動モードに対応する．

表－6.9(2)　かもめ大橋系モデルの固有振動数(Hz)

次数	TYPE-2K	TYPE-10K	次数	TYPE-2K	TYPE-10K
1	0.487*	0.420*	21	12.694*	13.829*
2	0.647+	0.599+	22	13.908+	13.964+
3	0.980*	0.977*	23	14.016*	14.044*
4	1.203+	1.305+	24	14.838+	16.639+
5	1.482*	1.470*	25	15.428*	17.175*
6	1.968+	1.958+	26	15.659+	17.176+
7	2.516*	2.622*	27	17.314*	20.894*
8	2.769+	2.854+	28	19.455+	24.865+
9	3.046*	3.163*	29	20.900*	24.870*
10	4.049+	4.072+	30	21.172+	25.680+
11	5.254*	4.963*	31	21.955*	27.280*
12	5.786+	5.535+	32	23.791+	28.141+
13	6.012*	5.746*	33	25.348*	28.141*
14	7.013+	6.601+	34	25.859+	38.591+
15	8.412*	8.203*	35	26.130*	38.990*
16	8.715+	8.931+	36	26.468+	42.134+
17	8.906*	8.992*	37	26.473*	42.134*
18	9.894+	9.622+	38	27.100+	
19	10.153*	9.625*	39	27.953*	
20	10.829+	10.693+			

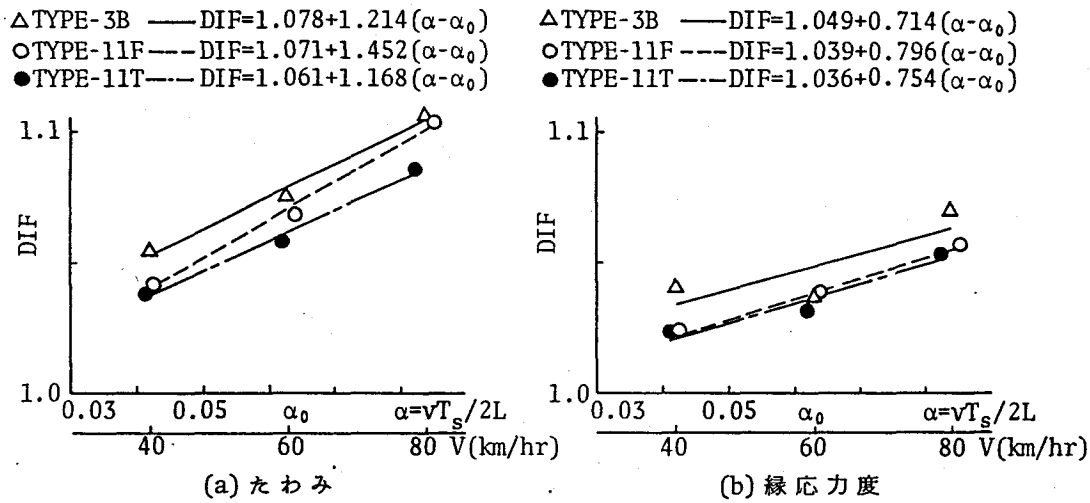
注）*：対称固有振動モードに対応する．
　　+：逆対称固有振動モードに対応する．

安治川斜張橋モデルでは，３形式共に基本振動数と２次振動数とが接近し，基本固有振動モードは逆対称モードであり，２次固有振動モードは対称モードである。３～５次固有振動数については，TYPE-11F, 11T　の方がTYPE-3B よりもかなり大きくなる。次数が高くなるにつれて，固有振動数はTYPE-3B, 11F, 11T の順番に大となる傾向が明瞭である。

かもめ大橋系モデルでは，振動モード20次以下についてはTYPE-2K とTYPE-10Kの固有振動数は接近しており，21次以上においてはTYPE-10Kの方がTYPE-2K よりも大きい固有振動数をもっている。

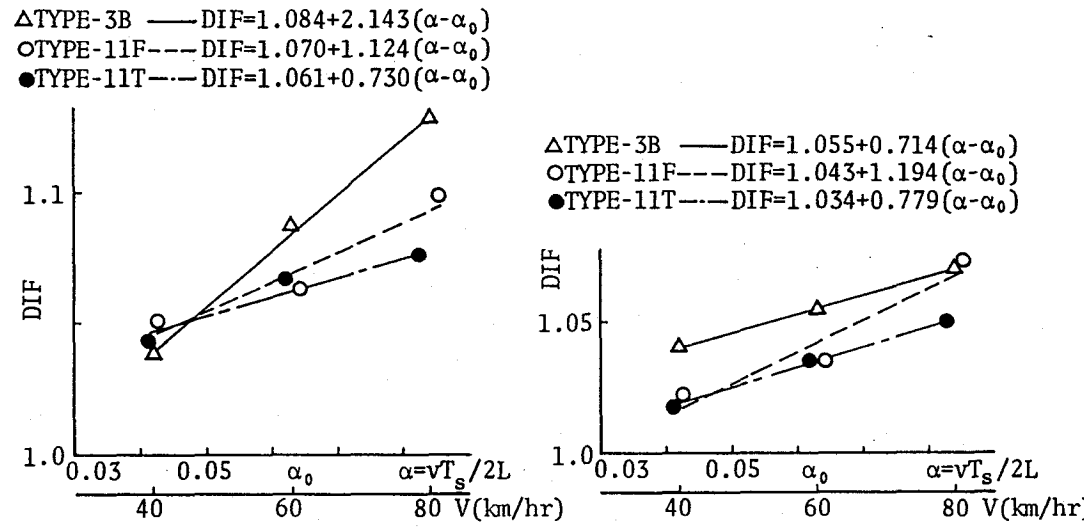
6.4.5　単一走行荷重下の動的応答

TYPE-3B, 11F, 11T の安治川橋梁案３形式について，表－6.8 に掲げる１台の自動車が，橋端Ａからそれぞれ速度Ｖ＝40, 60, 80km/hで走行した場合の，各部のたわみ，曲げモーメント，縁応力度，ケーブル張力に関するDIF の速度パラメーターαによる変化の様子を，図－6.10(1)～(7)に示す。



(a) たわみ　　(b) 縁応力度

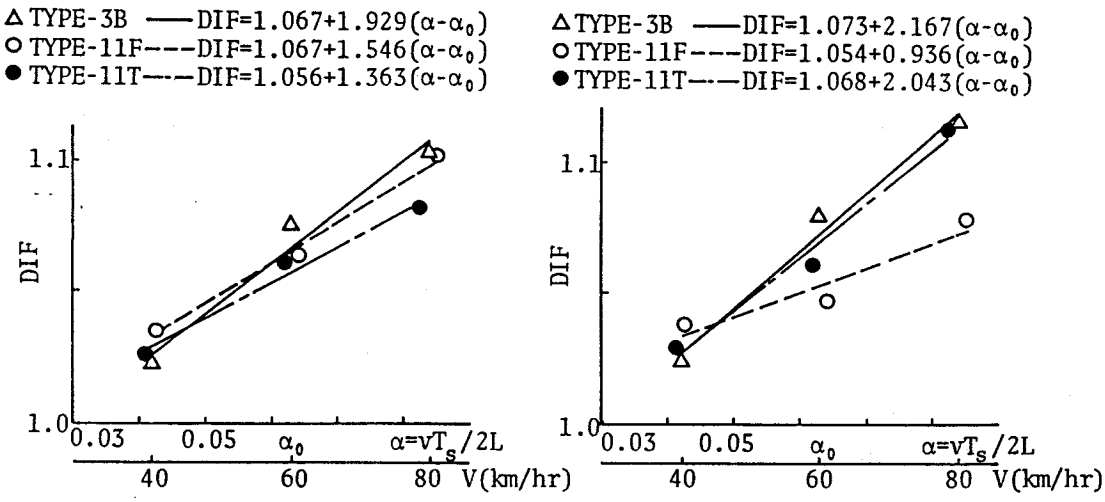
(1) 中央径間中央部



(a) たわみ　　(b) 縁応力度

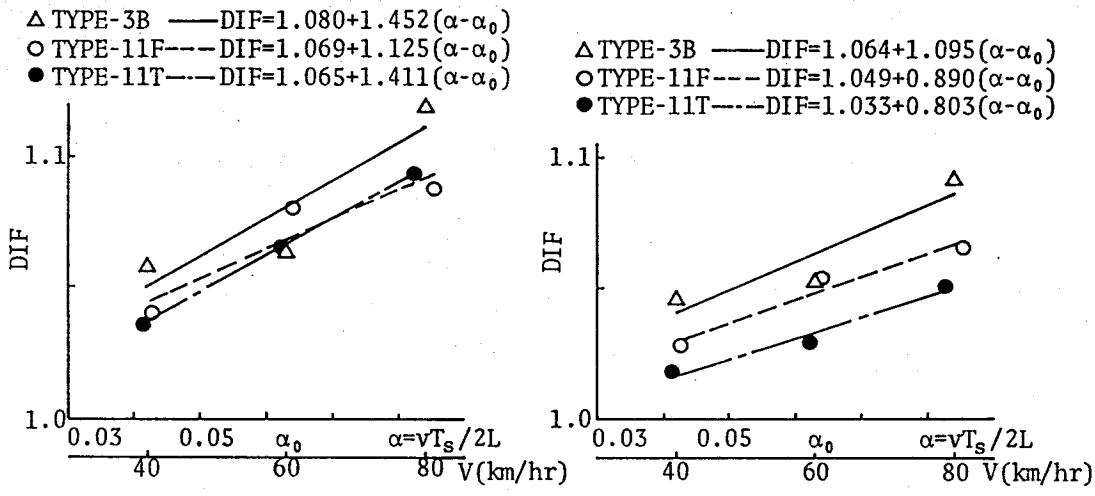
(2) 中央径間中段ケーブル定着部

図－6.10　DIFの速度パラメータによる変化（単一走行荷重）



(a) 曲げモーメント　　(b) 縁応力度

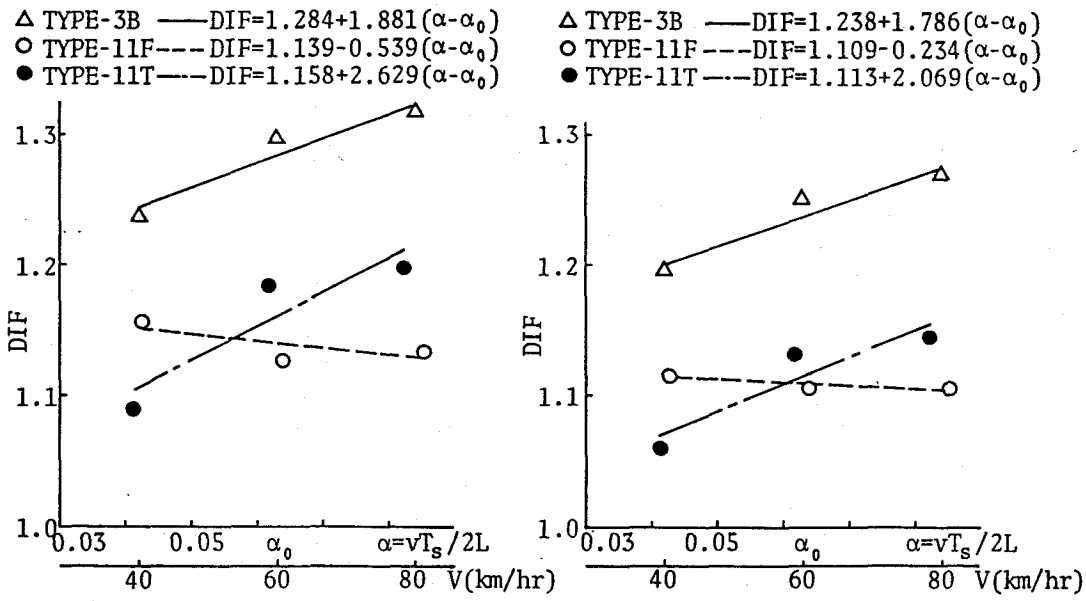
(3) 中間支点部



(a) たわみ　　(b) 縁応力度

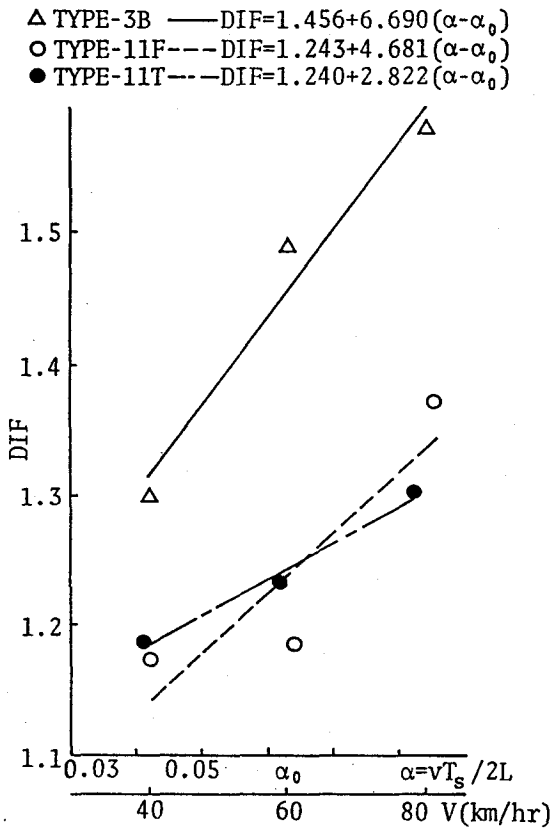
(4) 側径間中段ケーブル定着部

図－6.10　DIFの速度パラメータによる変化（単一走行荷重）



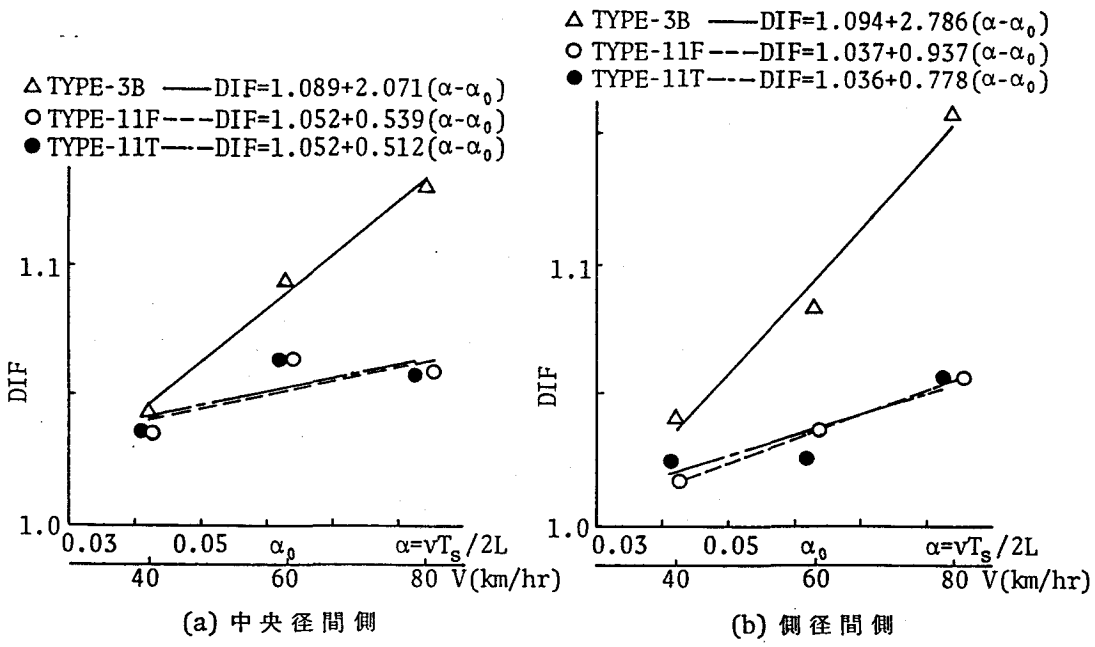
(a) 曲げモーメント　　(b) 縁応力度

(5) 塔の桁接続上部



(6) 塔基部曲げモーメント

図－6.10　DIFの速度パラメータによる変化（単一走行荷重）



(a) 中央径間側　　(b) 側径間側

(7) 中段ケーブル張力

図－6.10　DIFの速度パラメータによる変化（単一走行荷重）

（１）速度パラメーターによるDIF の変化

図－6.10より，一般に，DIF は速度の増加と共に大きくなることが分かる。

（２）着目断面別のDIF の特性

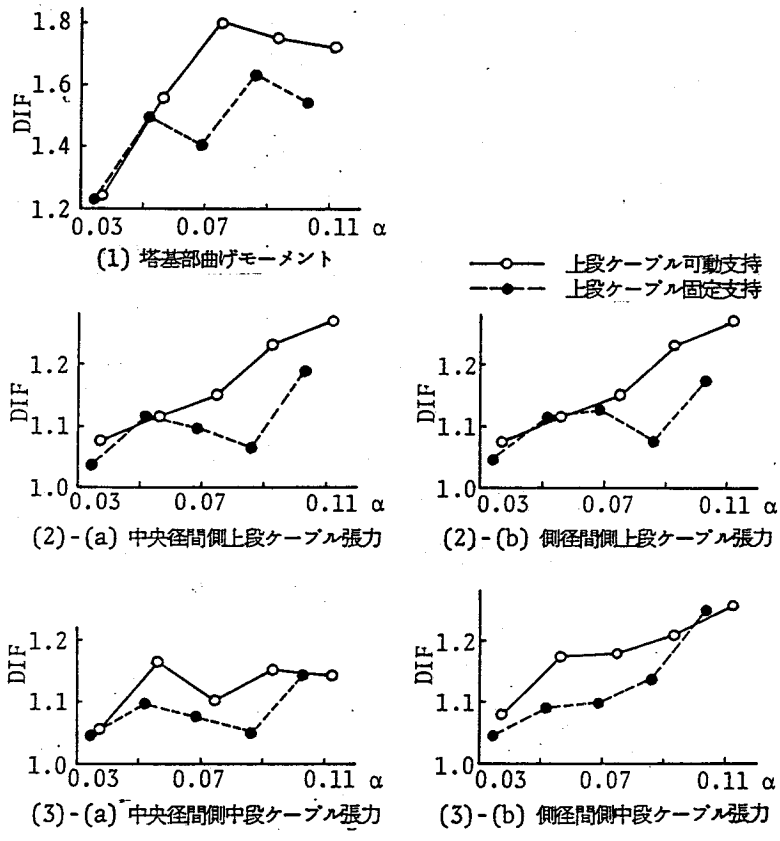
i) 主桁について……図－6.10(1),(2),(4) により，主桁の縁応力度に関するDIF はたわみに関するDIF より小さいことが分かる。また，図－6.10(1)～(4)の(b) より，主桁縁応力度に関するDIF については，その平均値および速度に対する変化率が，中央径間中央部，中央径間中段ケーブル定着部，側径間中段ケーブル定着部，中間支点部の順に大きくなっている。

ii)塔について……図－6.10(5),(6) より，塔における力学量のDIF が主桁およびケーブルのそれらに比べて格段に大きいことが分かる。特に塔基部（節点Ｊ）における曲げモーメントのDIF は最大1.6（TYPE-3Bの場合）に達しており，塔の桁接続上部（節点Ｉ）においても曲げモーメントのDIF は最大1.3（TYPE-3B の場合） を越えている。

iii)ケーブルについて‥‥図－6.10(7) に示す中段ケーブル張力に関するDIF と，図－6.10(2),(4) の(a) に示すそれらのケーブルの定着部における主桁のたわみに関するDIF とを比較する。TYPE-3B においては，前者の中央径間側の値は後者と同程度であるが，TYPE-11F,11Tにおいては，前者の値は後者より若干小さいことが分かる。

（３）構造形式によるDIF の比較

図－6.10(1)～(4)の主桁各断面の力学量のDIF について考察すると，中央径間中段ケーブル定着部のたわみと中間支点部の縁応力度のDIF に関しては，その平均値および速度に対する変化率の構造形式による差異が共に著しい。すなわち，前者においてはTYPE-3B がTYPE-11F,11T より，後者においてはTYPE-3B,11T がTYPE-11F より大きくなっている。また，図－6.10(5)～(7)の塔基部および桁接続上部ならびにケーブル張力については，TYPE-3B におけるDIF の平均値および速度に対する変化率が，TYPE-11F,11Tにおけるそれらよりも大きい。図－6.11(1)～(3)に示すように，TYPE-3A において上段ケーブルの塔上での



図－6.11　上段ケーブル支持条件の差異によるDIFの比較
（TYPE-3A，単一走行荷重）

支持条件を可動または固定にして，単一走行荷重下でDIF を比較すると，塔基部曲げモーメントおよびケーブル張力のDIF は，可動支持の方が大きくなっている。それで，上段ケーブルが可動支持されているTYPE-3B のそれらのDIF が大きくなっていることがうなずかれる。

全般的に，TYPE-11Fと11T を比較すると，ほとんどの断面について各種力学量に関するDIF の差は小さい。それで，次項の連行荷重の場合は，TYPE-3B とTYPE-11Fについてのみ比較検討する。

6.4.6 連行荷重下の動的応答

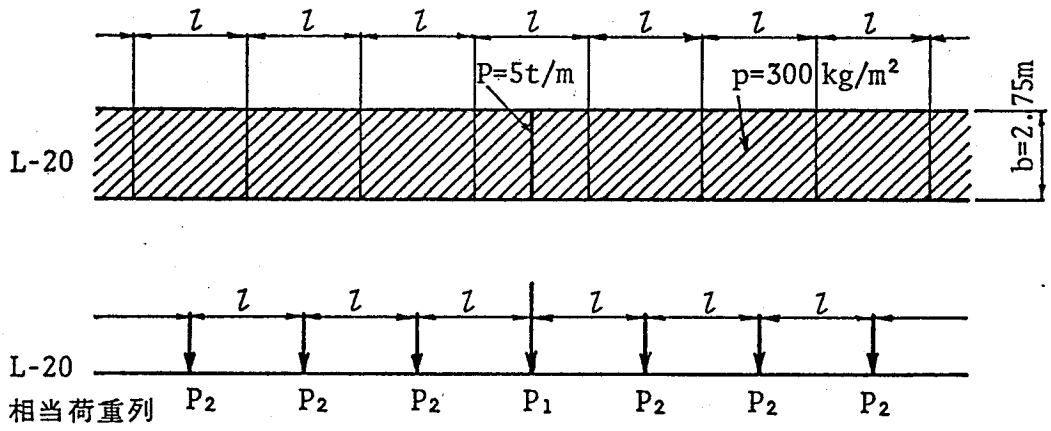
（1）L-20相当荷重列

一般に，衝撃係数は設計活荷重応力度の絶対最大値に対応する動的効果を表すものであるから，設計活荷重強度と等価な荷重強度を有する走行荷重列により動的解析を行うのが実際的である。すなわち，図－6.12に示すように，その車両占有幅と車頭間隔を考慮して，道路橋示方書に定めるL-20活荷重の線荷重と等分布荷重の合力P_1，P_2をもつ等価集中荷重列を作用させる。このようにすると設計活荷重応力度の絶対最大値に対応する動的応力度を調べることができる。そして，走行速度は重量車が連行することを想定して60km/hとする。また，車頭間隔時間が橋の対称１次固有周期に等しいような共振車頭間隔（$\ell = vT_s$）をとるものとする。あらかじめ共振車頭間隔とその前後の車頭間隔を有する場合について比較計算した結果，図－6.13に示すように，１つの例を除いて共振車頭間隔におけるDIF が他の場合より大きくなっている。そこで，安全側の計算を行うために，共振車頭間隔をとることにした。なお，ここで対象とする斜張橋の場合，表－6.10に掲げるように，共振車頭間隔はいずれも交通工学的に走行速度から決められる最小車頭間隔よりも大きく，現実に走行可能な車頭間隔である。

以上により算定された荷重強度P_1，P_2を表－6.11に示す。荷重の固有振動数を3Hz，対数減衰率を0.3 と仮定した。固有振動数については，表－6.12に掲げるダンプトラックの固有振動数実測値の平均値が3.1Hz であること，および本節の６．４．３（２）に述べたように，車の固有振動数の動的増幅率に及ぼす影響がほとんどないことより，上記のように仮定した。なお，わが国における昭和47年の道路車両重量調査[28]において40t 以上の重量車が観測されており，本四設計基準および湾岸道路に架設される橋の設計において

TT-43（トレーラー荷重 43t） が考慮されている。また，図－6.14に示すように，1968年の米国における調査[29] では，トラクター・トレーラーの重量分布がほぼ15t と29t の２つのピークを有する合成正規分布とよく合致している。これらの事実により，わが国において将来共，P_1 クラスの重量車の存在ならびにP_2 クラスの重量車の連行する走行状態は可能性があると考えられる。

安治川斜張橋モデルのTYPE-3B, 11F およびかもめ大橋系モデルのTYPE-2K, 10K を対象として，以上に述べたL-20相当荷重列を1, 3, 5, 7 台連行させ，各着目断面について静的縁応力度の絶対値が最大値となる前後１サイクルにおける動的増分の最大値を静的応力度の絶対値の最大値で割ってDIF を算出した。このようにして得られた主桁および塔の各部縁応力度とケーブル張力に関するDIF の走行荷重台数h による変化の状態を図－6.15および図－6.16に示す。



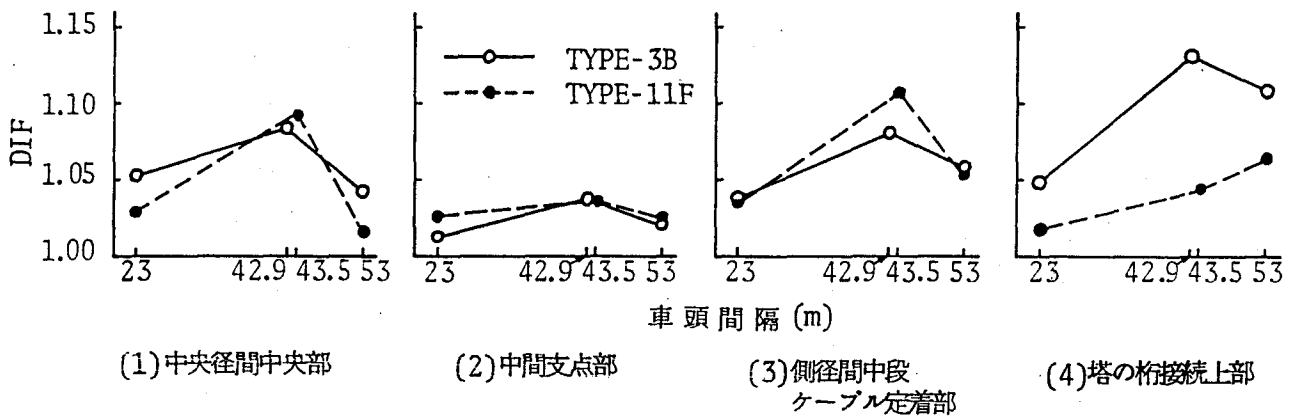
$P_1 = Pb + pbl$　　$l = vT_s$ ； 共振車頭間隔

$P_2 = pbl$

図－6.12 L-20相当荷重列の作成

表－6.10　車頭間隔

速度 V (km/hr)	最小車頭間隔 (m)	共振車頭間隔 (m)			
		TYPE-3B T_s=2.574 sec	TYPE-11F T_s=2.608 sec	TYPE-2K T_s=2.055 sec	TYPE-10K T_s=2.381 sec
60	23.0	42.9	43.5	34.3	39.7



注）車頭間隔　23 m：走行速度60km/hrにおける最小車頭間隔
〃　42.9m：〃　共振車頭間隔 (TYPE-3B)
〃　43.5m：〃　共振車頭間隔 (TYPE-11F)

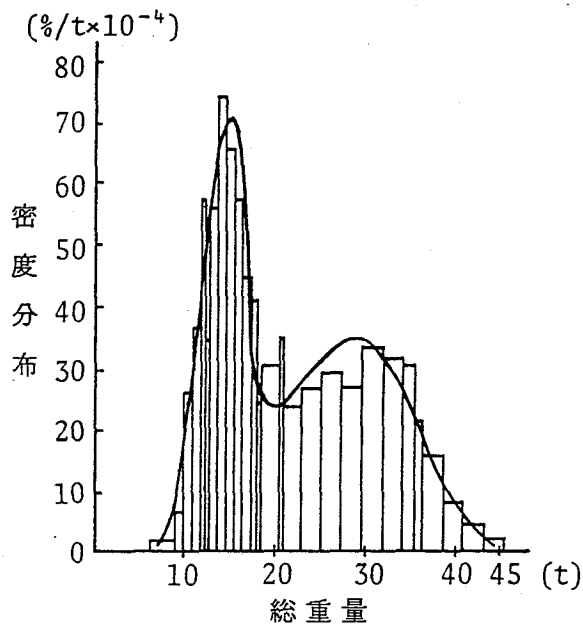
図－6.13　車頭間隔の差異による縁応力度のDIFの比較
（L-20相当荷重列，５台連行，V＝60km／hr）

表－6.11　L-20相当荷重強度

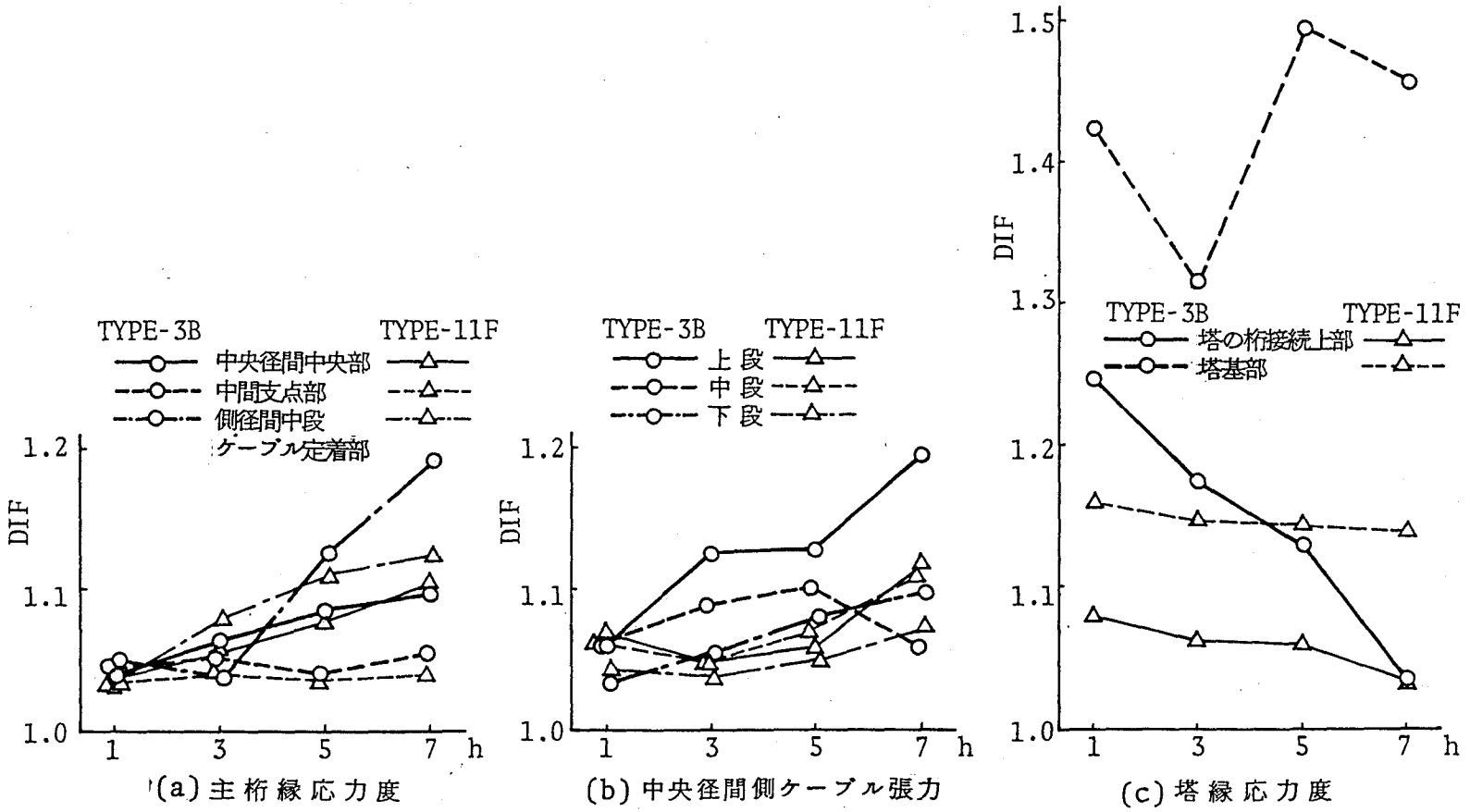
構造モデル	安治川斜張橋モデル		かもめ大橋系モデル	
	TYPE -3B	TYPE -11F	TYPE -2K	TYPE -10K
対称1次固有周期 T_s(sec)	2.574	2.608	2.055	2.381
共振車頭間隔 $l=vT_s$(m) (走行速度 60 km/hr)	42.9	43.5	34.3	39.7
P_1(t)	5050	50.0	45.0	45.0
P_2(t)	36.0	36.0	31.0	31.0

表－6.12　ダンプトラックの固有振動数実測値

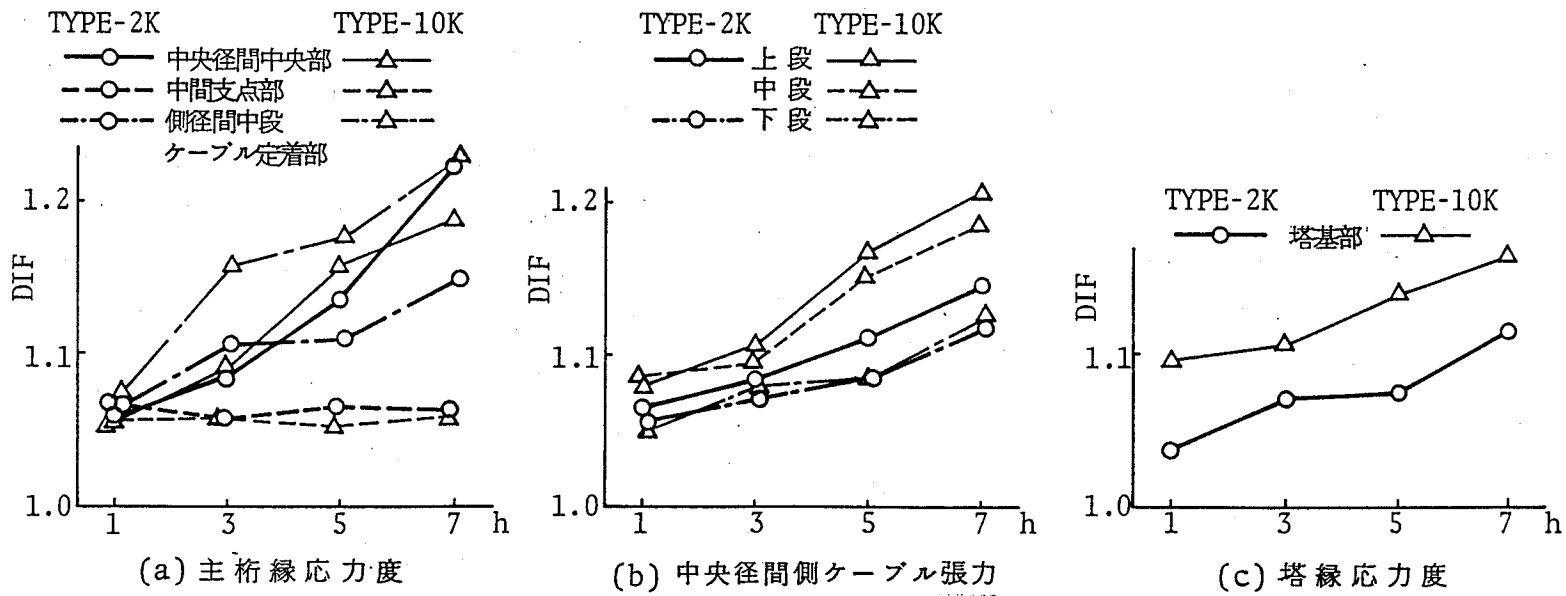
番号	型式	総重量(t)	固有振動数(Hz)	備考
1-1	ふそう 8t車 42年型	16.08	3.1	豊里大橋振動実験に使用[5]
1-2	ふそう 8t車 44年型	15.60	3.0	
2-1	ニッサンディーゼル CW 50 HD	21.32	3.4	かもめ大橋振動実験に使用[26]
2-2	いすゞ SPZ 450 D	22.20	3.4	
2-3	ふそう T 931 DD	22.20	3.2	
2-4	いすゞ SRZ 450 D	20.66	3.0	
3-1	ニッサンディーゼル CD 50 KD	28.72	3.0	六甲大橋振動実験に使用
3-2	ふそう FU 113 KJ	28.58	3.3	
3-3	ニッサンディーゼル CD 50 KD	29.56	2.9	
平均値			3.1	



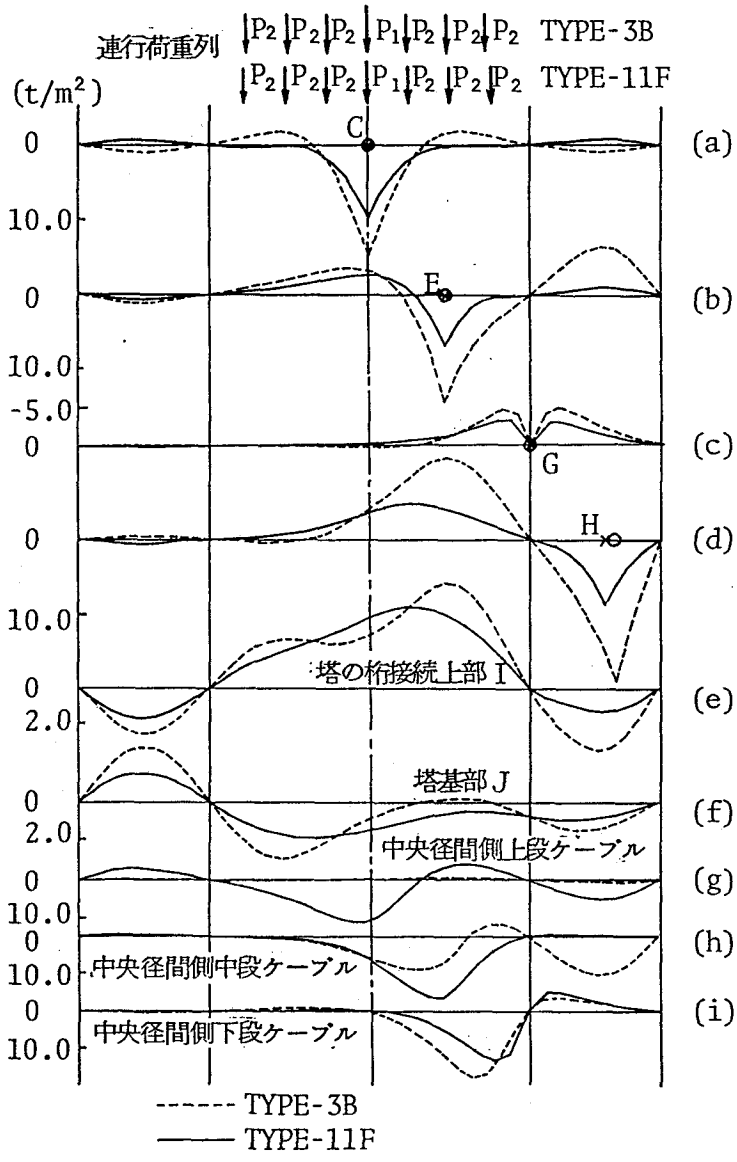
図－6.14　トラクター・トレーラー車両総重量分布[29]（米国オハイオ州，1968年）



図－6.15　荷重台数hによるDIFの変化（TYPE-3B, 11F, V=60km／hr, $\ell = vT_s$）



図－6.16　荷重台数hによるDIFの変化（TYPE-2K, 10K, V=60km／hr, $\ell = vT_s$）



図－6.17　応力度影響線（TYPE-3B，11F）

（２）荷重台数によるDIF の変化

i) TYPE-3B, 11F について‥‥図－6.15より，TYPE-3B, 11Fについて，荷重台数によるDIF の変化を調べる。主桁断面における動的応力度は，共振現象により荷重台数と共に増大する。一方，静的応力度については，図－6.17に示すように断面ごとに影響線の形状が相違するので，台数と共に増加する度合に差異がある。すなわち，中間支点部では荷重台数と共に静的応力度は動的応力度と同程度に増加する。それに反して，その他の断面においては，荷重台数による静的応力度の増加率はそれ程ではない。以上の結果，図－6.15(a) に示すように，中間支点部におけるDIF は荷重台数にかかわらずほぼ一定であり，その他の主桁断面においては，荷重台数と共にDIF は漸増する。

ケーブル張力のDIF については，中間支点部以外の主桁断面の場合と同じ理由により，荷重台数と共に増大する傾向がある。

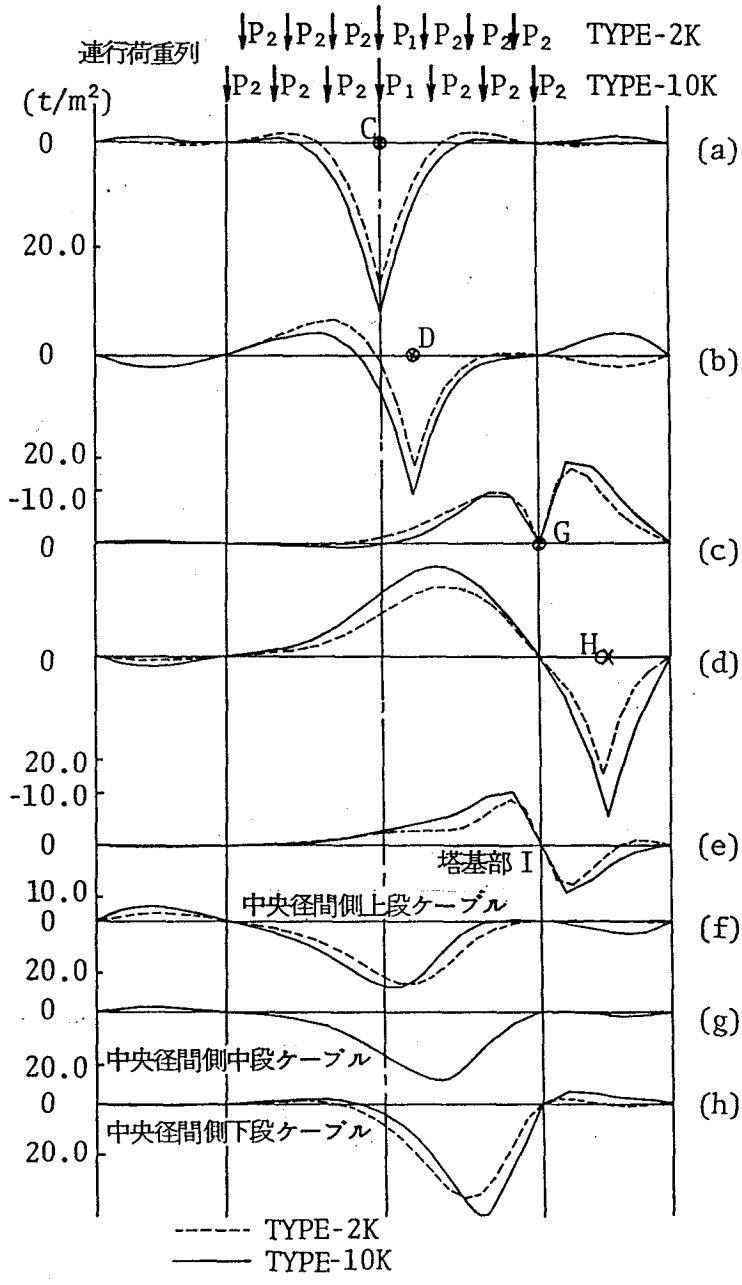
また，図－6.15(c) に示すように，塔の桁接続上部のDIF は荷重台数の増加に伴って減少する。TYPE-11Fの塔基部については，荷重台数の増加に伴ってごくわずかに減少する。その理由は，荷重台数の増加に伴い動的応力度が増大する以上に静的応力度が増大するためである。TYPE-3B の塔基部縁応力度のDIF は荷重台数により僅かに増大する傾向がみられる。

ii) TYPE-2K, 10K について‥‥‥‥‥図－6.16より，TYPE-2K, 10K共に，主桁各断面の縁応力度およびケーブル張力に関するDIF の荷重台数による変化の傾向は，TYPE-3B, 11F の場合と同様であることが認められる。 また， 塔基部における縁応力度のDIF は，TYPE-3B, 11F の場合と異なり， 共に荷重台数の増加に伴い漸増する。 その理由は，図－6.18(e) に示すようにTYPE-2K, 10K の塔基部縁応力度の影響線が，図－6.17(e), (f) に示すTYPE-3B, 11F のそれらと異なり，荷重台数による静的応力度の増加率があまり大きくならないためである。

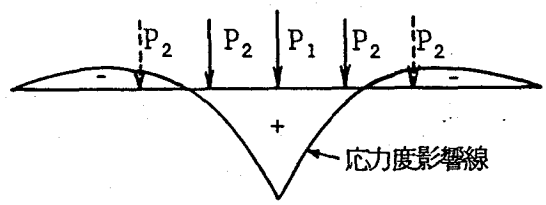
（３）塔の縁応力度に関するDIF の特徴

図－6.15(c) より，TYPE-3B, 11F 共に，連行荷重の場合についても，塔基部の縁応力度に関するDIF は塔の桁接続上部のそれより著しく大きくなる。また，それらを構造形式別に比較すると，TYPE-3B におけるDIF の方がTYPE-11Fにおけるよりもかなり大きくなる。

塔形式の異なるTYPE-3B, 11F の場合とTYPE-2K, 10K の場合とでは，塔縁応力度のDIF の



図－6.18　応力度影響線（TYPE-2K, 10K）



5台連行の場合，5台の内3台のみ載荷

図－6.19　L-20相当荷重列

表－6.13　L-20相当荷重列（V=60km／hr）によるDIFと道路橋示方書の規定を準用した場合との比較（TYPE-3B，11F）

断面		TYPE	DIF	道路橋示方書 表1.8.6-7 多径間連続桁	道路橋示方書 表1.8.6-7 3径間連続桁
主桁	C	3B 11F	1.062 ③ 1.102 ⑦	1.171 1.280	1.051
	D	3B 11F	1.079 ③ 1.107 ⑦	1.188 1.296	
	E	3B 11F	1.085 ③ 1.035 ①	1.209 1.314	
	F	3B 11F	1.049 ① 1.095 ⑦	1.209 1.293	
	G	3B 11F	1.054 ⑦ 1.039 ⑦	1.209 1.275	1.069
	H	3B 11F	1.038 ③ 1.123 ⑦	1.209 1.324	1.105
塔	I	3B 11F	1.035 ⑦ 1.034 ⑦		
	J	3B 11F	1.494 ⑤ 1.141 ⑦		
ケーブル	T_{CU}	3B 11F	1.128 ⑤ 1.059 ⑤	1.188 1.296	
	T_{CM}	3B 11F	1.059 ⑦ 1.109 ⑦	1.209 1.314	
	T_{CL}	3B 11F	1.055 ③ 1.037 ③	1.209 1.293	
	T_{SU}	3B 11F	1.128 ⑤ 1.110 ⑦	1.188 1.324	
	T_{SM}	3B 11F	1.099 ⑤ 1.053 ⑦	1.209 1.324	
	T_{SL}	3B 11F	1.058 ③ 1.054 ③	1.209 1.293	

注1）断面符号は図－6.3(1)を参照
注2）○内の数字は走行台数を示す．

表－6.14　L-20相当荷重列（V=60km／hr）によるDIFと道路橋示方書の規定を準用した場合との比較（TYPE-2K，10K）

断面		TYPE	DIF	道路橋示方書，表 1.8.6-7 多径間連続桁	道路橋示方書，表 1.8.6-7 3径間連続桁
主桁	C	2K 10K	1.084 ③ 1.091 ③	1.204 1.204	1.069
	D	2K 10K	1.059 ③ 1.066 ③	1.204 1.260	
	E	10K	1.049 ①	1.357	
	F	2K 10K	1.048 ① 1.053 ①	1.204 1.270	
	G	2K 10K	1.063 ⑦ 1.059 ⑦	1.204 1.220	1.091
	H	2K 10K	1.109 ⑤ 1.177 ⑤	1.204 1.357	1.133
塔	I	2K 10K	1.114 ⑦ 1.140 ⑤		
ケーブル	T_{CU}	2K 10K	1.144 ⑦ 1.206 ⑦	1.204 1.260	
	T_{CM}	10K	1.184 ⑦	1.357	
	T_{CL}	2K 10K	1.117 ⑦ 1.080 ③	1.204 1.270	
	T_{SU}	2K 10K	1.118 ⑦ 1.161 ⑤	1.263 1.357	
	T_{SM}	10K	1.067 ⑦	1.357	
	T_{SL}	2K 10K	1.103 ⑦ 1.092 ③	1.204 1.274	

注1）断面符号は図－6.3(2)を参照
注2）○内の数字は走行台数を示す．

荷重台数による変化の傾向が逆になる。すなわち，前者では台数と共に減少し，後者では台数と共に増大する。

（４）ケーブル段数によるDIF の比較

図－6.16により，TYPE-2K,10K についてケーブル段数によるDIF を比較する。主桁の側径間中段ケーブル定着部断面と塔基部断面の縁応力度および中央径間側上段ケーブルの張力に関するDIF は，TYPE-10Kの方がTYPE-2K の場合よりも大きくなる。その他の断面におけるDIF は両者における差異があまりない。

特に，ケーブル段数による塔のDIF の差異に関しては，かもめ大橋系モデルと安治川斜張橋モデルの間で傾向が逆になっている。すなわち，前者では多段ケーブルの場合が大きく，後者では３段ケーブルの場合の方が大きい。これは，主桁の支間長および塔の構造形式の差異によるものであると考えられる。

６．４．７　L-20相当設計荷重列による動的増幅率

設計においては静的応力度の絶対最大値が支配的であるので，L-20相当荷重列1,3,5,7台の載荷状態の内，各断面に関して静的応力度の絶対最大値に対応するDIF を計算した。たとえば，図－6.19に示すように 5台連行荷重列を走行させた場合，影響線の同符号の範囲に載る台数が 3台のときは， 5台連行荷重列の方が 3台連行荷重列の場合よりも絶対最大静的応力度が小さくなり，除外されることになる。このような載荷状態が実状の設計荷重に対応するものである。以上のDIF をTYPE-3B,11F およびTYPE-2K,10K についてそれぞれ表－6.13および6.14に示す。

（１）断面別DIF の比較

i) TYPE-3B, 11F について・・・・・・・・表－6.13より，ケーブル張力のDIF は，上段の方が下段よりも大きい傾向がある。塔の桁接続上部におけるDIF は主桁およびケーブルのDIF より小さく，TYPE-3B, 11F 共に1.04程度である。また，塔基部におけるDIF は，TYPE-3B で1.50に達し，TYPE-11Fでも1.15に達していて，主桁およびケーブルのDIF よりかなり大きくなっている。ただし，本モデルにおいては図－6.3(1)に示すように，塔基部が桁下47m の位置にあるので，塔基部断面の設計に関しては地震力が支配的であった。

ii) TYPE-2K, 10K について・・・・・・・表－6.14より，主桁の縁応力度のDIFについては，側径間中段ケーブル定着部（節点Ｈ）におけるDIF が他の主桁断面における値よりも若干大きく，他の主桁断面間では顕著な差はみられない。塔基部の縁応力度のDIF はケーブル張力のDIF と同程度であり，主桁一般断面の縁応力度のDIF より幾分大き目である。ケーブルにおけるDIF はTYPE-3B, 11F と同様に上段の方が下段よりも大きい傾向がある。

（２）構造形式別DIF の比較

表－6.13により，TYPE-3B, 11F について同一断面におけるDIF を互いに比較すると，主桁においては，断面Ｅ，Ｇ を除いて，TYPE-11FのDIF の方がTYPE-3B におけるよりも大きくなっている。この理由は，影響線の形状がTYPE-3B と11F とで異なり，絶対最大静的応力度となる載荷台数はTYPE-11Fの方が多くなる。そのために共振現象が大きくなり，主桁の動的応力度の増加率が静的応力度の増加率を上回るものである。

各ケーブルおよび塔基部について両形式のDIF をそれぞれ比較してみると，中央径間側中段ケーブルを除いて，逆にTYPE-3B のDIF の方がTYPE-11Fにおけるよりも若干大きくなっている。この理由は，TYPE-3A において上段ケーブルを可動支持または固定支持にして，単一走行荷重下でDIF を比較した結果より判断して，上段ケーブルが可動支持されているTYPE-3B のDIF が大きくなったものと思われる。

（３）ケーブル段数によるDIF の比較

表－6.14により，TYPE-2K, 10K についてケーブル段数によるDIF を比較すると，主桁，

塔およびケーブルを通して全般的に，TYPE-10KのDIF のほうがTYPE-2K におけるよりも僅かに大きくなっている。

（４）単独連続桁としての衝撃係数と理論値との比較

斜張橋を塔，ケーブルを無視した 3径間連続桁，あるいはケーブル定着点を剛支点と仮定した多径間連続桁とみなして，道路橋示方書・表1.8.6～7[30] を準用して算定した衝撃係数とL-20相当設計荷重列によるDIF との比較を行う。

i）主桁について……表－6.13，6.14より，主桁断面におけるDIF は，TYPE-3B,11F については1.035～1.123の範囲にあり，TYPE-2K,10K については 1.048～1.177 の範囲にある。これらのDIF の計算値は，３径間連続桁として算定された（1+衝撃係数）を越える断面もあるが，その差はたかだか 5.6%である。また，ケーブル定着点を剛支点と仮定した多径間連続桁として算定された（1+衝撃係数）は，動的解析によるDIF の計算値と比較して遙かに大きく，その最大誤差31% に達する。

ii）ケーブルについて……表－6.13，6.14より明らかなように，TYPE-3B,11F とTYPE-2K,10K 共に示方書に規定される多径間連続桁の剛支点として算定された（1+衝撃係数）はDIF よりも大きく，TYPE-3B について6.0～15.4%の差，TYPE-11F について20.5～ 27.1%の差があり，TYPE-2K について6.0～14.5%の差，TYPE-10K について5.4～29.0%の差のあることが判明した。

6.5 結 言

本章においては，斜張橋の衝撃係数についての資料を提供するために，自動車走行時の動的応答解析ならびに現地振動実験を行った。対象とした構造形式は，高さ約110mの塔が基部から47m の位置で主桁を支持し，径間長140+340+140mで３段ケーブル逆台形箱桁形式（TYPE-3A,3Si),3Sii),3B），11段ケーブル扁平箱桁形式（TYPE-11F），11段ケーブルトラス主構形式（TYPE-11T）のもの，および中間支点上において塔が逆台形箱型の主桁に剛結され，径間長 100+240+100m で２段ケーブル形式（TYPE-2K）と10段ケーブル形式（TYPE-10K）のものである。

調査事項およびその結果は次の通りである。

（1） かもめ大橋における現地振動実験により実測された固有振動数と動的増幅率DIF は，

それぞれ解析値と良い一致を示し，本理論解析法の妥当性が検証された。

（2） ケーブルの局所的な横振動およびプレストレスが走行荷重下の全構造系の動的応答に及ぼす影響はほとんどない。

（3） 単一走行荷重の場合について，自動車荷重の重量，固有振動数および走行速度のパラメーターによる橋の各種力学量に関するDIF の変化を調べた。

（4） 単一走行荷重（16t） の場合とL-20相当荷重列（1～7台）を共振車頭間隔（橋の対称１次固有周期に相当する車頭間隔）で走行させた場合について，荷重台数別，着目断面別，構造形式別，ケーブル段数別のDIF の特性を調べた。

（5） L-20相当設計荷重列を走行させ，TYPE-3B ,11FおよびTYPE-2K,10K について調べた結果，次のようなことが明らかになった。

i） 断面別DIF の比較・・・・・・・・・TYPE-2K,10Kについては，主桁側径間中段ケーブル定着部縁応力度のDIF が他の主桁断面における値より大きくなる。ケーブル張力のDIF は，いずれの形式についても上段の方が下段よりも大きい傾向がある。塔基部から桁下までに相当の長さを有する構造形式（TYPE-3B,11F） について，塔の桁接続上部縁応力度のDIF は共に1.04程度であり，主桁およびケーブルのDIF より小さいが，塔基部縁応力度のDIF はそれらよりもかなり大きく，TYPE-3B で1.50に達し，TYPE-11Fでも1.15に達している。それに対して，塔基部が主桁に剛結されている構造形式（TYPE-2K,10K） について，塔基部縁応力度のDIF はケーブル張力のDIF と同程度であり，主桁一般断面の縁応力度のDIF より幾分大きめである。

ii） 構造形式別DIF の比較・・・・・・・・・・主桁においては，断面E,Gを除いて，TYPE-11F のDIF の方がTYPE-3B における値よりも大きくなる。この理由は，影響線の形状がTYPE- 3B と11F とで異なり，絶対最大静的応力度となる載荷台数は TYPE-11Fの方が多くなる。そのために共振現象が大きくなり，主桁の動的応力度の増加率が静的応力度の増加率を上回るものである。中央径間側中段ケーブルを除く各ケーブルおよび塔基部においては，逆にTYPE-3B のDIF の方がTYPE-11Fにおけるよりも大きくなっている。この理由は，TYPE-3A において上段ケーブルを可動支持または固定支持にして，単一走行荷重下でDIF を比較した結果より判断して，上段ケーブルが可動支持されている TYPE-3B のDIF が大きくなったものと思われる。

iii） ケーブル段数によるDIF の比較・・・・・・・・・・全般的に，TYPE-10KのDIFの方がTYPE-2K の場合よりも僅かに大きい。

iv) 単独連続桁としての衝撃係数と理論値の比較……道路橋示方書の算定公式を準用して計算された（1+衝撃係数）とDIF とを比較検討する。主桁におけるDIF は，４形式共に，３径間連続桁として算定された（1+衝撃係数）を越える断面もあるが，その差はたかだか 5.6%である。また，多径間連続桁として算定された（1+衝撃係数）はDIF の計算値と比較して最大誤差31% 大きい。

一方，ケーブルにおいて，多径間連続桁の剛支点として算定された（1+衝撃係数）はDIF より最大誤差29% 大きい。

参考文献（第６章）

1) 伊藤　学・島田静雄・熊沢周明：勝瀬橋を対象とした斜張桁橋の模型実験並びに載荷試験について，土木学会誌，Vol.45，No.11，pp.9-14，1960.11.

2) 神戸市港湾局・田原保二・伊藤鉱一・市場　悟・松井友二・中野雄太・山川修三：摩耶大橋（斜張橋）の設計および現地実験，三菱重工技報，Vol.4，No.3，pp.63-75，1967.

3) 大久保忠良・榎波義幸：尾道大橋振動実験報告書，土木研究所資料，No.376，1968.3.

4) 牛尾正之・植田利夫：尾道大橋の走行荷重による動的応答について，日立造船技報，Vol.30，No.2，pp.28-33，1969.5.

5) 小松定夫・小林紘士：豊里大橋の振動特性について，土木学会第25回年次学術講演会講演集，I-171，pp.497-498，1970.11.

6) 近藤和夫・井上洋里・佐伯章美・松川昭夫・伊藤鉱一・高山弘美：豊里大橋，三菱重工技報，Vol.7，No.7，pp.160-171，1970.12.

7) 矢作　枢・大野惣平・柴田定昭：首都高速荒川斜張橋の振動実験，土木学会第26回年次学術講演会講演集，I-235，pp.691-694，1971.10.

8) 高橋陽一・戸島英之・新山　惇・三浦　智：石狩河口橋の設計－特に３径間連続斜張橋について－，土木技術，Vol.26，No.4，pp.41-54，1971.4.

9) 赤尾親助・栗田章光・加藤隆夫・松川昭夫・中西正昭：大和橋の設計と施工，橋梁と基礎，Vol.9，No.8，pp.23-29，1975.8.

10) Leonhardt,F. und Andrä,W.: Fußgängersteg über die Schillerstraße in Stuttgart, Die Bautechnik, 39Jg., H.4, S.110-116, April 1962.

11) Aschenberg,H. und Freudenberg,G.: Die Brücke über die Norderelbe im Zuge der Bundesautobahn Südliche Umgehung Hamburg, Teil-Ⅲ, Der Stahlbau, 32Jg., H.9, S.281-287, Sept. 1963.

12) Havemann, H. K.: Spannungs-und Schwingungsmessungen an der Brücke über die Norderelbe im Zuge der Bundesautobahn Südliche Umgehung Hamburg, Der Stahlbau, 33Jg., H.10, S.289-297, Okt. 1964.
13) Pflüger, A.: Schwingungsverhalten der Schwebebahnbrücke Alter Markt Wuppertal, Der Stahlbau, 38Jg., H.5, S.140-144, Mai 1969.
14) Goschy, B.: Dynamic of cable-stayed pipe bridges, Acier-Stahl-Steel, 26, pp.277-282, June, 1961.
15) 大久保忠良・榎波義幸：斜張橋の固有振動解析，土木技術資料，Vol.9, No.8, pp.34-39, 1967.8.
16) 鳥居信一：斜張橋の解析，石川島播磨技報，別冊第1号，pp.62-69, 1968.8.
17) Baron, F. and Lien, S.-Y.: Analytical studies of a cable stayed girder bridge, Computers & Structures, Vol.3, pp.443-465, 1973.
18) Kajita, T. and Chang, Y. K.: Finite element analysis of cable-stayed bridges, IABSE Publications, 33-II, pp.101-112, 1973.
19) Morris, N.-F.: Dynamic analysis of cable-stiffened structures, J. of Struct. Div., Proc. of ASCE, Vol.100., No.ST5, pp.971-981, May, 1974.
20) 山田善一・小堀為雄：ランダム自動車荷重列による道路橋の衝撃に関する研究，土木学会論文集，No.119, pp.1-9, 1965.7.
21) 小西一郎編：鋼橋，設計編II，5章　斜張橋，pp.893-1023, 丸善，1976.1.
22) 土木学会鋼構造委員会・鋼構造進歩調査小委員会編：斜張橋資料集成，土木学会，1976.2.
23) Agabein, M. E.: The effect of various damping assumptions on the dynamic response of structures, Bulletin of International Institute of Seismology and Earthquake Engineering, Vol.8, pp.217-236, 1971.
24) 伊藤　学・片山恒雄：橋梁構造の振動減衰，土木学会論文集，No.117, pp.12-22, 1965.5.
25) Newmark, N. M.: A method of computation for structural dynamics, J. of Engg. Mech. Div., Proc. of ASCE, Vol.85, No.EM3, pp.67-94, July, 1959.
26) 小松定夫・石岡英男・川谷充郎：マルテイ・ケーブル斜張橋（かもめ大橋）の現地実験について，昭和51年度土木学会関西支部年次学術講演会講演概要，I-66, 1976.5.
27) 笹戸松二・江見　晋・北沢正彦：長大斜張橋の構造特性と耐風安定性(上)・(中)・(下)，橋梁と基礎，Vol.9, pp.14-20, 30-40, 47, 32-41, 1975.7, 8, 10.
28) 国広哲男・朝倉　肇：設計活荷重と橋梁の耐荷力に関する研究，土木研究所資料，No.785, 1972.11.
29) Garson, R. C., Goble, G. G. and Moses, F.: Traffic loading and its analytical and measured description, Safety and Reliability of Metal Structures (Proc. Special Conf.), ASCE, pp.27-54, Nov. 1972.

30) 日本道路協会：道路橋示方書・同解説，Ⅰ共通編，1.8.5 衝撃，pp.17-20，1973.2.
31) 山田善一：橋梁の衝撃，土木構造物の振動と安全性，土木学会関西支部・中部支部，pp.91-102，1966.5.
32) 伊藤　学：走行車両に対する橋梁の動的応答，橋梁の動的応答，日本鋼構造協会，pp.377-401，1969.12.
33) Komatsu,S. and Kawatani,M.: Dynamic characteristics of cable-stayed girder bridges, Technology Reports of the Osaka University, Vol.26, No.1305, pp.329-342, March, 1976.
34) 小松定夫・川谷充郎・根岸嘉和：斜張橋の走行荷重による動的増幅率について，土木学会第30回年次学術講演会講演概要集，I-238，pp.492-493，1975.10.
35) 小松定夫・川谷充郎・根岸嘉和：各種形式の斜張橋の衝撃係数について，昭和51年度土木学会関西支部年次学術講演会講演概要，I-62，1976.5.
36) 小松定夫・川谷充郎：斜張橋の自動車走行による動的応答と衝撃係数に関する研究，土木学会論文報告集，第 275号，pp.13-28，1978.7.

第７章　結　論

本論文においては，道路橋の走行荷重による動的応答の評価のために，主に理論解析を行った。解析手法および解析モデルの妥当性の確認のために実橋における現地振動実験を行っている。対象とする橋梁形式は，桁橋と斜張橋である。桁橋の走行荷重による動的応答に大きな影響を及ぼす要因として，橋面上の不規則な路面凹凸に着目する。路面凹凸測定のための光学式路面プロフィルメータを試作し，それを用いて実測された路面凹凸をパワースペクトルにより評価した。路面凹凸を有する橋梁の走行荷重による動的応答は，橋梁と走行荷重の非定常連成不規則振動となり，本研究において，不規則振動論に基づく新たな解析法を定式化した。

斜張橋は，主桁をケーブルにより弾性支持した構造形式であり，主桁，塔およびケーブルの各要素の衝撃係数について不明な点が残されている。共振車頭間隔で連行する荷重列による斜張橋の動的応答解析結果に基づき衝撃係数について考察した。

各章において明らかにされた事項を以下にまとめる。

第１章は序論として次に列挙する事項を扱った。

(1-1)　橋梁の走行荷重による動的応答に関する研究の意義を説き，それを設計に反映するための衝撃係数のこれまでの変遷と外国における状況を概観した。

(1-2)　橋梁の走行荷重下の動的応答の確率論的解析および不規則振動解析の過去の研究を調査して本研究の位置付けを行った。

第２章では，道路橋の路面凹凸を測定するためのプロフィルメータの試作および路面凹凸のパワースペクトル密度について扱った。

(2-1)　レーザー光線による非接触型変位計を４個用いた光学式路面プロフィルメータを試作した。

(2-2)　阪神高速道路において，本プロフィルメータにより路面凹凸を測定した。その特性をパワースペクトル密度の近似関数 $S_{z_0}(\Omega)=\alpha/(\Omega^n+\beta^n)$ の各パラメータにより評価し，各パラメータ値の範囲を決めた。

第３章では，道路橋の走行荷重下の動的応答について理論解析ならびに現地実験について述べた。

(3-1)　理論解析において，橋の曲げ振動方程式に基づく定式化のみならず，荷重の偏心

走行による動的応答解析のために，曲げねじり連成振動方程式に基づく定式化を行った。このとき，走行荷重の解析モデルとして，動的応答に大きな影響を及ぼす大型ダンプトラックを適切にモデル化できるように，前輪１軸・後輪２軸の２自由度振動系モデルを用いた。

(3-2) 現地走行実験を行った橋梁において，３ｍプロフィルメータと３ｍごとの水準測量を併用し，水準線を基準とした路面凹凸を得ることができた。

(3-3) 走行実験において，試験車が橋を出た後の減衰自由振動により橋の曲げ１次固有振動数および対数減衰率が求められた。本橋は非合成プレートガーダー橋であるが，床版は合成作用により橋の剛性に寄与するものである。この床版の合成効果は鋼とコンクリートのヤング係数比ｎによって定量的に評価するものとし，橋の曲げ１次固有振動数の計算値が実験値に近くなるようにｎ値を定め，橋の剛性を算出した。

(3-4) 試験車の静的偏心載荷によるスパン中央におけるたわみおよびひずみの実験値は，解析値とよく一致しており，ｎ値を仮定して算出した断面諸量は妥当であると考えられた。

(3-5) 試験車走行による主桁の動的たわみ曲線の実測値を解析値と比較すると曲げねじり振動を考慮した解析値は，曲げのみを考慮した場合よりも実験値に良く合うことが分かった。

(3-6) 動的増幅率DIF の実験値と解析値との比較より，走行荷重を後輪２軸まで考慮した２自由度系にモデル化すると，他の簡易モデルを用いた場合よりもよく実験値に一致し，本解析モデルの妥当性が示された。また，路面平滑と仮定した場合のDIF の解析値は，実験値および路面凹凸を考慮した場合よりもかなり小さくなり，走行荷重下の単純桁橋の動的応答に及ぼす路面凹凸の影響を無視し得ないことが分かった。曲げ振動のみを考慮した解析によるDIF は，曲げねじり連成振動によるDIF に近い値となることが分かった。

第４章では，単純桁橋の走行荷重による不規則振動解析の定式化と数値計算を行った。

(4-1) 路面凹凸を有する単純桁橋の走行荷重による非定常連成不規則振動解析の定式化を行った。走行荷重として，前輪１軸・後輪２軸の２自由度振動系モデルの連行までを解析できる。

(4-2) 本解析法による２乗平均値応答は，他の解析法による結果と一致し，本解析法の妥当性が確認できた。

(4-3) 路面凹凸パワースペクトル密度として，実測路面凹凸から計算されたパワースペクトル密度を用いた場合と，$S_{z_0}(\Omega)=A/(\Omega^2+a^2)$にモデル化したパワースペクトル密度を用いた場合の２乗平均値応答の比較により，不規則振動解析に用いる路面凹凸パワースペクトル密度のモデル化に注意を要することを明らかにした。

(4-4) 走行車両を前輪１軸・後輪２軸の２自由度系としてモデル化した場合は，１自由度系モデルの場合と比較して２乗平均値応答がかなり小さくなった。単純桁橋の動的応答を考える場合，大型トラックの軸数に合わせて走行車両を２自由度系にモデル化する必要のあることを明らかにした。

(4-5) たわみの２乗平均値応答より算出される衝撃係数の，路面凹凸パワースペクトル密度関数 $S_{z_0}(\Omega)=A/(\Omega^2+a^2)$ の各パラメータα，n，βによる変化をみれば，n値の動的応答に与える影響が大きく，α値の大小だけで路面凹凸の良否を判断することは難しいことが分かる。また，β値が0.03c/m 以下ではβ値の衝撃係数に与える影響も大きく無視できない。

(4-6) 橋梁の動的応答が大きくなるような路面凹凸パワースペクトル密度のパラメータ値の組合せを$\alpha=3.0\times10^{-3}\,cm^2/(m/c)$，n=2.5，$\beta=0.02c/m$ とした。

(4-7) 支間長による衝撃係数の差異を調べると，Ｉ桁 35m,40m橋において解析値は，道路橋示方書の衝撃係数より大きくなっている。それらの場合，（静たわみ）＋（たわみの動的成分）の値は，道路橋示方書の衝撃係数を用いたときの値よりも小さくなった。通常の整備されている路面の場合，道路橋示方書の衝撃係数は安全側となることが分かった。

第５章では，前章の不規則振動解析法を連続桁橋に拡張し，数値計算を行った。

(5-1) 単純桁橋ならびに２径間および３径間連続桁橋の実橋構造諸元調査に基づき，橋梁の解析モデルを作成した。

(5-2) 本解析結果をモンテカルロ法によるシミュレーション解析結果と比較し，本解析法の妥当性を確認した。

(5-3) 実橋の断面変化に則した変断面桁モデルを用いた場合の不規則振動解析による２乗平均値応答結果は，等価断面桁モデルによる解析結果と20%以内の差異であった。

(5-4) 単一車両走行の場合に，たわみ応答が曲げモーメントに比べて約1.17倍の値となり，連行車両の場合は，両者の差異が小さくなり約1.02倍となった。

(5-5) 径間長および固有振動数の差異による応答値の変化を調べると，径間中央部と中

間支点上での応答特性は異なっており，中間支点上での応答は車両の固有振動数と共振して大きくなった。

第６章では，斜張橋の衝撃係数についての資料を提供するために，自動車走行時の動的応答解析ならびに現地振動実験を行った。

(6-1) かもめ大橋における現地振動実験により実測された固有振動数と動的増幅率DIFは，それぞれ解析値と良い一致を示し，本理論解析法の妥当性が検証された。

(6-2) ケーブルの局所的な横振動およびプレストレスが走行荷重下の全構造系の動的応答に及ぼす影響はほとんどない。

(6-3) 単一走行荷重（16t）の場合とL-20相当荷重列（1～7台）を共振車頭間隔（橋の対称１次固有周期に相当する車頭間隔）で走行させた場合について，荷重台数別，着目断面別，構造形式別，ケーブル段数別のDIF の特性を調べた。

(6-4) L-20相当設計荷重列による動的応答解析結果に基づいて，斜張橋の主桁，塔およびケーブルについての衝撃係数の合理的な評価ができた。

第７章では，本論文で得られた成果をまとめた。

以上，本研究により，道路橋のうち桁橋と斜張橋に関して，設計衝撃係数を合理的に算定するための手法および資料を提示することができた。

付録１　走行荷重による橋梁の曲げ振動

図－3.1 に示す端支点からの距離ｘにおける，橋桁の曲げ振動による動的たわみは次式で表せる。

$$y(t,x) = \sum_i q_i(t)\phi_i(x) \tag{3.1}$$

ここに，時間関数$q_i(t)$は一般化座標であり，$\phi_i(x)$は第ｉ次固有振動モードである。

一定速度ｖで走行する荷重列による橋の動的応答について，$q_i(t)$に関する次の微分方程式が成立する。

$$\ddot{q}_i + 2h_i\omega_i\dot{q}_i + \omega_i^2 q_i = \frac{1}{M_i}\sum_{j=1}^{h}\sum_{s=1}^{2}\sum_{k=1}^{ax(s)}\phi_i(x_{jsk})P_{jsk}(t) \tag{3.2}$$

$$(i = 1, 2, \cdots\cdots, n)$$

ここに，ω_i：橋梁の第ｉ次固有円振動数，

h_i：橋梁の第ｉ次モードに対する減衰定数，

$M_i = mA\int_0^{\ell_b}\phi_i^2(x)\,dx$　（ｍは橋梁の単位体積当り質量，Ａは橋桁の断面積），

ｈ：荷重台数，

ax(s)：前・後輪の軸数。この場合，ax(1)=1，ax(2)=2，

$x_{jsm} = v(t-t_{vj}) - \lambda_{jsm}$，

$P_{jsk}(t) = \dfrac{1}{ax(s)}P_{js}(t)$　（$P_{js}(t)$は前・後輪の接地力）。

等断面の単純桁橋を対象とする場合，固有振動モードは正弦関数によって表すことができる。

$$\phi_i(x) = \sin\frac{i\pi x}{\ell_b} \tag{3.3}$$

それで，一般化質量M_iは次式のようにモード次数に関係なく一定値となる。

$$M_i = mA\int_0^{\ell_b}\phi_i^2(x)\,dx = \frac{mA\ell_b}{2} \tag{3.4}$$

走行車両を図－3.1 に示すように２自由度系にモデル化し，ばね下質量は無視する。j 番目の車両のばね上質量の重心Gの鉛直変位 z_j と回転変位 θ_j （時計方向を正）に関する運動方程式は次式となる。

$$\left.\begin{aligned} & m_{vj}\ \ddot{z}_j + \sum_{s=1}^{2} v_{js}(t) = 0 \\ & m_{vj}\ \gamma_j^2\ \ddot{\theta}_j - \sum_{s=1}^{2}(-1)^s \lambda_{js} v_{js}(t) = 0 \end{aligned}\right\} \quad (3.5)$$

ここにおいて，

$$\begin{aligned} v_{js}(t) = {} & k_{vjs}\left\{ z_j - (-1)^s \lambda_{js}\theta_j - \frac{1}{ax(s)} \sum_{m=1}^{ax(s)} y_{vjsm} \right\} \\ & + c_{vjs}\left\{ \dot{z}_j - (-1)^s \lambda_{js}\dot{\theta}_j - \frac{1}{ax(s)} \sum_{m=1}^{ax(s)} \dot{y}_{vjsm} \right\} \end{aligned} \quad (3.6)$$

車輪接地点の変位 y_{vjsm} は，橋桁変位 $y(t, x_{jsm})$ と路面凹凸 $z_0(x_{jsm})$ により次式となる。

$$\begin{aligned} y_{vjsm} &= y(t, x_{jsm}) - z_0(x_{jsm}) \\ &= \sum_i q_i(t)\phi_i(x_{jsm}) - z_0(x_{jsm}) \end{aligned} \quad (3.7)$$

$$(j=1, 2, \cdots, h,\ \ s=1, 2,\ \ m=1, ax(s))$$

また，前・後輪の接地力は次式で表される。

$$P_{js}(t) = \left(1 - \frac{\lambda_{js}}{\lambda_j}\right) m_{vj} g + v_{js}(t) \quad (3.8)$$

$$(j=1, 2, \cdots, h,\ \ s=1, 2)$$

ここに，g：重力加速度。

式(3.6)～(3.8)を式(3.2)に代入すると，

$$\begin{aligned} & \ddot{q}_i + 2h_i\omega_i\dot{q}_i + \omega_i^2 q_i \\ & = \frac{1}{M_i} \sum_{j=1}^{h}\sum_{s=1}^{2}\sum_{k=1}^{ax(s)} \phi_i(x_{jsk}) \frac{1}{ax(s)} \left[\left(1 - \frac{\lambda_{js}}{\lambda_j}\right) m_{vj} g \right. \end{aligned}$$

$$+ k_{vjs} \{ z_j - (-1)^s \lambda_{js} \theta_j - \frac{1}{ax(s)} \sum_{m=1}^{ax(s)} [\sum_g q_g(t) \phi_g(x_{jsm}) - z_0(x_{jsm})] \}$$

$$+ c_{vjs} \{ \dot{z}_j - (-1)^s \lambda_{js} \dot{\theta}_j - \frac{1}{ax(s)} \sum_{m=1}^{ax(s)} [\sum_g \dot{q}_g(t) \phi_g(x_{jsm}) - \dot{z}_0(x_{jsm})] \}]$$

$$M_i \ddot{q}_i + 2h_i \omega_i M_i \dot{q}_i + \omega_i^2 M_i q_i$$

$$+ \sum_{j=1}^{h} \sum_{s=1}^{2} \sum_{k=1}^{ax(s)} \phi_i(x_{jsk}) \frac{1}{ax(s)} [k_{vjs} \frac{1}{ax(s)} \sum_{m=1}^{ax(s)} \sum_g q_g(t) \phi_g(x_{jsm}) + c_{vjs} \frac{1}{ax(s)} \sum_{m=1}^{ax(s)} \sum_g \dot{q}_g(t) \phi_g(x_{jsm})]$$

$$+ \sum_{j=1}^{h} \sum_{s=1}^{2} \sum_{k=1}^{ax(s)} \phi_i(x_{jsk}) \frac{1}{ax(s)} \times [k_{vjs} \{ -z_j + (-1)^s \lambda_{js} \theta_j \} + c_{vjs} \{ -\dot{z}_j + (-1)^s \lambda_{js} \dot{\theta}_j \}]$$

$$= \sum_{j=1}^{h} \sum_{s=1}^{2} \sum_{k=1}^{ax(s)} \phi_i(x_{jsk}) \frac{1}{ax(s)} [(1 - \frac{\lambda_{js}}{\lambda_j}) m_{vj} g + k_{vjs} \frac{1}{ax(s)} \sum_{m=1}^{ax(s)} z_0(x_{jsm}) + c_{vjs} \frac{1}{ax(s)} \sum_{m=1}^{ax(s)} \dot{z}_0(x_{jsm})] \tag{A1.1}$$

同様に式(3.6)，(3.7)を式(3.5)に代入すると，

$$m_{vj} \ddot{z}_j + \sum_{s=1}^{2} [k_{vjs} \{ z_j - (-1)^s \lambda_{js} \theta_j - \frac{1}{ax(s)} \sum_{m=1}^{ax(s)} [\sum_g q_g(t) \phi_g(x_{jsm}) - z_0(x_{jsm})] \} + c_{vjs} \{ \dot{z}_j - (-1)^s \lambda_{js} \dot{\theta}_j - \frac{1}{ax(s)} \sum_{m=1}^{ax(s)} [\sum_g \dot{q}_g(t) \phi_g(x_{jsm}) - \dot{z}_0(x_{jsm})] \}] = 0$$

$$m_{vj} \gamma_j^2 \ddot{\theta}_j - \sum_{s=1}^{2} (-1)^s \lambda_{js} [k_{vjs} \{ z_j - (-1)^s \lambda_{js} \theta_j - \frac{1}{ax(s)} \sum_{m=1}^{ax(s)} [\sum_g q_g(t) \phi_g(x_{jsm}) - z_0(x_{jsm})] \}$$

$$+ c_{vjs}\{\dot{z}_j-(-1)^s\lambda_{js}\dot{\theta}_j$$

$$- \frac{1}{ax(s)}\sum_{m=1}^{ax(s)}\left[\sum_g \dot{q}_g(t)\phi_g(x_{jsm})-\dot{z}_0(x_{jsm})\right]\}\ ] = 0$$

$$\left.\begin{aligned}
&\sum_{s=1}^{2}\Big[-k_{vjs}\frac{1}{ax(s)}\sum_{m=1}^{ax(s)}\sum_g q_g(t)\phi_g(x_{jsm}) \\
&\qquad - c_{vjs}\frac{1}{ax(s)}\sum_{m=1}^{ax(s)}\sum_g \dot{q}_g(t)\phi_g(x_{jsm})\Big] + m_{vj}\ddot{z}_j \\
&+\sum_{s=1}^{2}\Big[k_{vjs}\{z_j-(-1)^s\lambda_{js}\theta_j\} + c_{vjs}\{\dot{z}_j-(-1)^s\lambda_{js}\dot{\theta}_j\}\Big] \\
&= \sum_{s=1}^{2}\Big[-k_{vjs}\frac{1}{ax(s)}\sum_{m=1}^{ax(s)} z_0(x_{jsm}) - c_{vjs}\frac{1}{ax(s)}\sum_{m=1}^{ax(s)}\dot{z}_0(x_{jsm})\Big] \\
&\sum_{s=1}^{2}(-1)^s\lambda_{js}\Big[k_{vjs}\frac{1}{ax(s)}\sum_{m=1}^{ax(s)}\sum_g q_g(t)\phi_g(x_{jsm}) \\
&\qquad + c_{vjs}\frac{1}{ax(s)}\sum_{m=1}^{ax(s)}\sum_g \dot{q}_g(t)\phi_g(x_{jsm})\Big] \\
&+ m_{vj}\gamma_j^2\ddot{\theta}_j + \sum_{s=1}^{2}(-1)^s\lambda_{js}\Big[-k_{vjs}\{z_j-(-1)^s\lambda_{js}\theta_j\} \\
&\qquad - c_{vjs}\{\dot{z}_j-(-1)^s\lambda_{js}\dot{\theta}_j\}\Big] \\
&= \sum_{s=1}^{2}(-1)^s\lambda_{js}\Big[k_{vjs}\frac{1}{ax(s)}\sum_{m=1}^{ax(s)} z_0(x_{jsm}) \\
&\qquad + c_{vjs}\frac{1}{ax(s)}\sum_{m=1}^{ax(s)}\dot{z}_0(x_{jsm})\Big]
\end{aligned}\right\}\ (A1.2)$$

式(A1.1)と(A1.2)を連立させると,

$$
\left[\begin{array}{cccc|cccccc}
m_{b1} & & & 0 & & & & & & \\
 & m_{b2} & & & & & & & & \\
 & & \ddots & & & & 0 & & & \\
0 & & & m_{bn} & & & & & & \\
\hline
 & & & & m_{v1} & & & & & \\
 & & & & & m_{v1}\gamma_1^2 & & & 0 & \\
 & & & & & & \ddots & & & \\
 & & & & & & & m_{vj} & & \\
 & 0 & & & & & & & m_{vj}\gamma_j^2 & \\
 & & & & & & & & & \ddots \\
 & & & & 0 & & & & & m_{vh} \\
 & & & & & & & & & & m_{vh}\gamma_h^2
\end{array}\right]
\left\{\begin{array}{c}
\ddot{q}_1 \\ \ddot{q}_2 \\ \vdots \\ \ddot{q}_n \\ \hline \ddot{z}_1 \\ \ddot{\theta}_1 \\ \vdots \\ \ddot{z}_j \\ \ddot{\theta}_j \\ \vdots \\ \ddot{z}_h \\ \ddot{\theta}_h
\end{array}\right\}
$$

$$
+
\left[\begin{array}{ccc|cccccc}
C_{11} & C_{12} & \cdots C_{1n} & C_{\phi 11} & C_{\lambda 11} & \cdots & C_{\phi 1j} & C_{\lambda 1j} & \cdots C_{\phi 1h} & C_{\lambda 1h} \\
C_{21} & C_{22} & \cdots C_{2n} & C_{\phi 21} & C_{\lambda 21} & \cdots & C_{\phi 2j} & C_{\lambda 2j} & \cdots C_{\phi 2h} & C_{\lambda 2h} \\
\vdots & \vdots & \ddots \quad \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
C_{n1} & C_{n2} & \cdots C_{nn} & C_{\phi n1} & C_{\lambda n1} & \cdots & C_{\phi nj} & C_{\lambda nj} & \cdots C_{\phi nh} & C_{\lambda nh} \\
\hline
C_{\phi 11} & C_{\phi 21} & \cdots C_{\phi n1} & C_{v1} & C_{v\lambda 1} & & & & & \\
C_{\lambda 11} & C_{\lambda 21} & \cdots C_{\lambda n1} & C_{v\lambda 1} & C_{\lambda\lambda 1} & \ddots & & & 0 & \\
\vdots & \vdots & \vdots & & & \ddots & \ddots & & & \\
C_{\phi 1j} & C_{\phi 2j} & \cdots C_{\phi nj} & & & & C_{vj} & C_{v\lambda j} & \ddots & \\
C_{\lambda 1j} & C_{\lambda 2j} & \cdots C_{\lambda nj} & & & & C_{v\lambda j} & C_{\lambda\lambda j} & \ddots & \\
\vdots & \vdots & \vdots & & & & & \ddots & \ddots & \ddots \\
C_{\phi 1h} & C_{\phi 2h} & \cdots C_{\phi nh} & & 0 & & & & C_{vh} & C_{v\lambda h} \\
C_{\lambda 1h} & C_{\lambda 2h} & \cdots C_{\lambda nh} & & & & & & C_{v\lambda h} & C_{\lambda\lambda h}
\end{array}\right]
\left\{\begin{array}{c}
\dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \\ \vdots \\ \dot{q}_n \\ \hline \dot{z}_1 \\ \dot{\theta}_1 \\ \vdots \\ \dot{z}_j \\ \dot{\theta}_j \\ \vdots \\ \dot{z}_h \\ \dot{\theta}_h
\end{array}\right\}
$$

$$
+\left[\begin{array}{cccc|cccccccc}
k_{11} & k_{12} & \cdots & k_{1n} & k_{\phi 11} & k_{\lambda 11} & \cdots & k_{\phi 1j} & k_{\lambda 1j} & \cdots & k_{\phi 1h} & k_{\lambda 1h} \\
k_{21} & k_{22} & \cdots & k_{2n} & k_{\phi 21} & k_{\lambda 21} & \cdots & k_{\phi 2j} & k_{\lambda 2j} & \cdots & k_{\phi 2h} & k_{\lambda 2h} \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\
k_{n1} & k_{n2} & \cdots & k_{nn} & k_{\phi n1} & k_{\lambda n1} & \cdots & k_{\phi nj} & k_{\lambda nj} & \cdots & k_{\phi nh} & k_{\lambda nh} \\
\hline
k_{\phi 11} & k_{\phi 21} & \cdots & k_{\phi n1} & k_{v1} & k_{v\lambda 1} & & & & & & \\
k_{\lambda 11} & k_{\lambda 21} & \cdots & k_{\lambda n1} & k_{v\lambda 1} & k_{\lambda\lambda 1} & \ddots & & & \mathbf{0} & & \\
\vdots & \vdots & & \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & & & & \\
k_{\phi 1j} & k_{\phi 2j} & \cdots & k_{\phi nj} & & & \ddots & k_{vj} & k_{v\lambda j} & & & \\
k_{\lambda 1j} & k_{\lambda 2j} & \cdots & k_{\lambda nj} & & & & k_{v\lambda j} & k_{\lambda\lambda j} & \ddots & & \\
\vdots & \vdots & & \vdots & & & & & \ddots & \ddots & \ddots & \\
k_{\phi 1h} & k_{\phi 2h} & \cdots & k_{\phi nh} & & \mathbf{0} & & & & \ddots & k_{vh} & k_{v\lambda h} \\
k_{\lambda 1h} & k_{\lambda 2h} & \cdots & k_{\lambda nh} & & & & & & & k_{v\lambda h} & k_{\lambda\lambda h}
\end{array}\right]
\left[\begin{array}{c}
q_1 \\ q_2 \\ \vdots \\ q_n \\ \hline z_1 \\ \theta_1 \\ \vdots \\ z_j \\ \theta_j \\ \vdots \\ z_h \\ \theta_h
\end{array}\right]
$$

$$
=\left[\begin{array}{c}
f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_n \\ \hline f_{v1} \\ f_{\lambda 1} \\ \vdots \\ f_{vj} \\ f_{\lambda j} \\ \vdots \\ f_{vh} \\ f_{\lambda h}
\end{array}\right] \qquad \text{(A1.3)}
$$

ここに,

$$m_{bi} = \Phi_i^T \mathbb{M}_b \Phi_i = M_i$$

$$c_{ig} = \sum_{j=1}^{h}\sum_{s=1}^{2}\sum_{k=1}^{ax(s)} \phi_i(x_{jsk})\left(\frac{1}{ax(s)}\right)^2 c_{vjs}\sum_{m=1}^{ax(s)} \phi_g(x_{jsm}) \qquad (i \neq g)$$

$$= \qquad 〃 \qquad + c_{bi} \qquad (i = g)$$

$$[\, c_{bi} = \Phi_i^T \mathbb{C}_b \Phi_i = 2h_i\omega_i M_i \,]$$

$$c_{\phi ij} = -\sum_{s=1}^{2}\sum_{k=1}^{ax(s)} \phi_i(x_{jsk}) \frac{1}{ax(s)} c_{vjs}$$

$$c_{\lambda ij} = \sum_{s=1}^{2}\sum_{k=1}^{ax(s)} (-1)^s \phi_i(x_{jsk}) \frac{1}{ax(s)} c_{vjs}\lambda_{js}$$

$$c_{vj} = \sum_{s=1}^{2} c_{vjs}$$

$$c_{v\lambda j} = -\sum_{s=1}^{2} (-1)^s c_{vjs}\lambda_{js}$$

$$c_{\lambda\lambda j} = \sum_{s=1}^{2} c_{vjs}\lambda_{js}^2$$

$$k_{ig} = \sum_{j=1}^{h}\sum_{s=1}^{2}\sum_{k=1}^{ax(s)} \phi_i(x_{jsk})\left(\frac{1}{ax(s)}\right)^2 k_{vjs}\sum_{m=1}^{ax(s)} \phi_g(x_{jsm}) \qquad (i \neq g)$$

$$= \qquad 〃 \qquad + k_{bi} \qquad (i = g)$$

$$[\, k_{bi} = \Phi_i^T \mathbb{K}_b \Phi_i = \omega_i^2 M_i \,]$$

$$k_{\phi ij} = -\sum_{s=1}^{2}\sum_{k=1}^{ax(s)} \phi_i(x_{jsk}) \frac{1}{ax(s)} k_{vjs}$$

$$k_{\lambda ij} = \sum_{s=1}^{2}\sum_{k=1}^{ax(s)} (-1)^s \phi_i(x_{jsk}) \frac{1}{ax(s)} k_{vjs}\lambda_{js}$$

$$k_{vj} = \sum_{s=1}^{2} k_{vjs}$$

$$k_{v\lambda j} = -\sum_{s=1}^{2} (-1)^s k_{vjs}\lambda_{js}$$

$$k_{\lambda\lambda j} = \sum_{s=1}^{2} k_{vjs}\lambda_{js}^2$$

$$f_i = \sum_{j=1}^{h}\sum_{s=1}^{2}\sum_{k=1}^{ax(s)} \phi_i(x_{jsk}) \frac{1}{ax(s)} \left[\left(1 - \frac{\lambda_{js}}{\lambda_j}\right) m_{vj} g \right.$$

$$\left. + k_{vjs} \frac{1}{ax(s)} \sum_{k=1}^{ax(s)} z_0(x_{jsm}) + c_{vjs} \frac{1}{ax(s)} \sum_{k=1}^{ax(s)} \dot{z}_0(x_{jsm}) \right]$$

$$f_{vj} = -\sum_{s=1}^{2}\left[k_{vjs}\frac{1}{ax(s)}\sum_{m=1}^{ax(s)} z_{\theta}(x_{jsm}) + c_{vjs}\frac{1}{ax(s)}\sum_{m=1}^{ax(s)} \dot{z}_{\theta}(x_{jsm})\right]$$

$$f_{\lambda j} = \sum_{s=1}^{2}(-1)^{s}\lambda_{js}\left[k_{vjs}\frac{1}{ax(s)}\sum_{m=1}^{ax(s)} z_{\theta}(x_{jsm}) + c_{vjs}\frac{1}{ax(s)}\sum_{m=1}^{ax(s)} \dot{z}_{\theta}(x_{jsm})\right]$$

以上 (A1.4)

式(A1.3)を簡単に書くと次のようになる。

$$\mathbb{M}^{*}\ddot{\mathbf{x}} + \mathbb{C}^{*}\dot{\mathbf{x}} + \mathbb{K}^{*}\mathbf{x} = \mathbf{f}^{*} \tag{A1.5}$$

ここに,

$$\mathbf{x} = \{q_1;q_2;\ \cdots\ ;q_n;z_1;\theta_1;\ \cdots\ ;z_j;\theta_j;\ \cdots\ ;z_h;\theta_h\} \tag{A1.6}$$

連立２階微分方程式(A1.5)の解$\mathbf{x}$を数値解析によって求めるにあたり，その一方法であるNewmark-β法によるが，このとき次の置き換えが必要である。

$$\ddot{\mathbf{x}} = (\mathbb{M}^{*})^{-1}\mathbf{f}^{*} - (\mathbb{M}^{*})^{-1}\mathbb{C}^{*}\dot{\mathbf{x}} - (\mathbb{M}^{*})^{-1}\mathbb{K}^{*}\mathbf{x} \tag{A1.7}$$

ここで，$\mathbb{M}^{*}$の逆マトリックス$(\mathbb{M}^{*})^{-1}$は次式となる。

$$(\mathbb{M}^{*})^{-1} = \left[\begin{array}{cccc|cccccc}
1/m_{b1} & & & 0 & & & & & & \\
 & 1/m_{b2} & & & & & & 0 & & \\
 & & \ddots & & & & & & & \\
0 & & & 1/m_{bn} & & & & & & \\
\hline
 & & & & 1/m_{v1} & & & & & \\
 & & & & & 1/m_{v1}\gamma_1^2 & & & 0 & \\
 & & & & & & \ddots & & & \\
 & & & & & & & 1/m_{vj} & & \\
 & 0 & & & & & & & 1/m_{vj}\gamma_j^2 & \\
 & & & & & & & & & \ddots \\
 & & & & 0 & & & & & 1/m_{vh} \\
 & & & & & & & & & & 1/m_{vh}\gamma_h^2
\end{array}\right] \tag{A1.8}$$

式(A1.8)を用いると，式(A1.7)の右辺各項は解析的に次式で与えられる。

$$
(\mathbb{M}^{*})^{-1}\mathbf{f}^{*} = \begin{pmatrix} f_{1}/m_{b1} \\ f_{2}/m_{b2} \\ \vdots \\ f_{n}/m_{bn} \\ \hline f_{v1}/m_{v1} \\ f_{\lambda 1}/m_{v1}\gamma_{1}^{2} \\ \vdots \\ f_{vj}/m_{vj} \\ f_{\lambda j}/m_{vj}\gamma_{j}^{2} \\ \vdots \\ f_{vh}/m_{vh} \\ f_{\lambda h}/m_{vh}\gamma_{h}^{2} \end{pmatrix} \tag{A1.9}
$$

$$
(\mathbb{M}^*)^{-1}\mathbb{C}^* = \left[\begin{array}{cccc|cccccc}
\frac{C_{11}}{m_{b1}} & \frac{C_{12}}{m_{b1}} & \cdots & \frac{C_{1n}}{m_{b1}} & \frac{C_{\phi 11}}{m_{b1}} & \frac{C_{\lambda 11}}{m_{b1}} & \cdots & \frac{C_{\phi 1j}}{m_{b1}} & \frac{C_{\lambda 1j}}{m_{b1}} \cdots & \frac{C_{\phi 1h}}{m_{b1}} & \frac{C_{\lambda 1h}}{m_{b1}} \\
\frac{C_{21}}{m_{b2}} & \frac{C_{22}}{m_{b2}} & \cdots & \frac{C_{2n}}{m_{b2}} & \frac{C_{\phi 21}}{m_{b2}} & \frac{C_{\lambda 21}}{m_{b2}} & \cdots & \frac{C_{\phi 2j}}{m_{b2}} & \frac{C_{\lambda 2j}}{m_{b2}} \cdots & \frac{C_{\phi 2h}}{m_{b2}} & \frac{C_{\lambda 2h}}{m_{b2}} \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
\frac{C_{n1}}{m_{bn}} & \frac{C_{n2}}{m_{bn}} & \cdots & \frac{C_{nn}}{m_{bn}} & \frac{C_{\phi n1}}{m_{bn}} & \frac{C_{\lambda n1}}{m_{bn}} & \cdots & \frac{C_{\phi nj}}{m_{bn}} & \frac{C_{\lambda nj}}{m_{bn}} \cdots & \frac{C_{\phi nh}}{m_{bn}} & \frac{C_{\lambda nh}}{m_{bn}} \\
\hline
\frac{C_{\phi 11}}{m_{v1}} & \frac{C_{\phi 21}}{m_{v1}} & \cdots & \frac{C_{\phi n1}}{m_{v1}} & \frac{C_{v1}}{m_{v1}} & \frac{C_{v\lambda 1}}{m_{v1}} & & & & & \\
\frac{C_{\lambda 11}}{m_{v1}\gamma_1^2} & \frac{C_{\lambda 21}}{m_{v1}\gamma_1^2} & \cdots & \frac{C_{\lambda n1}}{m_{v1}\gamma_1^2} & \frac{C_{v\lambda 1}}{m_{v1}\gamma_1^2} & \frac{C_{\lambda\lambda 1}}{m_{v1}\gamma_1^2} & \ddots & & & & \mathbb{O} \\
\vdots & \vdots & & \vdots & & & \ddots & \ddots & & & \\
\frac{C_{\phi 1j}}{m_{vj}} & \frac{C_{\phi 2j}}{m_{vj}} & \cdots & \frac{C_{\phi nj}}{m_{vj}} & & & & \frac{C_{vj}}{m_{vj}} & \frac{C_{v\lambda j}}{m_{vj}} & & \\
\frac{C_{\lambda 1j}}{m_{vj}\gamma_j^2} & \frac{C_{\lambda 2j}}{m_{vj}\gamma_j^2} & \cdots & \frac{C_{\lambda nj}}{m_{vj}\gamma_j^2} & & & & \frac{C_{v\lambda j}}{m_{vj}\gamma_j^2} & \frac{C_{\lambda\lambda j}}{m_{vj}\gamma_j^2} & \ddots & \\
\vdots & \vdots & & \vdots & & & & & & \ddots & \ddots \\
\frac{C_{\phi 1h}}{m_{vh}} & \frac{C_{\phi 2h}}{m_{vh}} & \cdots & \frac{C_{\phi nh}}{m_{vh}} & & & & & & \frac{C_{vh}}{m_{vh}} & \frac{C_{v\lambda h}}{m_{vh}} \\
\frac{C_{\lambda 1h}}{m_{vh}\gamma_h^2} & \frac{C_{\lambda 2h}}{m_{vh}\gamma_h^2} & \cdots & \frac{C_{\lambda nh}}{m_{vh}\gamma_h^2} & \mathbb{O} & & & & & \frac{C_{v\lambda h}}{m_{vh}\gamma_h^2} & \frac{C_{\lambda\lambda h}}{m_{vh}\gamma_h^2}
\end{array}\right] \tag{A1.10}
$$

$(\mathbb{M}^*)^{-1}\mathbb{K}^*$ は $(\mathbb{M}^*)^{-1}\mathbb{C}^*$ の場合と同様にして求めることができる。

付録２　走行荷重による橋梁の曲げねじり連成振動

Ａ２．１　梁の曲げねじり連成振動方程式

図－3.2 に示すように，橋梁断面に関して重心を原点とし，鉛直下向きをｙ軸にとる。水平方向の振動を無視すると，水平重心軸回りの曲げとせん断中心回りのねじりに関する連成振動方程式は次式となる。

$$\left.\begin{aligned} EI_z \frac{\partial^4 v}{\partial x^4} + mA \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} + mAz_s \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} &= q_y(t,x) \\ EC_w \frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^4} - GK \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + mAz_s \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} + mI_s \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} &= m_x(t,x) \end{aligned}\right\} \quad (3.9)$$

ここで，z_s ：せん断中心のｚ座標，

EI_z：ｚ軸回りの曲げ剛性，

ＧＫ：ねじり剛性，

EC_w：そり剛性，

$I_s = I_G + A(z_s^2+y_s^2)$ ：せん断中心回りの極慣性モーメント，

Ａ：断面積，

ｍ：単位体積当り質量，

$q_y(t,x)$：鉛直下向きの外力，

$m_x(t,x)$：ｘ軸（橋軸）回りのモーメント外力。

曲げ変形v およびねじり変形φについて，それぞれ一般化座標$a_n(t)$および$c_n(t)$と橋桁の境界条件を満足する基準関数$v_n(x)$および$\varphi_n(t)$を用いて次式のように表す。

$$\left.\begin{aligned} v(t,x) &= \sum_n a_n(t)\, v_n(x) \\ \varphi(t,x) &= \sum_n c_n(t)\, \varphi_n(x) \end{aligned}\right\} \quad (3.10)$$

外力はそれぞれ$v_n(x)$，$\varphi_n(x)$によって次のように展開されると仮定しよう。

$$\left.\begin{aligned} q_y(t,x) &= \sum_n E_n(t)\, v_n(x) \\ m_x(t,x) &= \sum_n G_n(t)\, \varphi_n(x) \end{aligned}\right\} \quad (A2.1)$$

ここに,

$$\left.\begin{aligned} E_n(t) &= \int_0^{\ell_b} q_y(t,\xi)\, v_n(\xi)\, d\xi \\ G_n(t) &= \int_0^{\ell_b} m_x(t,\xi)\, \varphi_n(\xi)\, d\xi \end{aligned}\right\} \quad (A2.2)$$

式(3.10)および(A2.1)を式(3.9)に代入し，次式の正規固有関数系の直交性を用い,

$$\left.\begin{aligned} \int_0^{\ell_b} v_m(x)\, v_n(x)\, dx &= \delta_{mn} \\ \int_0^{\ell_b} \varphi_m(x)\, \varphi_n(x)\, dx &= \delta_{mn} \end{aligned}\right\} \quad (A2.3)$$

ここに，δ_{mn} は Kroneckerのδ関数で，次の性質を有する。

$$\delta_{mn} = \begin{cases} 1 & (m=n) \\ 0 & (m \neq n) \end{cases} \quad (A2.4)$$

かつ，これらの関数系は定義により次の微分方程式

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial^4 v_n}{\partial x^4} &= \left(\frac{\alpha_n}{\ell_b}\right)^4 v_n(x) \\ \frac{\partial^4 \varphi_n}{\partial x^4} &= \left(\frac{\gamma_n}{\ell_b}\right)^4 \varphi_n(x) \end{aligned}\right\} \quad (A2.5)$$

を満足していることを用いると，一般化座標$a_n(t)$，$c_n(t)$に関する連立常微分方程式が得られる。

$$\left.\begin{aligned} & mA\ddot{a}_n(t) + \lambda_n^4 a_n(t) + mAz_s \sum_m \ddot{c}_m(t)\Gamma_{mn} = E_n(t) \\ & mI_s\ddot{c}_n(t) + \nu_n^4 c_n(t) + GK\sum_m c_m(t)\Lambda_{mn} + mAz_s\sum_m \ddot{a}_m(t)\Gamma_{mn} \\ & \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad = G_n(t) \end{aligned}\right\} \quad (A2.6)$$

ここに,

$$\lambda_n^4 = \frac{\alpha_n^4 EI_z}{\ell_b^4}, \qquad \nu_n^4 = \frac{\gamma_n^4 EI_w}{\ell_b^4} \quad (A2.7)$$

$$\left.\begin{aligned}\Gamma_{mn} &= \int_0^{\ell_b} \varphi_m(x)\, v_n(x)\, dx \\ \Lambda_{mn} &= \int_0^{\ell_b} \frac{d\varphi_m(x)}{dx} \frac{d\varphi_n(x)}{dx}\, dx\end{aligned}\right\} \quad (A2.8)$$

両端単純支持の場合は，

$$\left.\begin{aligned}v_n(x) &= \varphi_n(x) = \left(\frac{2}{\ell_b}\right)^{1/2} \sin\frac{n\pi x}{\ell_b} \\ \Gamma_{mn} &= \delta_{mn} \\ \Lambda_{mn} &= \left(\frac{m\pi}{\ell_b}\right)\left(\frac{n\pi}{\ell_b}\right)\delta_{mn}\end{aligned}\right\} \quad (A2.9)$$

となり，式(A2.6)は次のように簡単化される。

$$\left.\begin{aligned}&mA\ddot{a}_n(t) + \lambda_n^4 a_n(t) + mAz_s\ddot{c}_n(t) = E_n(t) \\ &mI_s\ddot{c}_n(t) + \left\{\nu_n^4 + GK\left(\frac{n\pi}{\ell_b}\right)^2\right\}c_n(t) + mAz_s\ddot{a}_n(t) = G_n(t)\end{aligned}\right\} \quad (A2.10)$$

A2.2 梁の曲げねじり自由振動

曲げねじり自由振動を考える場合は，元の連成振動方程式(3.9)において，外力の項 $q_y(t,x)$，$m_x(t,x)$をすべて0とおき，振動の周期性から，

$$\left.\begin{aligned}a_n(t) &= a_n e^{ipt} \\ c_n(t) &= c_n e^{ipt}\end{aligned}\right\} \quad (A2.11)$$

とおく。この式(A2.11)を式(A2.10)に代入すると次式が得られる。

$$\left.\begin{aligned}&(\lambda_n^4 - mAp^2)a_n - z_s mAp^2 c_n = 0 \\ &\left\{\nu_n^4 + GK\left(\frac{n\pi}{\ell_b}\right)^2 - mI_s p^2\right\}c_n - z_s mAp^2 a_n = 0\end{aligned}\right\} \quad (A2.12)$$

式(A2.12)において，a_nとc_nとが共に0でないことより次の固有方程式が得られる。

$$\begin{vmatrix} \lambda_n^4 - mAp^2 & -z_s mAp^2 \\ -z_s mAp^2 & \nu_n^4 + GK(\frac{n\pi}{\ell_b})^2 - mI_s p^2 \end{vmatrix} = 0 \qquad (A2.13)$$

$$(\lambda_n^4 - mAp^2)\{\nu_n^4 + GK(\frac{n\pi}{\ell_b})^2 - mI_s p^2\} - (z_s mA)^2 p^4 = 0$$

$$\lambda_n^4 = \frac{\alpha_n^4 EI_z}{\ell_b^4} = \frac{(n\pi)^4 EI_z}{\ell_b^4}$$

$$\nu_n^4 = \frac{\gamma_n^4 EI_w}{\ell_b^4} = \frac{(n\pi)^4 EI_w}{\ell_b^4}$$

$$\nu_n^4 + GK(\frac{n\pi}{\ell_b})^2 = EI_w(\frac{n\pi}{\ell_b})^4 + GK(\frac{n\pi}{\ell_b})^2$$

$$= (\frac{n\pi}{\ell_b})^2 GK\{\frac{(n\pi)^2}{k^2} + 1\}$$

$$k^2 = \frac{GK\ell_b^2}{EI_w}$$

$$\{m^2 AI_s - (z_s mA)^2\}p^4 - [mI_s EI_z(\frac{n\pi}{\ell_b})^4 + mA(\frac{n\pi}{\ell_b})^2 GK\{\frac{(n\pi)^2}{k^2} + 1\}]p^2 + EI_z(\frac{n\pi}{\ell_b})^6 GK\{\frac{(n\pi)^2}{k^2} + 1\} = 0 \qquad (A2.14)$$

式(A2.14)より固有円振動数p_nが求まる。

特に断面の重心とせん断中心が一致した場合は$z_s=0$となり，曲げ振動とねじり振動をそれぞれ独立に考えることができる。

$$\lambda_n^4 - mAp_{bn}^2 = 0 \quad , \quad p_{bn}^2 = (\frac{n\pi}{\ell_b})^4 \frac{EI_z}{mA} \qquad (A2.15)$$

$$\nu_n^4 + GK(\frac{n\pi}{\ell_b})^2 - mI_s p_{tn}^2 = 0$$

$$p_{tn}^2 = (\frac{n\pi}{\ell_b})^2 \frac{GK}{mI_s}\{\frac{(n\pi)^2}{k^2} + 1\} \qquad (A2.16)$$

A2.3　偏心走行荷重による梁の曲げねじり振動

$$\left.\begin{aligned}
&\ddot{a}_n(t) + p_{bn}^2 a_n(t) + z_s \ddot{c}_n(t) = \frac{\int_0^{\ell_b} q_y(t,x)\, v_n(x)\,dx}{mA\int_0^{\ell_b} v_n^2(x)\,dx} \\
&\ddot{c}_n(t) + p_{tn}^2 c_n(t) + z_s \frac{A}{I_s}\ddot{a}_n(t) = \frac{\int_0^{\ell_b} m_x(t,x)\, \varphi_n(x)\,dx}{mI_s\int_0^{\ell_b} \varphi_n^2(x)\,dx}
\end{aligned}\right\} \text{(A2.17)}$$

$$\left.\begin{aligned}
&q_y(t,x) = \delta(x-vt)P \\
&m_x(t,x) = \delta(x-vt)Pe, \quad e：せん断中心から載荷点までの距離
\end{aligned}\right\} \text{(A2.18)}$$

さらに基準関数を式(A2.6),(A2.10)の誘導時に用いた正規固有関数系ではなく，次式を用いることにする。

$$v_n(x) = \varphi_n(x) = \sin\frac{n\pi x}{\ell_b} \tag{A2.19}$$

すると式(A2.17)の右辺荷重項の分子は，

$$\begin{aligned}
&\int_0^{\ell_b} q_y(t,x)\, v_n(x)\,dx = \int_0^{\ell_b} \delta(x-vt)P\sin\frac{n\pi x}{\ell_b}\,dx = P\sin\frac{n\pi vt}{\ell_b} \\
&\int_0^{\ell_b} m_x(t,x)\, \varphi_n(x)\,dx = \int_0^{\ell_b} \delta(x-vt)Pe\sin\frac{n\pi x}{\ell_b}\,dx = Pe\sin\frac{n\pi vt}{\ell_b}
\end{aligned} \tag{A2.20}$$

分母は，

$$\left.\begin{aligned}
&mA\int_0^{\ell_b} v_n^2(x)\,dx = \frac{mA\ell_b}{2} \\
&mI_s\int_0^{\ell_b} \varphi_n^2(x)\,dx = \frac{mI_s\ell_b}{2}
\end{aligned}\right\} \text{(A2.21)}$$

また，梁の粘性減衰を考慮すると，n次モードに関する運動方程式は次式となる。

$$\left.\begin{aligned}&\ddot{a}_n(t) + 2h_{bn}p_{bn}\dot{a}_n(t) + p_{bn}^2 a_n(t) + z_s\ddot{c}_n(t)\\&\qquad = \frac{2}{mA\ell_b}P\sin\frac{n\pi vt}{\ell_b}\\&\ddot{c}_n(t) + 2h_{tn}p_{tn}\dot{c}_n(t) + p_{tn}^2 c_n(t) + \frac{z_s}{\gamma_s^2}\ddot{a}_n(t)\\&\qquad = \frac{2}{mI_s\ell_b}Pe\sin\frac{n\pi vt}{\ell_b}\end{aligned}\right\}\text{(A2.22)}$$

ここに，

h_{bn}，h_{tn}：曲げおよびねじりの減衰定数，

$\gamma_s^2 = \dfrac{I_s}{A}$ 。

A2.4 路面不整を考慮した偏心走行荷重による橋梁の動的応答解析

$$\left.\begin{aligned}&\ddot{a}_n(t) + 2h_{bn}p_{bn}\dot{a}_n(t) + p_{bn}^2 a_n(t) + z_s\ddot{c}_n(t)\\&\qquad = \frac{2}{mA\ell_b}\sum_{j=1}^{h}\sum_{s=1}^{2}\sum_{k=1}^{ax(s)} v_n(x_{jsk})P_{jsk}(t)\\&\ddot{c}_n(t) + 2h_{tn}p_{tn}\dot{c}_n(t) + p_{tn}^2 c_n(t) + \frac{z_s}{\gamma_s^2}\ddot{a}_n(t)\\&\qquad = \frac{2}{mI_s\ell_b}\sum_{j=1}^{h}\sum_{s=1}^{2}\sum_{k=1}^{ax(s)} \varphi_n(x_{jsk})P_{jsk}(t)e\end{aligned}\right\}\text{(3.11)}$$

ここに，

h ；荷重台数，

$ax(s)$ ；前・後輪の軸数。この場合，$ax(s)=1$，$ax(2)=2$，

$x_{jsm} = v(t-t_{vj}) - \lambda_{jsm}$，

$P_{jsk} = \dfrac{1}{ax(s)}P_{js}$ （P_{js} は前・後輪の接地力）。

自動車の前・後輪を考慮して２自由度系にモデル化したｊ番目の荷重において，ばね下質量を無視し，ばね上質量の重心Gv の鉛直変位 z_j と回転変位 θ_j （時計方向を正）に

関する運動方程式は次式となる。

$$\left.\begin{aligned} & m_{vj}\ddot{z}_j + \sum_{s=1}^{2} v_{js}(t) = 0 \\ & m_{vj}\gamma_j^2\ddot{\theta}_j - \sum_{s=1}^{2}(-1)^s\lambda_{js}v_{js}(t) = 0 \end{aligned}\right\} \quad (3.5)$$

ここにおいて，

$$\begin{aligned} v_{js}(t) = {} & k_{vjs}\{z_j - (-1)^s\lambda_{js}\theta_j - \frac{1}{ax(s)}\sum_{m=1}^{ax(s)} y_{vjsm}\} \\ & + c_{vjs}\{\dot{z}_j - (-1)^s\lambda_{js}\dot{\theta}_j - \frac{1}{ax(s)}\sum_{m=1}^{ax(s)}\dot{y}_{vjsm}\} \end{aligned} \quad (3.6)$$

$$\begin{aligned} y_{vjsm} &= v(t, x_{jsm}) + \varphi(t, x_{jsm})e - z_0(x_{jsm}) \\ &= \sum_g a_g(t)v_g(x_{jsm}) + \sum_g c_g(t)\varphi_g(x_{jsm})e - z_0(x_{jsm}) \end{aligned} \quad (3.12)$$

また，

$$P_{js}(t) = (1 - \frac{\lambda_{js}}{\lambda_j})m_{vj}g + v_{js}(t) \quad (3.8)$$

式(3.6)，(3.12)，(3.8)を式(3.11)に代入すると，

$$\begin{aligned} & \ddot{a}_n(t) + 2h_{bn}p_{bn}\dot{a}_n(t) + p_{bn}^2 a_n(t) + z_s\ddot{c}_n(t) \\ & = \frac{2}{mA\ell_b}\sum_{j=1}^{h}\sum_{s=1}^{2}\sum_{k=1}^{ax(s)} v_n(x_{jsk})\frac{1}{ax(s)}[(1 - \frac{\lambda_{js}}{\lambda_j})m_{vj}g \\ & \quad + k_{vjs}\{z_j - (-1)^s\lambda_{js}\theta_j - \frac{1}{ax(s)}\sum_{m=1}^{ax(s)}[\sum_g a_g(t)v_g(x_{jsm}) \\ & \qquad + \sum_g c_g(t)\varphi_g(x_{jsm})e - z_0(x_{jsm})]\} \\ & \quad + c_{vjs}\{\dot{z}_j - (-1)^s\lambda_{js}\dot{\theta}_j - \frac{1}{ax(s)}\sum_{m=1}^{ax(s)}[\sum_g \dot{a}_g(t)v_g(x_{jsm}) \\ & \qquad + \sum_g \dot{c}_g(t)\varphi_g(x_{jsm})e - \dot{z}_0(x_{jsm})]\} \end{aligned}$$

$\frac{mA\ell_b}{2} = M_b$ とおくと，

$$M_b\ddot{a}_n(t) + 2h_{bn}p_{bn}M_b\dot{a}_n(t) + p_{bn}^2 M_b a_n(t) + z_s M_b\ddot{c}_n(t)$$

$$+\sum_{j=1}^{h}\sum_{s=1}^{2}\sum_{k=1}^{ax(s)} v_n(x_{jsk})\frac{1}{ax(s)}\Big[k_{vjs}\frac{1}{ax(s)}\sum_{m=1}^{ax(s)}\Big(\sum_g a_g(t)\,v_g(x_{jsm})$$

$$+\sum_g c_g(t)\,\varphi_g(x_{jsm})\,e\Big)$$

$$+c_{vjs}\frac{1}{ax(s)}\sum_{m=1}^{ax(s)}\Big(\sum_g \dot{a}_g(t)\,\varphi_g(x_{jsm})$$

$$+\sum_g \dot{c}_g(t)\,\varphi_g(x_{jsm})\,e\Big)\Big]$$

$$+\sum_{j=1}^{h}\sum_{s=1}^{2}\sum_{k=1}^{ax(s)} v_n(x_{jsk})\frac{1}{ax(s)}\Big[k_{vjs}\{-z_j+(-1)^s\lambda_{js}\theta_j\}$$

$$+c_{vjs}\{-\dot{z}_j+(-1)^s\lambda_{js}\dot{\theta}_j\}\Big]$$

$$=\sum_{j=1}^{h}\sum_{s=1}^{2}\sum_{k=1}^{ax(s)} v_n(x_{jsk})\frac{1}{ax(s)}\Big[\Big(1-\frac{\lambda_{js}}{\lambda_j}\Big)m_{vj}g$$

$$+k_{vjs}\frac{1}{ax(s)}\sum_{m=1}^{ax(s)} z_0(x_{jsm})+c_{vjs}\frac{1}{ax(s)}\sum_{m=1}^{ax(s)}\dot{z}_0(x_{jsm})\Big] \qquad (A2.23)_1$$

$$\ddot{c}_n(t)+2h_{tn}p_{tn}\dot{c}_n(t)+p_{tn}^2c_n(t)+\frac{z_s}{\gamma_s^2}\ddot{a}_n(t)$$

$$=\frac{2}{m\,I_s\,\ell_b}\sum_{j=1}^{h}\sum_{s=1}^{2}\sum_{k=1}^{ax(s)}\varphi_n(x_{jsk})\frac{e}{ax(s)}\Big[\Big(1-\frac{\lambda_{js}}{\lambda_j}\Big)m_{vj}g$$

$$+k_{vjs}\Big\{z_j-(-1)^s\lambda_{js}\theta_j-\frac{1}{ax(s)}\sum_{m=1}^{ax(s)}\Big(\sum_g a_g(t)\,v_g(x_{jsm})$$

$$+\sum_g c_g(t)\,\varphi_g(x_{jsm})\,e-z_0(x_{jsm})\Big)\Big\}$$

$$+c_{vjs}\Big\{\dot{z}_j-(-1)^s\lambda_{js}\dot{\theta}_j-\frac{1}{ax(s)}\sum_{m=1}^{ax(s)}\Big(\sum_g \dot{a}_g(t)\,v_g(x_{jsm})$$

$$+\sum_g \dot{c}_g(t)\,\varphi_g(x_{jsm})\,e-\dot{z}_0(x_{jsm})\Big)\Big\}\Big]$$

$\dfrac{m\,I_s\,\ell_b}{2}=M_t$とおくと,

$$M_t\ddot{c}_n(t)+2h_{tn}p_{tn}M_t\dot{c}_n(t)+p_{tn}^2M_tc_n(t)+\frac{z_s}{\gamma_s^2}M_t\ddot{a}_n(t)$$

$$+\sum_{j=1}^{h}\sum_{s=1}^{2}\sum_{k=1}^{ax(s)}\varphi_n(x_{jsk})\frac{e}{ax(s)}\Big[k_{vjs}\frac{1}{ax(s)}\sum_{m=1}^{ax(s)}\Big(\sum_g a_g(t)\,v_g(x_{jsm})$$

$$+\sum_g c_g(t)\,\varphi_g(x_{jsm})\,e\Big)$$

$$+c_{vjs}\frac{1}{ax(s)}\sum_{m=1}^{ax(s)}\Big(\sum_g \dot{a}_g(t)\,\varphi_g(x_{jsm})$$

$$+ \sum_{g} \dot{c}_g(t)\, \varphi_g(x_{jsm})\, e)]$$

$$+ \sum_{j=1}^{h} \sum_{s=1}^{2} \sum_{k=1}^{ax(s)} \varphi_n(x_{jsk}) \frac{e}{ax(s)} [k_{vjs}\{ -z_j + (-1)^s \lambda_{js} \theta_j\}$$

$$+ c_{vjs}\{ -\dot{z}_j + (-1)^s \lambda_{js} \dot{\theta}_j\}]$$

$$= \sum_{j=1}^{h} \sum_{s=1}^{2} \sum_{k=1}^{ax(s)} \varphi_n(x_{jsk}) \frac{e}{ax(s)} [(1 - \frac{\lambda_{js}}{\lambda_j}) m_{vj} g$$

$$+ k_{vjs} \frac{1}{ax(s)} \sum_{m=1}^{ax(s)} z_0(x_{jsm}) + c_{vjs} \frac{1}{ax(s)} \sum_{m=1}^{ax(s)} \dot{z}_0(x_{jsm})] \quad (A2.23)_2$$

同様に式(3.6)，(3.12)を式(3.5)に代入して，

$$m_{vj} \ddot{z}_j + \sum_{s=1}^{2} [k_{vjs}\{z_j - (-1)^s \lambda_{js} \theta_j$$

$$- \frac{1}{ax(s)} \sum_{m=1}^{ax(s)} (\sum_{g} a_g(t)\, v_g(x_{jsm}) + \sum_{g} c_g(t)\, \varphi_g(x_{jsm})\, e - z_0(x_{jsm}))\}$$

$$+ c_{vjs}\{\dot{z}_j - (-1)^s \lambda_{js} \dot{\theta}_j$$

$$- \frac{1}{ax(s)} \sum_{m=1}^{ax(s)} (\sum_{g} \dot{a}_g(t)\, v_g(x_{jsm}) + \sum_{g} \dot{c}_g(t)\, \varphi_g(x_{jsm})\, e - \dot{z}_0(x_{jsm}))\}]$$

$$= 0$$

$$m_{vj} \gamma_j^2 \ddot{\theta}_j - \sum_{s=1}^{2} (-1)^s \lambda_{js} [k_{vjs}\{z_j - (-1)^s \lambda_{js} \theta_j$$

$$- \frac{1}{ax(s)} \sum_{m=1}^{ax(s)} (\sum_{g} a_g(t)\, v_g(x_{jsm}) + \sum_{g} c_g(t)\, \varphi_g(x_{jsm})\, e - z_0(x_{jsm}))\}$$

$$+ c_{vjs}\{\dot{z}_j - (-1)^s \lambda_{js} \dot{\theta}_j$$

$$- \frac{1}{ax(s)} \sum_{m=1}^{ax(s)} (\sum_{g} \dot{a}_g(t)\, v_g(x_{jsm}) + \sum_{g} \dot{c}_g(t)\, \varphi_g(x_{jsm})\, e - \dot{z}_0(x_{jsm}))\}]$$

$$= 0$$

整理すると次のようになる。

$$\sum_{s=1}^{2} [-k_{vjs} \frac{1}{ax(s)} \sum_{m=1}^{ax(s)} (\sum_{g} a_g(t)\, v_g(x_{jsm}) + \sum_{g} c_g(t)\, \varphi_g(x_{jsm})\, e)$$

$$- c_{vjs} \frac{1}{ax(s)} \sum_{m=1}^{ax(s)} (\sum_{g} \dot{a}_g(t)\, v_g(x_{jsm}) + \sum_{g} \dot{c}_g(t)\, \varphi_g(x_{jsm})\, e)]$$

$$+ m_{vj}\ddot{z}_j + \sum_{s=1}^{2}[k_{vjs}\{z_j - (-1)^s\lambda_{js}\theta_j\} + c_{vjs}\{\dot{z}_j-(-1)^s\lambda_{js}\dot{\theta}_j\}]$$

$$= \sum_{s=1}^{2}[-k_{vjs}\frac{1}{ax(s)}\sum_{m=1}^{ax(s)} z_0(x_{jsm}) - c_{vjs}\frac{1}{ax(s)}\sum_{m=1}^{ax(s)}\dot{z}_0(x_{jsm})] \qquad (A2.24)_1$$

$$\sum_{s=1}^{2}(-1)^s\lambda_{js}\ [k_{vjs}\frac{1}{ax(s)}\sum_{m=1}^{ax(s)}(\sum_g a_g(t)v_g(x_{jsm}) + \sum_g c_g(t)\varphi_g(x_{jsm})e)$$

$$+ c_{vjs}\frac{1}{ax(s)}\sum_{m=1}^{ax(s)}(\sum_g \dot{a}_g(t)v_g(x_{jsm}) + \sum_g \dot{c}_g(t)\varphi_g(x_{jsm})e)]$$

$$+ m_{vj}\gamma_j^2\ddot{\theta}_j + \sum_{s=1}^{2}(-1)^s\lambda_{js}\ [-k_{vjs}\{z_j - (-1)^s\lambda_{js}\theta_j\}$$

$$- c_{vjs}\{\dot{z}_j - (-1)^s\lambda_{js}\dot{\theta}_j\}]$$

$$= \sum_{s=1}^{2}(-1)^s\lambda_{js}\ [k_{vjs}\frac{1}{ax(s)}\sum_{m=1}^{ax(s)} z_0(x_{jsm})$$

$$+ c_{vjs}\frac{1}{ax(s)}\sum_{m=1}^{ax(s)}\dot{z}_0(x_{jsm})] \qquad (A2.24)_2$$

式(A2.23)$_{1,2}$および(A2.24)$_{1,2}$を連立させると次のようになる。

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc|c}
M_b & & 0 & & z_sM_b & & 0 & & \\
 & \ddots & & & & \ddots & & & \\
0 & & M_b & & 0 & & z_sM_b & & 0 \\
\hline
\frac{z_s}{\gamma_s^2}M_t & & 0 & & M_t & & 0 & & \\
 & \ddots & & & & \ddots & & & \\
0 & & \frac{z_s}{\gamma_s^2}M_t & & 0 & & M_t & & \\
\hline
 & & & & m_{v1} & & & & \\
 & & & & & m_{v1}\gamma_1^2 & & 0 & \\
 & & 0 & & & & \ddots & & \\
 & & & & 0 & & & m_{vh} & \\
 & & & & & & & & m_{vh}\gamma_h^2
\end{array}\right]
\left[\begin{array}{c}
\ddot{a}_1 \\ \vdots \\ \ddot{a}_n \\ \hline \ddot{c}_1 \\ \vdots \\ \ddot{c}_n \\ \hline \ddot{z}_1 \\ \ddot{\theta}_1 \\ \vdots \\ \ddot{z}_h \\ \ddot{\theta}_h
\end{array}\right]$$

$$
+\begin{bmatrix}
C_{b11} & \cdots & C_{b1n} & C_{bt11} & \cdots & C_{bt1n} & C_{\phi 11} & C_{\lambda 11} & \cdots & C_{\phi 1h} & C_{\lambda 1h} \\
\vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\
C_{bn1} & \cdots & C_{bnn} & C_{btn1} & \cdots & C_{btnn} & C_{\phi n1} & C_{\lambda n1} & \cdots & C_{\phi nh} & C_{\lambda nh} \\
C_{tb11} & \cdots & C_{tb1n} & C_{t11} & \cdots & C_{t1n} & C_{t\phi 11} & C_{t\lambda 11} & \cdots & C_{t\phi 1h} & C_{t\lambda 1h} \\
\vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\
C_{tbn1} & \cdots & C_{tbnn} & C_{tn1} & \cdots & C_{tnn} & C_{t\phi n1} & C_{t\lambda n1} & \cdots & C_{t\phi nh} & C_{t\lambda nh} \\
C_{\phi 11} & \cdots & C_{\phi n1} & C_{t\phi 11} & \cdots & C_{t\phi n1} & C_{v1} & C_{v\lambda 1} & & & \mathbf{0} \\
C_{\lambda 11} & \cdots & C_{\lambda n1} & C_{t\lambda 11} & \cdots & C_{t\lambda n1} & C_{v\lambda 1} & C_{\lambda\lambda 1} & \ddots & & \\
\vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & \\
C_{\phi 1h} & \cdots & C_{\phi nh} & C_{t\phi 1h} & \cdots & C_{t\phi nh} & & & \ddots & C_{vh} & C_{v\lambda h} \\
C_{\lambda 1h} & \cdots & C_{\lambda nh} & C_{t\lambda 1h} & \cdots & C_{t\lambda nh} & & \mathbf{0} & & C_{v\lambda h} & C_{\lambda\lambda h}
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix}
\dot{a}_1 \\ \vdots \\ \dot{a}_n \\ \dot{c}_1 \\ \vdots \\ \dot{c}_n \\ \dot{z}_1 \\ \dot{\theta}_1 \\ \vdots \\ \dot{z}_h \\ \dot{\theta}_h
\end{bmatrix}
$$

$$
+\begin{bmatrix}
k_{b11} & \cdots & k_{b1n} & k_{bt11} & \cdots & k_{bt1n} & k_{\phi 11} & k_{\lambda 11} & \cdots & k_{\phi 1h} & k_{\lambda 1h} \\
\vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\
k_{bn1} & \cdots & k_{bnn} & k_{btn1} & \cdots & k_{btnn} & k_{\phi n1} & k_{\lambda n1} & \cdots & k_{\phi nh} & k_{\lambda nh} \\
k_{tb11} & \cdots & k_{tb1n} & k_{t11} & \cdots & k_{t1n} & k_{t\phi 11} & k_{t\lambda 11} & \cdots & k_{t\phi 1h} & k_{t\lambda 1h} \\
\vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\
k_{tbn1} & \cdots & k_{tbnn} & k_{tn1} & \cdots & k_{tnn} & k_{t\phi n1} & k_{t\lambda n1} & \cdots & k_{t\phi nh} & k_{t\lambda nh} \\
k_{\phi 11} & \cdots & k_{\phi n1} & k_{t\phi 11} & \cdots & k_{t\phi n1} & k_{v1} & k_{v\lambda 1} & & & \mathbf{0} \\
k_{\lambda 11} & \cdots & k_{\lambda n1} & k_{t\lambda 11} & \cdots & k_{t\lambda n1} & k_{v\lambda 1} & k_{\lambda\lambda 1} & \ddots & & \\
\vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & \\
k_{\phi 1h} & \cdots & k_{\phi nh} & k_{t\phi 1h} & \cdots & k_{t\phi nh} & & & \ddots & k_{vh} & k_{v\lambda h} \\
k_{\lambda 1h} & \cdots & k_{\lambda nh} & k_{t\lambda 1h} & \cdots & k_{t\lambda nh} & & \mathbf{0} & & k_{v\lambda h} & k_{\lambda\lambda h}
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix}
a_1 \\ \vdots \\ a_n \\ c_1 \\ \vdots \\ c_n \\ z_1 \\ \theta_1 \\ \vdots \\ z_h \\ \theta_h
\end{bmatrix}
$$

$$
= \begin{bmatrix} f_{b1} \\ \vdots \\ f_{bn} \\ \hline f_{t1} \\ \vdots \\ f_{th} \\ \hline f_{v1} \\ f_{\lambda 1} \\ \vdots \\ f_{vh} \\ f_{\lambda h} \end{bmatrix} \tag{A2.25}
$$

ここに,

$$
\begin{aligned}
c_{big} &= \sum_{j=1}^{h}\sum_{s=1}^{2}\sum_{k=1}^{ax(s)} v_i(x_{jsk})\left(\frac{1}{ax(s)}\right)^2 c_{vjs}\sum_{m=1}^{ax(s)} v_g(x_{jsm}) && (i \neq g) \\
&= \qquad 〃 \qquad + 2h_{bn}p_{bn}M_b && (i = g) \\
c_{btig} &= c_{big}e && (i \neq g) \\
&= (c_{big} - 2h_{bn}p_{bn}M_b)e && (i = g)
\end{aligned}
$$

$v_n(x) = \varphi_n(x)$ より,

$$
\begin{aligned}
c_{tbig} &= c_{btig} \\
c_{tig} &= \sum_{j=1}^{h}\sum_{s=1}^{2}\sum_{k=1}^{ax(s)} \varphi_i(x_{jsk})\left(\frac{e}{ax(s)}\right)^2 c_{vjs}\sum_{m=1}^{ax(s)} \varphi_g(x_{jsm}) = c_{big}e^2 && (i \neq g) \\
&= \qquad 〃 \qquad + 2h_{tn}p_{tn}M_t \\
&= (c_{big} - 2h_{bn}p_{bn}M_b)e^2 + 2h_{tn}p_{tn}M_t && (i = g) \\
c_{\phi ij} &= -\sum_{s=1}^{2}\sum_{k=1}^{ax(s)} v_i(x_{jsk})\frac{1}{ax(s)} c_{vjs} \\
c_{\lambda ij} &= \sum_{s=1}^{2}\sum_{k=1}^{ax(s)} (-1)^s v_i(x_{jsk})\frac{1}{ax(s)} c_{vjs}\lambda_{js} \\
c_{t\phi ij} &= c_{\phi ij}e
\end{aligned}
$$

$$c_{t\lambda ij} = c_{\lambda ij} e$$

$$c_{vj} = \sum_{s=1}^{2} c_{vjs}$$

$$c_{v\lambda j} = -\sum_{s=1}^{2} (-1)^s c_{vjs} \lambda_{js}$$

$$c_{\lambda\lambda j} = \sum_{s=1}^{2} c_{vjs} \lambda_{js}^2$$

以上 (A2.26)

kについても同様である。外力ベクトルの要素は次のようになる。

$$f_{bi} = \sum_{j=1}^{h} \sum_{s=1}^{2} \sum_{k=1}^{ax(s)} v_i(x_{jsk}) \frac{1}{ax(s)} [(1 - \frac{\lambda_{js}}{\lambda_j}) m_{vj} g$$

$$+ k_{vjs} \frac{1}{ax(s)} \sum_{k=1}^{ax(s)} z_\theta(x_{jsm}) + c_{vjs} \frac{1}{ax(s)} \sum_{k=1}^{ax(s)} \dot{z}_\theta(x_{jsm})]$$

$v_n(x) = \varphi_n(x)$より,

$$f_{ti} = f_{bi} e$$

$$f_{vj} = -\sum_{s=1}^{2} [k_{vjs} \frac{1}{ax(s)} \sum_{m=1}^{ax(s)} z_\theta(x_{jsm}) + c_{vjs} \frac{1}{ax(s)} \sum_{m=1}^{ax(s)} \dot{z}_\theta(x_{jsm})]$$

$$f_{\lambda j} = \sum_{s=1}^{2} (-1)^s \lambda_{js} [k_{vjs} \frac{1}{ax(s)} \sum_{m=1}^{ax(s)} z_\theta(x_{jsm})$$

$$+ c_{vjs} \frac{1}{ax(s)} \sum_{m=1}^{ax(s)} \dot{z}_\theta(x_{jsm})]$$

以上 (A2.27)

式(A2.25) に書くと次のようになる。

$$\mathbb{M}^* \ddot{\mathbf{x}} + \mathbb{C}^* \dot{\mathbf{x}} + \mathbb{K}^* \mathbf{x} = \mathbf{f}^* \tag{A2.28}$$

ここに,

$$\mathbf{x} = \{a_1; \cdots ; a_n; c_1; \cdots ; c_n; z_1; \theta_1; \cdots ; z_h; \theta_h\} \tag{A2.29}$$

連立２階微分方程式(A2.28) の解$\mathbf{x}$を数値解析によって求めるにあたり、その一方法であるNewmark-β法を用いると，次の置き換えが必要である。

$$\ddot{\mathbf{x}} = (\mathbb{M}^*)^{-1} \mathbf{f}^* - (\mathbb{M}^*)^{-1} \mathbb{C}^* \dot{\mathbf{x}} - (\mathbb{M}^*)^{-1} \mathbb{K}^* \mathbf{x} \tag{A2.30}$$

ここで，$\mathbb{M}^*$の逆マトリックス計算は以下のようにして求める。

$$\mathbb{M}^* = \left[\begin{array}{cc|c} \mathbb{M}_{11} & \mathbb{M}_{12} & \\ \mathbb{M}_{21} & \mathbb{M}_{22} & \mathbb{0} \\ \hline \multicolumn{2}{c|}{\mathbb{0}} & \mathbb{M}_{33} \end{array}\right] \qquad (\mathbb{M}^*)^{-1} = \mathbb{X} = \left[\begin{array}{cc|cc} \mathbb{X}_{11} & \mathbb{X}_{12} & \mathbb{X}_{13} & \mathbb{X}_{14} \\ \mathbb{X}_{21} & \mathbb{X}_{22} & \mathbb{X}_{23} & \mathbb{X}_{24} \\ \hline \multicolumn{2}{c|}{\mathbb{0}} & \multicolumn{2}{c}{\mathbb{X}_{33}} \end{array}\right] \tag{A2.31}$$

$$\mathbb{M}^*\mathbb{X} =$$

$$\left[\begin{array}{cc|cc} \mathbb{M}_{11}\mathbb{X}_{11}+\mathbb{M}_{12}\mathbb{X}_{21} & \mathbb{M}_{11}\mathbb{X}_{12}+\mathbb{M}_{12}\mathbb{X}_{22} & \mathbb{M}_{11}\mathbb{X}_{13}+\mathbb{M}_{12}\mathbb{X}_{23} & \mathbb{M}_{11}\mathbb{X}_{14}+\mathbb{M}_{12}\mathbb{X}_{24} \\ \mathbb{M}_{21}\mathbb{X}_{11}+\mathbb{M}_{22}\mathbb{X}_{21} & \mathbb{M}_{21}\mathbb{X}_{12}+\mathbb{M}_{22}\mathbb{X}_{22} & \mathbb{M}_{21}\mathbb{X}_{13}+\mathbb{M}_{22}\mathbb{X}_{23} & \mathbb{M}_{21}\mathbb{X}_{14}+\mathbb{M}_{22}\mathbb{X}_{24} \\ \hline \multicolumn{2}{c|}{\mathbb{0}} & \multicolumn{2}{c}{\mathbb{M}_{33}\mathbb{X}_{33}} \end{array}\right]$$

$\mathbb{M}^*\mathbb{X} = \mathbb{I}$より，

$$\mathbb{M}_{11}\mathbb{X}_{11} + \mathbb{M}_{12}\mathbb{X}_{21} = \mathbb{I}$$

$$\mathbb{M}_{21}\mathbb{X}_{11} + \mathbb{M}_{22}\mathbb{X}_{21} = \mathbb{0}$$

$$\mathbb{M}_{11}\mathbb{X}_{11} - \mathbb{M}_{12}\mathbb{M}_{22}^{-1}\mathbb{M}_{21}\mathbb{X}_{11} = \mathbb{I}$$

$$\mathbb{X}_{11} = (\mathbb{M}_{11} - \mathbb{M}_{12}\mathbb{M}_{22}^{-1}\mathbb{M}_{21})^{-1}$$

$$\mathbb{X}_{21} = -\mathbb{M}_{22}^{-1}\mathbb{M}_{21}\mathbb{X}_{11}$$

$$= -\mathbb{M}_{22}^{-1}\mathbb{M}_{21}(\mathbb{M}_{11} - \mathbb{M}_{12}\mathbb{M}_{22}^{-1}\mathbb{M}_{21})^{-1}$$

$$\mathbb{M}_{11}\mathbb{X}_{12} + \mathbb{M}_{12}\mathbb{X}_{22} = \mathbb{0}$$

$$\mathbb{M}_{21}\mathbb{X}_{12} + \mathbb{M}_{22}\mathbb{X}_{22} = \mathbb{I}$$

$$\mathbb{X}_{22} = (\mathbb{M}_{22} - \mathbb{M}_{21}\mathbb{M}_{11}^{-1}\mathbb{M}_{12})^{-1}$$

$$\mathbb{X}_{12} = -\mathbb{M}_{11}^{-1}\mathbb{M}_{12}(\mathbb{M}_{22} - \mathbb{M}_{21}\mathbb{M}_{11}^{-1}\mathbb{M}_{12})^{-1}$$

$$\mathbb{M}_{11}\mathbb{X}_{13} + \mathbb{M}_{12}\mathbb{X}_{23} = \mathbb{0}$$

$$\mathbb{M}_{21}\mathbb{X}_{13} + \mathbb{M}_{22}\mathbb{X}_{23} = \mathbb{0}$$

$$\mathbb{X}_{13} = \mathbb{X}_{23} = \mathbb{0}$$

$$\mathbb{M}_{11}\mathbb{X}_{14} + \mathbb{M}_{12}\mathbb{X}_{24} = \mathbb{0}$$

$$\mathbb{M}_{21}\mathbb{X}_{14} + \mathbb{M}_{22}\mathbb{X}_{24} = \mathbb{0}$$

$$\mathbb{X}_{14} = \mathbb{X}_{24} = \mathbb{0}$$

$$\mathbb{M}_{33}\mathbb{X}_{33} = \mathbb{I}$$

$$\mathbb{X}_{33} = \mathbb{M}_{33}^{-1}$$

$\mathbb{M}_{11}, \mathbb{M}_{12}, \mathbb{M}_{21}, \mathbb{M}_{22}, \mathbb{M}_{33}$はすべて対角行列なので，$(\mathbb{M}^*)^{-1}$ の要素は次のように計算できる。

$$\mathbb{X}_{11} = (\mathbb{M}_{11} - \mathbb{M}_{12}\mathbb{M}_{22}^{-1}\mathbb{M}_{21})^{-1} = (M_b - z_s M_b M_t^{-1} \frac{z_s}{\gamma_s^2} M_t)^{-1}\mathbb{I}$$

$$= \frac{1}{(1 - \frac{z_s^2}{\gamma_s^2})M_b}\mathbb{I}$$

$$\mathbb{X}_{21} = -\mathbb{M}_{22}^{-1}\mathbb{M}_{21}\mathbb{X}_{11} = -\frac{z_s}{\gamma_s^2}\frac{1}{(1 - \frac{z_s^2}{\gamma_s^2})M_b}\mathbb{I}$$

$$\mathbb{X}_{22} = (\mathbb{M}_{22} - \mathbb{M}_{21}\mathbb{M}_{11}^{-1}\mathbb{M}_{12})^{-1} = (M_t - \frac{z_s}{\gamma_s^2} M_t M_b^{-1} z_s M_b)^{-1}\mathbb{I}$$

$$= \frac{1}{(1 - \frac{z_s^2}{\gamma_s^2})M_t}\mathbb{I}$$

$$\mathbb{X}_{12} = -\mathbb{M}_{11}^{-1}\mathbb{M}_{12}\mathbb{X}_{22} = -\frac{z_s}{(1 - \frac{z_s^2}{\gamma_s^2})M_t}\mathbb{I}$$

$$(\mathbb{M}^*)^{-1} = \left[\begin{array}{cc:cccc} \mathbb{X}_{11} & \mathbb{X}_{12} & & & \mathbb{0} & \\ \mathbb{X}_{21} & \mathbb{X}_{22} & & & & \\ \hdashline & & 1/m_{v1} & & & \mathbb{0} \\ & & & 1/m_{v1}\gamma_1^2 & & \\ & \mathbb{0} & & & \ddots & \\ & & & & & 1/m_{vh} \\ & & & \mathbb{0} & & 1/m_{vh}\gamma_h^2 \end{array}\right] \qquad (A2.32)$$

ここに,

$$
\left.
\begin{aligned}
\mathbf{X}_{11} &= \frac{1}{\left(1-\dfrac{z_s^2}{\gamma_s^2}\right)M_b}\,\mathbb{I} &&= \mathbf{x}_{aa}\,\mathbb{I} \\
\mathbf{X}_{21} &= -\frac{z_s}{\gamma_s^2}\,\frac{1}{\left(1-\dfrac{z_s^2}{\gamma_s^2}\right)M_b}\,\mathbb{I} &&= \mathbf{x}_{ba}\,\mathbb{I} \\
\mathbf{X}_{12} &= -\frac{z_s}{\left(1-\dfrac{z_s^2}{\gamma_s^2}\right)M_t}\,\mathbb{I} &&= \mathbf{x}_{ab}\,\mathbb{I} \\
\mathbf{X}_{22} &= \frac{1}{\left(1-\dfrac{z_s^2}{\gamma_s^2}\right)M_t}\,\mathbb{I} &&= \mathbf{x}_{bb}\,\mathbb{I}
\end{aligned}
\right\}
\quad (A2.33)
$$

式(A2.25)と(A2,26)より,

$$
\mathbb{C}^* = \left[\begin{array}{c:c:c}
\mathbb{C}_{11} & e\,\mathbb{C}_{11} & \mathbb{C}_{13} \\ \hdashline
e\,\mathbb{C}_{11} & e^2\,\mathbb{C}_{11} & e\,\mathbb{C}_{13} \\ \hdashline
\mathbb{C}_{31} & e\,\mathbb{C}_{31} & \mathbb{C}_{33}
\end{array}\right]
+
\left[\begin{array}{c:c:c}
\mathbb{C}_{d1} & \mathbb{0} & \mathbb{0} \\ \hdashline
\mathbb{0} & \mathbb{C}_{d1} & \mathbb{0} \\ \hdashline
\mathbb{0} & \mathbb{0} & \mathbb{0}
\end{array}\right]
\qquad (A2.34)
$$

ここに,

$$
\left.
\begin{aligned}
&\mathbb{C}_{11} = [\,c_{big}\,], \quad \mathbb{C}_{13} = [\,c_{\phi ij}\ \ c_{\lambda ij}\,] \\
&\mathbb{C}_{31} = \begin{bmatrix} c_{\phi ij} \\ c_{\lambda ij} \end{bmatrix}, \quad \mathbb{C}_{33} = \begin{bmatrix} \ddots & & \\ & c_{vj}\ \ c_{v\lambda j} & \\ & c_{v\lambda j}\ \ c_{\lambda\lambda j} & \\ & & \ddots \end{bmatrix} \\
&\mathbb{C}_{d1} = \begin{bmatrix} \ddots & & \\ & 2h_{bi}p_{bi}M_b & \\ & & \ddots \end{bmatrix}, \quad \mathbb{C}_{d1} = \begin{bmatrix} \ddots & & \\ & 2h_{ti}p_{ti}M_t & \\ & & \ddots \end{bmatrix}
\end{aligned}
\right\}
\quad (A2.35)
$$

$$
(\mathbb{M}^*)^{-1}\mathbb{C}^* = \left[\begin{array}{c:c:c}
\mathbb{C}_{M11} & \mathbb{C}_{M12} & \mathbb{C}_{M13} \\ \hdashline
\mathbb{C}_{M21} & \mathbb{C}_{M22} & \mathbb{C}_{M23} \\ \hdashline
\mathbb{C}_{M31} & \mathbb{C}_{M32} & \mathbb{C}_{M33}
\end{array}\right]
\qquad (A2.36)
$$

ここに，

$$\left.\begin{aligned}
\mathbb{C}_{M11} &= (x_{aa} + x_{ab}e)\mathbb{C}_{11} + x_{aa}\mathbb{C}_{d1} \\
\mathbb{C}_{M21} &= (x_{ba} + x_{bb}e)\mathbb{C}_{11} + x_{ba}\mathbb{C}_{d1} \\
\mathbb{C}_{M12} &= (x_{aa}e + x_{ab}e^2)\mathbb{C}_{11} + x_{ab}\mathbb{C}_{d2} \\
\mathbb{C}_{M22} &= (x_{ba}e + x_{bb}e^2)\mathbb{C}_{11} + x_{bb}\mathbb{C}_{d2} \\
\mathbb{C}_{M13} &= (x_{aa} + x_{ab}e)\mathbb{C}_{13} \\
\mathbb{C}_{M23} &= (x_{ba} + x_{bb}e)\mathbb{C}_{13} \\
\mathbb{C}_{M31} &= \mathbb{X}_{33}\mathbb{C}_{31} \\
\mathbb{C}_{M32} &= e\mathbb{X}_{33}\mathbb{C}_{31} \\
\mathbb{C}_{M33} &= \mathbb{X}_{33}\mathbb{C}_{33}
\end{aligned}\right\} \quad (A2.37)$$

A２．５　主桁の動的たわみおよび動的応力度

連立微分方程式の解$\mathbf{x}=\{a_1;\cdots;a_n;c_1;\cdots;c_n;z_1;\theta_1;\cdots;z_h;\theta_h\}$が求められると，橋の任意断面における重心の鉛直方向変位$v(t,x)$ およびせん断中心回りの回転角$\varphi(t,x)$ は式(3.10)により得られる。

$$\left.\begin{aligned}
v(t,x) &= \sum_n a_n(t)\,v_n(x) \\
\varphi(t,x) &= \sum_n c_n(t)\,\varphi_n(x)
\end{aligned}\right\} \quad (3.10)$$

せん断中心から主桁までの水平距離をs_{gk}とすると，主桁の動的たわみは次式となる。

$$y_{gk}(t,x) = v(t,x) + \varphi(t,x)\,s_{gk} \qquad (A2.38)$$

重心軸回りの曲げモーメントは次式の通りである。

$$\begin{aligned}
M_z &= -EI_z\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \\
&= EI_z\sum_n\left(\frac{n\pi}{\ell}\right)^2\sin\frac{n\pi x}{\ell}\,a_n(t)
\end{aligned} \qquad (A2.39)$$

曲げによる垂直応力度は，

$$\sigma_M = \frac{M_z}{I_z} y \tag{A2.40}$$

せん断中心回りの曲げねじりモーメントは次式の通りである。

$$M_w = E I_w \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}$$

$$= - E I_w \sum_n \left(\frac{n\pi}{\ell_b}\right)^2 \sin \frac{n\pi x}{\ell_b} c_n(t) \tag{A2.41}$$

曲げねじりモーメントによる曲げねじり２次垂直応力度σ_wは，

$$\sigma_w = \frac{M_w}{I_w} U_s \tag{A2.42}$$

ここに U_sはせん断中心に関するそり関数である。

故に，橋軸方向の動的応力度は次式の通りである。

$$\sigma_x = \sigma_M + \sigma_w$$

$$= \frac{M_z}{I_z} y + \frac{M_w}{I_w} U_s \tag{A2.43}$$

付録３　状態遷移行列と式（４．６０）の解過程の誘導

Ａ３．１　状態遷移行列

式(4.60)の非斉次線形微分方程式に関して，次の斉次微分方程式を考える。

$$\dot{\mathbf{w}}(t) = \mathbf{A}(t)\mathbf{w}(t), \qquad \mathbf{w}(t_0) = \mathbf{w}_0 \tag{A3.1}$$

この方程式の解$\mathbf{w}(t)$ は，ただ一つ存在し次式で与えられる。

$$\mathbf{w}(t) = \mathbf{W}(t)\mathbf{w}_0 \tag{A3.2}$$

ここに，正方行列$\mathbf{W}(t)$は行列微分方程式

$$\dot{\mathbf{W}}(t) = \mathbf{A}(t)\mathbf{W}(t), \qquad \mathbf{W}(t_0) = \mathbb{I} \quad (\text{単位行列}) \tag{A3.3}$$

の一意的な解である。

初期値 $\mathbf{W}(t_0)$ が，正則な行列として与えられたときの式(A3.3)の解を線形微分方程式(A3.1)の基本行列と呼び，特に，初期値が $\mathbf{W}(t_0) = \mathbb{I}$ として与えられたときの解を基本解と呼ぶ。

線形微分方程式(A3.1)の状態遷移行列$\Phi(t, \tau)$は次式により定義される。

$$\Phi(t, \tau) = \mathbf{W}(t)\mathbf{W}^{-1}(\tau) \tag{A3.4}$$

ここに，$\mathbf{W}(t)$，$\mathbf{W}(\tau)$は，ある時刻 $t=t_0$ で正則な行列$\mathbf{W}_0$に等しくなるように定められた線形微分方程式(A3.1)の基本行列である。この状態遷移行列は，初期時刻 $t=\tau$ において，$\mathbf{W}(\tau) = \mathbb{I}$ として解かれた行列微分方程式(A3.3)の解に等しい。

A3.2　線形微分方程式(4.60)の解過程

次に，式(4.60)で与えられる非斉次線形微分方程式の解過程を誘導する。ここでは，$\mathbb{B}(t)\mathbf{z}(t)$の各要素はリーマン積分可能として計算をすすめる。

いま，$\mathbf{W}(t)$を$\mathbf{W}(t_0) = \mathbb{I}$ を満足する基本解とすると逆行列が存在する。そこで，$\mathbf{w}(t) = \mathbf{W}(t)\mathbf{u}(t)$ とおき，この両辺を微分すると，

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{w}}(t) &= \dot{\mathbf{W}}(t)\mathbf{u}(t) + \mathbf{W}(t)\dot{\mathbf{u}}(t)\\ &= \mathbf{A}(t)\mathbf{W}(t)\mathbf{u}(t) + \mathbf{W}(t)\dot{\mathbf{u}}(t)\\ &= \mathbf{A}(t)\mathbf{w}(t) + \mathbf{W}(t)\dot{\mathbf{u}}(t)\end{aligned} \tag{A3.5}$$

となる。式(A3.5)を式(4.60)と比べると，

$$\mathbb{B}(t)\mathbf{z}(t) = \mathbf{W}(t)\dot{\mathbf{u}}(t) \tag{A3.6}$$

となり，これは，

$$\dot{\mathbf{u}}(t) = \mathbf{W}^{-1}(t)\mathbb{B}(t)\mathbf{z}(t) \tag{A3.7}$$

と書ける。この両辺を積分すると，

$$\mathbf{u}(t) = \mathbf{u}(t_0) + \int_{t_0}^{t} \mathbf{W}^{-1}(\tau)\mathbb{B}(\tau)\mathbf{z}(\tau)d\tau \tag{A3.8}$$

また，

$$\begin{aligned}\mathbf{w}(t_0) &= \mathbf{W}(t_0)\mathbf{u}(t_0)\\ &= \mathbf{u}(t_0)\end{aligned} \tag{A3.9}$$

であるから，式(A3.9)を式(A3.8)に代入すると，

$$\mathbf{u}(t) = \mathbf{w}(t_0) + \int_{t_0}^{t} \mathbf{W}^{-1}(\tau)\mathbb{B}(\tau)\mathbf{z}(\tau)d\tau \tag{A3.10}$$

式(A3.10)の両辺の左からW(t)をかけると，

$$\mathbf{W}(t)\mathbf{u}(t) = \mathbf{W}(t)\mathbf{w}(t_0) + \int_{t_0}^{t} \mathbf{W}(t)\mathbf{W}^{-1}(\tau)\mathbb{B}(\tau)\mathbf{z}(\tau)d\tau$$

$$\mathbf{w}(t) = \mathbf{W}(t)\mathbf{w}(t_0) + \int_{t_0}^{t} \mathbf{W}(t)\mathbf{W}^{-1}(\tau)\mathbb{B}(\tau)\mathbf{z}(\tau)d\tau \qquad \text{(A3.11)}$$

ここで，状態遷移行列$\Phi(t,\tau)$は式(A3.4)より，

$$\begin{aligned}\Phi(t, t_0) &= \mathbf{W}(t)\mathbf{W}^{-1}(t_0)\\ &= \mathbf{W}(t)\mathbb{I}\\ &= \mathbf{W}(t)\end{aligned} \qquad \text{(A3.12)}$$

となるから，式(A3.4)，(A3.12)を式(A3.11)に代入すると，結局，運動方程式(4.60)の解過程は次式で与えられる。

$$\mathbf{w}(t) = \Phi(t,t_0)\mathbf{w}_0(t) + \int_{t_0}^{t} \Phi(t,\tau)\mathbb{B}(\tau)\mathbf{z}(\tau)d\tau \qquad \text{(4.62)}$$

なお，一般に，変数係数の線形微分方程式が解析的に解けるのは限られた場合であり，ここにおける式(A3.3)についても解析的には解けず，数値計算法の一つ Runge-Kutta-Gill 法により状態遷移行列を求める。

付録４　外力変数ベクトルz（ｔ）の共分散行列と路面凹凸のパワースペクトル密度との関係

Ａ４．１　フーリエ変換およびフーリエ逆変換

$z_0(t)$のフーリエ変換を$Z_0(\omega)$とすると，

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} z_0(t)e^{-j\omega t}\,dt = Z_0(\omega), \qquad z_0(t) = \int_{-\infty}^{\infty} Z_0(\omega)e^{j\omega t}\,d\omega \tag{A4.1}$$

また，$\dot{z}_0(t)$については，

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \dot{z}_0(t)e^{-j\omega t}\,dt = j\omega Z_0(\omega) \quad \text{（フーリエ変換の微分法則）} \tag{A4.2}$$

$$\dot{z}_0(t) = \int_{-\infty}^{\infty} j\omega Z_0(\omega)e^{j\omega t}\,d\omega$$

したがって，$z_0(vt)$のフーリエ変換は，$vt=\xi$とおくと $dt=\frac{1}{v}\,d\xi$だから，

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} z_0(vt)e^{-j\omega t}\,dt = \frac{1}{2\pi v}\int_{-\infty}^{\infty} z_0(\xi)\exp\left(-j\frac{\omega}{v}\xi\right)d\xi$$

$$= \frac{1}{2\pi v}Z_0\left(\frac{\omega}{2\pi v}\right)$$

（フーリエ変換の拡大定理）　(A4.3)

また，$\dot{z}_0(vt)$のフーリエ変換は，$vt=\xi$とおくと，

$$\frac{dz_0(vt)}{dt} = \frac{dz_0(\xi)}{d\xi}\frac{d\xi}{dt} = \frac{dz_0(\xi)}{d\xi}v$$

となるから，

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\dot{z}_0(vt)e^{-j\omega t}\,dt=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dz_0(\xi)}{d\xi}\exp(-j\frac{\omega}{v}\xi)d\xi$$

$$=\frac{1}{2\pi}\left[z_0(\xi)\exp(-j\frac{\omega}{v}\xi)\right]_{-\infty}^{\infty}$$

$$-\frac{1}{2\pi}(-j\frac{\omega}{v})\int_{-\infty}^{\infty}z_0(\xi)\exp(-j\frac{\omega}{v}\xi)d\xi$$

$$=j\omega\frac{1}{2\pi v}Z_0(\frac{\omega}{2\pi v}) \qquad (A4.4)$$

よって，それぞれのフーリエ逆変換は，

$$z_0(vt)=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{2\pi v}Z_0(\frac{\omega}{2\pi v})e^{j\omega t}\,d\omega \qquad (A4.5)$$

$$\dot{z}_0(vt)=\int_{-\infty}^{\infty}j\omega\frac{1}{2\pi v}Z_0(\frac{\omega}{2\pi v})e^{j\omega t}\,d\omega \qquad (A4.6)$$

A4.2　外力変数ベクトル$\mathbf{z}(t)$の共分散行列

次に，式(A4.3)～(A4.6)を用いて，$\mathbf{z}(t)$の共分散行列(4.21)の各要素について計算する。

$$E[\mathbf{z}(\tau)\mathbf{z}^T(s)]=\begin{bmatrix} E[z_0(v\tau)z_0(vs)] & E[z_0(v\tau)\dot{z}_0(vs)] \\ E[\dot{z}_0(v\tau)z_0(vs)] & E[\dot{z}_0(v\tau)\dot{z}_0(vs)] \end{bmatrix} \qquad (4.21)$$

(i) $E[z_0(v\tau)z_0(vs)]$

以下の各項において，τとsの時間差をあらためてτとおき，$z_0(vt)$，$\dot{z}_0(vt)$ともにエ

ルゴード性を有すると仮定する。

$$E[z_0(vt)z_0(v(t+\tau))] = R_{z_0z_0}(\tau)$$

$$= \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} z_0(vt)z_0(v(t+\tau))\,dt$$

$$= \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} z_0(vt) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\pi v} Z_0\left(\frac{\omega}{2\pi v}\right) e^{j\omega(t+\tau)}\,d\omega\,dt$$

$$= \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{v} Z_0\left(\frac{\omega}{2\pi v}\right) e^{j\omega\tau} \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_{-T/2}^{T/2} z_0(vt)e^{j\omega t}\,dt \right\} d\omega$$

$z_0(vt)$は$[-T/2,\ T/2]$以外では0であると仮定すれば上式の$[-T/2,\ T/2]$での積分は，$[-\infty,\ \infty]$での積分に置き換えられ，さらに式(A4.3)の共役関係，

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-T/2}^{T/2} z_0(vt)e^{j\omega t}\,dt = \frac{1}{2\pi v} Z_0^*\left(\frac{\omega}{2\pi v}\right) \tag{A4.7}$$

を代入すれば，

$$R_{z_0z_0}(\tau) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{v} Z_0\left(\frac{\omega}{2\pi v}\right) e^{j\omega\tau} \frac{1}{2\pi v} Z_0^*\left(\frac{\omega}{2\pi v}\right) d\omega$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\pi v} \lim_{T\to\infty} \frac{Z_0\left(\frac{\omega}{2\pi v}\right) Z_0^*\left(\frac{\omega}{2\pi v}\right)}{vT} e^{j\omega\tau}\,d\omega$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\pi v} S_{z_0}\left(\frac{\omega}{2\pi v}\right) e^{j\omega\tau}\,d\omega$$

ここに，$\frac{1}{2\pi v} S_{z_0}\left(\frac{\omega}{2\pi v}\right)$ は路面凹のパワースペクトル密度である。故に，

$$E\left[z_0(v\tau)z_0(vs)\right] = R_{z_0z_0}(s-\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\pi v} S_{z_0}\left(\frac{\omega}{2\pi v}\right) e^{j\omega(s-\tau)} d\omega \tag{A4.8}$$

(ii) $E\left[\dot{z}_0(v\tau)z_0(vs)\right]$

$$E\left[\dot{z}(vt)z_0(v(t+\tau))\right] = R_{\dot{z}_0z_0}(\tau)$$

$$= \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{v} Z_0\left(\frac{\omega}{2\pi v}\right) e^{j\omega\tau} \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_{-T/2}^{T/2} \dot{z}_0(vt) e^{j\omega t} dt \right\} d\omega$$

ここで，式(A4.4)の共役関係，

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-T/2}^{T/2} \dot{z}_0(vt) e^{j\omega t} dt = -j\omega \frac{1}{2\pi v} Z_0^*\left(\frac{\omega}{2\pi v}\right) \tag{A4.9}$$

を用いると，

$$R_{\dot{z}_0z_0}(\tau) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{v} Z_0\left(\frac{\omega}{2\pi v}\right) e^{j\omega\tau}(-j\omega) \frac{1}{2\pi v} Z_0^*\left(\frac{\omega}{2\pi v}\right) d\omega$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{-j\omega}{2\pi v} \lim_{T\to\infty} \frac{Z_0\left(\frac{\omega}{2\pi v}\right) Z_0^*\left(\frac{\omega}{2\pi v}\right)}{vT} e^{j\omega\tau} d\omega$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{-j\omega}{2\pi v} S_{z_0}\left(\frac{\omega}{2\pi v}\right) e^{j\omega\tau} d\omega$$

故に，

$$E\left[\dot{z}_0(v\tau)z_0(vs)\right] = R_{\dot{z}_0z_0}(s-\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{-j\omega}{2\pi v} S_{z_0}\left(\frac{\omega}{2\pi v}\right) e^{j\omega(s-\tau)} d\omega \tag{A4.10}$$

(iii) $E[z_0(v\tau)\dot{z}_0(vs)]$

$$E[z(vt)\dot{z}_0(v(t+\tau))] = R_{z_0\dot{z}_0}(\tau)$$

$$= \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} z_0(vt)\dot{z}_0(v(t+\tau))\,dt$$

$$= \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} z_0(vt) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{j\omega}{2\pi v} Z_0\left(\frac{\omega}{2\pi v}\right) e^{j\omega(t+\tau)}\,d\omega\,dt$$

$$= \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{j\omega}{v} Z_0\left(\frac{\omega}{2\pi v}\right) e^{j\omega\tau} \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_{-T/2}^{T/2} z_0(vt) e^{j\omega t}\,dt \right\} d\omega$$

ここで，式(A4.7)を用いると，

$$R_{z_0\dot{z}_0}(\tau) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{j\omega}{v} Z_0\left(\frac{\omega}{2\pi v}\right) e^{j\omega\tau} \frac{1}{2\pi v} Z_0^*\left(\frac{\omega}{2\pi v}\right) d\omega$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{j\omega}{2\pi v} \lim_{T\to\infty} \frac{Z_0\left(\frac{\omega}{2\pi v}\right) Z_0^*\left(\frac{\omega}{2\pi v}\right)}{vT} e^{j\omega\tau} d\omega$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{j\omega}{2\pi v} S_{z_0}\left(\frac{\omega}{2\pi v}\right) e^{j\omega\tau} d\omega$$

故に，

$$E[z_0(v\tau)\dot{z}_0(vs)] = R_{z_0\dot{z}_0}(s-\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{j\omega}{2\pi v} S_{z_0}\left(\frac{\omega}{2\pi v}\right) e^{j\omega(s-\tau)} d\omega \tag{A4.11}$$

(iv) $E[\dot{z}_0(v\tau)\dot{z}_0(vs)]$

$$E[\dot{z}(vt)\dot{z}_0(v(t+\tau))] = R_{\dot{z}_0\dot{z}_0}(\tau)$$

$$= \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \dot{z}_0(vt)\dot{z}_0(v(t+\tau))\,dt$$

$$= \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \dot{z}_0(vt) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{j\omega}{2\pi v} Z_0\left(\frac{\omega}{2\pi v}\right) e^{j\omega(t+\tau)} d\omega\, dt$$

$$= \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{j\omega}{v} Z_0\left(\frac{\omega}{2\pi v}\right) e^{j\omega\tau} \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_{-T/2}^{T/2} \dot{z}_0(vt) e^{j\omega t} dt \right\} d\omega$$

ここで，式(A4.9)を用いると，

$$R_{\dot{z}_0\dot{z}_0}(\tau) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{j\omega}{v} Z_0\left(\frac{\omega}{2\pi v}\right) e^{j\omega\tau} \frac{-j\omega}{2\pi v} Z_0^*\left(\frac{\omega}{2\pi v}\right) d\omega$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{-(j\omega)^2}{2\pi v} \lim_{T\to\infty} \frac{Z_0\left(\frac{\omega}{2\pi v}\right) Z_0^*\left(\frac{\omega}{2\pi v}\right)}{vT} e^{j\omega\tau} d\omega$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\omega^2}{2\pi v} S_{z_0}\left(\frac{\omega}{2\pi v}\right) e^{j\omega\tau} d\omega$$

故に，

$$E\left[\dot{z}_0(v\tau)\dot{z}_0(vs)\right] = R_{\dot{z}_0\dot{z}_0}(s-\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\omega^2}{2\pi v} S_{z_0}\left(\frac{\omega}{2\pi v}\right) e^{j\omega(s-\tau)} d\omega \tag{A4.12}$$

ここで，

$$\begin{bmatrix} 1 & j\omega \\ -j\omega & \omega^2 \end{bmatrix} = \omega$$

とおくと，

$$E[z(\tau)z^{T}(s)] = \int_{-\infty}^{\infty} \omega \frac{1}{2\pi v} S_{z_0}\left(\frac{\omega}{2\pi v}\right) e^{j\omega(s-\tau)} d\omega \tag{4.24}$$

A4.3 フーリエ変換の移動定理

走行荷重を２自由度系に理想モデル化した場合の外力変数ベクトル $z(t)$に関する共分散行列を求めるときの行列ωは，式(4.67)により表される。この各要素の計算には，前述のフーリエ変換の微分法則，拡大法則およびそれらを組み合わせたもの以外に次のフーリエ変換の移動定理を用いる。

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} z_0(vt-\lambda_v)e^{-j\omega t}dt = \frac{1}{2\pi v}\int_{-\infty}^{\infty} z_0(\xi-\lambda_v)\exp\left(-j\frac{\omega}{v}\xi\right)d\xi$$

$$= \frac{1}{2\pi v}\exp\left(-j\frac{\omega}{v}\lambda_v\right)\int_{-\infty}^{\infty} z_0(\xi-\lambda_v)\exp\left(-j\frac{\omega}{v}(\xi-\lambda_v)\right)d\xi$$

$$= \exp\left(-j\frac{\omega}{v}\lambda_v\right)\frac{1}{2\pi v}Z_0\left(\frac{\omega}{2\pi v}\right) \quad \text{（フーリエ変換の移動定理）} \tag{A4.13}$$

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \dot{z}_0(vt-\lambda_v)e^{-j\omega t}dt = j\omega\exp\left(-j\frac{\omega}{v}\lambda_v\right)\frac{1}{2\pi v}Z_0\left(\frac{\omega}{2\pi v}\right) \tag{A4.14}$$

これらのフーリエ変換は次式となる。

$$z_0(vt-\lambda_v) = \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-j\frac{\omega}{v}\lambda_v\right)\frac{1}{2\pi v}Z_0\left(\frac{\omega}{2\pi v}\right)e^{j\omega t}d\omega \tag{A4.15}$$

$$\dot{z}_0(vt-\lambda_v) = \int_{-\infty}^{\infty} j\omega\exp\left(-j\frac{\omega}{v}\lambda_v\right)\frac{1}{2\pi v}Z_0\left(\frac{\omega}{2\pi v}\right)e^{j\omega t}d\omega \tag{A4.16}$$

謝　辞

本論文は，1972年に筆者が大阪大学大学院工学研究科に入学して以来，今日に至る間の，道路橋の衝撃係数に関する研究成果をまとめたものであります。本論文をまとめるに際して，大阪大学工学部　福本唀士教授には温かい御指導と御教示を賜りました。ここに心からの感謝と共にお礼申し上げます。

また，大阪大学工学部　井上　豊教授には，本論文について，建築工学の立場より適切な御教示と御助言を賜りましたことに対して，感謝の意を表します。

大阪産業大学工学部　小松定夫教授（大阪大学名誉教授）には，筆者を本テーマに導いて頂いて以来，研究を遂行するに当り，丁寧な，ときには厳しい御指導を賜りました。ここに厚くお礼申し上げます。

大阪大学工学部　室田　明主任教授ならびに椹木　亨教授をはじめ土木工学教室の教授の先生方には，本論文をまとめるに際して，御配慮と励ましを頂きました。ここに記してお礼申し上げます。

さらに，大阪大学工学部　西村宣男助教授には，常に身近にあって励ましと共に便宜を御計り下さり，ここにお礼申し上げます。また，立命館大学理工学部　小林紘士教授には，筆者の大学院生時代に御教示頂いて以来，温かい見守りの内に，励まして頂きました。ここに感謝の意を表します。福井工業高等専門学校　佐々木　孝教授には，本論文の一部をなす現地実験を協同でさせて頂きました。改めてお礼申し上げます。

本論文を構成する内容は，筆者一人では成し得ないもので，当時，大阪大学工学部あるいは大阪大学大学院の学生であった遠藤正人君，坂手正直君，根岸嘉和君，堀内辰夫君，坂手貴志君，冨田真史君，福井　聡君，和田博久君，脇田雄一君，中家章夫君，楠　淳二君，小菅　朗君，蒲原幹生君の御協力に対して，感謝の意を表します。また，奈良　敬君，宮本龍三君，日下佳己君，井元康夫君，村上謙三君，小野晋二君，西野治彦君，岸上岩樹君，水川洋介君，猫本善続君，門野正博君らは，直接，本論文に関係するテーマではなかったが，本研究を遂行している時期に，共に研鑽を積む機会に恵まれた。ここに記して感謝の意を表します。さらに，現在大阪大学大学院生である嶋田玲志君，中出　收君および大阪大学工学部学生の田邉裕之君，本田義人君，太田　圭君には本研究に貢献して頂き，あるいは本論文の原稿作成に献身的に御協力頂いたことに対して感謝の意を表します。

本研究の一部には文部省科学研究費（試験研究１回，奨励研究２回）の補助を受けました。ここに謝意を表します。