【10】

氏名・(本籍)	赤(あか) 松(まつ) 豊(とよ) 博(ひろ)
学位の種類	理学博士
学位記番号	第 7870 号
学位授与の日付	昭和62年9月30日
学位授与の要件	学位規則第5条第2項該当
学位論文題目	**準楕円型でない二階偏微分作用素の族**
論文審査委員	(主査) 教授 田辺 広城 (副査) 教授 井川 満　教授 池田 信行　助教授 小松 玄

論文内容の要旨

当論文では，ある種の二階偏微分作用素Lが準楕円型でない為の十分条件を，Lの特性二次形式の符号の変化条件として与える。

ωを，ユークリッド空間R^n($n\geqq 1$)内の開集合で，$\omega\ni 0$とする。$T>0$に対し，$\Omega=\omega\times(-T,T)$と置き，$\omega$内の変数をx，$(-T,T)$内の変数をtで表わす。$\Omega$上定義された次の二階偏微分作用素Lを考える。

$L=\Sigma^n_{i,j=1}a_{ij}(x,t)\partial^2/\partial x_i\partial x_j+\Sigma^n_{k=1}b_k(x,t)\partial/\partial x_k+c(x,t)+\partial/\partial t.$

ここでLの各係数は複素数値をとり，$C^\infty(\Omega)$に属するとし，又$a_{ij}=a_{ji}$($i,j=1,\cdots,n$)とする。

$a(x,t,\xi)=\Sigma^n_{i,j=1}a_{ij}(x,t)\xi_i\xi_j,(x,t,\xi)\in\Omega\times R^n$

と置く。UをΩ内の開集合とする。LがU上準楕円型であるとは，U内の任意の開集合U'と任意の超関数$u\in\mathscr{D}'(U')$に対し，$Lu\in C^\infty(U')$ならば$u\in C^\infty(U')$となることである。LがU上大域的準楕円型であるとは，任意の超関数$u\in\mathscr{D}'(U)$に対し，$Lu\in C^\infty(U)$ならば$u\in C^\infty(U)$となることである。我々は次の定理を得る。

定理1　$\xi^0=(\xi^0_1,\cdots,\xi^0_n)\neq 0$，実数$\alpha<0$及び奇数$q>0$が存在し，次の(A－1)～(A－3)をみたすとする。(A－1) $\mathrm{Re}\,a(o,t,\xi^0)=\alpha t^q+O(t^{q+1})$，(A－2) $a_{ij}(o,t)=O(t^q)$，$b_k(o,t)=O(t^q)$ ($1\leqq i,j,k\leqq n$)，(A－3) $|\mathrm{grad}_x a_{ij}(o,t)|=O(t^{(q+1)/2})$，$|\mathrm{grad}_x b_k(o,t)|=O(t^{(q+1)/2})$ ($1\leqq i,j,k\leqq n$)。この時，Lは，原点を含むΩ内のいかなる開集合上でも大域的準楕円型ではない。

残りの二定理では，Lの係数はすべて実数値関数であるとし，又，$(x(t),\ t)$ を $(0,0)$ を通る $\Sigma_{k=1}^{n} b_k \partial/\partial x_k + \partial/\partial t$ の積分曲線とする。

定理2　定理1と同様の ξ^0，α，q が存在し，$a(x(t),\ t,\ \xi^0)=\alpha t^q+O(t^{q+1})$ とする。この時，Lは原点を含むΩ内のいかなる開集合上でも準楕円型でない。

定理3　c以外のLの係数は実解析的とする。$(T_1,\ T_2)$ を曲線 $(x(t),\ t)$ の定義域とする。LがΩ上準楕円型ならば，次の(i)(ii)(iii)の中のいずれかが成立する。

(i)　$a(x(t),\ t,\ \xi)\leqq 0$　for all $(t,\ \xi)\in(T_1,\ T_2)\times R^n$,

(ii)　$a(x(t),\ t,\ \xi)\leqq 0$　for all $(t,\ \xi)\in(T_1,\ T_2)\times R^n$,

(iii)　$T_1<T_0<T_2$ なる T_0 が存在し，$a(x(t),\ t,\ \xi)\leqq 0$ for all $(t,\ \xi)\in(T_1,\ T_0]\times R^n$ かつ $a(x(t),\ t,\ \xi)\geqq 0$ for all $(t,\ \xi)\in[T_0,\ T_2)\times R^n$。

定理1の証明は，(A－1)～(A－3) の下である種の微分不等式が成立しないことを漸近展開理論を適用して示すことにより得られる。定理2は，定理1と適当な座標変換を用いて証明される。定理3は，定理2及びLが準楕円型であるとの仮定より $a(x,\ t,\ \xi)$ が各 $(x,\ t)$ に対し ξ の非負型式又は非正型式になるというヘルマンダーの定理より従う。

論文の審査結果の要旨

本論文は2階線形偏微分作用素，

$L=\Sigma_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x,\ t)\partial^2/\partial x_i\partial x_j+\Sigma_{k=1}^{n} b_k(x,\ t)\partial/\partial x_k+c(x,\ t)+\partial/\partial t$

の準楕円性が成立するための一つの必要条件を示したものである。その理論はL. NirenbergとF. Trevesによる局所可解性と準楕円性の研究の流れを汲むものである。Lの2階の項の特性多項式 $a(x,\ t,\ \xi)=\Sigma_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x,\ t)\xi_i\xi_j$ 又はその実数部分が定符号でないとして，その符号の変り具合によってLが準楕円型でなくなることを明らかにした。即ちLの係数が複素数の時は $\xi^0\neq 0$，負の数 α，奇数 q が存在して $t=0$ の近傍で

$$\mathrm{Re}\ a(o,\ t,\ \xi^0)=\alpha t^q+O(|t|^{q+1})$$

が成立すること及びその他の若干の条件の下でLは原点の任意の近傍で大域的に準楕円型でないことを先ず示した。次にそれを用いてLの係数が実数の時ベクトル場 $\Sigma_{k=1}^{n} b_k(x,\ t)\partial/\partial x_k+\partial/\partial t$ の原点を通る積分曲線 $(x(t),\ t)$ に沿って $t=0$ の近傍で

$$a(x(t),\ t,\ \xi^0)=a t^q+O(|t|^{q+1})$$

が成立するならばLは原点の任意の近傍で準楕円型でないことを示した。その証明は，先ず複素係数の場合は，もしLが準楕円型であると仮定すると閉グラフ定理により成立する不等式が実際には成立しないことをLu＝0の漸近解の構成により示すことから成る。次にこの結果を用いて適当な座標変換により実係数の場合の結果を導く。これらの成果は2階の作用素に関し相当一般な形に準楕円性の必要条件を

与えたものであり，これ迄多くの研究者によって得られた結果の中でなされていたある種の仮定を除去することに成功していることは強調さるべきである。

本論文の主定理の証明の中の漸近解の構成には，独自の工夫と非常に精密微細な演算がなされている。特にその展開に現われる指数の系列の選定は巧みである。又実係数の場合の定理を複素係数の場合から導く際の座標変換等の演算も大いに注目に価する独持のものである。得られた結果の優れていることと合せ，本論文は準楕円性論に重要な貢献をしたものであり，理学博士の学位論文として充分な価値があると認める。