

Title	入力可観測性による電動機系の動トルク測定と速度制御に関する研究
Author(s)	関口, 隆
Citation	大阪大学, 1975, 博士論文
Version Type	VoR
URL	https://hdl.handle.net/11094/360
rights	
Note	

Osaka University Knowledge Archive : OUKA

<https://ir.library.osaka-u.ac.jp/>

Osaka University

入力可観測性による
電動機系の動トルク測定と
速度制御に関する研究

昭和49年11月

関 口 隆

報告番号 乙第1517号

関 口 隆

主論文 入力可観測性による電動機系の動トルク測定と速度制御
に関する研究

(主論文のうち印刷公表したもの)

1. Input, State Observability of Time-varying Systems with Unknown State and Input Values
(状態量および入力量が未知の場合の可変系の入力, 状態可観測性)
Bulletin of Faculty of Engineering
Yokohama National University
昭和44年3月
1. Observability of Linear Dynamic Measuring System and some Applications
(線形動的観測系の可観測性と若干の応用)
Fourth Congress of the International Federation of Automatic Control (Warszawa) Session 12
昭和44年6月
1. 時間離散系の入力可観測性および線形動的系の若干の性質
計測自動制御学会論文集5巻3号
昭和44年8月
1. 誘導電動機の過渡トルク応答
電気学会雑誌90巻2号
昭和45年2月
1. 動的観測系の入力可観測性と入出力双対性
計測自動制御学会論文集6巻2号
昭和45年4月

(主論文のうち未公表のもの)

1. 入力波形の再現と準 Invariance 制御系の構成
計測自動制御学会論文集10巻6号
昭和49年12月掲載予定

昭和 29 年 8 月 10 日

岡口 隆 殿



拝啓、時下益々御清祥のニニとお慶び申し上げます。
さて、さきに御投稿の「たゞき」の論文「入力波形の再現と準 Invariance 制御系の構成」

は、校閲の結果、論文集 Vol. 10 No. 6 (12月未発行予定) に掲載するに成りました。

つきましては、英文アブストラクト(題目割と要文を以て)を
たゞきにて御校訂の上、夕刊で打らなれして下さり
お願い致します。なお、印刷関係とスムーズに進めるため、
下記の日には御指定の「たゞき」8月30日号にて御返送
下さりお願い致します。

敬具

記

- 英字の大文字、小文字を混同しなす。そのには (大) (小), キリシ文字には (キ), 添字は エッキには V, フッキには A と表記して F 300.
- また、イタリック体には --- , エングリッシュ体には ~~~~ (この記法は)
- と記す。文字の下には --- と下す。

○ 図面には必ず御指定の T 300.

$$例) \left(\frac{PA}{KA} + \frac{DA}{KA} \right)^2 = \frac{2}{CA} \frac{DA}{L^2} C_0^{0.010} t + \left(\frac{DA}{KA} \right)^2$$

著者紹介が ありませんのでお名前宛に存じます。

要 約

本論文は入力可観測性の理論およびその電動機系への応用に関する研究をまとめたものである。

第1章では入力可観測性の理論がいわゆる現代制御理論の一成果であること、その電動機速度制御への応用は半導体技術の進歩に依存していることを指摘した。また従来の電動機系の動トルク測定法を制御の観点から検討・吟味した。

第2章では電動機系の状態方程式表現とそれに関連したことから述べた。

第3章は入力可観測性の理論を取扱う。入力可観測性の必要条件、十分条件、必要十分条件を導き、システムの構造に関する若干の考察を行なった。

第4章では入力可観測性の理論にもとづく入力波形の再現法について論じ、デジタル方式およびアナログ方式による誘導電動機系動トルク波形の再現に関する実験結果を示した。

第5章では入力波形の再現による Invariance 制御系構成に関する一般理論を述べ、つぎにサイリスタ・レオナード系へ適用した実験結果がかなりすぐれた応答を示すことを述べた。アナログシミュレーションをも行なって Invariance 条件を十分満足できることを立証した。

目 次

第 1 章	本研究の目的と背景	1
1.1	電動機制御と入力可観測性	1
1.2	電動機の世界制御と半導体技術の進歩	2
1.3	電動機系の動トルク測定	4
1.4	動トルク測定と Invariance 制御	6
1.5	入力可観測性と逆系	8
1 章	文 献	12
第 2 章	電動機系の状態方程式	17
2.1	直流電動機系の状態方程式	17
2.2	誘動電動機系の状態方程式	19
2.3	インバータ・誘導電動機系の状態方程式	23
2.4	Z 変換による過渡トルクの解析	26
2.4.1	過渡トルク解析の意義	26
2.4.2	過渡トルク式の導出	27
2.4.3	実験と計算結果	30
2.5	電動機系状態量の再現	35
2 章	文 献	38
2 章	付 録	41
第 3 章	線形系の入力可観測性	49
3.1	時間分散系	49
3.2	時間連続系	55
3.2.1	パルス列入力の可観測性	56
3.2.2	ベキ多項式入力の可観測性	58
3.2.3	一般波形の入力可観測性	65
3.3	状態量未知の場合の入力可観測性	65

3.3.1	時間離散系	65
3.3.2	時間連続系	67
3.4	線形可変系	69
3.4.1	時間離散系	69
3.4.2	時間連続系	72
3.5	入力可観測性に関する線形動的系の若干の性質	79
3.5.1	時間連続系と時間離散系の相似性	79
3.5.2	時間離散化した系の可制御性と可観測性	80
3.5.3	入出力双対性	82
3.5.4	状態可観測性と入力可観測性	83
3章	文 献	85
第4章	誘導電動機系の動トルク測定	87
4.1	入力波形の再現	87
4.1.1	デジタル方式による入力波形の再現	87
4.1.2	アナログ方式による入力波形の再現	89
4.1.3	L積分(遅延)逆系との比較	89
4.2	2入力・1出力系の入力波形の再現	91
4.3	誘導電動機系のパラメータの決定	98
4.3.1	動トルクおよび速度測定系のパラメータの決定	99
4.3.2	電動機回路定数の測定	108
4.4	誘導電動機系動トルクのデジタル測定	112
4.4.1	動トルク再現の基本式	112
4.4.2	実 験	120
4.4.3	実測データの処理	121
4.4.4	計 算	123
4.4.5	結果と考察	124
4.5	誘導電動機系のアナログ測定	128
4.5.1	測定回路	128
4.5.2	実験結果と考察	130
4章	文 献	148

第 5 章	入力波形の再現によるサイリスタ・	
	レオナード系の Invariance 制御 149
5.1	入力波形の再現による Invariance 制御系	
	構成の一般理論 149
5.2	サイリスタ・レオナード系への適用 152
5.2.1	他励直流電動機の入力可観測性 152
5.2.2	サイリスタ・レオナード系の Invariance	
	補償回路とその近似回路 155
5.3	サイリスタ・レオナード系のパラメータの測定	... 160
5.3.1	機械系定数の決定 160
5.3.2	電気回路定数の測定 163
5.3.3	その他の定数の測定 164
5.4	実験 166
5.4.1	制御回路の構成 166
5.4.2	実験結果と考察 168
5.5	アナログシミュレーションによる検討 173
5.5.1	1次系 173
5.5.2	3次系 174
5章	文献 177
結 び	178
付 録	179

第1章 本研究の目的と背景

第 1 章 本研究の目的と背景

1.1 電動機制御と入力可観測性

制御対象の特性は未知の場合が多く、これを把握することが重要なテーマとなる。このとき測定系の特性は既知であるのが普通である。この測定系を状態空間で記述すると、多入力、多出力系として表現される。さらに一般的に微分方程式表現の動的系として記述が可能である。多入力多出力動的系において複数個の出力端子から出力波形を観測することにより、複数個の入力端子に加えらるる入力信号を各々分離決定することができれば、この動的系は多入力多出力測定系となる。

それでは多入力多出力動的系として表わされるシステムが測定系となり得る条件は何でありまたその条件が満たされるときの入力波形の再現はどのようにしたらよいか。この問いに答えようとするのが入力可観測性の理論である。

被測定波形は基本的にはデジタル処理、アナログ処理およびオン・ライン処理、オフ・ライン処理の組合せによる四つの方法によって求めることが可能である。デジタル処理はデジタル形電子計算機の使用に依存するものであり、アナログ処理はICなどを使用したアナログ回路による方法である。前者の方法の一つに入力波形がベキ多項式で表現されるとして、その各係数を求める方法がある。この方法の一つの特徴は出力端子数が入力端子数よりも少なくてもよいことである。^{*}アナログ・オン・ライン処理の一方法は直接入力波形瞬時値を再現する方法であり、理論的には逆回路・逆系の構成と同一線上に並ぶ。この分野では新らしいいくつかの成果がみられる^{1)~11)}。しかし多入力多出力の逆系を制御系の構成に積極的に導入して成果を得たのは著者の知るかぎりでは皆無である。本論文ではアナログ・オン・ライン処理による入力波形の再現を応用した Invariance 系の構成について一定の成果が得られたので述べる。

電動機速度制御ははやくから実用化されており、サーボ理論の実現としても重要な位置を占めてきた。そして現在までの制御系はほとんど従来の制御理論に基づいて設計、解析が行なわれてきた。

本論文は入力可観測性について論じ、その電動機速度制御系への若干の具体的応用を示す。従来は素材となる制御機器が与えられており、それらをいかに上手に組み合わせたら所望の機能を有するシステムをつくることができるかというのが電動機制御系設計の態度であった。しかし最近の技術の進歩は素材を豊

*たゞし利用可能な情報が必要である。

富にし、また各要素のバリエーションも容易になったので、制御系設計者には制御理論上の能力を発揮する場が大きくなってきた。これからは理論と現実との融合がますます進むであろうし、またその融合のなかからしか新しい理論上の発展は期待できない。本論文は電動機速度制御系を新しい制御理論の観点から検討したものである。

1.2 電動機の速度制御と半導体技術の進歩

トランジスタが発明されてから25年近くが経過した。この間半導体技術は急速に進歩し、各分野に滲透している。電動機速度制御およびその関連分野を概観してみても、トランジスタ、小信号ダイオード、シリコン整流素子、制御用整流素子、IC、LSIの各種素子の出現により、信号変換・検出、保護、表示・警報、増幅、操作および制御の各種機能が半導体素子で実現されるようになってきた。

新しい半導体素子が使用されていくのに二つの段階がある。一つは真空管増幅器からトランジスタ増幅器へ、あるいは有接点継電器から半導体無接点継電器への置換のように、従来使用されていた素子の機能を基本的に受け継ぎつつ若干の技術改善が見られるものである。他は従来の素子では実現不可能なもの、あるいは非常に実現困難なものを新しくつくることである。

各種の電動機制御方式についてもこの二つの傾向は明らかに見られる。その代表的なものを列記すると、前者に属するのは、

- (1) ワードレオナード方式 → サイリスタレオナード方式
 - (2) 誘導電動機のクレーマ方式 → 誘導電動機の静止クレーマ方式
 - (3) 誘導電動機のセルピウス方式 → 誘導電動機のサイリスタセルピウス方式
- また後者に属するものは、
- (4) 誘導電動機のサイリスタインバータ駆動方式
 - (5) 無整流子電動機

である。

直流電動機はその制御性能の点より速度制御用に広く使用され、ワードレオナード方式が従来もっぱら採用されてきた。このワードレオナード方式に対してサイリスタレオナード方式はいくつかの長所を有するが、特に高効率と速応性の点より現在ではワードレオナード方式は完全にサイリスタレオナード方式におきかえられてしまったと言える。

誘導電動機は構造が簡単で堅牢、安価且使用・保守が単純のゆえに汎用動力機として広く使用されてきたが、最大の欠点は速度制御が簡単に行えないことであった。誘導電動機に速度制御性能をもたせるためには、従来は補助用回

転機（交流整流子機，同期変流機）を必要とした。クレーマ方式およびセルビウス方式はこれに属する。しかし交流整流子機あるいは同期変流機のような補助用回転機を必要とすることは全体の構成を複雑にし且使用法・保守がめんどうになる。それゆえ従来はあまり多く使用されることがなかった。しかし近年はかなり大きな電流容量をもつ整流器あるいはサイリスタが比較的安価に出来るようになり静止クレーマ方式あるいはサイリスタ・セルビウス方式が製作されるようになってきた。静止クレーマ方式は補助用回転機として直流機を必要とするのに対して，サイリスタ・セルビウス方式は補助用回転機を完全に静止機器におきかえたものである。したがって，主機の据付面積，ブラシの保守，価格の点より静止クレーマ方式に対してサイリスタ・セルビウス方式の方がすぐれ，後者はすでに2600 Kwの実績¹²⁾をもつなど，前者より多く採用される傾向にある。

前述の2方式は誘導電動機の2次誘起電力を制御する方式であるが，サイリスタインバータ駆動方式^{13)~15)}は1次側の周波数を直接可変にすることにより電動機の世界制御を行う方式である。この方式による誘導電動機の連続速度制御はサイリスタの出現によってはじめて可能となった。この方式は2次側に制御回路を有する方式に比して，起動時の電力容量をもたなければならぬので制御用素子の容量が大きくならざるを得ない。それゆえ現在では比較的小容量のかご形誘導電動機の世界制御用に使用されている。

無整流子電動機は基本的には直流機のブラシと整流子をサイリスタおよびその制御回路でおきかえたものであるが，回転子の構造にも新しい工夫が必要とされるので，半導体技術の進歩により新しく出現した電動機と考えてよい。この電動機は直流機と同様広範囲の世界制御が可能であり，且ブラシおよび整流子の保守が不要である点がすぐれている。

上にその一部を述べたように，新しい材料の出現により多くの技術改革が進められてきたが，また同時に新しい問題点も提起されている。たとえば，

- (1) 半導体素子は熱に弱く，過負荷耐量が小さいので使用法・保護装置に新しい工夫をしなければならない。
- (2) 点検・保守に従来とは異なる方法を工夫しなければならない。
- (3) 新しい方式の採用により，機械部分のストレス耐量等に対する検討をしなければならない。
- (4) 新しい素子によるすぐれた性能，たとえば速応性など，を生かした新しい制御方式，あるいは補償回路を必要とする。

本論文ではこれらのうちの2点，つまり(3)および(4)の観点から二つの問題を論じることとする。第1の問題はサイリスタインバータ駆動方式の際の誘導電動機発生トルクおよび負荷トルクの瞬時値の測定である。

これを本論文の第2章および第4章で取り扱う。本論文の第3章で述べる入力可観測性の理論によれば、誘導電動機の発生トルクと負荷トルクの瞬時値を同時測定することが可能であり、これはサイリスタインバータ駆動時の誘導電動機のダイナミクスを理解する上にきわめて重要なものである。電動機の発生トルクと負荷トルクを同時測定することは、いままでの技術では不可能であった。本論文ではデジタル測定およびアナログ測定により誘導電動機の発生トルクと負荷トルクの同時測定が可能であることを示す。第2の問題はサイリスタレオナード方式を採用したときの新しい制御方式の可能性の検討である。第5章では電動機負荷の変動を急速にキャッチしてそれを補う回路を構成することにより、速度変動の非常に少ない制御系を構成し得ることを示す。これは理論的には入力波形の再現により Invariance 制御系を構成し得ることを示しており、Petrov¹⁶⁾ が述べている必要条件を必ずしも満足していなくても Invariance 系の実現が可能であることを意味している。実際の Invariance 制御系の構成は、最近の IC 技術の進歩により良質で安価な演算増幅器が容易に入手できるのできわめて容易である。

以上の2例は、制御理論の発展と素子としての半導体の進歩を結合させることにより、さらに新しい制御技術の可能性が展開してくることを示している。

1. 3 電動機系の動トルク測定

電動機の特性のうち速度—トルク特性は非常に重要であり、したがって、従来よりトルクの測定にはいくつかの方法が確立されている。しかし従来のトルク測定の方法は電動機試験用として開発されているので、平常の運転時における動トルク測定にはそのまま利用できるものは少ない。ここでは平常の運転時における動トルク測定の可能性という観点から従来の各種のトルク測定法を検討してみた。

回転体のパワーとトルクとの間には、

$$P = \dot{\theta} T$$

P : パワー [W]
 $\dot{\theta}$: 角速度 [rad/sec]
 T : トルク [N · m]

の関係がある。それゆえ電動機の入力、電磁氣的損失および回転速度を知れば電動機発生（変換）トルクが得られる。回転速度は動的値の測定が容易であるので上式の変換パワーの動的測定が可能ならばトルクの動的測定も可能となる。

直流機では、 R_a を電機子抵抗、 v_a を電機子電圧、 i_a を電機子電流として界磁電流一定とすると変換パワーは

$$P = v_a i_a - (i_a)^2 R_a$$

で与えられる。電圧および電流は動的値の測定が可能であり、電機子抵抗はほぼ一定とみなせるから、変換パワーの動的値の測定が可能となる。

同期機および誘導機では上述の変換パワーを同期ワットと呼び、

同期機：（同期ワット）＝（トルク）×（同期角速度）

誘導機：（同期ワット）＝（回転子入力）

＝（トルク）×（同期角速度）

（回転子入力）－（回転子損失）

＝（トルク）×（角速度）

と表わせる。しかし誘導機、とくにかご形の場合回転子損失の動的値を測定することは困難であり、したがってトルクの動的値の測定はむずかしい。

始動時のように電動機トルクがほとんど加速トルクである場合には回転体の慣性能率を知ることにより、加速度の測定からトルクが得られる。しかし通常の電動機系では電気回路の時定数が機械系の時定数よりずっと小さいので、この方法により得られる加速トルクは電動機の発生トルクそのものを示すことにはならず、電動機の機械系で平滑された値となる。また機械損が無視できない場合にはその値も考慮しなければならない。当然のことではあるが、この方法では定常トルクの測定は不可能である。

電動機の動力計試験機として最も多用されるのは電動機軸に動力計を直結する方法である。プローニブレキは機械力としてトルクを直接測定する。うず電流制動機形は銅あるいはアルミニウムの円板に生ずるうず電流によって外部磁極がひっぱられる力を測定することにより電動機トルクを求める。発電機形も外部磁極を可変にしておくことにより外部磁極の回転力を測定することによって電動機トルクを求める。これらの各方法は一定回転速度のトルクを測定する動力計試験機としては優れているが、すべてそれ自身が負荷となって電動機エネルギーを消費してしまうものであるから、平常の運転時に使用して電動機の動トルクを測定するのに使用することは出来ない。

上述の各方法は回転子パワーを測定する方法であるが、固定子トルクを測定するトルク測定用試験装置¹⁷⁾もある。この試験装置への被試験用電動機の据付は簡単であり、動トルク測定も可能であると報告されているが、平常運転時の電動機動トルク測定用に使用する場合には据付場所を要し、且外部振動の影響も受け易いのであまりよい方法とは思えない。

電動機と負荷とを結ぶ軸のねじれは伝達トルクに比例する。ストレインゲージを軸に貼付したトルク計は測定上の時間遅れが増幅器の特性のみで決定されるので、動トルク測定に適している。このトルク計による測定量は軸の伝達トルクであるから、拘束試験あるいは始動時には電動機の発生トルクそのものを示すことになるが、運転中の動トルクを求めるには電動機および負荷の慣性能

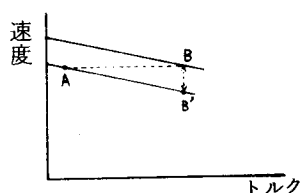
率を考慮した運動方程式を解かなければならない¹⁸⁾。

上述の各方法は電動機トルクを求めるためのものであるが、電動機の負荷トルク、とくに動的負荷トルクの測定に対しては何ら考慮が払われていない。電動機トルクのみならず動的負荷トルクをも測定することは電動機制御の観点からみて重要である。しかし直接動的負荷トルクを測定することを論じた論文は著者の知るかぎりでは皆無である。上述のトルク測定の諸方法のうち動的負荷トルクの測定をも考慮した場合、利用し得る方法は最後のストレインゲージを使用した軸トルクの測定を考慮した方法が一番よい。

本論文では制御への応用を考えた電動機および負荷トルクの動的値の測定が入力可観測性の理論に基づいて可能なことを示した。

1.4 動トルク制御と Invariance 制御

速度制御を行なっている電動機は第1-1図に示す速度・トルク特性をもつ。いま負荷トルクが増大して運転状態がA点からB点に移ったとき、他励直流電動機ならば電機子電圧の上昇により、また誘導電動機の1次側制御の場合ならば電圧・周波数の上昇により速度低下分を補償してB点の運転状態にもってくる。この際速度変動率は制御回路によって1形制御系ならば零に、0形制御系ならば



第1-1図
電動機速度-トルク特性

速度変動率

$$1 + \text{ループゲイン}$$

に補償できる。

制御系の過渡応答の質がさほど問題にならない範囲では、従来のように速度偏差を検出してからその偏差を最小ならしめるような動作を行わせる制御方式で十分である。すなわち設計者は安定限界内でいかにループゲインを大きくするか、あるいは積分動作をもたせることが是か否かなどについて検討することである。

しかし過渡応答を重視した制御系の質を問題にするときは、これだけでは不十分である。負荷トルクの急変に伴う速度変化の瞬時瞬時の大きさはできるだけ小さいことが望ましい。負荷トルクと電動機速度とが Invariance 条件を満足しているのが最適である。つまり負荷変動に対して電動機速度が微動だにしないことである。

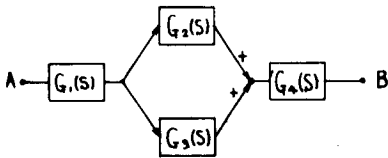
一般に2端子間に Invariance 条件が成立するためには全然経路が存在し

ないかあるいは少なくとも2経路の存在が必要である¹⁶⁾。これは線形系、非線形系を問わずに成立する。いま第1-2図のA、B間で Invariance 条件が成立する場合には

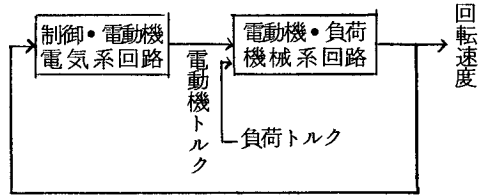
$$G_1(s)G_2(s)G_4(s) + G_1(s)G_3(s)G_4(s) \equiv 0$$

の関係がなければならない。つまり $G_1(s)G_2(s)G_4(s)$ の径路と $G_1(s)G_3(s)G_4(s)$ の径路とが相殺し合うように働くことになる。

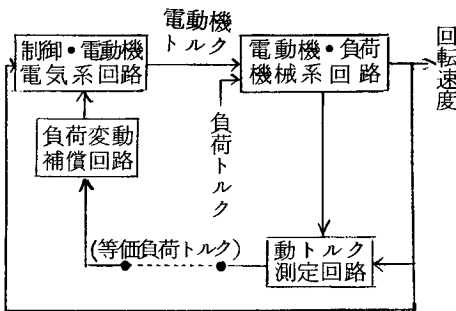
電動機の世界速度制御系に関しては一般に負荷トルクと電動機速度との間にこのような二つの径路は存在し得ない。第1-3図は一般の電動機の世界速度制御系の大略のブロック線図を示したものである。負荷トルクから回転速度までの径路は同図に示したように電動機・負荷機械系のみでありこの間には二つの径路は存在し得ない。また負荷トルクを制御・電動機電気系回路への入力とすることも不可能である。したがって従来の理論にもとずけば Invariance 条件は成立し得ない。



第1-2図 二つの経路をもつ Invariance 系



第1-3図 電動機の世界速度制御系ブロック線図



第1-4図 負荷変動補償用局部ループをもつた電動機速度制御用ブロック線図

入力可観測性の理論によれば、軸伝達トルクや回転数などの測定により負荷トルクの測定が可能である。すなわち、負荷トルクの波形そのものを時間遅れなく再現することができる。この再現された負荷トルク波形を利用すれば、電動機速度制御系に等価負荷トルク端子が加えられたことになる。この等価負荷トルク端子を負荷変動補償回路の入力とするとき、第1-4図のブロック線図に示すように、負荷変動補償用の局部ループをもつた制御系を構成することができる。いまかり

に等価負荷トルク波形が負荷トルク波形の完全な再現だとすると、第1-4図

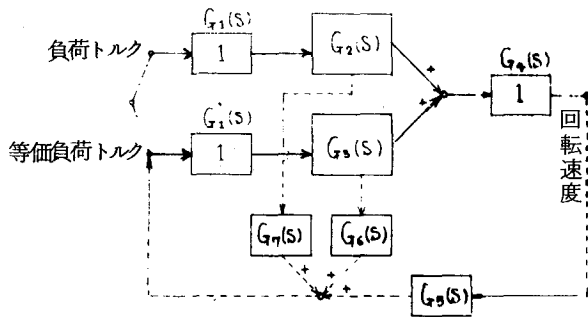
の制御系で負荷トルクから回転速度までは二つの経路をもつものと同じことになる。第1-5図はこのような観点から第1-4図を書き直したものである。図中 $G_2(s)$ は負荷トルクから回転速度までの、 $G_3(s)$ は等価負荷トルクから回転速度までの伝達関数をそれぞれ示している。また $G_5(s)$ 、 $G_6(s)$ および $G_7(s)$ は動トルク測定回路の伝達関数である。

第1-5図を第1-2図と比較してみると、実線で示した部分はほとんど同一の構成になっていることがわかる。したがってこの方式によって Invariance 制御系が可能となる。点線で示した部分は負荷トルク波形再現回路である。この部分は理論的には微分特性をもたせなければならないことが多いので、実際には負荷トルク波形の再現に必要な周波数範囲を適当に定めることが必要である。負荷トルク波形がこの周波数範囲内におさまるものであれば、等価トルクと負荷トルクは完全

に一致する。負荷トルクにこの周波数範囲をこえる周波数成分が存在するときは、等価負荷トルクはそれだけ負荷トルクから波形がくずれ、これは Invariance の誤差となる。

本論文ではサイリスタ・レオナード系およびアナログシミュレーションを実例として、負荷変動補償用局部ループを挿入することに

より、ほど所望の幅内に速度変動幅を抑えることができ、動トルク測定によって準 Invariance 制御系が構成できることを示した。



第1-5図 電動機速度制御の Invariance 制御系ブロック線図

1.5 入力可観測性と逆系

入力可観測性の理論は、観測システムの入力波形の再現性について論じるものである。この種の仕事のうち最初の理論的成果は C. E. Shannon¹⁹⁾ のサンプリング定理である。これは観測器がサンプラのみからなる時の入力波形の再現性に関する理論である。本論文では観測システムが線形動的系として表現されるときの入力可観測性について論じる。線形動的系の入力可観測性については、B. E. Bona²⁰⁾ が入力の一定平均値の可観測性について論じ、

M. K. Sain & J. L. Massey⁹⁾ が functional reproducibility⁵⁾ の双対に関して簡単に論じたが、それ以外では著者の知るかぎりでは著者の論文をのぞいてはない。

逆系はオン・ラインで入力波形を再現するシステムである。^{*}

これに関しては多くの論文があり、A. B. Marcovitz²²⁾, R. W. Brockett²⁾, L. Weiss¹⁾, L. M. Silverman⁴⁾ は1入力1出力系の可逆性について論じた。また多入力多出力系の可逆性と逆系の構成についてはL. G. Birta & I. M. Mufti⁵⁾, A. J. Fossard, M. H. Gauvrit & C. Gueguen⁶⁾, J. L. Massey & M. K. Sain⁷⁾, P. Dorato⁸⁾, M. K. Sain & J. L. Massey⁹⁾, L. M. Silverman¹⁰⁾, W. A. Porter¹¹⁾ が論じている。文献5), 6), 8), 10), 11) では出力波形の α 回微分を入力とする逆系の構成について論じているので、伝達関数行列の直接の可逆性については論じていない。文献9) は逆系がNon-*Proper*²³⁾ とならないように伝達関数行列に s^{-1} をかけたものの可逆性について論じている。

定係数時間連続系の初期状態量を既知とした場合、入出力関係はつぎの伝達関数表現で表わされる。

$$W(s) = G(s)X(s)$$

こゝで $X(s)$: r ベクトル, $w(s)$: m ベクトルとする。

いま $G(s)$ を r 次元列ベクトル $X(s)$ の左作用素と考えるとき、この左作用素 $G(s)$ の核が原点 $X(s) \equiv 0$ 以外に存在しないことが一般波形の入力可観測性成立の必要十分条件である。一方、文献3) によれば functional reproducibility は $G(s)$ を m 次元行ベクトル $K(s)^*$ の右作用素と考えると、核が原点 $K(s)^* \equiv 0$ 以外に存在しないことと等価である。したがって

入力 \rightleftharpoons 出力, $A \rightleftharpoons A^*$, $B \rightleftharpoons C^*$, $C \rightleftharpoons B^*$ *: 共役転置の置換を行なうと一般波形の入力可観測性と functional reproducibility とを等しく論じることができる。すなわち functional reproducibility の必要十分条件を示す行列の共役転置をとると一般波形の入力可観測性の必要十分条件を示す行列(第3章, 系2-2-1参照)に到達する。またそれは文献9) で $X(s)$, $w(s)$ を Laurant 展開して求めた L 積分可逆性の結論とも一致する。

* L. A. Zadeh & C. A. Deser²¹⁾ は Inverse System と Converse System を分けて定義している。前者の状態量は原系の状態量のみ依存し、後者の状態量は原系の状態量と入力量とに依存する量であるとする。また前者ならばかならず後者でもあるが、その逆は必ずしも成立しない。通常扱うのは前者であり、また線形系は前者の定義で十分であるので、こゝでも前者の意味で使用することにする。

実用上の点からみた場合、出力波形を直接 α 回微分することは誤差を増幅するので好ましくなく、 L^{-1} 積分逆系⁹⁾ は得られた波形を L 回微分しなければ原波形が得られない点で好ましくない。著者の理論にもとづく入力波形の再現は、実用上望ましい周波数帯域さえはっきりしていれば、その周波数帯域内では逆伝達関数特性をもち、帯域外では適当なフィルタ特性をもたせることにより、これらの欠点を除くことができる点ですぐれている。文献7) は時間離散形系の可逆性と逆系の構成について述べたもので、著者とほとんど同時期に同一システムについて論じたものであるが、お互いに別の視点より研究を進めたものであるため、若干異なった条件を与えている。

また、逆系の理論と系の構造とに関連して論じたり、あるいは逆系の応用に関して論じたりした文献がいくつかみられる。たとえば B. S. Morgan²⁴⁾ は状態フィードバックによるシンセシスを論じたが、P. L. Falb & W. A. Wolovich²⁵⁾, E. G. Gilbert²⁶⁾ および W. A. Wolovich & P. L. Falb²⁷⁾ はこの考えを進めて状態フィードバックによる系の分離 (Decoupling) の条件を係数行列の関数によって与えた。その条件は著者の与えた入力可観測性の必要条件になっていることが容易にわかる。また、W. A. Porter²⁸⁾ は可変系の場合に拡張して可逆性と分離性とを同一の理論的枠組で論じることができることを示している。また、M. K. Sain²⁹⁾ は J. B. Crutz & W. R. Perkins³⁰⁾ の感度行列 (Sensitivity matrix) は可逆性の成立を前提にしていることを示した。さらに R. K. Mehra³¹⁾ は逆系の問題が最適平滑 (Optimum smoothing) の問題から容易に導けることを示した。R. D. Behn & Y. C. Ho³²⁾ は逆系の問題が微分ゲームの問題にも関連しており有効であることを示した。R. W. Brockett²⁾ は最適制御問題への応用として出力が最適目標値 (原点) に到達後なお状態量が零でないときは、最適フィードバックループをすみやかに零入力の逆系に切換える方法を提案している。しかし通常の線形系では状態量が非零で出力量が零になるような状態量の領域はさほど大きくないので、逆系の制御系への応用としてはあまり積極的な意味をもたない。一方、著者は再現された入力波形の制御への応用として、新しい Invariance 制御系の構成について述べたが、これは従来の Invariance 理論を積極的にすすめた一つの手法であると思なすことができる。また、J. L. Massey & M. K. Sain³³⁾ はコーディングの問題に逆系が有効であることをのべている。

M. K. Sain & J. L. Massey⁹⁾ は出力関数再現性 (functional reproducibility^{34) 35)} が可逆性の双対問題であると把握している。すなわち、出力可制御および入力可観測の問題はある一時刻に着目したものであり、出力

関数再現性と可逆性の問題はある時間間隔の関数波形に着目したものであるとしている。しかし、著者はこの節の始めに述べたように入力可観測性の問題と逆系の問題との差はオフ・ライン処理を含むか否かにあると考える。すなわち、観測装置から得られた出力データのオフ・ライン処理によっても入力波形が再現することが可能ならば、この観測装置は立派に役立つことになり、入力可観測性は成立したといえる。

この両者の観点の相異がもっとも顕著にあらわれるのはベキ多項式入力の場合である。Weierstrass の定理によれば連続波形はベキ多項式でいくらでも近似の度をあげることができる。実用上の観点にたつて入力波形の再現を考えた場合、実用上適当な範囲で入力波形を把握できるならば、厳密な理論解の一意性が保証されなくとも、その再現システムは有効である。ベキ多項式方式による再現がこの意味で有効であることは第4章のシミュレーション結果および逆回路方式との比較による電動機トルク波形の再現で実証される。そして回路の現実的構成上からみた場合、ベキ多項式入力を出力波形から再現するには、著者の入力可観測性の理論にもとづけば、観測系の出力数 m は必ずしも観測系の入力数 r 以上である必要はない。しかし、可逆性の観点にたつかぎり、 $m \geq r$ が成立しなければならない。

入力可観測性の技術は端子別に入る入力信号の分離を行うものであり、各端子に加えられる周波数成分には無関係である。すなわち、同程度の周波数成分を含む信号と雑音とが異なる入力端子に加えられても、それらを分離・識別することが可能である。これは推定技術との大きな差である。

相関技術は信号と雑音との周波数成分の分離は行なえるが、位相関係は不明である。つまり、信号の波形の再生は困難である。一方、入力可観測性は原波形そのものを再生するのであるから、これが両者の間の大きな相異である。

しかし、入力可観測性の技術は同一端子から入る信号と雑音との分離に関しては無力である。観測系の構造上、入力端子と雑音端子とが別である場合には、入力可観測性の技術は信号と雑音を分離する極めて有力な新しい方法である。

1 章 文献

- 1) L. Weiss, On a Question Related to the Control of Linear Systems, IEEE Trans., AC-9, April, 176/177, ('64)
- 2) R. W. Brockett, Poles, Zeros, and Feedback : State Space Interpretation, IEEE Trans., AC-10, April, 129/135, ('65)
- 3) R. W. Brockett, and M. D. Mesarović, the Reproducibility of Multivariable Systems, J. Math. Anal Appl., Vol. 11, July, 548/563, ('65)
- 4) L. M. Silverman, Properties and Application of Inverse Systems, IEEE Trans., AC-13, August, 436/437, ('68)
- 5) L. G. Birta & I. H. Mafti, Some Results on an Inverse Problem in Multivariable Systems, IEEE Trans., AC-12, Feb, 99/101, ('67)
- 6) A. J. Fossard, M. H. Gauvrit & C. Gueguen, Comments on "Some Results on an Inverse Problem in Multivariable Systems", IEEE Trans., AC-13, April, 217/219, ('68)
- 7) J. L. Massey & M. K. Sain, Inverses of Linear Sequential Circuits, IEEE Trans., C-17, April, 330/337, ('68)
- 8) P. Dorato, On the Inverse of Linear Dynamical Systems, IEEE Trans., SSC-5, Jan, 43/48, ('69)
- 9) M. K. Sain & J. L. Massey, Invertibility of Linear Time-Invariant Dynamical Systems, IEEE Trans., AC-14, April, 141/149, ('69)
- 10) L. M. Silverman, Inversion of Multivariable Linear Systems, IEEE Trans., AC-14, June, 270/276, ('69)
- 11) W. A. Porter, An Algorithm for Inverting Linear Dynamic Systems, IEEE Trans., AC-14, December, 702/704, ('69)

- 12) 清水 泰治, 上下水道におけるエレクトロニクス, ОНМ臨時増刊,
203/209, 71・10
- 13) О . И . Хасаев, Работа Асинхронного Двигателя От
Преобразователя Частоты На Палупроводниковых
Триодах, ЭЛЕКТРИЦЕСТВО, № 9, 29/36, ('61)
- 14) К . П . Комриков, Определение Рабочих Характеристик Асинхронного
Двигателя При Частотном регулировании,
ЭЛЕКТРОМЕХАНИКА, №.3, 277/284, ('62)
- 15) 松本光雄・重里 勲, 可変周波数インバータによる誘導電動機 の速度
制御, 昭和38年電気学会東京支部大会, [2],
62/63
- 16) В . N . Petrov, The Invariance Principle and the Condi-
-tions for its Application during the
Calculation of Linear and Nonlinear Sys-
-tems, 1st IFAC, Moskba, 117/125, ('60)
- 17) 竹上武雄, 生方 進, 被測定電動機 の固定子トルクを利用するトルク
一速曲線直視装置について, 電気学会雑誌, Vol. 73,
№ 781, 1128/1131 (昭28)
- 18) I . R . Smith, S. Sriharan, Transient performance of the
induction motor, Proc. IEE, Vol. 113, № 7,
July, 1173/1180, ('66)
- 19) C . E . Shannon, Communication in the Presence of Noise,
Proc. IRE, Jan, 10/21, ('49)
- 20) B . E . Bona, Observability of Mean Values, IEEE Trans.,
AC-12, № 4, 473, ('67)
- 21) L . A . Zadeh & C . A . Desser, Linear Systems Theory,
McGraw-Hill, ('63)
- 22) A . B . Marcovitz, On Inverses and Quasi-Inverses of
Linear Time-Varying Discrete Systems,
J . F . I . ., July, 23/44, ('61)
- 23) R . E . Kalman, Irreducible Realizations and the Degree
of a Rational Matrix, J. Soc. Indust.
Appl. Math., Vol. 13, № 2, June, 520/545, ('65)

- 24) B . S . Morgan, The Synthesis of Linear Multivariable Systems by State-Variable Feedback, IEEE Trans., AC-9, 405/411, October, ('64)
- 25) P . L . Falb & W . A . Wolovich, Decoupling in the Design and Synthesis of Multivariable Control Systems, IEEE Trans., AC-12, № 6, December, 651/659, ('67)
- 26) E . G . Gilbert, The Decoupling of Multivariable Systems by State Feedback , SIAM J. on Control, Vol. 7, № 1, February, 50/63, ('69)
- 27) W . A . Wolovich & P . L . Falb, On the Structure of Multivariable Systems, SIAM J. on Control , Vol. 7, № 3, August, 437/451, ('69)
- 28) W . A . Porter, Decoupling of and Inverses for Time-Varying Linear Systems, IEEE Trans., AC-14, 378/380, ('69)
- 29) M . K . Sain, Functional Reproducibility and the Existence of Classical Sensitivity Matrices, IEEE Trans., AC-12, August., 458, ('67)
- 30) J . B . Crutz & W . R . Perkins, A New Approach to the Sensitivity Problem in Multivariable Feedback System Design, IEEE Trans., AC-9, July, 216/223, ('64)
- 31) R . K . Mehra, Inversion of Multivariable Linear Dynamic Systems Using Optimum Smoothing, IEEE Trans., AC-15, April, 252, ('70)
- 32) R . D . Behn & Y . C . Ho, On a Class of Linear Stochastic Differential Games, IEEE Trans., AC-13, № 3, June, 227/240, ('68)
- 33) J . L . Massey & M . K . Sain, Codes, Automata and Continuous Systems: Explicit Interconnections, IEEE Trans., AC-12, № 6, December, 644/650, ('67)

- 34) E . Kreindler & P . E . Sarachik, On the Concepts of Con
-trollability and Obsewability of Linear
Systems, IEEE Trans. , AC-9, № 2, April, 129/136,
('64)
- 35) P . E . Sarachik & E . Kreindler, Controllability and Ob
-servability of Linear Discrete-time Sys
-tems, I . J . C . . , 419/432, ('65)

第 2 章 電動機系の状態方程式

第2章 電動機系の状態方程式

この章では本論文が直接対象とする直流電動機（他励直流電動機）系および誘導電動機系の状態方程式表現について検討する。

2.1 直流電動機系の状態方程式

直流電動機の外部特性の基本式はつぎの二つである。

$$\begin{cases} v_a - (R_a i_a + L_a \frac{d}{dt} i_a) = K_1 \omega_m \phi & (2-1) \\ T_m = K_1 i_a \phi & (2-2) \end{cases}$$

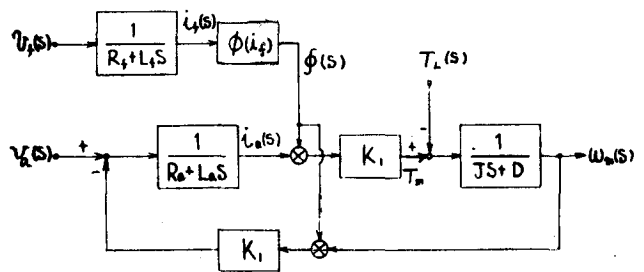
ただし、

- v_a : 電機子端子電圧 [V]
- i_a : 電機子全電流 [A]
- R_a : 電機子回路の抵抗 [Ω]
- L_a : 電機子回路のインダクタンス [H]
- ω_m : 電機子回転角速度 [rad/sec]
- ϕ : 毎極の磁束 [Wb]
- T_m : 電動機発生トルク [N·m]
- K_1 : $pZ/2\pi a$
- $2p$: 磁極数
- $2a$: 電機子並列回路数
- Z : 電機子全導体数

この基本式 (2-1) および (2-2) にもとづいて他励直流電動機系のブロック線図を描いたのが第2-1図である。

ただし、

- R_f : 界磁回路の抵抗 [Ω]
- L_f : 界磁回路のインダクタンス [H]
- J : 電動機回転子軸からみた全慣性モーメント [Kg·m²]
- D : 電動機系の損失係数 [N·m·sec/rad]*
- T_L : 負荷トルク [N·m]



第2-1図 他励直流電動機系のブロック線図

* $D = D(\omega)$ であるが、こゝでは一定値としている。

$\phi(i_f)$: 磁束一界磁電流の関数。線形近似できる場合には K_2 を一定値として $\phi(i_f) = K_2 i_f$

分巻電動機の場合には第2-1図において $v_a = v_f$ とすればよい。また直巻電動機の場合には $v_a = v_f$, $i_a = i_f$ として $R_a \rightarrow R_a + R_f$, $L_a \rightarrow L_a + L_f$ のおきかえをすればよい。

第2-1図の電動機回路部分を $\phi(i_f) = K_2 i_f$ として状態方程式表現すると

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} i_a \\ i_f \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{R_a}{L_a} & 0 \\ 0 & -\frac{R_f}{L_f} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_a \\ i_f \end{bmatrix} + \omega_m \begin{bmatrix} 0 & -K_1 K_2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_a \\ i_f \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{L_a} & 0 \\ 0 & \frac{1}{L_f} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_a \\ v_f \end{bmatrix} \quad (2-3)$$

上式の右辺第2項は電動機機械系状態量 ω_m のフィードバック作用を表わす部分である。電動機電気回路系の出力 T_m はつぎの状態量の2次形式で与えられる。

$$T_m = \begin{bmatrix} i_a & i_f \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ K_1 K_2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_a \\ i_f \end{bmatrix} \quad (2-4)$$

電動機機械系の状態方程式は

$$\frac{d}{dt} \omega_m = -\frac{D}{J} \omega_m + \left[\frac{1}{J} \quad -\frac{1}{J} \right] \begin{bmatrix} T_m \\ T_L \end{bmatrix} \quad (2-5)$$

出力(観測)方程式は

$$y_m = \nu_m \omega_m \quad (2-6)$$

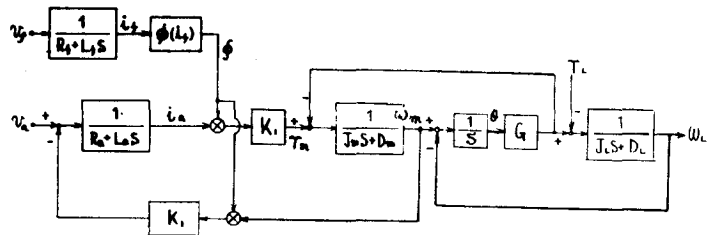
となる。ただし,

ν_m : 回転計発電機の電圧

一回転数係数

[V/rad/sec]

第2-1図は電動機系の軸がすべて剛体である場合だが、軸伝達トルク測定のためにトルク計を使用すると(第2-2図)、



電動機機械系の状態方程式は 第2-2図 トルク計を結合した他励直流電動機系のブロック線図

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \omega_m \\ \omega_L \\ \theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{D_m}{J_m} & 0 & -\frac{G}{J_m} \\ 0 & -\frac{D_L}{J_L} & \frac{G}{J_L} \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega_m \\ \omega_L \\ \theta \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{J_m} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{J_L} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_m \\ T_L \end{bmatrix} \quad (2-7)$$

出力(観測)方程式は

$$\begin{bmatrix} y_m \\ y_L \\ y_\tau \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \nu_m & 0 & 0 \\ 0 & \nu_L & 0 \\ 0 & 0 & \nu_\tau \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega_m \\ \omega_L \\ \theta \end{bmatrix} \quad (2-8)$$

となる。

ただし,

- J_m : 電動機慣性モーメント [$\text{Kg} \cdot \text{m}^2$]
- D_m : 電動機軸の損失係数 [$\text{N} \cdot \text{m} \cdot \text{sec} / \text{rad}$]
- ω_L : 電動機軸に換算された負荷の回転速度 [rad / sec]
- J_L : " " " 慣性モーメント [$\text{Kg} \cdot \text{m}^2$]
- D_L : " " " 損失係数 [$\text{N} \cdot \text{m} \cdot \text{sec} / \text{rad}$]
- θ : 電動機軸と負荷軸との角度差 [rad]
- G : トルク計検出部のねじり剛性係数 [$\text{N} \cdot \text{m} / \text{rad}$]
- U_m, U_b, U_t : 回転計, トルク計の係数 [$\text{V} / \text{rad} / \text{sec}$], [V / rad]

2.2 誘導電動機系の状態方程式

電動機回路が非対称のときは対称回路・不平衡電源に等価変換可能である**。
それゆえここでは対称回路を考えることにする。

固定子および回転子回路が星形結線であるとして三相誘導電動機の回路方式を求めると次式を得る。

$$\begin{bmatrix} v^s \\ v^r \end{bmatrix} = \left(\begin{bmatrix} R^s I & 0 \\ 0 & R^r I \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} L^s A(\theta_e) & 0 \\ 0 & L^r A(\theta_e) \end{bmatrix} P + \begin{bmatrix} L^s I & 0 \\ 0 & L^r I \end{bmatrix} P + M P \begin{bmatrix} 0 & A(-\theta_e) \\ A(\theta_e) & 0 \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} i^s \\ i^r \end{bmatrix}$$

ただし,

$$v^s = \begin{bmatrix} v_\alpha^s \\ v_\beta^s \\ v_\gamma^s \end{bmatrix}, \quad v^r = \begin{bmatrix} v_\alpha^r \\ v_\beta^r \\ v_\gamma^r \end{bmatrix} \quad : \text{固定子 (s) および回転子 (r) の } \alpha, \beta, \gamma \text{ 各相の印加電圧 [V]}$$

$$i^s = \begin{bmatrix} i_\alpha^s \\ i_\beta^s \\ i_\gamma^s \end{bmatrix}, \quad i^r = \begin{bmatrix} i_\alpha^r \\ i_\beta^r \\ i_\gamma^r \end{bmatrix} \quad : \text{固定子 (s) および回転子 (r) の } \alpha, \beta, \gamma \text{ 各相の電流 [A]}$$

$$A(\theta_e) = \begin{bmatrix} \cos \theta_e & \cos(\theta_e + \frac{2}{3}\pi) & \cos(\theta_e + \frac{4}{3}\pi) \\ \cos(\theta_e - \frac{2}{3}\pi) & \cos \theta_e & \cos(\theta_e + \frac{2}{3}\pi) \\ \cos(\theta_e - \frac{4}{3}\pi) & \cos(\theta_e - \frac{2}{3}\pi) & \cos \theta_e \end{bmatrix}$$

θ_e : 回転子の回転電気角度 [rad]

R^s, L^s, L^s : 固定子巻線の每極每相の抵抗, 漏れインダクタンスおよび有効インダクタンス [Ω] [H]

R^r, L^r, L^r : 回転子巻線の每極每相*の抵抗, 漏れインダクタンスおよび有効イン

** 第2章付録1参照

* 回転子巻線も固定子巻線と同極数同相数に変換する。

インダクタンス [Ω], [H]

$M = \sqrt{L^s L^r}$: 相互インダクタンス [H]

(2-9) 式を d - q 座標軸で表現*して状態方程式に直すと

$$\frac{d}{dt} [i_{dq}] = [A_{dq}] [i_{dq}] + \dot{\theta}_e [A_{dq}^\theta] [i_{dq}] + [B_{dq}] [v_{dq}] \quad (2-10)$$

$$[i_{dq}] = \begin{bmatrix} i_d^s \\ i_q^s \\ i_d^r \\ i_q^r \end{bmatrix}, \quad [v_{dq}] = \begin{bmatrix} v_d^s \\ v_q^s \end{bmatrix}$$

ただし $v^r = 0$ としている。

$$[A_{dq}] = \frac{1}{\sigma^2} \begin{bmatrix} -R^s L^r & 0 & R^r M & 0 \\ 0 & -R^s L^r & 0 & R^r M \\ R^s M & 0 & -R^r L^s & 0 \\ 0 & R^s M & 0 & -R^r L^s \end{bmatrix}$$

$$[A_{dq}^\theta] = \frac{1}{\sigma^2} \begin{bmatrix} 0 & -M^2 & 0 & -M L^r \\ M^2 & 0 & L^r M & 0 \\ 0 & L^s M & 0 & L^s L^r \\ -L^s M & 0 & -L^s L^r & 0 \end{bmatrix}$$

$$[B_{dq}] = \frac{1}{\sigma^2} \begin{bmatrix} L^r & 0 \\ 0 & L^r \\ -M & 0 \\ 0 & -M \end{bmatrix}$$

$$\sigma^2 = L^s L^r - M^2, \quad L^s = \frac{3}{2} L^s + l^s, \quad M = \frac{3}{2} M$$

$$L^r = \frac{3}{2} L^r + l^r$$

また電動機トルクは

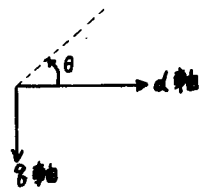
$$T_m = [i_{dq}]^T [T_{dq}] [i_{dq}] \quad (2-11)$$

* d 軸; q 軸の選び方は第 2-3 図に示す通りである。

$$[T_{dq}] = -pM \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

p : 極対数

' : 行列の転置



第2-3図 d-q座標軸

と表わせる。

電動機機械系の状態方程式および出力（観測）方程式は直流電動機の場合と同様に（2-5），（2-6）あるいは（2-7），（2-8）式で与えられる。ただし， $\dot{\theta} = p\omega_m$ である。

第2-4図は上述の関係をブロック線図で表わしたものであり，また第2-5図は軸伝達トルク測定用のトルク計を使用したときのブロック線図を示したものである。

微小なサンプリング間隔の間入力電圧と回転数が一定であるとして時間離散化を行うと（2-10）式より

$$[\dot{\lambda}_{dq}]_{(k+1)} = [P_k][\dot{\lambda}_{dq}]_{(k)} + [Q_k][v_{dq}]_{(k)} \quad (2-12)$$

ただし，

$$[P_k] = e^{[A_k]\tau} \quad \tau \text{ はサンプリング間隔 [sec] }$$

$$[A_k] = [A_{dq}] + \dot{\theta}_{(k)} [A_{dq}^{\theta}]$$

$$[Q_k] = e^{[A_k]\tau} \int_0^{\tau} e^{-[A_k]\eta} d\eta [B_{dq}]$$

また（2-11）式は

$$T_m(k) = ([\dot{\lambda}_{dq}]_{(k)})' [T_{dq}] [\dot{\lambda}_{dq}]_{(k)} \quad (2-13)$$

となる。

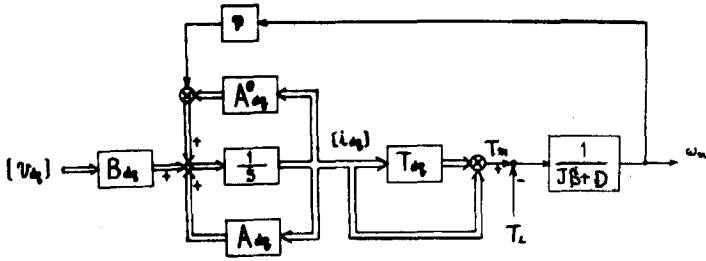
電動機機械系の状態方程式が（2-5）式で示されるときは

$$\omega_m(k+1) = p\omega_m(k) + q(T_m(k) - T_L(k)) \quad (2-14)$$

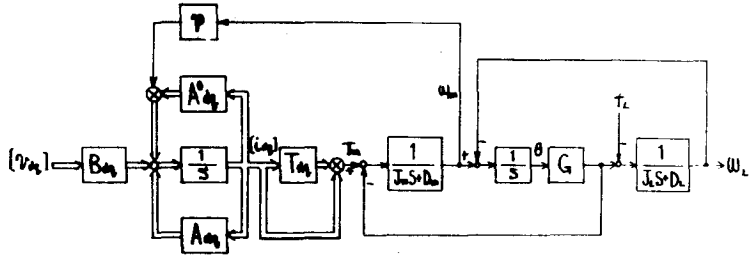
$$p = e^{-\frac{D}{J}\tau}$$

$$q = \frac{1}{J} e^{-\frac{D}{J}\tau} \int_0^{\tau} e^{\frac{D}{J}\eta} d\eta$$

$$y_m(k) = \nu_m \omega_m(k)$$

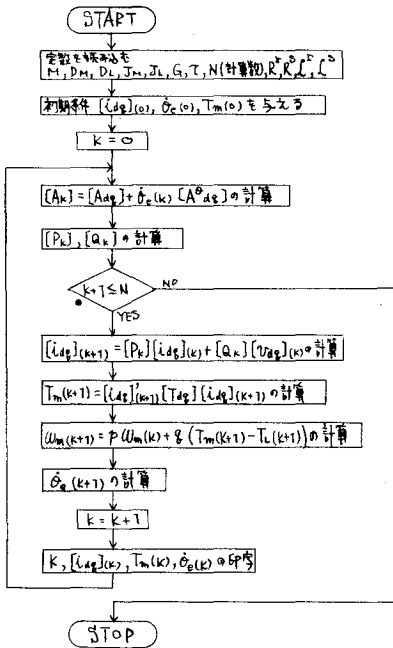


第2-4図 誘導電動機 (d-q MACHINE) 系のブロック線図

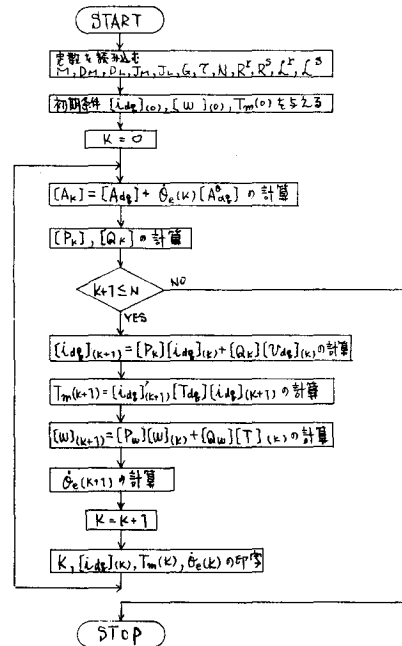


第2-5図 誘導電動機 (d-q MACHINE) 系のブロック線図

(トルク計使用)



第2-6図 誘導電動機系シミュレーションのフローチャート



第2-7図 誘導電動機系(トルク計使用) シミュレーションのフローチャート

となる。

(2-12) ~ (2-14) 式を用いてデジタル形電子計算機上で誘導電動機系をシミュレートするときのフローチャートを第2-6図に示す。

トルク計を使用する場合には(2-7)式を簡単に

$$\frac{d}{dt}[\omega] = [A_\omega][\omega] + [B_\omega][T]$$

と表現して

$$[\omega]_{(k+1)} = [P_\omega][\omega]_{(k)} + [Q_\omega][T]_{(k)} \quad (2-15)$$

$$[P_\omega] = e^{[A_\omega]\tau}, \quad [Q_\omega] = e^{[A_\omega]\tau} \int_0^\tau e^{-[A_\omega]\eta} d\eta [B_\omega]$$

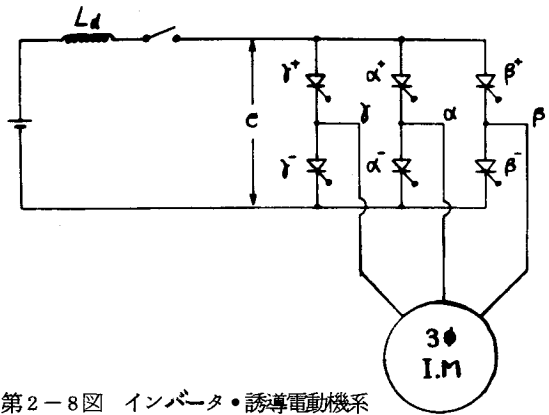
$$y_m(k) = \nu_m \omega_m(k), \quad y_L(k) = \nu_L \omega_L(k), \quad y_\tau(k) = \nu_\tau \theta(k)$$

を使用すればよい。このときのフローチャートを第2-7図に示す。

2.3 インバータ・誘導電動機系の状態方程式

サイリスタによる切換を含む電気回路を状態方程式表現するとき、回路の切換を座標系の変換で行う場合と仮想電源の導入で行う場合とがある³⁾。第2-8図

に示すインバータ・誘導電動機系に対して前者の考えを適用するとサイリスタによる転流毎にd軸およびq軸を60°電気角ずつステップ状に回転させることになる⁵⁾。この回転を行う座標系に対しては固定子回路印加電圧は常に直流一定値となる。それゆえ(2-9)式を瞬時対称座標法で変換して状態方程式表現を行うと、切換間隔では



第2-8図 インバータ・誘導電動機系

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} e \\ i_+^s \\ i_+^r \end{bmatrix} = \frac{1}{\sigma^2} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \frac{L^r}{\sqrt{2}} & -R^s L^r + j\dot{\theta}_e M^2 & R^r M + j\dot{\theta}_e L^r M \\ -\frac{M}{\sqrt{2}} & R^s M - j\dot{\theta}_e L^s M & -R^r L^s - j\dot{\theta}_e L^s L^r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e \\ i_+^s \\ i_+^r \end{bmatrix} \quad (2-16)$$

サイリスタ切換時では

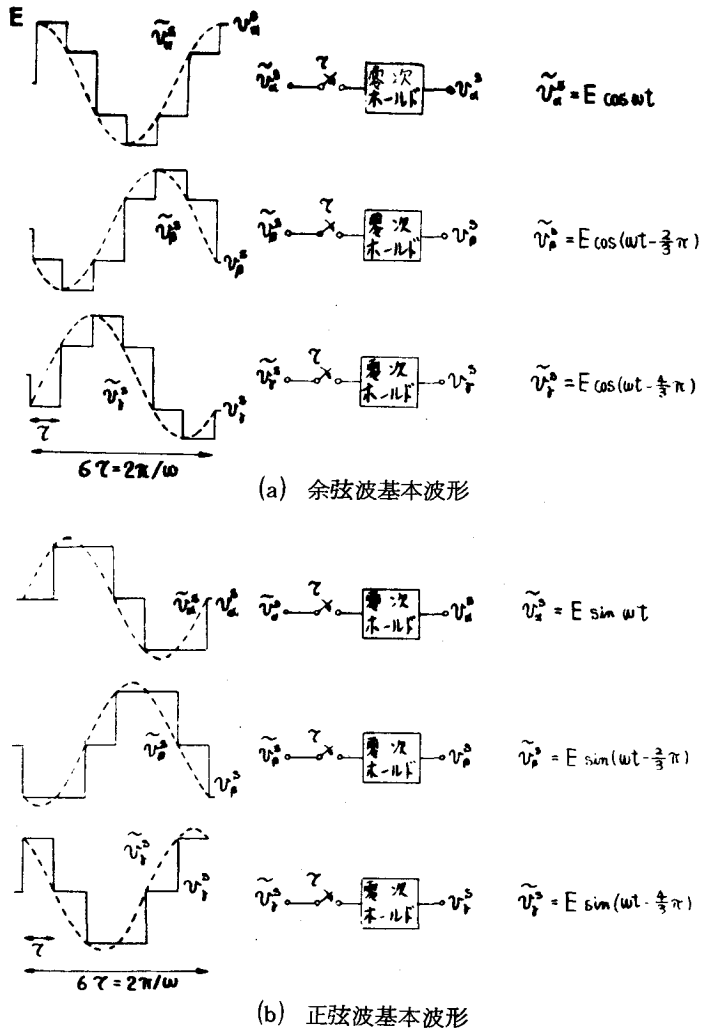
$$\begin{bmatrix} e(k\tau_+) \\ i_+^s(k\tau_+) \\ i_+^r(k\tau_+) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & e^{j60^\circ} & 0 \\ 0 & 0 & e^{-j60^\circ} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e(k\tau_-) \\ i_+^s(k\tau_-) \\ i_+^r(k\tau_-) \end{bmatrix} \quad k=1, 2, \dots \quad (2-17)$$

と表わせる。

つぎに後者の方法すなわち仮想電源を導入する方法について述べる^{3) 6)}。サイリスタインバータにより得られる電圧波形は回路方式および負荷の状態により数種類が存在する。しかし

そのうち基本的な波形は第2-9図(a)および(b)の実線で示すような波形である。これらの波形は第2-9図に点線で示した正弦波あるいは余弦波が仮想のサンプラと零次ホールド回路を通過した場合の波形とみなすことができる。ほかの場合にも上述の基本波に位相差をもたせるか、あるいはいくつかの高調波を重ねたものがサンプラと零次ホールド回路を通過したものとみなして解析を進めていくことができる。それゆえここでは第2-9図(a)の余弦波を基本としたものを取りあげることとする。

(2-9)式の回路方程式を $v^E = 0$ として瞬時対称座標法にて変換すると次式を得る。



第2-9図 サイリスタ・インバータの波形と仮想等価回路

$$\begin{bmatrix} v_+^s \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R^s + \mathcal{L}^s p & M p \\ M(p + j\theta_e) & R^r + \mathcal{L}^r(p + j\theta_e) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_+^s \\ i_+^r \end{bmatrix} \quad (2-18)$$

ただし、

v_+^s : 固定子正相分電圧 [V]* p : 微分演算子

i_+^s, i_+^r : 固定子および回転子正相分電流 [A]

上式は正相分のみを示したものであるが、逆相分は上式の複素共役より得られる。また固定子巻線および回転子巻線は星形結線として中性点を非接地と考えているので零相分は除去した。

上式を状態方程式表現にすると

$$\frac{d}{dt} [i_+] = [A_+] [i_+] + j\theta_e [A_+^0] [i_+] + [B_+] [v_+] \quad (2-19)$$

$$[v_+] = v_+^s$$

$$[i_+] = \begin{bmatrix} i_+^s \\ i_+^r \end{bmatrix}, \quad [B_+] = \frac{1}{\sigma_2} \begin{bmatrix} \mathcal{L}^r \\ -M \end{bmatrix}$$

$$[A_+] = \frac{1}{\sigma_2} \begin{bmatrix} -R^s \mathcal{L}^r & R^r M \\ R^s M & -R^r \mathcal{L}^s \end{bmatrix}, \quad [A_+^0] = \frac{1}{\sigma_2} \begin{bmatrix} M^2 & \mathcal{L}^r M \\ -\mathcal{L}^s M & -\mathcal{L}^s \mathcal{L}^r \end{bmatrix}$$

となる。さらに電動機発生トルクは次式で表わせる。

$$T_m = I_m \{ [i_+]^* [T_+] [i_+] \} \quad (2-20)$$

$$[T_+] = -2 p M \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

*: 行列の複素共役転置

さて、仮想のサンブラと零次ホールド回路を含めて誘導電動機系回路のブロック線図を示すと第2-10図が得られる。こゝで正弦波駆動時は切換スイッチを上、サイリスタインバータ駆動のときは下に倒せばよい。

サイリスタインバータ駆動時には

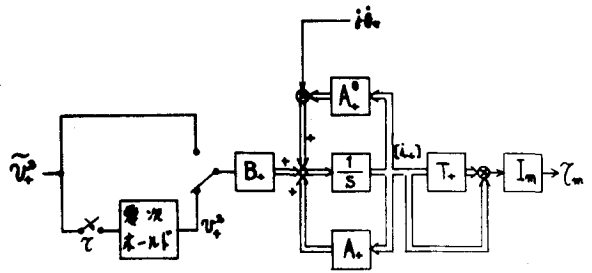
* 正相分、逆相分と d, q 成分との間にはつぎの関係がある。

$$\begin{cases} v_d = \sqrt{2} \Re_e [v_+] \\ v_q = \sqrt{2} \Im_m [v_+] \end{cases}, \quad \begin{cases} v_d = \sqrt{2} \Re_e [v_-] \\ v_q = -\sqrt{2} \Im_m [v_-] \end{cases}, \quad \begin{cases} i_d = \sqrt{2} \Re_e [i_+] \\ i_q = \sqrt{2} \Im_m [i_+] \end{cases}, \quad \begin{cases} i_d = \sqrt{2} \Re_e [i_-] \\ i_q = -\sqrt{2} \Im_m [i_-] \end{cases}$$

$$V_+^s(t) = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} V^s \mathcal{E}^{jn\omega\tau} \quad n\tau < t < (n+1)\tau$$

$$V_+^s(n\tau_+) = \mathcal{E}^{j\frac{2}{3}\pi} V_+^s(n\tau_-)$$

であるから、電源部分をも含んだサンプル値系として状態方程式表現をすると次式を得る。



$$\tilde{v}_s^s = \sqrt{2} V^s \cos \omega t$$

$$\tilde{v}_s^r = \sqrt{2} V^s \cos(\omega t - \frac{2}{3}\pi)$$

$$\tilde{v}_s^b = \sqrt{2} V^s \cos(\omega t - \frac{4}{3}\pi)$$

$$\tilde{v}_s^s = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} V^s \mathcal{E}^{j\omega t}$$

$$\omega = t/\tau$$

第2-10図 インバータ誘導電動機回路のブロック線図

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} v_+^s \\ i_+^s \\ i_+^r \end{bmatrix} = \frac{1}{\tau^2} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \mathcal{L}^r & -R^s \mathcal{L}^r + j\dot{\theta}_e M^2 & R^r M + j\dot{\theta}_e \mathcal{L}^r M \\ -M & R^s M - j\dot{\theta}_e \mathcal{L}^s M & -R^r \mathcal{L}^s - j\dot{\theta}_e \mathcal{L}^r \mathcal{L}^s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_+^s \\ i_+^s \\ i_+^r \end{bmatrix} \quad (2-21)$$

$$n\tau < t < (n+1)\tau$$

$$\begin{bmatrix} v_+^s(n\tau_+) \\ i_+^s(n\tau_+) \\ i_+^r(n\tau_+) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathcal{E}^{j\frac{2}{3}\pi} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_+^s(n\tau_-) \\ i_+^s(n\tau_-) \\ i_+^r(n\tau_-) \end{bmatrix} \quad n = 1, 2, \dots \quad (2-21')$$

$$\begin{bmatrix} v_+^s(0_+) \\ i_+^s(0_+) \\ i_+^r(0_+) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} V^s \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

2.4 Z変換による過渡トルクの解析⁶⁾

2.4.1 過渡トルク解析の意義 誘導電動機の過渡応答、特に過渡トルク応答は電動機の機械的強度などの観点より設計および使用法上重要な問題であり、従来この種の研究にはテンソル解析、対称座標法が有効であることが知られている^{7) 9)~14)}。一方、近年サイリスタインバータによる誘導電動機の運転法、制御法に関する研究が進むに従い^{15)~19)}、制御上の観点から過渡トルク、動トルクを把握することは大切になつてきた。しかしサイリスタインバータによる運転では誘

誘導電動機への印加電圧は正弦波とはならず階段状となるため、誘導電動機の特
 性解析上新らしい問題が生ずる。静特性の解析にはフーリエ級数に展開して高調波
 分の影響を吟味する方法がとられている^{8) 20)~21)}。一方、過渡応答、動的応答の
 解析にはアナログ形電子計算機による方法が開発されているが^{23) 24)}、これには
 高精度特に位相遅れに対して精度の高いこと、多数の非線形要素を必要とするこ
 となどの欠点を有し、必らずしも簡便で有効な方法といえがたい。また、磁束密
 度一定の制御時に線形化を行ない伝達関数を求める方法²⁵⁾もあるが、この方法も
 比較的狭い範囲でしか適用できない。さらに電流源駆動のとき各スイッチング期
 間ごとに微分方程式を求めて解く方法²²⁾もあるが、この方法はかなりめんどうで
 あり、かつ数サイクルにわたる過渡現象の解析には不適である。前節でのべた状
 態方程式表現による解析⁵⁾はデジタル形電子計算機の適用に対して有効である
 が、ここでは各転流時のみに着目してサンプル値系として取扱うとさらに計算期
 間短縮できるので、Z 変換法の適用について述べる。

2.4.2 過渡トルク式の導出 (2-18)式において速度一定としてラプラス
 変換を行うことにより次式の解を得る。

$$\begin{cases} I_+^s(s) = \left(\frac{K_{11}}{s+\tau_1} + \frac{K_{12}}{s+\tau_2} \right) V_+^s(s) \\ I_+^r(s) = \left(\frac{K_{21}}{s+\tau_1} + \frac{K_{22}}{s+\tau_2} \right) V_+^s(s) \end{cases} \quad (2-22)$$

$$K_{11} = \frac{\tau_1 \mathcal{L}^r - R^r - j\dot{\theta}_e \mathcal{L}^r}{\sigma^2 (\tau_1 - \tau_2)}$$

$$K_{12} = \frac{R^r - \tau_2 \mathcal{L}^r + j\dot{\theta}_e \mathcal{L}^r}{\sigma^2 (\tau_1 - \tau_2)}$$

$$K_{21} = \frac{-\tau_1 M + j\dot{\theta}_e M}{\sigma^2 (\tau_1 - \tau_2)}$$

$$K_{22} = \frac{\tau_2 M - j\dot{\theta}_e M}{\sigma^2 (\tau_1 - \tau_2)}$$

$$\tau_1 = \left(\frac{R^s \mathcal{L}^r + R^r \mathcal{L}^s}{2\sigma^2} + D \right) + j \left(\frac{\dot{\theta}_e}{2} + F \right)$$

$$\tau_2 = \left(\frac{R^s \mathcal{L}^r + R^r \mathcal{L}^s}{2\sigma^2} + D \right) + j \left(\frac{\dot{\theta}_e}{2} + F \right)$$

D, F は次式の解である。

$$D^2 - F^2 = A, DF = B$$

$$A = \frac{(R^s L^s - R^r L^s)^2 + 4R^s R^r M^2}{4\sigma^4} - \frac{\dot{\theta}_e^2}{4}$$

$$B = \frac{(R^s L^s - R^r L^s)\dot{\theta}_e}{4\sigma^4}$$

上式の関係を図2-11のブロック線図で示したのが第2-11図である。いま α, β, γ 各相のサンプラへの入力電圧を

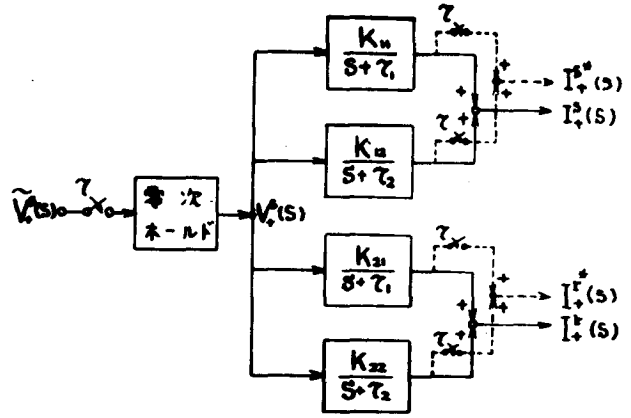
$$\begin{cases} \tilde{V}_\alpha^s = E \cos(\omega t + \varphi) \\ \tilde{V}_\beta^s = E \cos(\omega t + \varphi - \frac{2}{3}\pi) \\ \tilde{V}_\gamma^s = E \cos(\omega t + \varphi - \frac{4}{3}\pi) \end{cases}$$

とすると

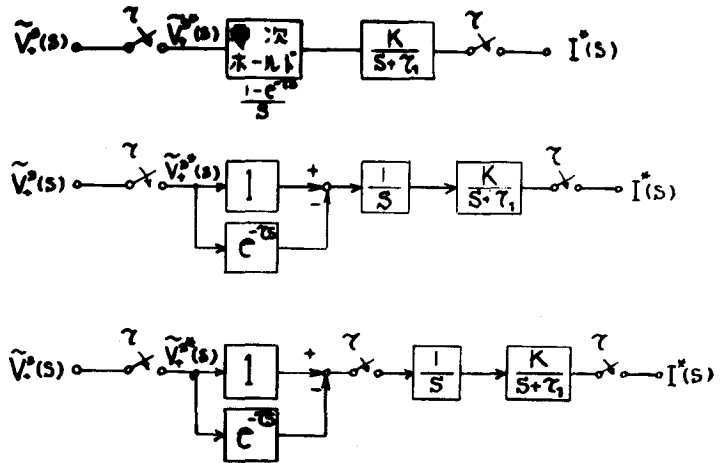
$$\tilde{V}_+^s(s) = \frac{\sqrt{3}}{2} E \frac{e^{j\varphi}}{s - j\omega}$$

で与えられる。

一般にサンプラと零次ホールド回路が一次遅れ要素と縦続接続されている場合には第2-12図に示すような等価変換が可能である。したがって、出力側の仮想サンプラを通過したものは



第2-11図 誘導電動機(階段状波駆動)回路のブロック線図



第2-12図 サンプラ、零次ホールド回路並びに一次遅れる要素の縦続接続の等価変換

$$I_+^{s*}(z) = \tilde{V}_+^s(z) \frac{z-1}{z} \sum_{k=1}^2 \mathcal{Z} \left\{ \frac{K_{1k}}{s(s+\tau_k)} \right\}$$

$$I_+^{r*}(z) = \tilde{V}_+^s(z) \frac{z-1}{z} \sum_{k=1}^2 \mathcal{Z} \left\{ \frac{K_{2k}}{s(s+\tau_k)} \right\}$$

と表わせるから、サンプリング時刻 $t = nT$ においては

$$i_+^s(n\tau) = \frac{\sqrt{3}}{2} E \left\{ \frac{K_{11}}{\tau_1} \cdot \frac{1 - e^{-\tau_1 \tau}}{e^{j\frac{\pi}{3}} - e^{-\tau_1 \tau}} (e^{j\frac{\pi}{3}n} - e^{-\tau_1 n\tau}) \right. \\ \left. + \frac{K_{12}}{\tau_2} \cdot \frac{1 - e^{-\tau_2 \tau}}{e^{j\frac{\pi}{3}} - e^{-\tau_2 \tau}} (e^{j\frac{\pi}{3}n} - e^{-\tau_2 n\tau}) \right\} e^{j\varphi} \quad (2-23 a)$$

$$i_+^r(n\tau) = \frac{\sqrt{3}}{2} E \left\{ \frac{K_{21}}{\tau_1} \cdot \frac{1 - e^{-\tau_1 \tau}}{e^{j\frac{\pi}{3}} - e^{-\tau_1 \tau}} (e^{j\frac{\pi}{3}n} - e^{-\tau_1 n\tau}) \right. \\ \left. + \frac{K_{22}}{\tau_2} \cdot \frac{1 - e^{-\tau_2 \tau}}{e^{j\frac{\pi}{3}} - e^{-\tau_2 \tau}} (e^{j\frac{\pi}{3}n} - e^{-\tau_2 n\tau}) \right\} e^{j\varphi} \quad (2-23 b)$$

よつて電動機トルクは (2-20) 式より

$$T_m(n\tau) = \frac{3}{2} E^2 p M I_m \left\{ \left\{ \frac{K_{11}}{\tau_1} \cdot \frac{1 - e^{-\tau_1 \tau}}{e^{j\frac{\pi}{3}} - e^{-\tau_1 \tau}} (e^{j\frac{\pi}{3}n} - e^{-\tau_1 n\tau}) \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{K_{12}}{\tau_2} \cdot \frac{1 - e^{-\tau_2 \tau}}{e^{j\frac{\pi}{3}} - e^{-\tau_2 \tau}} (e^{j\frac{\pi}{3}n} - e^{-\tau_2 n\tau}) \right\} \right. \\ \left. \times \left\{ \frac{\bar{K}_{21}}{\tau_1} \cdot \frac{1 - e^{-\tau_1 \tau}}{e^{-j\frac{\pi}{3}} - e^{-\tau_1 \tau}} (e^{-j\frac{\pi}{3}n} - e^{-\tau_1 n\tau}) \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{\bar{K}_{22}}{\tau_2} \cdot \frac{1 - e^{-\tau_2 \tau}}{e^{-j\frac{\pi}{3}} - e^{-\tau_2 \tau}} (e^{-j\frac{\pi}{3}n} - e^{-\tau_2 n\tau}) \right\} \right\} \quad (2-24)$$

となる。

一方、正弦波 (余弦波) 駆動のときは第 2-10 図で切換スイッチを上にも倒しておけばよいから

$$I_+^s(s) = \tilde{V}_+^s(s) \sum_{k=1}^2 \frac{K_{1k}}{s + \tau_k}$$

$$I_+^r(s) = \tilde{V}_+^s(s) \sum_{k=1}^2 \frac{K_{2k}}{s + \tau_k}$$

すなわち

$$i_+^s(t) = \frac{\sqrt{3}}{2} E e^{j\varphi} \left\{ \frac{K_{11}}{\tau_1 + j\omega} (e^{j\omega t} - e^{-\tau_1 t}) + \frac{K_{12}}{\tau_2 + j\omega} (e^{j\omega t} - e^{-\tau_2 t}) \right\} \quad (2-25 a)$$

$$i_+^r(t) = \frac{\sqrt{3}}{2} E e^{j\varphi} \left\{ \frac{K_{21}}{\tau_1 + j\omega} (e^{j\omega t} - e^{-\tau_1 t}) + \frac{K_{22}}{\tau_2 + j\omega} (e^{j\omega t} - e^{-\tau_2 t}) \right\} \quad (2-25 b)$$

とあらわせるから、電動機瞬時トルクは

$$T_m(t) = \frac{3}{2} E^2 p M I_m \left[\left\{ \frac{K_{11}}{\tau_1 + j\omega} (e^{j\omega t} - e^{-\tau_1 t}) + \frac{K_{12}}{\tau_2 + j\omega} (e^{j\omega t} - e^{-\tau_2 t}) \right\} \right. \\ \left. \times \left\{ \frac{\bar{K}_{21}}{\tau_1 - j\omega} (e^{-j\omega t} - e^{-\tau_1 t}) + \frac{\bar{K}_{22}}{\tau_2 - j\omega} (e^{-j\omega t} - e^{-\tau_2 t}) \right\} \right] \quad (2-26)$$

となる。

第 2-13 図に (2-24) 式および (2-26) 式より電動機トルクを計算するときのフローチャートを示す。

2.4.3 実験と計算結果

前節で述べたように、階段状波駆動の場合と正弦波駆動の場合との差は第2-10図に示すサンプラと零次ホールド回路の有無だけである。また、Z変換法はラプラス変換法の変形されたものであるとみなせる。したがって、前節で述べた解析法によれば階段状波駆動の場合と正弦波駆動の場合とは本質的な差異はなにも存在しない。それゆえこの節では、まず回路定数の実測方法を述べた後に過渡トルク応答の実測値と理論値との比較検討を正弦波駆動の場合について行ない理論の妥当性を確かめ、最後に正弦波駆動の場合と階段状波駆動の場合とに対する過渡トルク応答の比較検討を理論計算値に基づいて行なう。

以下の実測および理論計算用には三相巻線形誘導電動機 2.2 kW，4極，200 V，50 Hz，一次・二次 Y 結線を使用した*。

< A > 回路定数の測定** 一次および二次巻線の抵抗測定は電位降下法によった。一次側巻線の毎相の抵抗値は

$$R^s = 0.58 \Omega$$

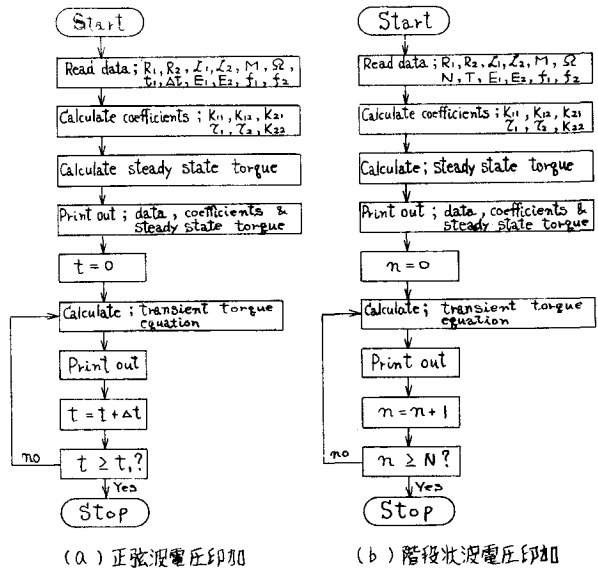
と得られた。二次巻線の毎相の抵抗は二次側端子間で測定するとスリップリングの接触抵抗の影響のため二次電流 I^2 に対して第2-14図に示す特性をもつ。

第2-15図は自己インダクタンス測定回路を示したものである。同図において二つのコイル間の相互インダクタンスを

$$L \cos \frac{2}{3}\pi = -\frac{1}{2}L \approx -\frac{L+l}{2}$$

* 周波数可変による速度制御はかご形に適しているが、こゝでは便宜上実験と計算に巻線形を使用した。しかし理論の一般性および実験と結算の妥当性は全然失なわれない。また二相誘導電動機に対してもこゝで述べる理論はそのまゝ適用できる。

** ここではすべて各相の値を求めた。



第2-13図 過渡トルク計算過程を示すフローチャート

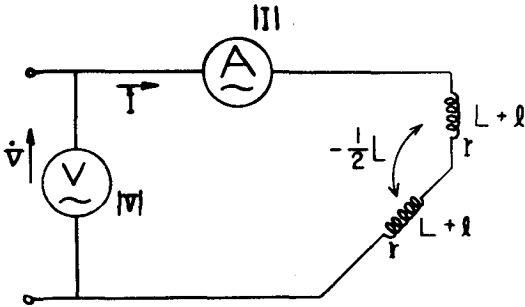
t_1, N は終了時刻および最終サンプル回数、 E_1, E_2, f_1, f_2 は運転条件切換え前後の電圧(波高値)と周波数を示し、 T はサンプル間隔、 Δt は計算のきざみを示す。

とし、電流計および電圧計の指示を $|I|$, $|V|$ とすると、

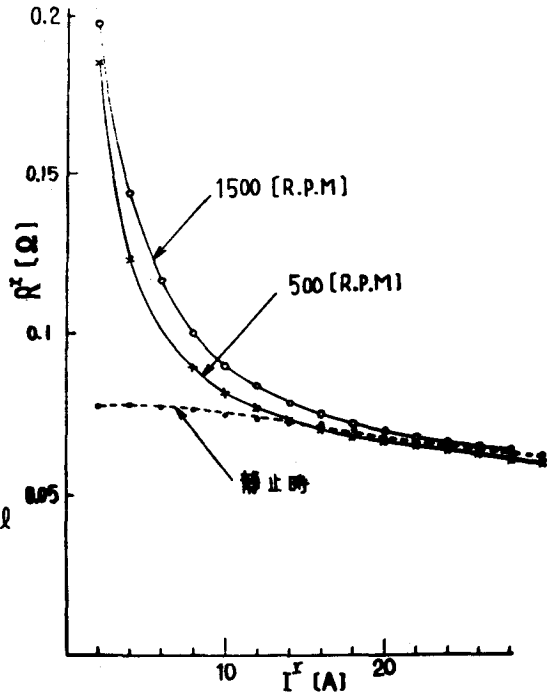
$$r^2 + \omega^2 \left\{ (L+l) + \frac{L+l}{2} \right\}^2 = \frac{|V|^2}{4|I|^2}$$

$$\therefore L+l = \frac{1}{3\omega} \sqrt{\frac{|V|^2}{|I|^2} - (2r)^2} \quad (2-27)$$

となる。



第2-15図 自己インダクタンス測定回路



第2-14図 2次側巻線抵抗測定値(各相抵抗値)

第2-16図は相互インダクタンスの測定回路を示したものである。(a)図の測定回路では

$$\dot{V} = j\omega M \dot{I} \left\{ 2 \cos \theta - \cos \left(\theta + \frac{2}{3} \pi \right) - \cos \left(\theta - \frac{2}{3} \pi \right) \right\}$$

$$\therefore M = \frac{1}{3\omega \cos \theta} \cdot \frac{|V|}{|I|} \quad (2-28 a)$$

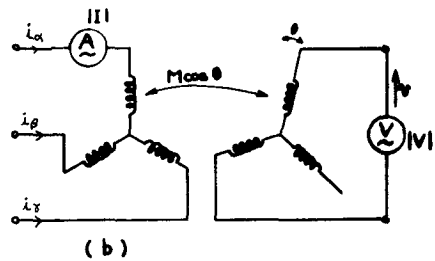
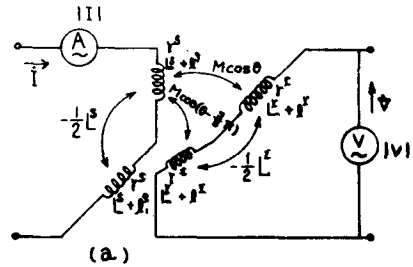
となる。また (b) 図の回路では

$$i_x = I \cos \omega t$$

$$i_y = I \cos \left(\omega t - \frac{2}{3} \pi \right)$$

$$i_z = I \cos \left(\omega t - \frac{4}{3} \pi \right)$$

として



第2-16図 相互インダクタンス測定回路

$$\begin{aligned}
 v &= M \cos \theta \frac{d}{dt} i_{\alpha} + M \cos(\theta - \frac{2}{3} \pi) \frac{d}{dt} i_{\beta} + M \cos(\theta + \frac{2}{3} \pi) \frac{d}{dt} i_{\gamma} \\
 &\quad - M \cos(\theta + \frac{2}{3} \pi) \frac{d}{dt} i_{\alpha} - M \cos \theta \frac{d}{dt} i_{\beta} - M \cos(\theta - \frac{2}{3} \pi) \frac{d}{dt} i_{\gamma} \\
 &= -\frac{3}{2} \sqrt{3} \omega M I \sin(\omega t - \theta + \frac{\pi}{6})
 \end{aligned}$$

$$\therefore M = \frac{2}{3\sqrt{3}} \cdot \frac{1}{\omega} \cdot \frac{|V|}{|I|}$$

(2-28b)

となる。

第2-17図は一次側巻線の毎相の自己インダクタンス ($L^S + l^S$)，二次側巻線の毎相の自己インダクタンス ($L^I + l^I$) および相互インダクタンス M の測定結果を示したものである。

< B > 過渡トルクの実測と計算 第2-18

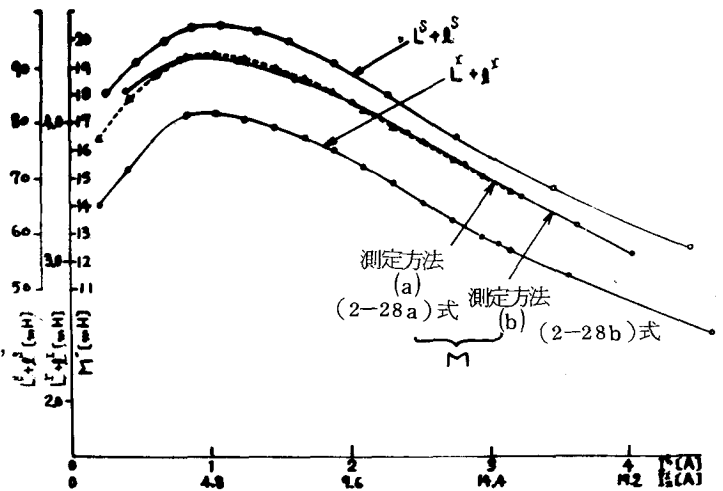
図は実験に使用した電動機，トルク計，負荷の測定系を示したものである。第2-19図の実線は固定子回路に正弦波電圧源を接続した場合の電圧をステップ状

(150V → 200V 実効値) に急変したときのトルク計より得られた過渡トルク応答である。

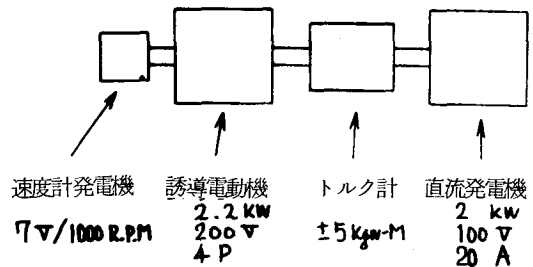
同図の点線は(2-26)式より求められた計算値である。なお計算と実験とは同一条件で行なわれるように考慮し、つぎの定数を使用した。(第2-14図および第2-17図参照)

$$R^S = 0.58 \Omega$$

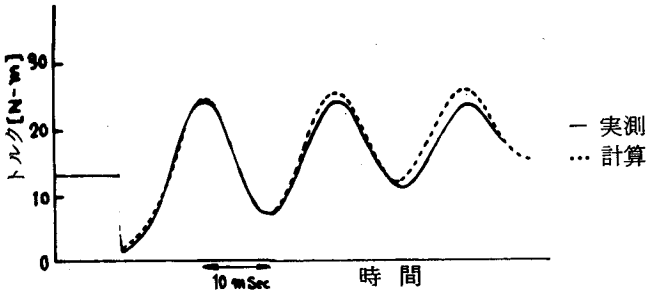
$$R^I = 0.07 \Omega$$



第2-17図 自己インダクタンスおよび相互インダクタンスの測定値



第2-18図 電動機 — トルクメーター — 負荷の測定系



正弦波 50 Hz
 電圧上昇 150V → 200V (実効値)
 12.50 → 1340 R.P.M
 9.7 → 8.6 A (1次)
 30.5 → 21.0 A (2次)

第2-19図 過渡トルク応答の実測と計算

$$\mathcal{L}^S = \frac{3}{2} L^S + l^S \approx \frac{3}{2} (L^S + l^S) = 100 \text{ mH}$$

$$\mathcal{L}^R = \frac{3}{2} L^R + l^R \approx \frac{3}{2} (L^R + l^R) = 4.35 \text{ mH}$$

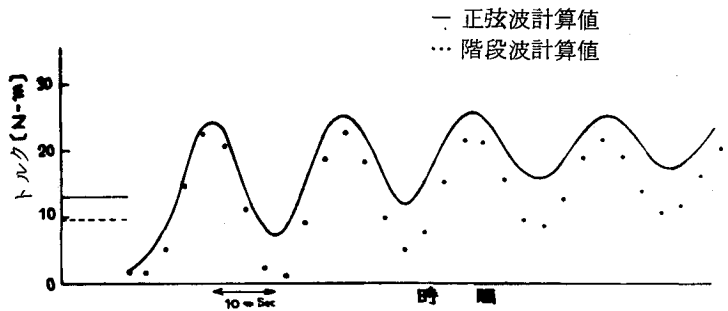
$$M = \frac{3}{2} M = 20.25 \text{ mH}$$

$$\sigma^2 = \mathcal{L}^S \mathcal{L}^R - M^2 \approx 2.49 \times 10^{-5} \text{ H}^2$$

$$\dot{\theta} = 126.5 \text{ rad/sec}$$

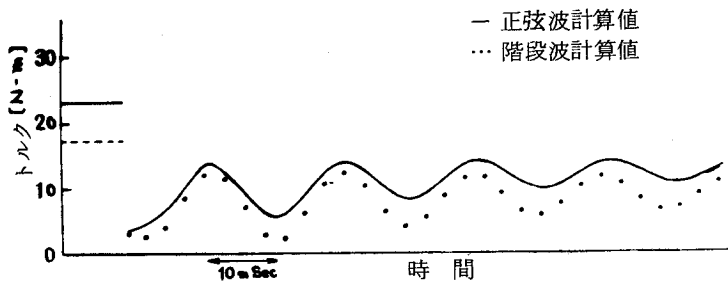
第2-19図において理論値と実測値が非常によく一致していることがわかる。なお、実測値は速度変化の影響により数サイクル以後は急速に定常値に収束する¹³⁾ことが観測された。

また、第2-19図においては電圧急変時にトルクが瞬間



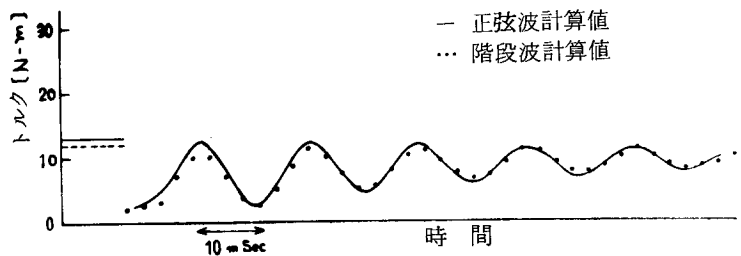
電圧上昇 150V → 200V (実効値)
 周波数 50Hz - 変

第2-20図 電圧急上昇時の過渡トルク応答



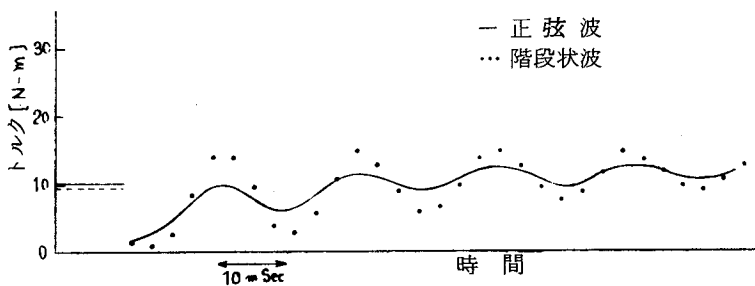
電圧降下 200V → 150V (実効値)
 周波数 50Hz 一定

第2-21図 電圧急降下時の過渡トルク応答



周波数上昇 50Hz → 60Hz
 電圧 一定 150V (実効値)

第2-22図 周波数急上昇時の過渡トルク応答



周波数降下 60Hz → 50Hz
 電圧 一定 150V (実効値)

第2-23図 周波数急降下時の過渡トルク応答

的に零近くまで落ちているが、これは実験方法によるものである。すなわち、200Vおよび150Vに設定した二つの電源を電磁開閉器によって切り換えるために、開路時の電磁開閉器接点には著しいアークが観測された。

したがって、200V閉路時の電動機の初期電流はほとんど零に近くなり、電動機発生トルクも零近傍から再起することになる。計算においてもこの点を考慮した。

< C > 正弦波と階段状波に対する過渡トルク応答

第2-20図から第2-23図に正弦波駆動ならびに階段状波駆動の場合の電圧急変および周波数急変に対する過渡トルク応答の理論計算値を示す。計算には(2-26)式および(2-24)式に基づいて行なわれたものである。この場合にも回転数を除き他の電動機定数は前項< B >と同一の値を使用しており、電圧値は実効値で考えて両者が等しくなるようにしてある。

同図から過渡トルクの振動の様子は正弦波駆動の場合と階段状波駆動の場合とでほとんど同様であることがわかる。

電圧変化の場合には第2-20図および第2-21図に示すように、階段状波に対する過渡トルクは正弦波に対する過渡トルクから両者の定常値における差の分だけ引算したような特性を示す。すなわち、両者はほとんど平行移動の関係にある。しかし第2-22図の周波数上昇時には両者はほとんど重なり、第2-23図の周波数下降時には階段状波のほうがより振動的特性を示す。

なお、トルクの定常値は(2-24)式において $n \rightarrow \infty$ 、あるいは(2-28)式において $\omega \rightarrow \infty$ として容易に求めることができる。図中の定常値はこのようにして求めたものである。

2.5 電動機系状態量の再現

(2-3)式における i_a および i_f 、(2-5)式あるいは(2-7)式における ω_m 、 ω_L および θ はいずれも観測可能な量である。したがって直流電動機系の状態可観測性²⁶⁾および状態量の再現に関しては問題はない。

誘導電動機系の場合には回転子巻線の電流を除いてはいずれも観測可能な状態量である。それゆえここでは回転子巻線の電流に関する可観測性および再現について検討する。

固定子回路の各相電流は測定可能であり、 i_f^* は観測可能量である。いま(2-19)式の回路の状態方程式を考え、 i_f^* を直接観測したとすると、系は $\hat{\theta}_e(t)$ を含む線形可変系と考えられ、且回転速度 $\hat{\theta}_e$ は解析的関数であるから、状態可観測性の行列をつくと²⁷⁾

* 証明は文献3)に与えられているが、関係論文は27)~31)

$$A = \frac{1}{\sigma^2} \begin{bmatrix} -R^s \mathcal{L}^r + j\dot{\theta}_e M^2 & R^r M + j\dot{\theta}_e \mathcal{L}^r M \\ R^s M - j\dot{\theta}_e \mathcal{L}^s M & -R^s \mathcal{L}^s - j\dot{\theta}_e \mathcal{L}^s \mathcal{L}^r \end{bmatrix} \quad (2-29')$$

$$C = [1 \quad 0]$$

として

$$[C_1^* \mid C_2^*] = [C^* \mid (\dot{C} + CA)^*] = \left[\begin{array}{c|c} 1 & \frac{-R^s \mathcal{L}^r - j\dot{\theta}_e M^2}{\sigma^2} \\ \hline 0 & \frac{R^r M - j\dot{\theta}_e \mathcal{L}^r M}{\sigma^2} \end{array} \right] \quad (2-29)$$

となる。上式の階数は回転速度 $\dot{\theta}_e$ の値の如何に関係なく 2 であるから、つねに状態可観測が成立する。すなわち回転子の正相電流は可観測である。

回転子の d 軸および q 軸成分は 25 頁脚注の関係式より

$$\begin{cases} i_d^s = \sqrt{2} \mathcal{R}_e \{ i_+^s \} \\ i_q^s = \sqrt{2} \text{Im} \{ i_+^s \} \end{cases}$$

として求められる。

また、(2-9) 式の α, β, γ 各相の電流は

$$i_-^s = \overline{i_+^s} \quad \text{—} : \text{複素共役}$$

であるから

$$\begin{bmatrix} i_\alpha^s \\ i_\beta^s \\ i_\gamma^s \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & a^2 & a \\ 1 & a & a^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon^{j\theta_e} & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon^{-j\theta_e} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ i_+^s \\ i_-^s \end{bmatrix} \quad a = \varepsilon^{j\frac{2}{3}\pi}$$

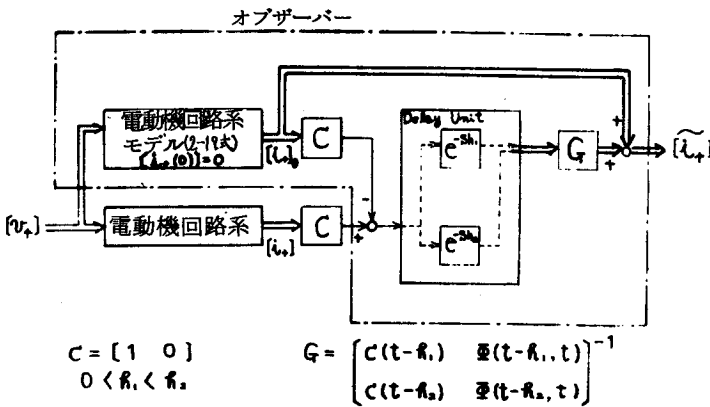
より求めることができる*。

つぎに状態量 $i_+^s(t)$ および $i_-^s(t)$ を再現するシステム，すなわちオブザーバ³⁵⁾³⁶⁾ について考察する。まず n-observability³²⁾ の観点から考えると、(2-29) 式は任意の $\tau < t$ に関して正則であるから常に n-observability は成立する³⁾。したがって第 2-24 図に示すオブザーバで状態量を再現できる。

回転速度がほぼ一定とみなされる範囲での過渡現象のみを問題としたときは、第 2-24 図中における G はつぎの式で与えられる。

$$G = \begin{bmatrix} c e^{-A h_1} \\ c e^{-A h_2} \end{bmatrix}$$

* 三相回路の座標変換に関しては付録 II 参照。



$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & k_1 & k_2 \end{bmatrix}$$

$$G = \begin{bmatrix} c(t-T_1) & \varpi(t-T_1, t) \\ c(t-T_2) & \varpi(t-T_2, t) \end{bmatrix}^{-1}$$

第2-24図 線形可変系としての状態量 $\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix}$ の再現システム

ただし、 A は (2-29') 式で示される。

また、この場合には定係数系として取扱えるから、第2-25図のオブザーバーによっても状態量は再現できる。

ただし、図中の B_+ は (2-19) 式の $[B_+]$ と同一であり、 F および B は

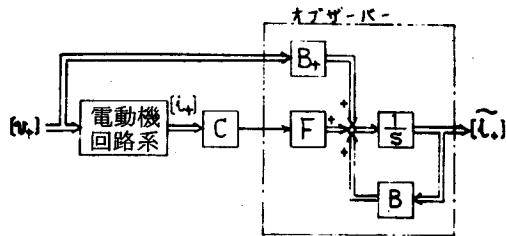
$$F = \frac{1}{\sigma^2} \begin{bmatrix} -R^s \mathcal{L}^I & 0 \\ R^s M & 0 \end{bmatrix}$$

$$B = \frac{1}{\sigma^2} \begin{bmatrix} j\dot{\theta}_e M^2 & R^s M + j\dot{\theta}_e \mathcal{L}^I M \\ -j\dot{\theta}_e \mathcal{L}^s M & -R^s \mathcal{L}^s - j\dot{\theta}_e \mathcal{L}^s \mathcal{L}^I \end{bmatrix}$$

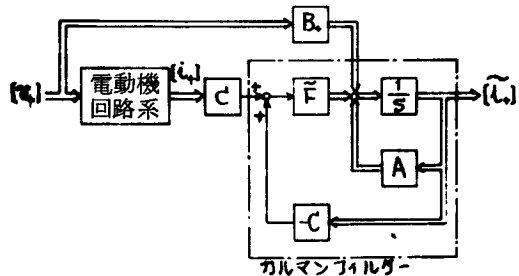
である。ところでこの第2-25図は第2-26図に等価変換可能であるので、カルマンフィルタ(26) (33) (34) によっても状態量再現が可能であることがわかる。

ただし図中の A は (2-29') 式で示されるものであり、 \tilde{F} は次式で与えられる。

$$\tilde{F} = \frac{1}{\sigma^2} \begin{bmatrix} -R^s \mathcal{L}^I \\ R^s M \end{bmatrix}$$



第2-25図 回転数一定とみなせる期間の過渡現象に対する状態量 $\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix}$ の再現システム



第2-26図 カルマンフィルタによる

$$\text{状態量 } \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} \text{ の再現システム}$$

2 章 文 献

- 1) T. Sekiguchi, Observability of Linear Dynamic Measuring System and Some Applications, 4th IFAC, Technical Session 12, 75/94, Warszawa, ('69)
- 2) 関 口 隆, 講義録: 回路理論 I (横浜国大), ('70)
- 3) 関 口 隆, 講義録: システム・制御 (横浜国大), ('71)
- 4) K. Ogata, State Space Analysis of Control Systems, Prentice-Hall, ('67)
- 5) 原島文雄・内田克己, 状態推移法によるインバータ・誘導電動機系の解析, 電気学会雑誌, Vol. 89-12, № 975, 2369/2377, ('69)
- 6) 関 口 隆, 誘導電動機の過渡トルク応答, 電気学会雑誌, Vol. 90, № 2, 287/293, ('70)
- 7) W. V. Lyon, Transient Analysis of Alternating Current Machinery, MIT Press & John Wiley, ('54)
- 8) 竹内寿太郎・前田明志・飯田祥二, 三相ブリッジ形 SCR インバータで制御される三相誘導電動機の特長, 電気学会雑誌, Vol. 88, 335/344, (昭 4 3 - 2)
- 9) G. Kron, The Application of Tensors to the Analysis of Rotating Electrical Machinery, G. E. Review, I, Vol. 38, 181/191, ~ XVII, Vol. 41, 448/454, ('35.4~'38.10)
- 10) 竹内寿太郎, 電気機器テンソル解析, オーム社, (昭 3 8)
- 11) 宮入 庄太, エネルギー変換工学入門, 丸善, (昭 4 0)
- 12) M. R. Chidambara & S. Ganapathy, Transient Torques in 3-Phase Induction Motors During Switching Operations, AIEE Trans., Vol. 82, III, 47/55, ('62)
- 13) 竹内寿太郎, かご形誘導電動機の起動過渡トルクの解析, 電気学会雑誌, Vol. 35, 713/721, (昭 3 5)
- 14) R. D. Slater, W. S. Wood, F. P. Flynn & R. Simpson, Digital Computation of Induction-motor Transient Torque Patterns, Proc. IEE, Vol. 113, № 5, 819/822, ('66)
- 15) 第 1 章文献 15) に同じ。

- 16) 第1章文献18) と同じ。
- 17) A. De Carli, M. Margo & A. Ruberti, Speed Control of Induction Motors by Frequency Variations, 3rd IFAC, 4C1/4C11, (London) ('66)
- 18) K. Heumann, Variable Frequency Speed Control of Induction Motors, 3rd IFAC, 4D1/4D9, (London) ('66)
- 19) Klaus Bystron, Strom-und Spannungsverhältnisse beim Drehstrom-Umrichter mit Gleichstromzwischenkreis, ETZ-A, Bd. 87, H. 8, 264/271, ('66)
- 20) 第1章文献13) と同じ。
- 21) 第1章文献14) と同じ。
- 22) G. C. Jain, Analytical Study of the Step Starting and Step Running of a 3-Phase Induction Motor, IEEE Trans., PAS-85, No. 2, 93/104, ('66)
- 23) H. E. Jordan, Analysis of Induction Machines in Dynamic Systems, IEEE Trans., PAS-84, No. 11, 1080/1088, ('65)
- 24) P. C. Krause & C. H. Thomas, Simulation of Symmetrical Induction Machinery, IEEE Trans., PAS-84, No. 11, 1038/1053, ('65)
- 25) I. Racz, Dynamic Behaviour of Inverter Controlled Induction Motors, 3rd IFAC, 4B1/4B7, (London) ('66)
- 26) R. E. Kalman, On the General Theory of Control, 1st IFAC, 481/492, (Moskva) ('60)
- 27) L. I. Rozonoer, A Variational Approach to the Problem of Invariance of Automatic Control Systems I, Auto. i, Tel. Vol. 24, No. 6, 744/756, June, ('63)
- 28) P. K. C. Wang, Invariance, Uncontrollability, and Unobservability in Dynamical Systems, IEEE Trans., AC-10, July, 366/367, ('65)
- 29) A. R. Stubberud, A Controllability Criterion for a Class of Linear Systems, IEEE Trans., Applications and Industry, Vol. 83, 411/413, ('64)
- 30) A. Chang, An Algebraic Characterization of Controllability

- bility, IEEE Trans., AC-10, Jan., 112/113, ('65)
- 31) R. D. Bonnel, An Observability Criterion for a Class of Linear Systems, IEEE Trans., AC-11, 135, ('66)
 - 32) J. D. Gilchrist, N-Observability for Linear Systems, IEEE Trans., AC-11, No. 3, July, 388/395, ('66)
 - 33) R. E. Kalman, A New Approach to Linear Filtering and Prediction Problems, ASME J of Basic Engineering, March, 35/45, ('60)
 - 34) R. E. Kalman & R. S. Bucy, New Results in Linear Filtering and Prediction Theory, ASME J of Basic Engineering, March, 95/108, ('61)
 - 35) D. G. Luenberger, Observing the State of a Linear System, IEEE Trans., Military Electronics, April, 74/80, ('64)
 - 36) D. G. Luenberger, Observers for Multivariable Systems, IEEE Trans., AC-11, No. 2, 190/197, ('66)

2章 付 録

I 対称回路・不平衡電源への変換

電動機の回転軸方向に対して電気回路および磁気回路が一様であり、電流密度分布および磁束密度分布が一様であるとする。この場合には電動機回転軸に垂直な平面内だけの解析で充分である。この平面内での回転磁界は二つのコイルによる合成磁界として表現できるので、基本的には2相回路による合成磁界を考慮すればよい。3相回路を変換したとき、零相回路はこの平面内での有効な合成磁界の形成には何ら寄与しない。それゆえ本節では合成磁界を基本として考えた場合の2相回路の等価変換を考える。

いま、a相コイル及びb相コイルを第2-27図のように配置してつぎの電流を流すとする。

$$\begin{cases} i_a = I_a \cos \omega t \\ i_b = I_b \sin \omega t + I_q \cos \omega t \end{cases}$$

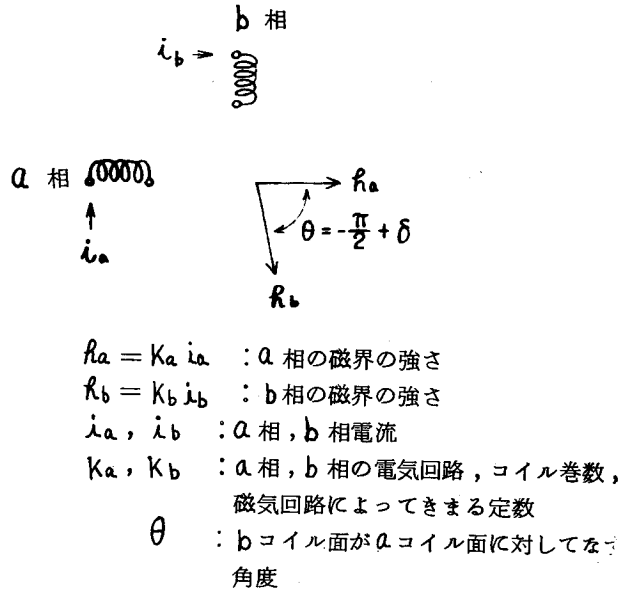
このとき合成磁界の強さは

$$\begin{aligned} h &= h_a + h_b \\ &= K_a i_a + K_b (\sin \delta - j \cos \delta) i_b \\ &= [(K_a I_a + K_b I_q \sin \delta) \cos \omega t - j K_b I_b \cos \delta \sin \omega t] \\ &\quad + [K_b I_b \sin \delta \sin \omega t - j K_b K_q \cos \delta \cos \omega t] \end{aligned}$$

となる。上式右辺の前半の〔 〕は時計方向の回転磁界を示し、後半の〔 〕は反時計方向の回転磁界を示す。

対称回路に平衡電源を接続したときは

$$h = K I \cos \omega t - j K I \sin \omega t = K I e^{-j\omega t}$$



第2-27図 2相回路のコイル配置図

$$K = K_a = K_b, \quad I = I_a = I_b$$

となり、時計方向の回転円磁界を形成する。

対称回路に不平衡電源を接続したときは

$$\begin{aligned} h &= (KI \cos \omega t - jKI \sin \omega t) - jK(I_\varphi \cos \omega t + I_\varepsilon \sin \omega t) \\ I_a &= I, \quad I_b = I + I_\varepsilon \end{aligned}$$

となり、楕円形の回転磁界ができる。

コイルの巻数、電気抵抗あるいは磁気抵抗にずれが存在するときは

$$K_a = K, \quad I' = \frac{K_b}{K} I$$

として

$$\begin{aligned} h &= (KI \cos \omega t - jKI \sin \omega t) - jK_b(I_\varphi \cos \omega t + I'_\varepsilon \sin \omega t) \\ I'_\varepsilon &= I_\varepsilon + \frac{K_b - K}{K_b} I \end{aligned}$$

となる。すなわちコイルの巻数、電気抵抗あるいは磁気抵抗のずれによる回路の非対称性は電流（すなわち電源）の不平衡性におきかえて考えられる。

機械の構造上、aコイルとbコイルの配置が対称位置からずれている場合には

$$\begin{aligned} h &= (KI \cos \omega t - jKI \sin \omega t) - jK(I_\varphi \cos \omega t + \tilde{I}_\varepsilon \sin \omega t) \varepsilon^{j\delta} \\ \tilde{I}_\varepsilon &= (I'_\varepsilon - 2I \sin \frac{\delta}{2}) \end{aligned}$$

となる。ここで δ を微小とすると

$$\begin{aligned} h &= (KI \cos \omega t - jKI \sin \omega t) - jK(I'_\varphi \cos \omega t + I''_\varepsilon \sin \omega t) \\ I'_\varphi &= I_\varphi \cos \delta, \quad I''_\varepsilon = \tilde{I}_\varepsilon \cos \delta \end{aligned}$$

となる。つまりコイルの対称位置からのずれは電流（すなわち電源）の不平衡性に等価的に置換可能である。

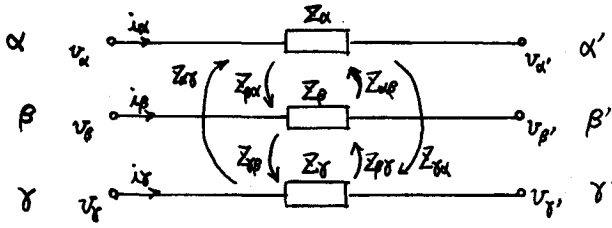
以上より非対称機器は対称機器・不平衡電源に等価変換して取扱ってよいことがわかる。

II 三相回路の座標変換

こゝでは電力不変の絶対変換のみについて考える*。

第2-28図の回路方程式は

* ユニタリー変換が電力不変の絶対変換のための必要十分条件である。またインピーダンス行列 [Z] があるユニタリー変換によって対角化可能であるための必要十分条件は [Z] がノーマル行列のことである²⁾。



$v_\alpha, v_\beta, v_\gamma, v_{\alpha'}, v_{\beta'}, v_{\gamma'}$: 端子 $\alpha, \beta, \gamma, \alpha', \beta', \gamma'$ の
対大地電位

$i_\alpha, i_\beta, i_\gamma$: α 相, β 相, γ 相の線電流

$Z_\alpha, Z_\beta, Z_\gamma$: α 相, β 相, γ 相の自己インピーダンス

$Z_{\alpha\beta}, Z_{\beta\alpha}, Z_{\alpha\gamma}, Z_{\gamma\alpha}, Z_{\beta\gamma}, Z_{\gamma\beta}$: 相互インピーダンス

第2-28図 相互インピーダンスを有する3相回路

$$\begin{bmatrix} v_\alpha \\ v_\beta \\ v_\gamma \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} v_{\alpha'} \\ v_{\beta'} \\ v_{\gamma'} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z_\alpha & Z_{\alpha\beta} & Z_{\alpha\gamma} \\ Z_{\beta\alpha} & Z_\beta & Z_{\beta\gamma} \\ Z_{\gamma\alpha} & Z_{\gamma\beta} & Z_\gamma \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_\alpha \\ i_\beta \\ i_\gamma \end{bmatrix} \quad (2-30)$$

となる。上式を3相対称座標法によって変換すると、

$$\begin{bmatrix} i_\alpha \\ i_\beta \\ i_\gamma \end{bmatrix} = [T_{\alpha\beta\gamma \cdot 012}] \begin{bmatrix} i_0 \\ i_1 \\ i_2 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} v_\alpha \\ v_\beta \\ v_\gamma \end{bmatrix} = [T_{\alpha\beta\gamma \cdot 012}] \begin{bmatrix} v_0 \\ v_1 \\ v_2 \end{bmatrix}$$

$$[Z_{\alpha\beta\gamma}] = [T_{\alpha\beta\gamma \cdot 012}] [Z_{012}] [T_{\alpha\beta\gamma \cdot 012}]^{-1}$$

$$[T_{\alpha\beta\gamma \cdot 012}] = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & a^2 & a \\ 1 & a & a^2 \end{bmatrix} \quad (2-31)$$

となる。上述の $[Z_{\alpha\beta\gamma}]$ は (2-30) 式のインピーダンス行列を表わし、
 $[Z_{012}]$ は変換後のインピーダンス行列で次式で示される。

$$[Z_{012}] = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{bmatrix} Z_{S0} + Z_{m0} + Z_{M0} & Z_{S2} + a^2 Z_{m2} + a Z_{M2} & Z_{S1} + a Z_{m1} + a^2 Z_{M1} \\ Z_{S1} + Z_{m1} + Z_{M1} & Z_{S0} + a^2 Z_{m0} + a Z_{M0} & Z_{S2} + a Z_{m2} + a^2 Z_{M2} \\ Z_{S2} + Z_{m2} + Z_{M2} & Z_{S1} + a^2 Z_{m1} + a Z_{M1} & Z_{S0} + a Z_{m0} + a^2 Z_{M0} \end{bmatrix} \quad (2-32)$$

ただし,

$$\begin{bmatrix} \bar{Z}_\alpha \\ \bar{Z}_\beta \\ \bar{Z}_\gamma \end{bmatrix} = [T_{\alpha\beta\gamma \cdot 012}], \begin{bmatrix} \bar{Z}_{\alpha\beta} \\ \bar{Z}_{\beta\gamma} \\ \bar{Z}_{\gamma\alpha} \end{bmatrix} = [T_{\alpha\beta\gamma \cdot 012}] \begin{bmatrix} \bar{Z}_{m0} \\ \bar{Z}_{m1} \\ \bar{Z}_{m2} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \bar{Z}_{\alpha\gamma} \\ \bar{Z}_{\beta\alpha} \\ \bar{Z}_{\gamma\beta} \end{bmatrix} = [T_{\alpha\beta\gamma \cdot 012}] \begin{bmatrix} \bar{Z}_{M0} \\ \bar{Z}_{M1} \\ \bar{Z}_{M2} \end{bmatrix}$$

ここで

$$\begin{cases} \bar{Z}_\alpha = \bar{Z}_\beta = \bar{Z}_\gamma \\ \bar{Z}_{\alpha\beta} = \bar{Z}_{\beta\gamma} = \bar{Z}_{\gamma\alpha} \\ \bar{Z}_{\alpha\gamma} = \bar{Z}_{\beta\alpha} = \bar{Z}_{\gamma\beta} \end{cases} \quad (2-33)$$

が成立するときは (2-32) 式は対角行列となり次式で表わされる。

$$[\bar{Z}_{012}] = \begin{bmatrix} \bar{Z}_0 & 0 & 0 \\ 0 & \bar{Z}_1 & 0 \\ 0 & 0 & \bar{Z}_2 \end{bmatrix} \quad (2-34)$$

$$\begin{bmatrix} \bar{Z}_{s0} \\ \bar{Z}_{m0} \\ \bar{Z}_{M0} \end{bmatrix} = [T_{\alpha\beta\gamma \cdot 012}]^{-1} \begin{bmatrix} \bar{Z}_0 \\ \bar{Z}_1 \\ \bar{Z}_2 \end{bmatrix}$$

上述の変換で得られた正相分および逆相分を 2 相対称座標法で逆変換すると

$$\begin{bmatrix} \dot{i}_\alpha \\ \dot{i}_\beta \\ \dot{i}_\gamma \end{bmatrix} = [T_{\alpha\beta\gamma \cdot 012}] \begin{bmatrix} \dot{i}_0 \\ \dot{i}_a \\ \dot{i}_b \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} v_\alpha \\ v_\beta \\ v_\gamma \end{bmatrix} = [T_{\alpha\beta\gamma \cdot 0ab}] \begin{bmatrix} v_0 \\ v_a \\ v_b \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} [\bar{Z}_{0ab}] &= [T_{\alpha\beta\gamma \cdot 0ab}]^{-1} [\bar{Z}_{\alpha\beta\gamma}] [T_{\alpha\beta\gamma \cdot 0ab}] \\ &= \begin{bmatrix} \bar{Z}_0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\bar{Z}_1 + \bar{Z}_2}{2} & j \frac{\bar{Z}_1 - \bar{Z}_2}{2} \\ 0 & -j \frac{\bar{Z}_1 - \bar{Z}_2}{2} & \frac{\bar{Z}_1 + \bar{Z}_2}{2} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (2-35)$$

$$[T_{\alpha\beta\gamma \cdot 012}] = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & a^2 & a \\ 1 & a & a^2 \end{bmatrix} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} \sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & j \\ 0 & 1 & -j \end{bmatrix}$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 1 & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix}$$

平面内で座標軸を角度 θ だけ回転するときの直交変換はよく知られているつぎの行列で与えられる。

$$\begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \quad (2-34)$$

この関係を用いて、上述の変換結果にさらに角度 θ の回転を加えると、

$$\begin{bmatrix} i_\alpha \\ i_\beta \\ i_\gamma \end{bmatrix} = [T_{\alpha\beta\gamma \cdot 0d\phi}] \begin{bmatrix} i_0 \\ i_d \\ i_\phi \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} v_\alpha \\ v_\beta \\ v_\gamma \end{bmatrix} = [T_{\alpha\beta\gamma \cdot 0d\phi}] \begin{bmatrix} v_0 \\ v_d \\ v_\phi \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} [T_{\alpha\beta\gamma \cdot 0d\phi}] &= \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 1 & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & -\sin \theta \\ 0 & \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \\ &= \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \cos \theta & -\sin \theta \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \cos(\theta - \frac{2}{3}\pi) & -\sin(\theta - \frac{2}{3}\pi) \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \cos(\theta - \frac{4}{3}\pi) & -\sin(\theta - \frac{4}{3}\pi) \end{bmatrix} \end{aligned}$$

θ が一定値の場合には変換後のインピーダンスは

$$[Z_{0d\phi}] = [Z_{0ab}]$$

となる。回転子回路を固定子回路と同一の座標軸へ変換する場合には $\theta = \theta(t)$ となるので、この関係は成立しない。

上述の得られた結果にさらに2相対称座標法の変換を施すと、

$$\begin{bmatrix} i_\alpha \\ i_\beta \\ i_\gamma \end{bmatrix} = [T_{\alpha\beta\gamma \cdot 0+-}] \begin{bmatrix} i_0 \\ i_+ \\ i_- \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} v_\alpha \\ v_\beta \\ v_\gamma \end{bmatrix} = [T_{\alpha\beta\gamma \cdot 0+-}] \begin{bmatrix} v_0 \\ v_+ \\ v_- \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned}
 [\underline{Z}_{0+-}] &= [T_{\alpha\beta\gamma,0+-}]^{-1} [\underline{Z}_{\alpha\beta\gamma}] [T_{\alpha\beta\gamma,0+-}] \\
 &= [\underline{Z}_{012}]
 \end{aligned}
 \tag{2-35}$$

$$\begin{aligned}
 [T_{\alpha\beta\gamma,0+-}] &= \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \cos\theta & -\sin\theta \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \cos(\theta-\frac{2}{3}\pi) & -\sin(\theta-\frac{2}{3}\pi) \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \cos(\theta-\frac{4}{3}\pi) & -\sin(\theta-\frac{4}{3}\pi) \end{bmatrix} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} \sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -j & j \end{bmatrix} \\
 &= \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & a^2 & a \\ 1 & a & a^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon^{j\theta} & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon^{-j\theta} \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

となる。

ここで第2-28図の α' , β' および γ' を接続してY結線にし, $v_\alpha - v_{\alpha'}$, $v_\beta - v_{\beta'}$, $v_\gamma - v_{\gamma'}$ をそれぞれあらためて $v_\alpha, v_\beta, v_\gamma$ とし固定子および回転子巻線間の相互インダクタンスを考慮すると(2-9)式の電動機回路方程式が得られる。

(2-9)式の固定子および回転子回路を $0 \cdot a \cdot b$ 座標軸に変換すると

$$\begin{bmatrix} v_0^s \\ v_a^s \\ v_b^s \\ v_0^r \\ v_a^r \\ v_b^r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R^s + l^s p & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \underline{Z}_{ab}^s & 0 & \underline{Z}_{ab}^{sr} \\ 0 & 0 & R^r + l^r p & 0 \\ 0 & \underline{Z}_{ab}^{rs} & 0 & \underline{Z}_{ab}^r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_0^s \\ i_a^s \\ i_b^s \\ i_0^r \\ i_a^r \\ i_b^r \end{bmatrix}$$

$$[\underline{Z}_{ab}^s] = \begin{bmatrix} R^s + (l^s + \frac{3}{2}L^s)p & 0 \\ 0 & R^s + (l^s + \frac{3}{2}L^s)p \end{bmatrix}$$

$$[\underline{Z}_{ab}^r] = \begin{bmatrix} R^r + (l^r + \frac{3}{2}L^r)p & 0 \\ 0 & R^r + (l^r + \frac{3}{2}L^r)p \end{bmatrix}$$

$$[\underline{Z}_{ab}^{sr}] = \frac{3}{2} M p \begin{bmatrix} \cos\theta_e & \sin\theta_e \\ -\sin\theta_e & \cos\theta_e \end{bmatrix}, \quad [\underline{Z}_{ab}^{rs}] = \frac{3}{2} M p \begin{bmatrix} \cos\theta_e & -\sin\theta_e \\ \sin\theta_e & \cos\theta_e \end{bmatrix}$$

となる。

さらに上述の変換結果に，固定子回路を恒等変換および回転子回路を(2-34)式の変換で変換を施すと，

$$\begin{bmatrix} V_0^s \\ V_d^s \\ V_q^s \\ V_0^r \\ V_d^r \\ V_q^r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R^s + l^s p & 0 & 0 & 0 \\ 0 & Z_{dq}^s & 0 & Z_{dq}^{sr} \\ 0 & 0 & R^r + l^r p & 0 \\ 0 & Z_{dq}^{rs} & 0 & Z_{dq}^r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_0^s \\ i_d^s \\ i_q^s \\ i_0^r \\ i_d^r \\ i_q^r \end{bmatrix}$$

$$[Z_{dq}^s] = [Z_{ab}^s], \quad [Z_{dq}^r] = \begin{bmatrix} R^r + (l^r + \frac{3}{2}L^r)p & -(l^r + \frac{3}{2}L^r)\dot{\theta}_e \\ (l^r + \frac{3}{2}L^r)\dot{\theta}_e & R^r + (l^r + \frac{3}{2}L^r)p \end{bmatrix}$$

$$[Z_{dq}^{sr}] = \frac{3}{2} M \begin{bmatrix} p & 0 \\ 0 & p \end{bmatrix}, \quad [Z_{dq}^{rs}] = \frac{3}{2} M \begin{bmatrix} p & -\dot{\theta}_e \\ \dot{\theta}_e & p \end{bmatrix}$$

となる。上式より零相部分を除去して状態方程式表現にしたのが(2-10)式である。

さらに固定子および回転子回路に2相対称座標法の変換を施すと，

$$[Z_{+-}^s] = [Z_{dq}^s], \quad [Z_{+-}^r] = \begin{bmatrix} R^r + (l^r + \frac{3}{2}L^r)(p + j\dot{\theta}_e) & 0 \\ 0 & R^r + (l^r + \frac{3}{2}L^r)(p - j\dot{\theta}_e) \end{bmatrix}$$

$$[Z_{+-}^{sr}] = [Z_{dq}^{sr}], \quad [Z_{+-}^{rs}] = \frac{3}{2} M \begin{bmatrix} p + j\dot{\theta}_e & 0 \\ 0 & p - j\dot{\theta}_e \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} V_0^s \\ V_+^s \\ V_-^s \\ V_0^r \\ V_+^r \\ V_-^r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R^s + l^s p & 0 & 0 & 0 \\ 0 & Z_{+-}^s & 0 & Z_{+-}^{sr} \\ 0 & 0 & R^r + l^r p & 0 \\ 0 & Z_{+-}^{rs} & 0 & Z_{+-}^r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_0^s \\ i_+^s \\ i_-^s \\ i_0^r \\ i_+^r \\ i_-^r \end{bmatrix}$$

となる。この正相 (+相) 分のみをとりだしたのが (2-18) 式である。

以下に $\alpha \cdot \beta \cdot \gamma$, $0 \cdot 1 \cdot 2$, $0 \cdot a \cdot b$, $0 \cdot d \cdot q$, $0 \cdot + \cdot -$ 各座標系間の変換行列を列記する。

$$[T_{\alpha\beta\gamma \cdot 012}] = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & a^2 & a \\ 1 & a & a^2 \end{bmatrix} = [T_{012 \cdot \alpha\beta\gamma}]^*$$

$$[T_{\alpha\beta\gamma \cdot 0ab}] = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 1 & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix} = [T_{0ab \cdot \alpha\beta\gamma}]^*$$

$$[T_{\alpha\beta\gamma \cdot 0dq}] = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \cos\theta & -\sin\theta \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \cos(\theta - \frac{2}{3}\pi) & -\sin(\theta - \frac{2}{3}\pi) \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \cos(\theta - \frac{4}{3}\pi) & -\sin(\theta - \frac{4}{3}\pi) \end{bmatrix} = [T_{0dq \cdot \alpha\beta\gamma}]^*$$

$$[T_{\alpha\beta\gamma \cdot 0+-}] = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & a^2 & a \\ 1 & a & a^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon^{j\theta} & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon^{-j\theta} \end{bmatrix} = [T_{0+- \cdot \alpha\beta\gamma}]^*$$

$$\begin{aligned} [T_{012 \cdot 0ab}] &= \begin{bmatrix} \sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & j \\ 0 & 1 & -j \end{bmatrix}, & [T_{012 \cdot 0dq}] &= \begin{bmatrix} \sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon^{j\theta} & j\varepsilon^{j\theta} \\ 0 & \varepsilon^{-j\theta} & -j\varepsilon^{-j\theta} \end{bmatrix} \\ = [T_{0ab \cdot 012}]^* &= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} \sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & j \\ 0 & 1 & -j \end{bmatrix}, & = [T_{0dq \cdot 012}]^* &= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} \sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon^{j\theta} & j\varepsilon^{j\theta} \\ 0 & \varepsilon^{-j\theta} & -j\varepsilon^{-j\theta} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} [T_{012 \cdot 0+-}] &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon^{j\theta} & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon^{-j\theta} \end{bmatrix}, & [T_{0ab \cdot 0dq}] &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \\ = [T_{0+- \cdot 012}]^* &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon^{j\theta} & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon^{-j\theta} \end{bmatrix}, & = [T_{0dq \cdot 0ab}]^* &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$[T_{0ab \cdot 0+-}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & -\frac{j}{\sqrt{2}} & \frac{j}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & -\frac{j}{\sqrt{2}} & \frac{j}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon^{j\theta} & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon^{-j\theta} \end{bmatrix}$$

$$[T_{0dq \cdot 0+-}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & -\frac{j}{\sqrt{2}} & \frac{j}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} = [T_{0+- \cdot 0dq}]^*$$

第3章 線形系の入力可観測性

第3章 線形系の入力可観測性

本章では線形系の入力可観測性の諸定理を述べ、入力可観測性に関する線形系の性質について検討する。

本章の構成は入力可観測性を理解しやすい順に、まず時間離散系をとりあげ、ついで定係数時間連続系について論じる。理論的には後者の一般波形入力に対する取扱いは前者と統一的行なうことも可能であるが、パルス列入力に対しては若干異なる面をもつこと、ベキ多項式入力に対してはパラメータを含んだ形で入力波形を決定できること、および異なる波形再現方式が考えられることを考慮して別に論ずることとする。

3.1 時間離散系 ^{1) 2)}

情報の集積および処理装置にはデジタル形電子計算機をはじめとして、その情報処理機能が差分方程式で表示されるものが多い。これらの情報集積処理装置をも包含した形で観測系を考える場合には、観測系全体を時間離散系であるとみなすことが便利である。一方、時間連続系を時間離散系で近似することは、サンプル間隔を小さくすれば一般に充分許されることである。

そこで観測系が第3-1図および次式で与えられる場合について考察する。

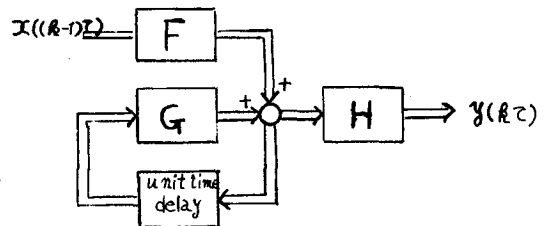
$$\begin{cases} z(kT) = Gz((k-1)T) + Fx((k-1)T) \\ y(kT) = Hz(kT) \end{cases} \quad (3-1)$$

ここで、 G : $n \times n$ 行列、 F : $n \times r$ 行列、 H : $m \times n$ 行列、
 z : n ベクトル (観測系の状態量)、 x : r ベクトル (観測系の入力量。求めるべき値)、 y : m ベクトル (観測系の出力量)。

観測系の入力の数 r 、出力の数 m および状態の数 n の間につきの不等式が成立すると仮定する。

$$r \leq m \leq n \quad (3-2)$$

(3-1) 式で示される観測系が入力量 x を求めるのに妥当であるか否かは、この観測系の出力量 y から入力量 x を求め得るか否かにかゝっている。それゆえ、つぎのように入力可観測性を定義する。



第3-1図 定係数時間離散系

「(3-1) 式の観測系において有限個の出力量 y の観測より入力量 x の初期値 $x(0)$ が決定できるとき、この系は入力可観測性を有する。」

むしろ上述の定義で $x(0)$ の決定は唯一でなければならない。上述の定義は $x(0)$ を求め得るか否かだけで考えたが、 $x(1)$, $x(2)$, ……を求める場合を考えてもこの入力可観測性の定義で十分なことが容易にわかる。またこゝでは観測系の初期値 $z(0)$ は既知とする。

ところで、入力 $x(0)$ の決定にたった1回の出力量 $y(\tau)$ のサンプルだけで十分な場合もあろうし、2回あるいは3回のサンプルが必要な場合もあろう。それをつぎのように定義する。すなわち、

「(3-1) 式の観測系において入力量 $x(0)$ の決定に必要な最小のサンプリング数が i のとき、この系は i 位の入力可観測性を有する。」

さて、まず(3-1) 式の観測系が1位の入力可観測を有する条件を求めてみよう。(3-1) 式より $k=1$ として、

$$\begin{aligned} y(\tau) &= H z(\tau) \\ &= H G z(0) + H F x(0) \\ \therefore w(\tau) &= y(\tau) - H G z(0) = H F x(0) \end{aligned}$$

したがって1位の入力可観測性成立の必要十分条件は

$$[HF] \tag{3-3}$$

の階数が r のことである。

もし、1位の入力可観測性が不成立の場合、すなわち(3-3) 式の階数が $l_1 < r$ のときにはさらにつぎの観測データを用いて次式を得る。

$$\begin{aligned} w(\tau) &= H F x(0) \\ w(2\tau) &= y(2\tau) - H G^2 z(0) \\ &= H G F x(0) + H F x(\tau) \\ \therefore \begin{bmatrix} w(\tau) \\ w(2\tau) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} H F & 0 \\ H G F & H F \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(0) \\ x(\tau) \end{bmatrix} \end{aligned}$$

こゝで巻末の付録の補助定理 1-1 ~ 1-III を用いると上式より2位の入力可観測性の必要十分条件は、上式の係数行列すなわち次式の階数が $r + l_1$ のことである。

$$\begin{bmatrix} HF & 0 \\ HGF & HF \end{bmatrix} \quad (3-4)$$

もし 2 位の入力可観測性が不成立のとき、すなわち (3-4) 式の行列の階数が $l_2 < I + l_1$ のとき、さらにつぎの観測データ $y(3\tau)$ を必要とする。つまり、

$$\begin{cases} w(\tau) = HF x(0) \\ w(2\tau) = HGF x(0) + HF x(\tau) \\ w(3\tau) = y(3\tau) - HG^3 z(0) \\ \quad = HG^2 F x(0) + HGF x(\tau) + HF x(2\tau) \end{cases}$$

∴

$$\begin{bmatrix} w(\tau) \\ w(2\tau) \\ w(3\tau) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} HF & 0 & 0 \\ HGF & HF & 0 \\ HG^2 F & HGF & HF \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(0) \\ x(\tau) \\ x(2\tau) \end{bmatrix}$$

この場合には巻末の付録の 1-IV より、この系が 3 位の入力可観測性を有するための必要十分条件は上式の係数行列すなわち次式の行列の階数が $I + l_2$ のことである。

$$\begin{bmatrix} HF & 0 & 0 \\ HGF & HF & 0 \\ HG^2 F & HGF & HF \end{bmatrix} \quad (3-5)$$

したがって一般に i 位の入力可観測性が成立するための必要十分条件として巻末の付録 1-IV および補助定理 1-III よりつぎの定理を得る。

[定理 1-1] (3-1) 式の観測系が i 位の入力可観測性を有するための必要十分条件は、

$$\begin{cases} l_i = I + l_{i-1} \\ l_{k-1} < I + l_{k-2} \quad k=2, \dots, i, \quad l_0 = 0 \end{cases} \quad (3-6)$$

が成立することである。ただし、 l_k は次式の行列の階数である。

$$\begin{bmatrix} HF & 0 & \dots & 0 \\ HGF & HF & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ HG^{k-1}F & HG^{k-2}F & \dots & HF \end{bmatrix} \quad (3-7)$$

(3-3), (3-4) および (3-5) 式をみると第 k 回目のサンプリングでもって, (3-7) 式の最下段の $m \times kI$ 行列

$$\{HG^{k-1}F; HG^{k-2}F; \dots; HF\} \quad (3-8)$$

が係数行列に追加されたことがわかる。(3-7) 式より, この (3-8) 式をとりのぞいた係数行列の階数が l_{k-1} であるので, (3-7) 式より (3-8) 式を除去した係数行列の一次独立な行は l_{k-1} 個である。したがって, もし k 番目のサンプリングを追加することにより入力可観測性が得られるためには, (3-8) 式の行列に Y 個の一次独立な行が存在しなければならない。それゆえ定理 1-1 に対するつぎの系を得る。

[系 1-1-1] (3-1) 式の観測系が i 位の入力可観測性を有するためにはつぎの $m \times iI$ 行列の階数が少なくとも Y のことが必要である。

$$\{HF; HGF; \dots; HG^{i-1}F\}$$

上述の系 1-1-1 は i 位の入力可観測性を有するためには i 番目のサンプリングによつて得られた m 個の情報のうち, Y 個以上が独立でなければならないことを示している。ゆえに (3-2) 式の関係式は, 入力可観測性が成立するための必要条件となっていることがわかる。

ところでまた k 番目のサンプリングにより, (3-7) 式の最初の $m \times kI$ 行列が追加されたとみなすこともできる。それゆえ, k 位の入力可観測性を有するためには (3-7) 式の最初の Y 個の列ベクトルが一次独立であることが必要である。すなわちつぎの定理の系を得る。

[系 1-1-2] (3-1) 式の観測系が i 位の入力可観測性を有するための必要条件は, つぎの $Y \times m \cdot i$ 行列の階数が Y のことである。

$$[F^*H^* | F^*G^*H^* | \dots | F^*(G^*)^{i-1}H^*] \quad (3-9)$$

* : 共役転置

上述の系 1-1-2 は $\mathcal{X}(0)$ の各要素 $\mathcal{X}_1(0), \dots, \mathcal{X}_r(0)$ にかゝる r 個の係数列ベクトルが一次独立であることを意味する。

(3-7) 式において $k=i$ とした行列より (3-9) 式すなわち最初の列を除去したものは一次独立な列ベクトルが l_{i-1} 個ある。ゆえに i 位の入力可観測性をもつことは、(3-9) 式の r 個の列ベクトルを追加することにより一次独立の列ベクトルの数が $r+l_{i-1}$ 個になったことを意味している。系 1-1-2 は $\mathcal{X}_1(0), \dots, \mathcal{X}_r(0)$ の係数列ベクトルが互いに独立なことが必要条件となっていることを意味しているが、定理 1-1 は $\mathcal{X}_1(0), \dots, \mathcal{X}_r(0)$ の任意の係数列ベクトルが他の $r+l_{i-1}$ 個の列ベクトルの線形結合では表わせないことと等価である。ゆえに定理 1-1 はつぎの系と等価となる。

[系 1-1-3] (3-1) 式の観測系が i 位の入力可観測性を有するための必要十分条件は、いかなる $\gamma_1 \neq 0, \gamma_2, \dots, \gamma_i$ に対しても次式が成立することである。

$$\begin{bmatrix} HF \\ HGF \\ \vdots \\ HG^{i-1}F \end{bmatrix} \gamma_1 + \begin{bmatrix} 0 \\ HF \\ \vdots \\ HG^{i-2}F \end{bmatrix} \gamma_2 + \dots + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ HF \end{bmatrix} \gamma_i \neq 0 \quad (3-10)$$

ただし、

$$\gamma_1 = \begin{bmatrix} \gamma_{11} \\ \vdots \\ \gamma_{1r} \end{bmatrix} \neq 0, \quad \gamma_2 = \begin{bmatrix} \gamma_{21} \\ \vdots \\ \gamma_{2r} \end{bmatrix}, \quad \dots, \quad \gamma_i = \begin{bmatrix} \gamma_{i1} \\ \vdots \\ \gamma_{ir} \end{bmatrix}$$

さて、(3-1) 式の系が i 位の入力可観測性をもたないとき、さらに無限に観測データを累積していくことが意味があるだろうか。つぎにこの問題を考えてみる。

もし、(3-1) 式の観測系が 1 位、 \dots 、 i 位の入力可観測性を有しないならば、系 1-1-3 より次式を満足する r ベクトル γ_1 (非零)、 γ_2 、

……, γ_i が存在する。

$$\begin{bmatrix} HF \\ HGF \\ \vdots \\ HG^{i-1}F \end{bmatrix} \gamma_1 + \begin{bmatrix} 0 \\ HF \\ \vdots \\ HG^{i-2}F \end{bmatrix} \gamma_2 + \dots + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ HF \end{bmatrix} \gamma_i = 0$$

すなわち次式が満足される。

$$\begin{bmatrix} HF \gamma_1 \\ H(GF \gamma_1 + F \gamma_2) \\ \vdots \\ H(G^{i-1}F \gamma_1 + G^{i-2}F \gamma_2 + \dots + F \gamma_i) \end{bmatrix} = 0 \quad (3-11)$$

こゝでつぎのようにおく。

$$\begin{cases} f_1 = F \gamma_1 \\ f_2 = GF \gamma_1 + F \gamma_2 \\ \vdots \\ f_i = G^{i-1}F \gamma_1 + G^{i-2}F \gamma_2 + \dots + F \gamma_i \end{cases} \quad (3-12)$$

上式の f_1, f_2, \dots, f_i は n 次元空間内のベクトルを表わしている。いま行列 H の階数を $m' \leq m$ とすると H には m' 個の一次独立な行ベクトルが存在する。したがって H の行ベクトルは n 次元空間中に m' 次元の部分空間を張る。これを $S_p(H)$ と表わそう。そうすると (3-11) 式は, (3-12) 式で表わされるベクトル f_1, \dots, f_i がすべてゼロベクトルであるか, または m' 次元の部分空間 $S_p(H)$ と直交することを示している。すなわち,

$$f_1 \perp S_p(H), \quad f_2 \perp S_p(H), \quad \dots, \quad f_i \perp S_p(H)$$

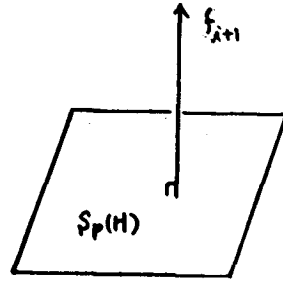
つまりベクトル f_1, \dots, f_i は $S_p(H)$ の $n - m'$ 次元補空間内に存在している。

さて, こゝで $i+1$ 位の入力可観測性を検討するために次式を考えよう。

$$\begin{aligned} f_{i+1} &= G f_i + F \gamma_{i+1} \\ &= G^i F \gamma_1 + G^{i-1} F \gamma_2 + \dots + G F \gamma_i + F \gamma_{i+1} \end{aligned}$$

ただし、 γ_{i+1} は Γ ベクトルとする。

もし、 $f_{i+1} \perp S_p(H)$ とすることが出来る γ_{i+1} が存在するならば、 f_{i+1} は $n-m'$ 次元の補空間内に存在して、この系は $i+1$ 位の入力可観測性をもたない。(第3-2図参照)



第3-2図 第 $i+1$ 位の入力可観測性を不成立ならしめるベクトル

ここで $i=n$ とおいてみると、付録1-Vに示したとおり、 f_{n+1} は f_1 、

……、 f_n の線形結合で表現される。したがって f_1, \dots, f_n がすべて $S_p(H)$ と直交するならば、 $f_{n+1} \perp S_p(H)$ となり f_{n+1} は $n-m'$ 次元の $S_p(H)$ の補空間内に存在する。つまりこの系は $n+1$ 位の入力可観測性をもたない。ゆえにつぎの定理が証明された。

[定理1-2] (3-1) 式の観測系が n 位の入力可観測性をもたないとき、この系は入力可観測性をもたない。すなわち、入力可観測性の最高位数は n である。

3.2 時間連続系³⁾

本節では観測系が時間連続系でその入力パルス列、ベキ多項式およびラプラス変換可能な一般的波形の場合について入力可観測性を検討する。

遠隔測定では伝送信号としてパルス列をよく採用する。伝送路と受信側での情報処理装置が線形微分方程式で表現されるような場合が本節第1項でとりあげる場合に相当する。

Weierstrass の近似定理⁴⁾によると区間 $t_b \sim t_e$ において連続な任意の関数は時刻 t のベキ多項式で一様近似可能である。したがって時刻 t の N 次 (N を有限、任意とする) 多項式入力に対する可観測性を検討しておくことは十分に意義あることである。

最後に一般的入力波形の可観測性を論じるが、本節第3項ではラプラス変換が可能なものを取りあげる。

本節でとりあげる動的観測系はつぎの微分方程式で示されるとする。

$$\begin{cases} \dot{z} = Az + Bx \\ y = Cz \end{cases} \quad (3-13)$$

ここで、 x : Γ ベクトル (観測系の入力量, 被測定量), z : n ベクトル (観測系の状態量), y : m ベクトル (観測系の出力量), A : $n \times n$ 定係数行列, B : $n \times \Gamma$ 定係数行列, C : $m \times n$ 定係数行列。

観測系 (3-13) 式の出力 $y(t)$ は次式で表わされる。

$$y(t) = C \Phi(t-t_b) z(t_b) + \int_{t_b}^t C \Phi(t-\tau) B x(\tau) d\tau \quad (3-14)$$

ただし、 t_b は観測開始時刻であり $\Phi(t-t_b)$ は観測系 (3-13) 式の状態遷移行列である。(3-14) 式で初期値 $z(t_b)$ を既知とすると次式を得る。

$$w(t) = y(t) - C \Phi(t-t_b) z(t_b) = \int_{t_b}^t C \Phi(t-\tau) B x(\tau) d\tau \quad (3-15)$$

したがって入力可観測性の問題は観測区間 $t_b \sim t_e$ における (3-15) 式の $w(t)$ の値より同区間の $x(t)$ の値を唯一に決定し得るための条件を求めることになる。

3.2.1 パルス列入力の可観測性 観測区間 $t_b \sim t_e$ に N 個のパルスよりなるパルス列入力 $x(t)$ が印加された場合の可観測性を検討する (第 3-3 図参照)。入力は次式で表わされる。

$$x(t) = \sum_{i=1}^N x(t_i) \delta(t-t_i)$$

$$x(t_i) = \begin{bmatrix} x_1(t_i) \\ \vdots \\ x_r(t_i) \end{bmatrix} \quad i = 1, 2, \dots, N \quad (3-16)$$

ただし、パルス印加時刻 t_1, \dots, t_N は既知とする。

(3-16) 式を (3-15) 式に代入して、

$$\begin{aligned} w(t) &= \sum_{i=1}^N C \Phi(t-t_i) B x(t_i) && \begin{matrix} t \geq t_N' \\ N \geq N' \geq 1 \\ t < t_1 \end{matrix} \\ &= 0 && \end{aligned} \quad (3-17)$$

を得る。状態遷移行列はこの場合

$$\Phi(t-t_i) = e^{A(t-t_i)}$$

であるから、 p を最小多項式の次数として (3-17) 式より

$$\begin{aligned} w(t) &= \sum_{i=1}^N C e^{A(t-t_i)} u_{-1}(t-t_i) B x(t_i) \\ &= \sum_{i=1}^N \sum_{k=0}^{p-1} \alpha_k(t-t_i) u_{-1}(t-t_i) C A^k B x(t_i) \\ &= \sum_{i=1}^N \sum_{k=0}^{p-1} \alpha_k(t-t_i) u_{-1}(t-t_i) (B^* (A^*)^k C^*, x(t_i)) \end{aligned} \quad (3-18)$$

ただし、

$$\begin{aligned} u_{-1}(t-t_i) &= 1 && t \geq t_i \\ &= 0 && t < t_i \end{aligned}$$

$$(B^* (A^*)^k C^*, x(t_i)) = C A^k B x(t_i)$$

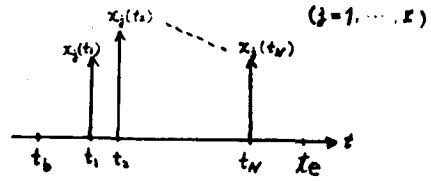
$\alpha_k(t-t_i)$ はスカラー関数。

となる。

まず最初の区間 $t_1 \leq t \leq t_2$ を考えると (3-18) 式より

$$w(t) = \sum_{k=0}^{p-1} \alpha_k(t-t_1) (B^*(A^*)^{k-1} C^*, x(t_1))$$

上式に $\overline{\alpha_j(t-t_1)}$ (—は複素共役を示す) をかけて区間 $t_1 \sim t_2$ で積分すると次式を得る。



第3-3図 パルス列入力

$$\begin{bmatrix} (\alpha_0, w) \\ (\alpha_1, w) \\ \vdots \\ (\alpha_{p-1}, w) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (\alpha_0, \alpha_0) & \dots & (\alpha_0, \alpha_{p-1}) \\ (\alpha_1, \alpha_0) & \dots & (\alpha_1, \alpha_{p-1}) \\ \vdots & & \vdots \\ (\alpha_{p-1}, \alpha_0) & \dots & (\alpha_{p-1}, \alpha_{p-1}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (B^* C^*, x(t_1)) \\ (B^* A^* C^*, x(t_1)) \\ \vdots \\ (B^* (A^*)^{p-1} C^*, x(t_1)) \end{bmatrix}$$

ただし,

$$(\alpha_j, w) = \int_{t_1}^{t_2} \begin{bmatrix} \overline{\alpha_j(t-t_1)} w_1(t) \\ \vdots \\ \overline{\alpha_j(t-t_1)} w_m(t) \end{bmatrix} dt \quad j = 0, 1, \dots, p-1 \quad (3-19)$$

$$(\alpha_j, \alpha_k) = \int_{t_1}^{t_2} \overline{\alpha_j(t-t_1)} \alpha_k(t-t_1) dt \quad j, k = 0, 1, \dots, p-1 \quad (3-20)$$

$$w(t) = \begin{bmatrix} w_1(t) \\ \vdots \\ w_m(t) \end{bmatrix}$$

$\alpha_0(t-t_1), \dots, \alpha_{p-1}(t-t_1)$ は1次独立であるから上式の係数グラム行列は正則である。ゆえに β_k を m ベクトルとして次式が得られる。

$$(B^*(A^*)^k C^*, x(t_1)) = \beta_k$$

したがって最初の区間 $t_1 \sim t_2$ の観測値より $x(t_1)$ が唯一に決定できるための必要十分条件は次式の行列の階数が Y のことである。

$$[B^* C^* ; B^* A^* C^* ; \dots ; B^* (A^*)^{p-1} C^*] \quad (3-21)$$

上式の条件が満足されないで、 $t_1 \sim t_2$ の観測値からは $x(t_1)$ が唯一に決定できない場合を考えてみよう。つぎの観測区間 $t_2 \leq t \leq t_3$ まで考慮すると (3-18) 式は

$$w(t) = \sum_{k=0}^{p-1} \left[\alpha_k(t-t_1) (B^*(A^*)^k C^*, x(t_1)) \right. \\ \left. + \alpha_k(t-t_2) (B^*(A^*)^k C^*, x(t_2)) \right]$$

となる。(3-21) 式の条件が満足されないときは明らかに上式より $x(t_1)$ を求めることは不可能である。さらに第3, 第4, ……の観測区間まで考慮しても事情はまったく同様である。つまり $x(t_1)$ を求めるための何ら新しい情報が得られない。したがって全観測区間を通じて $x(t_1)$ を唯一に決定し得るための必要十分条件は (3-21) 式の階数が I のことである。

$t_1 \sim t_2$ の観測値より $x(t_1)$ が唯一に決定できた場合には, 第2の観測区間 $t_2 \sim t_3$ に対しては

$w(t) - C \text{重}(t-t_1) B x(t_1) = \sum \alpha_k(t-t_2) (B^*(A^*)^k C^*, x(t_2))$ を得る。よってまったく $x(t_1)$ と同様にして $x(t_2)$ を求めることができる。 $x(t_3), \dots, x(t_N)$ に関してもまったく同様であるからつぎの定理が証明されたことになる。

[定理2-1] パルス列入力に対して (3-13) 式の観測系が入力可観測性を有するための必要十分条件は次式の行列の階数が r のことである。

$$[B^*C^*; B^*A^*C^*; \dots; B^*(A^*)^{r-1}C^*] \quad (3-22)$$

3.2.2 ベキ多項式入力の可観測性 まず次式で表わされるべき指数入力の可観測性を検討する。

$$x(t) = \frac{1}{i!} t^i x_i \quad 0 \leq t \leq t_2 \quad (3-23)$$

$$x_i = \begin{bmatrix} x_{1i} \\ \vdots \\ x_{ri} \end{bmatrix} \quad i: 0, 1, 2, \dots$$

状態量初期値 $z(0)$ を既知とすると,

$$w(t) = y(t) - ce^{At} z(0) \\ = \int_0^t ce^{A(t-\tau)} B x(\tau) d\tau \quad (3-24) \\ = \sum_{k=0}^{p-1} \int_0^t \frac{1}{k!} \tau^k \alpha_k(t-\tau) d\tau C A^k B x_i \\ = \sum_{k=0}^{p-1} \gamma_{ik}(t) (B^*(A^*)^k C^*, x_i)$$

ただし,

$$\gamma_{ik}(t) = \int_0^t \frac{1}{k!} \tau^k \alpha_k(t-\tau) d\tau$$

上式の両辺に $\overline{\gamma_{ik}(t)}$ をかけて $0 \sim t_2$ で積分すると,

$$(\gamma_{i\ell}, w) = \sum_{k=0}^{p-1} (\gamma_{i\ell}, \gamma_{ik}) (B^* (A^*)^k C^*, x_i) \quad (3-25)$$

$$\ell = 0, 1, \dots, p-1$$

ここで $(\gamma_{i\ell}, w)$ および $(\gamma_{i\ell}, \gamma_{ik})$ は(3-19)式および(3-20)式と同様に定義する。 $\gamma_{i0}(t), \dots, \gamma_{ip-1}(t)$ は1次独立(付録3-IV参照)であるから(3-25)式の $(\gamma_{i\ell}, \gamma_{ik})$ を要素とする $p \times p$ 次の係数グラム行列は正則である。したがって(3-25)式より次式を満足する m ベクトル β_{ik} が求められる。

$$(B^* (A^*)^k C^*, x_i) = \beta_{ik} \quad (3-26)$$

$$k = 0, 1, \dots, p-1$$

よって x_i が唯一に決定できるための必要十分条件は(3-21)式の行列の階数が Γ のことである。つまりパルス列入力の場合の定理2-1とまったく同一の結論に達する。

[系2-1-1] (3-23)式のベキ入力に対して観測系(3-13)が入力可観測性を有するための必要十分条件は(3-22)式の階数が Γ のことである。(証明は付録2-1)。

つぎに次式で表わされるべき多項式入力の場合を検討する。

$$x(t) = x_0 + \frac{t}{1!} x_1 + \frac{t^2}{2!} x_2 + \dots + \frac{t^N}{N!} x_N \quad (3-23')$$

入・出力ともに解析関数であるから区間 $0 \sim t_2$ の任意の開区間で入力波形を決定できることが必要十分条件になる。出力波形を k 回微分すると、

$$w^{(k)}(t) = CB x^{(k-1)}(t) + CAB x^{(k-2)}(t) + \dots + CA^{k-1} B x(t) + \int_0^t CA^k e^{A(t-\tau)} B x(\tau) d\tau$$

$t = 0_+$ として(3-23')式を代入すると次式を得る。

$$w^{(k)}(0) = CB x_{k-1} + CAB x_{k-2} + \dots + CA^{k-1} B x_0$$

上式より $k = 1, 2, \dots, N+p$ としたときの係数行列が階数 $\Gamma(N+1)$ をもつことが x_0, x_1, \dots, x_N を唯一に決定し得るための必要十分条件であるからつぎの定理を得る。

[定理2-2] ベキ多項式入力に対して観測系(3-13)が入力可観測性を有する必要十分条件は次式 $\Gamma(N+1)$ の階数が $\Gamma(N+1)$ のことである。ただし、 $N+1 \geq p$ のときは $\Gamma(N)$ の階数が $\Gamma(N)$ のことが必要十分条件である。

$$\Gamma^{(N+1)} = \begin{pmatrix} CB & 0 & \dots & 0 \\ CAB & CB & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ CA^N B & CA^{N-1} B & \dots & CB \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ CA^{N+m-1} B & CA^{N+m-2} B & \dots & CA^{n-1} B \end{pmatrix} \quad (3-27)$$

(証明は付録 2-1')。

上述の定理 2-2 より (3-22) 式の階数が Γ のことは必要条件になっていることがわかる。また定理 2-2 は系 2-1-1 を包含した形になっていることもわかる。

出力の k 回微分値を利用することは实际的でない。さて出力は

$$w(t) = \sum_{i=0}^N \sum_{k=0}^{p-1} \int_0^t \frac{1}{i!} \tau^i \alpha_k(t-\tau) d\tau CA^k B x_i$$

と表わされるので、上式をラプラス変換して次式を得る。

$$W(s) = \sum_{i=0}^N \sum_{k=0}^{p-1} \frac{1}{s^{i+1}} \alpha_k(s) CA^k B x_i$$

$\alpha_0(s), \dots, \alpha_{p-1}(s)$ の極は重根を含めて p 個存在する。

したがって $W(s)$ の極は $N+1+p$ 個、留数は $m \cdot (N+1+p)$ 個存在する。一方 $CA^k B x_i$ は $m \cdot p(N+1)$ 個あるので出力波形より $CA^k B x_i$ を唯一に決定し得るためには

$$m(N+1+p) \geq m p(N+1) \quad \text{i.e.} \quad 1 + \frac{1}{N} \geq p$$

が必要条件となる。しかし、これはかなりきびしい条件である。もし入力に関して何らかの情報が得られるならばこの条件はもっとゆるめられなければならない。

いま $W(s)$ の留数より得られた $m \cdot (N+1+p)$ 個の式で、 $CA^k B x_i$ の係数行列の階数を $m p(N+1) - m l$ とする。あきらかに $CA^k B x_i$ のうち適当な $m l$ 個をパラメータとして選ぶと他は $m l$ 個のパラメータおよび出力波形によって一意にきまる。

このときの $m l$ 個のパラメータは、パラメータとして選んだものの残りの $m p(N+1) - m l$ 個の $CA^k B x_i$ の係数行列の階数が $m p(N+1) - m l$ とするものでなければならない。

$W(s) \equiv 0$ のときの $CA^k B x_i$ の値を零出力解と呼ぶことにしよう。このとき一般に $CA^k B x_i$ は出力波形からきまる値と零出力解との和で表わされる。

$CA^k B x_i$ から x_i を唯一に求めることができるための必要十分条件は

(3-22) 式の階数が r のことである。

入力波形が ml 個のパラメータを含んだ形で表現されたとき、入力情報からパラメータの値を一意に定めることができる条件を検討しよう。

入力が (3-23') 式で与えられるとき、(3-24) 式、(3-25) 式と同様にして次式を得る。

$$(\gamma_{j\ell}, w) = \sum_{i=0}^N \sum_{k=0}^{p-1} (\gamma_{j\ell}, \gamma_{ik}) (B^*(A^*)^k C^*, \chi_i) \quad (3-25')$$

$j=0, 1, \dots, N; \ell=0, 1, \dots, p-1$

多出力系の場合も同様に論じられるので、ここでは 1 出力系とする。 $p(N+1)$ 個の $\gamma_{j\ell}(t)$ のうち 1 次独立のものが $p(N+1)-l$ 個あり、他の l 個はこれらの 1 次結合で表わされるとする。これら従属関係にある l 個の $\gamma_{ik}(t)$ を係数とする $CA^k B \chi_i$ をパラメータとして β_1, \dots, β_l とおくと (3-25') 式より次式を得る。

$$\chi_i = f_i + \sum_{j=1}^l Q_{ij} \beta_j$$

ただし、 Q_{ij} は $l \times 1$ 行列、 f_i は 1×1 行列で出力波形より定まる。

上式を (3-23') 式に代入して

$$\sum_{j=1}^l \sum_{i=0}^N \frac{1}{i!} t^i Q_{ij} \beta_j = \chi(t) - \sum_{i=0}^N \frac{1}{i!} t^i f_i$$

いま時刻 t_α において $\chi(t_\alpha)$ のうち情報が得られるものを

$$\mathcal{P}_\alpha \chi(t_\alpha)$$

で表わす。時刻 t_1, \dots, t_α において入力情報が得られるとすると、上式より入力情報を使ってパラメータの値が唯一に決定され得る条件として次式を得る。

$$\text{rank} \begin{bmatrix} \sum_{i=0}^N \frac{1}{i!} t_1^i \mathcal{P}_1 Q_{i1} & \dots & \sum_{i=0}^N \frac{1}{i!} t_1^i \mathcal{P}_1 Q_{il} \\ \vdots & & \vdots \\ \sum_{i=0}^N \frac{1}{i!} t_\alpha^i \mathcal{P}_\alpha Q_{i1} & \dots & \sum_{i=0}^N \frac{1}{i!} t_\alpha^i \mathcal{P}_\alpha Q_{il} \end{bmatrix} = l$$

したがってこの条件を満足し (3-22) 式の階数が r のときは入力に関する ml 個の情報あるいは推定値により入力波形は一意に定まる。

[例題] 第4章でシミュレーション計算にとりあげるつぎの系を考える。

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \chi_1 \\ \chi_2 \end{bmatrix} \\ y = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} \end{cases}$$

$$C(SI - A)^{-1}B = \frac{1}{s+1}(2CB + CAB) - \frac{1}{s+2}(CB + CAB)$$

$$= \frac{1}{s+1} \varphi_0 + \frac{1}{s+2} \varphi_1$$

$$\begin{bmatrix} \varphi_0 \\ \varphi_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} CB \\ CAB \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} CB \\ CAB \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$$

であるから

$$X(s) = \frac{1}{s} x_0 + \frac{1}{s^2} x_1$$

とすると

$$W(s) = \frac{1}{s(s+1)} \varphi_0 x_0 + \frac{1}{s(s+2)} \varphi_1 x_0$$

$$+ \frac{1}{s^2(s+1)} \varphi_0 x_1 + \frac{1}{s^2(s+2)} \varphi_1 x_1$$

となる。上式の極は $1/s^2$, $1/s$, $1/(s+1)$, $1/(s+2)$ のところにあるからそれぞれに対応する留数を R_{00} , R_0 , R_{-1} , R_{-2} とすると

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} \\ 1 & \frac{1}{2} & -1 & -\frac{1}{4} \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{4} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varphi_0 x_0 \\ \varphi_1 x_0 \\ \varphi_0 x_1 \\ \varphi_1 x_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_{00} \\ R_0 \\ R_{-1} \\ R_{-2} \end{bmatrix}$$

上式の係数行列の階数は3である。いま $\varphi_1 x_1 = 2\beta$ とおくと

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} \varphi_0 \\ \varphi_1 \end{bmatrix} x_0 = \begin{bmatrix} R_{00} - R_{-1} \\ 2R_0 + 2R_{-1} \end{bmatrix} + \beta \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} \varphi_0 \\ \varphi_1 \end{bmatrix} x_1 = \begin{bmatrix} R_{00} \\ 0 \end{bmatrix} + \beta \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix} \end{cases}$$

$$\therefore \begin{cases} x_0 = \begin{bmatrix} R_{00} - R_{-1} \\ R_{-1} + 2R_0 \end{bmatrix} + \beta \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix} \\ x_1 = \begin{bmatrix} R_{00} \\ R_{00} \end{bmatrix} + \beta \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} \end{cases}$$

いま $x_{10} = 0$ がわかっているとすると $\beta = R_{00} - R_{-1}$ となり

$$x_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ R_{-1} + 2R_0 \end{bmatrix}$$

$$x_1 = \begin{bmatrix} R_{-1} \\ 2R_{00} - R_{-1} \end{bmatrix}$$

となる。

実際の出力波形をラプラス変換することは困難であるから時間領域での処理による次式を解いて求めるのがよい。

$$(\gamma_{jl}, w) = \sum_{i=0}^N \sum_{k=0}^{p-1} (\gamma_{jl}, \gamma_{ik}) (B^* (A^*)^k C^*, \chi_i) \quad (3-25')$$

なお N 次までのベキ多項式が入力波形の近似表現を与えるとき、(3-25') 式より求めた入力波形が残差 2 乗和を最小にする意味での最良多項式近似となっていることを示しておく。

入力波形を N 次までのベキ多項式で近似表現したとき

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^N \sum_{k=0}^{p-1} (\gamma_{jl}, \gamma_{ik}) (B^* (A^*)^k C^*, \chi_i) &= (\gamma_{jl}, w) \\ &= (\gamma_{jl}, w_N) + \epsilon_{jl} \end{aligned}$$

$$\epsilon_{jl} = (\gamma_{jl}, w - w_N)$$

w_N : 入力を N 次までのベキ多項式としたときの出力

となる。

いま最確値を χ_i^0 とおき、残差ベクトルを v_{jl} (m ベクトル; $j=0, 1, \dots, N$; $l=0, 1, \dots, p-1$) とすると

$$v_{jl} = (\gamma_{jl} - w) - \sum_{i=0}^N \sum_{k=0}^{p-1} (\gamma_{jl}, \gamma_{ik}) (B^* (A^*)^k C^*, \chi_i^0)$$

最確値は

$$v = \sum_{j=0}^N \sum_{l=0}^{p-1} |v_{jl}|^2$$

を最小にするものとする。

(3-25') 式の解は明らかに v の最小値 $v=0$ を与える。

よって (3-25') 式の解は N 次までのベキ多項式近似が残差 2 乗和最小の意味での最良多項式近似を与えることを意味する。

一般波形入力に対しても、上述のベキ多項式近似解を得るための条件はベキ多項式入力可観測性の議論にもとづけばよい。すなわちベキ多項式入力の入力可観測性が成立すればベキ多項式入力としての近似解の存在は保証される。ただし、この場合には近似解であるから、解の唯一性に対する保証は必要ない。しかし、

(3-25') 式の解はいずれも上述の議論の意味で残差 2 乗和最小の意味の最適近似解となっている。

いま 2 入力・2 出力の 2 次系を考え、入力を $N=1$ のベキ多項式で近似した近似入力の求め方を述べよう。

入力を

$$\chi(t) = \chi_0 + t\chi_1 + \chi_\epsilon(t)$$

とすると、出力は

$$w(t) = \gamma_{00}(t)CBx_0 + \gamma_{01}(t)CABx_0 + \gamma_{10}(t)CBx_1 + \gamma_{11}(t)CABx_1 + w_E(t)$$

$$w_E(t) = \int_0^t ce^{A(t-\tau)} Bx_E(\tau) d\tau$$

となる。

$\gamma_{00}(t)$, $\gamma_{01}(t)$, $\gamma_{10}(t)$ および $\gamma_{11}(t)$ がすべて1次独立のときは

$$\begin{bmatrix} (\gamma_{00}, w) \\ (\gamma_{01}, w) \\ (\gamma_{10}, w) \\ (\gamma_{11}, w) \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} (\gamma_{00}, w_E) \\ (\gamma_{01}, w_E) \\ (\gamma_{10}, w_E) \\ (\gamma_{11}, w_E) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (\gamma_{00}, \gamma_{00}) & (\gamma_{00}, \gamma_{01}) & (\gamma_{00}, \gamma_{10}) & (\gamma_{00}, \gamma_{11}) \\ (\gamma_{01}, \gamma_{00}) & (\gamma_{01}, \gamma_{01}) & (\gamma_{01}, \gamma_{10}) & (\gamma_{01}, \gamma_{11}) \\ (\gamma_{10}, \gamma_{00}) & (\gamma_{10}, \gamma_{01}) & (\gamma_{10}, \gamma_{10}) & (\gamma_{10}, \gamma_{11}) \\ (\gamma_{11}, \gamma_{00}) & (\gamma_{11}, \gamma_{01}) & (\gamma_{11}, \gamma_{10}) & (\gamma_{11}, \gamma_{11}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} CBx_0 \\ CABx_0 \\ CBx_1 \\ CABx_1 \end{bmatrix}$$

とし、左辺第2項を十分小さいとして無視すると(3-25)式による近似解を得る。

$\gamma_{00}(t)$, $\gamma_{01}(t)$ および $\gamma_{10}(t)$ が1次独立であり、

$$\gamma_{11}(t) = k_1 \gamma_{00}(t) + k_2 \gamma_{01}(t) + k_3 \gamma_{10}(t)$$

と表わせるときは

$$\begin{bmatrix} (\gamma_{00}, w) \\ (\gamma_{01}, w) \\ (\gamma_{10}, w) \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} (\gamma_{00}, w_E) \\ (\gamma_{01}, w_E) \\ (\gamma_{10}, w_E) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (\gamma_{00}, \gamma_{00}) & (\gamma_{00}, \gamma_{01}) & (\gamma_{00}, \gamma_{10}) \\ (\gamma_{01}, \gamma_{00}) & (\gamma_{01}, \gamma_{01}) & (\gamma_{01}, \gamma_{10}) \\ (\gamma_{10}, \gamma_{00}) & (\gamma_{10}, \gamma_{01}) & (\gamma_{10}, \gamma_{10}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} CBx_0 \\ CABx_0 \\ CBx_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} (\gamma_{00}, \gamma_{00}) & (\gamma_{00}, \gamma_{01}) & (\gamma_{00}, \gamma_{10}) \\ (\gamma_{01}, \gamma_{00}) & (\gamma_{01}, \gamma_{01}) & (\gamma_{01}, \gamma_{10}) \\ (\gamma_{10}, \gamma_{00}) & (\gamma_{10}, \gamma_{01}) & (\gamma_{10}, \gamma_{10}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \\ k_3 \end{bmatrix} CABx_1$$

となる。左辺第2項を十分小さいとして無視し

$$CABx_1 = \beta_1 = \begin{bmatrix} \beta_{11} \\ \beta_{21} \end{bmatrix}$$

とおくと、 Q_{i1} を 2×2 行列、 f_i を 2×1 行列で出力波形より定まるものとして

$$x_i = f_i + Q_{i1} \beta_1 \quad i = 0, 1$$

を得る。こゝで時刻 t_1 , t_2 において入力情報 $\mathcal{P}_1(t_1)$, $\mathcal{P}_2(t_2)$ が得られるとすると

$$\begin{bmatrix} \mathcal{P}_1(Q_{01} + t_1 Q_{11}) \\ \mathcal{P}_2(Q_{01} + t_2 Q_{11}) \end{bmatrix} \beta_1 = \begin{bmatrix} \mathcal{P}_1\{x(t_1) - (f_0 + t_1 f_1)\} \\ \mathcal{P}_2\{x(t_2) - (f_0 + t_2 f_2)\} \end{bmatrix}$$

上式を解いてパラメータ ρ_1 を求めることにより、(3-25) 式の近似解が得られる。

なお誤差の評価については付録(3-V)に述べてある。もし上述より求めた結果の近似度がわるいときは N をさらに大きくしなければならない。

3.2.3 一般波形の入力可観測性 本節の最後に入力および出力がラプラス変換可能な場合の入力可観測性の必要十分条件を導いておく。初期値を既知として入出力間の関係をラプラス変換すると

$$W(s) = C(SI - A)^{-1} B X(s)$$

が得られる。上式より入力可観測性が成立することは

$$0 \equiv C(SI - A)^{-1} B K(s) \quad (3-28)$$

とする $K(s) \equiv 0$ が存在しないことと等価である。すなわち(3-28)式を成立させる $K(s) \equiv 0$ が存在することは入力可観測性不成立の必要十分条件である。

$C(SI - A)^{-1} B$ は p 個の極をもつ(重根を別々に数えて)有理関数であり p 個の1次独立な項の和で表わされている。したがって(3-28)式を成立させる $K(s) \equiv 0$ が存在する場合は $K(s)$ は有理関数で表わせるのでその分母を払った形で

$$K(s) = s^{p-1} K_0 + s^{p-2} K_1 + \dots + K_{p-1} \quad p \geq 1 \quad (3-29)$$

と表わせる。(3-29)式を(3-28)式に代入して s のべき級数に展開したとき各項の係数はみな零でなければならない。この関係を行列式表現すると K_0, K_1, \dots, K_{p-1} の係数行列は(3-27)式と同様になる。よって定理2-2と同様の結論に達する。

[系2-2-1] 観測系(3-13)が入力可観測性を有するための必要十分条件は

$$\text{rank } \Gamma(n) = r \cdot n \quad (\text{証明は付録2-II})$$

3.3 初期状態量未知の場合の入力可観測性

前述の3.1および3.2節では動的観測系の初期値が既知の場合の入力可観測性について検討してきた。こゝでは動的観測系の状態量の初期値が未知の場合の入力可観測性を検討する。

3.3.1 時間離散系 3.1節と同じように動的観測系はつぎの差分方程式で表示されたとする。

$$\begin{cases} z(kT) = Gz((k-1)T) + Fx((k-1)T) \\ y(kT) = Hz(kT) \end{cases} \quad k = 1, 2, \dots \quad (3-1)$$

x : r ベクトル, z : n ベクトル, y : m ベクトル, F : $n \times r$ 行列, G : $n \times n$ 行列, H : $m \times n$ 行列

こゝでは, $z(0)$ および $x((k-1)\tau)$, $k=1, 2, \dots$, は未知であるとする。

第 k 番目の観測では (3-1) 式より次式を得る。

$$y(k\tau) = HG^k z(0) + HG^{k-1} F x(0) + \dots + HF x((k-1)\tau) \quad (3-30)$$

上式において $k=1, 2, \dots, i$ として i 回の観測値を累積すると

$$\begin{bmatrix} y(\tau) \\ y(2\tau) \\ \vdots \\ y(i\tau) \end{bmatrix} = \Phi_x(i) x(0) + \Xi_x(i) \begin{bmatrix} z(0) \\ x(\tau) \\ \vdots \\ x((i-1)\tau) \end{bmatrix} \quad (3-31)$$

ただし,

$$\Phi_x(i) = \begin{bmatrix} HF \\ \vdots \\ HG^{i-1}F \end{bmatrix}, \quad \Xi_x(i) = \begin{bmatrix} HG & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ HG^i & HG^{i-2}F & \dots & HF \end{bmatrix} \quad (3-32)$$

3.1 節で状態量初期値 $z(0)$ 既知の場合の入力可観測性を導いたときと上述の (3-31) 式とを比較すると, (3-32) 式の $\Xi_x(i)$ の最初の n 列につき (3-32') 式の $\Phi_z(i)$ が加えられただけであることがわかる。

$$\Phi_z(i) = \begin{bmatrix} HG \\ \vdots \\ H(\tau)^i \end{bmatrix} \quad (3-32')$$

したがって状態量初期値 $z(0)$ の既知の場合とまったく同様にしてつぎの命題を得る。

[命題 3-1] 動的観測系 (3-1) が第 i 位の入力可観測性を有するための必要十分条件は次式が成立することである。

$$\begin{cases} \text{rank} [\Phi_x(i); \Xi_x(i)] = \text{rank} \Xi_x(i) + r \\ \text{rank} [\Phi_x(k); \Xi_x(k)] < \text{rank} \Xi_x(k) + r \\ k = 1, 2, \dots, i-1 \end{cases}$$

入力可観測性が成立する最高位数についても状態量初期値 $z(0)$ が既知の場合

合とまったく同様にしてつぎの命題が得られる。

[命題 3-2] 動的観測系 (3-1) の入力可観測性は高々 n 位である。すなわち、第 n 位までの入力可観測性が成立しないときはこの系は入力可観測性を有しない。(畧証は付録 3-1)。

上述の二つの命題は必要十分条件を述べているが、これらより容易につぎの必要条件が導ける。

[命題 3-3] 動的観測系 (3-1) が入力可観測性を有する必要条件はつぎの $r \times m \cdot n$ 行列の階数が r のことである。

$$\begin{bmatrix} F^* H^* & F^* G^* H^* & \dots & F^* (G^*)^{n-1} H^* \end{bmatrix} \quad (3-33)$$

[命題 3-4] 動的観測系 (3-1) が入力可観測性を有するためには行列 F の階数が r のことが必要である。

さて上述の命題 3-1 から 3-4 までに関しては (3-1) 式の $n \times n$ 行列 G に何の制約条件もつけなかった。もし G が正則の場合にはつぎの定理が得られる。

[定理 3-1] 動的観測系 (3-1) の $n \times n$ 行列 G が正則のとき、状態量初期値 $z(0)$ 未知に対する入力可観測性は常に不成立である。(証明は付録 3-II)。

3.3.2 時間連続系 ここでは 3.2 節と同一の系、即ち次式 (3-13) を取扱う。

$$\begin{cases} \dot{z} = A z + B x \\ y = C z \end{cases} \quad (3-13)$$

x : r ベクトル, z : n ベクトル, y : m ベクトル, A : $n \times n$ 行列, B : $n \times r$ 行列, C : $m \times n$ 行列

< A > パルス列入力 (3-16) ~ (3-18) 式より

$$y(t) = C e^{A(t-t_b)} z(t_b) + \sum_{i=1}^N C e^{A(t-t_i)} B x(t_i) u_1(t-t_i) \quad (3-34)$$

まず第 1 の観測区間を考えると

$$y(t_{1+}) = C e^{A(t_1-t_b)} z(t_b) + C B x(t_1)$$

* 微分方程式系を差分方程式系に変換した場合、 $g = e^{A\tau}$ はかならず正則である。しかし一般には g はかならずしも正則とはかぎらない。

一方,

$$y(t_1) = c e^{A(t_1 - t_0)} z(t_0)$$

ゆえに

$$y(t_1) - y(t_0) = CBx(t_0)$$

を得る。同様にして以下の関係式を得る。

$$\dot{y}(t_1) - \dot{y}(t_0) = CABx(t_0)$$

$$\ddot{y}(t_1) - \ddot{y}(t_0) = CA^2Bx(t_0)$$

⋮

$$y^{(n-1)}(t_1) - y^{(n-1)}(t_0) = CA^{n-1}Bx(t_0)$$

よって

$$\text{rank} \begin{bmatrix} B^*C^* & B^*A^*C^* & \dots & B^*(A^*)^{n-1}C^* \end{bmatrix} = r \quad (3-35)$$

が成立すれば、上述より $x(t_0)$ は唯一に決定できる。第2, 第3, ……の観測区間まで考慮しても $x(t_0)$ に関しては何ら新しい情報は得られないから、全観測区間を通じて $x(t_0)$ が唯一に求められるための条件が (3-35) 式で与えられることがわかる。 $x(t_2)$, $x(t_3)$, …… $x(t_N)$ に関してもまったく同様であるからつぎの命題を得る。

[命題 3-5] 動的観測系 (3-13) がパルス列入力に対する入力観測性を有する必要十分条件は (3-34) 式が成立することである。(証明は付録 3-III)。

< B > 一般波形入力 δ 関数を含まないとする。

入出力関係

$$y(t) = c e^{At} z(0) + c e^{At} \int_0^t e^{-A\tau} B x(\tau) d\tau \quad (3-36)$$

をラプラス変換すると

$$\begin{aligned} Y(s) &= C(sI - A)^{-1} B X(s) + C(sI - A)^{-1} z(0) = C(sI - A)^{-1} V(s) \\ V(s) &= B X(s) + z(0) \end{aligned} \quad (3-37)$$

となる。系 2-2-1 より $V(s)$ が唯一に決定し得るための必要十分条件は

$$M(n) = \begin{bmatrix} C & 0 & \dots & 0 \\ CA & C & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ CA^{n-1} & CA^{n-2} & \dots & C \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ CA^{2n-2} & CA^{2n-3} & \dots & CA^{n-1} \end{bmatrix} \quad (3-38)$$

が階数 n^2 をもつことである。ところで $V(s)$ を s のべき級数に展開したときその定数項を V_0 , 他を $V_1(s)$ とすると入力には δ 関数が含まれてないとしているから

$$\begin{cases} z(0) = V_0 & (3-39) \\ BX(s) = V_1(s) & (3-39') \end{cases}$$

を得る。(3-39') 式より $X(s)$ が唯一に求め得る必要十分条件は $\text{rank } B = r$ である。よってつぎの命題を得る。

[命題 3-6] 観測系 (3-13) の初期値が未知のとき, δ 関数を含まない入力に対する可観測性成立の必要十分条件は $\text{rank } M(n) = n^2$ かつ $\text{rank } B = r$ が成立することである。

3.4 線形可変系^{2) 3) 5)}

線形動的観測系のもっとも一般的な場合として本節では可変系の入力可観測性を論ずる。或る種の非線形系は線形可変系近似が可能である。また分布定数系を線形可変系に等価変換可能な場合もある。それゆえ本節で取扱う入力可観測性の問題は本来の意味での線形可変系動的観測系を対象とするのみならず、伝送路および信号処理系をも含めて考えた観測系が或る種の非線形系・分布系として表現できる場合にも適用することができる。

3.4.1 時間離散系 つぎの差分方程式で表わされる系を考える。

$$\begin{cases} z(k) = G(k-1)z(k-1) + F(k-1)x(k-1) \\ y(k) = H(k)z(k) \quad k = 1, 2, \dots \end{cases} \quad (3-40)$$

こゝではサンプリング周期を 1 とする。

第 i 番目の観測では

$$y(i) = H(i)\Phi(i, 0)z(0) + H(i)\Phi(i, 1)F(0)x(0) + \dots + H(i)\Phi(i, i)F(i-1)x(i-1) \quad (3-41)$$

ただし, $\Phi(i, j)$ は観測系 (3-40) の状態遷移行列で,

$$\Phi(i, j) = \begin{cases} I & i = j \\ G(i-1)\dots G(j) & i > j^* \end{cases} \quad (3-42)$$

(3-41) 式において, $i = 1, 2, \dots, i$ として i 回の観測値を累積すると

* G^{-1} が存在するときは
 $\Phi(i, j) = G^{-1}(i)G^{-1}(i+1)\dots G^{-1}(j-1) \quad i < j$

$$\begin{bmatrix} y(1) \\ y(2) \\ \vdots \\ y(i) \end{bmatrix} = \Phi_x(i, 0)x(0) + \Xi_x(i, 0) \begin{bmatrix} z(0) \\ x(1) \\ \vdots \\ x(i-1) \end{bmatrix} \quad (3-43)$$

ただし,

$$\Phi_x(j+i, j) = \begin{bmatrix} H(j+1)\Phi(j+1, j+1)F(j) \\ H(j+2)\Phi(j+2, j+1)F(j) \\ \vdots \\ H(j+i)\Phi(j+i, j+1)F(j) \end{bmatrix} \quad (3-44)$$

$$j = 0, 1, 2, \dots; \quad i = 1, 2, \dots$$

$$\Xi_x(j+i, j) = \begin{bmatrix} H(j+1)\Phi(j+1, j) & 0 \\ H(j+2)\Phi(j+2, j) & H(j+2)\Phi(j+2, j+2)F(j+1) \text{----} \\ \vdots & \vdots \\ H(j+i)\Phi(j+i, j) & H(j+i)\Phi(j+i, j+2)F(j+1) \text{----} \\ \text{---} & 0 \\ \text{---} & \vdots \\ \text{---} & H(j+i)\Phi(j+i, j+i)F(j+i-1) \end{bmatrix} \quad (3-44)$$

3.1節および3.3.1と同様に議論を進めるとつぎの諸命題を得る。

[命題4-1] 動的観測系(3-40)が第*i*位の入力可観測性を有するための必要十分条件は次式が成立することである。

$$\begin{cases} \text{rang}[\Xi_x(i, 0); \Xi_x(i, 0)] = \text{rang} \Xi_x(i, 0) + r \\ \text{rang}[\Xi_x(k, 0); \Xi_x(k, 0)] < \text{rang} \Xi_x(k, 0) + r \\ k = 1, 2, \dots, i-1 \end{cases}$$

[命題4-2] 動的観測系(3-40)が第*i*位の入力可観測性を有するための必要条件は

$$\begin{aligned} \text{rang}[\Xi_x^*(i, 0)] &= \text{rang}[F^*(0)\Phi^*(1, 1)H^*(1); \text{----}; F^*(0)\Phi^*(i, 1)H^*(i)] \\ &= r \end{aligned}$$

が成立すること。すなわち、

$$\Gamma(i, 0) = \Phi_x^*(i, 0) \Phi_x(i, 0)$$

が正則となることである。

[命題 4-3] 動的観測系 (3-40) が第 i 位の入力可観測性を有する必要十分条件は、いかなる $\gamma_0, \gamma_1 \neq 0, \gamma_2, \dots, \gamma_i$ に対しても次式が成立することである。

$$\Phi_x(i, 0)\gamma_0 + \Phi_x(i, 0)\gamma_1 + \begin{bmatrix} 0 \\ \Phi_x(i, 1) \end{bmatrix} \gamma_2 + \dots + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ \Phi_x(i, i-1) \end{bmatrix} \gamma_i \neq 0$$

ただし、

$$\Phi_x(i+j, j) = \begin{bmatrix} H(j+1)\Phi(j+1, j) \\ H(j+2)\Phi(j+2, j) \\ \vdots \\ H(j+i)\Phi(j+i, j) \end{bmatrix}$$

$$\gamma_0 = \begin{bmatrix} \gamma_{10} \\ \vdots \\ \gamma_{n0} \end{bmatrix}, \quad \gamma_1 = \begin{bmatrix} \gamma_{11} \\ \vdots \\ \gamma_{r1} \end{bmatrix} \neq 0, \quad \gamma_2 = \begin{bmatrix} \gamma_{12} \\ \vdots \\ \gamma_{r2} \end{bmatrix}, \quad \dots, \quad \gamma_i = \begin{bmatrix} \gamma_{1i} \\ \vdots \\ \gamma_{ri} \end{bmatrix}$$

上述では観測系の初期値を未知としたが、既知の場合には $\Phi_x(j+i, j) = 0$ とおくことにより命題 3-8 から命題 3-10 はそのまま適用できる。

上述の命題 4-1 から命題 4-3 では観測開始時刻を時間軸の原点として、零時刻の入力値を求めることを考えた。一般に可変系では時間の推移と共に系の特性が変化するので、観測開始時刻は入力可観測性を考慮する際のパラメータとなる。それゆえ、

任意の観測開始時刻に対して常に入力可観測性が成立するとき、この系は全時間的に入力可観測性が成立するという。全時間的な入力可観測性に対しては前述の三つの命題はつぎのようになる。

[命題 4-1'] 動的観測系 (3-40) が全時間的に第 i 位の入力可観測性を有するための必要十分条件は任意の j に対して次式が成立することである。

$$\begin{aligned} \text{rank} \left[\Phi_x(j+i, j); \Xi_x(j+i, j) \right] &= \text{rank} \Xi_x(j+i, j) + r \\ \text{rank} \left[\Phi_x(j+k, j); \Xi_x(j+k, j) \right] &< \text{rank} \Xi_x(j+k, j) + r \\ k &= 1, 2, \dots, i-1 \end{aligned}$$

[命題 4-2'] 動的観測系 (3-40) が全時間的に第 i 位の入力可観測性を有するための必要条件は任意の j に対して

$$\Gamma(i+j, j) = \Phi_x^*(i+j, j) \Phi_x(i+j, j)$$

が正則のことである。

[命題 4-3'] 動的観測系 (3-40) が全時間的に第 i 位の入力可観測性を有するための必要十分条件は任意の j およびいかなる $\gamma_0, \gamma_1 \neq 0, \gamma_2, \dots, \gamma_i$ に対しても次式が成立することである。

$$\Phi_x(i+j, j)\gamma_0 + \Phi_x(i+j, j)\gamma_1 + \begin{bmatrix} 0 \\ \Phi_x(i+j, j+1) \end{bmatrix} \gamma_2 + \dots + \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ \Phi_x(i+j, i+j-1) \end{bmatrix} \gamma_i \neq 0$$

こゝで $\Phi_x, \gamma_0, \gamma_1, \dots, \gamma_i$ は命題 4-3 と同一である。

3.4.2 時間連続系 動的観測系が次式で表現されているとする。

$$\begin{cases} \dot{z} = A(t)z + B(t)x \\ y = C(t)z \end{cases} \quad (3-45)$$

$A(t), B(t), C(t)$ は部分連続関数とする。係数 $A(t), B(t), C(t)$ が時間的に可変である他はすべて 3.2 節と同一の系を取扱う。

$\Phi(t, \tau)$ を状態遷移行列とすると (3-45) 式の出力は次式で表わされる。

$$y(t) = C(t)\Phi(t, t_b)z(t_b) + \int_{t_b}^t C(\tau)\Phi(t, \tau)B(\tau)x(\tau)d\tau \quad (3-46)$$

$A(t), B(t), C(t)$ の各要素が観測区間 $t_b \sim t_e$ で時刻 t に対して解析接続の定理⁶⁾を満足するとき、(3-45) 式の系は区間 $t_b \sim t_e$ で解析的系であると呼ぶことにする。こゝでは解析的系についてのみ検討する。区間 $t_b \sim t_e$ がまったく任意のとき入力可観測性が成立するならば、全時間的に入力可観測性を有するという。

<A> パルス入力 観測区間 $t_b \sim t_e$ 内の 1 点 t_0 においてパルスが印加されたときの入力可観測性の問題を検討しよう。たゞし、時刻 t_0 は固定あるいは可変としてよいが既知とする。時刻 $t = t_0$ にはいるパルスは次式で表わさ

れる。

$$x(t) = x(t_0) \delta(t-t_0), \quad x(t_0) = \begin{bmatrix} x_1(t_0) \\ \vdots \\ x_r(t_0) \end{bmatrix} \quad (3-47)$$

上式を (3-46) 式に代入すると、

$$y(t) = C(t) \Phi(t, t_b) z(t_b) + C(t) \Phi(t, t_b) B(t_0) x(t_0) u_{-1}(t-t_0) \quad (3-48)$$

さらに上式の左側より $B^*(t_0) \Phi^*(t, t_0) C^*(t)$ および $\Phi^*(t, t_b) C^*(t)$ をかけて観測区間 $t_b \sim t_e$ で積分すると、

$$\begin{bmatrix} (C \Phi B, y) \\ (C \Phi, y) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (C \Phi B, C \Phi B) & (C \Phi B, C \Phi) \\ (C \Phi, C \Phi B) & (C \Phi, C \Phi) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t_0) \\ z(t_b) \end{bmatrix}$$

ただし、

$$(L, M) = \int_{t_b}^{t_e} L^*(t) M(t) dt$$

となる。

したがって 3.1 節と同様にしてつぎの命題を得る。

[命題 4-4] 動的観測系 (3-45) がパルス入力可観測性を有する必要十分条件は

$$\text{rank} \begin{bmatrix} (C \Phi B, C \Phi B) & (C \Phi B, C \Phi) \\ (C \Phi, C \Phi B) & (C \Phi, C \Phi) \end{bmatrix} = \text{rank} \begin{bmatrix} (C \Phi B, C \Phi) \\ (C \Phi, C \Phi) \end{bmatrix} + r \quad (3-49)$$

が成立することである。

[命題 4-5] 動的観測系 (3-45) がパルス入力可観測性を有する必要条件は次式が正則のことである。

$$P(t_e, t_0) = \int_{t_0}^{t_e} B^*(t_0) \Phi^*(t, t_0) C^*(t) C(t) \Phi(t, t_0) B(t_0) dt \quad (3-50)$$

上述の二つの命題は t_0 を任意としたとき、そのまま全時間的入力可観測性に対する命題となる。また初期値 $z(t_b)$ が既知の場合には $z(t_b) = 0$ とおいてもよい。したがってつぎの命題を得る。

[命題 4-5'] 初期状態量既知のとき動的観測系 (3-45) がパルス入力可観測性を有する必要十分条件は (3-50) 式の $P(t_e, t_0)$ が正則のことである。

上述の命題 4-5' において観測の終了時刻 t_e は任意に定めることができる。つまり、 $t_e' \neq t_e$, $t_0 < t_e'$ とするとき、正則性に関しては $\Gamma(t_e, t_0)$ と $\Gamma(t_e', t_0)$ とは等価である (付録 4-I 参照)。しかし、パルスの印加時刻に関しては一般に任意性は成立しない。すなわち $t_0 \neq t_0'$ とするとき $\Gamma(t_e, t_0)$ と $\Gamma(t_e, t_0')$ とは正則性に関しては必ずしも等価ではない。したがって上述の命題 4-4, 4-5, 4-5' が全時間的に成立するということは、任意の t_0 に関して成立するということを意味している。

命題 4-4 ~ 4-5' における $\Gamma(t_e, t_0)$ には状態遷移行列 $\Xi(t, t_0)$ が含まれていて、適用するにはあまり簡便な方法ではない。それとつきに係数行列 $A(t)$, $B(t)$, $C(t)$ だけの情報から入力可観測性の必要十分条件を導くことを検討する。

まず

$$P_1(t) = C(t) \quad (3-51)$$

とおくと、

$$\frac{d}{dt} P_1(t) \Xi(t, t_0) B(t_0) = P_2(t) \Xi(t, t_0) B(t_0)$$

$$P_2(t) = \dot{P}_1(t) + P_1(t) A(t)$$

同様にして

$$P_i(t) = \dot{P}_{i-1}(t) + P_{i-1}(t) A(t) \quad i=2, 3, \dots \quad (3-51')$$

とおく。いま、(3-50) 式の $\Gamma(t_e, t_0)$ が非正則とすると $C(t) \Xi(t, t_0) \cdot B(t_0)$ の r 個の列ベクトルは区間 $t_0 \sim t_e$ で 1 次従属である。(付録 4-II の補助定理 4-1 参照)。したがって観測区間 $t_0 \sim t_e$ で次式を成立させる非零の r ベクトル Υ が存在する。

$$P_1(t) \Xi(t, t_0) B(t_0) \Upsilon \equiv 0$$

上式を順次微分すると

$$P_i(t) \Xi(t, t_0) B(t_0) \Upsilon \equiv 0 \quad i=1, 2, \dots$$

ここで

$$Q^*(t) = [P_1^*(t) | P_2^*(t) | \dots | P_n^*(t)] \quad (3-52)$$

とおくと

$$Q(t) \Xi(t, t_0) B(t_0) \Upsilon \equiv 0$$

を得る。

上述の関係を使用すると、 $\Gamma(t_e, t_0)$ が正則のことと次式に示す $\Gamma_a(t_e, t_0)$ が正則のこととは等価であることが示せる。(付録 4-II の補助定理 4-II ~ 4-IV 参照)。

$$\Gamma_a(t_e, t_0) = \int_{t_0}^{t_e} B^*(t_0) Q^*(t) Q(t) B(t_0) dt \quad (3-53)$$

したがってつぎの定理が得られる。

[定理 4-1] 動的観測系 (3-45) 式の初期状態量が既知のとき、パルス入力に対する入力可観測性が成立するための必要十分条件は (3-53) 式の $\Gamma_a(t_e, t_0)$ が正則のことである。(証明は付録 4-III)。

< B > パルス列入力 3.2 節の第 3-3 図に示すようなパルス入力に対する入力可観測性を考える。パルス印加時刻 t は固定あるいは可変としてもよいが、いずれの場合も既知とする。

まず最初の観測区間 $t_1 \leq t < t_2$ を考えると、前述の命題 4-4 ~ 4-5' がそのまま適用でき、この区間で $x(t_1)$ を唯一に決定し得るための必要条件、あるいは必要十分条件が与えられていることになる。最初の区間 $t_1 \sim t_2$ で $x(t_1)$ が求められると、 $C(t) \Phi(t, t_b) z(t_b) = \beta(t, t_b) U$ の独立な列ベクトルを n' 個として

$$C(t) \Phi(t, t_b) z(t_b) = \beta(t, t_b) U \quad U: n' \text{ベクトル}$$

$\beta(t, t_b)$: n' 個の列ベクトルが 1 次独立な $m \times n'$ 行列

もまた求められるから

$$\begin{aligned} y(t) - C(t) \Phi(t, t_b) z(t_b) - C(t) \Phi(t, t_1) B(t_1) x(t_1) \\ = C(t) \Phi(t, t_2) B(t_2) x(t_2) \quad t_2 \leq t < t_3 \end{aligned}$$

の左辺は既知となる。したがって $x(t_2)$ を唯一に決定し得るためには命題 4-5' あるいは定理 4-1 の条件が満足されなければならない。ところが、命題 4-5' あるいは定理 4-1 は $x(t_1)$ が唯一に決定できる場合には当然満足されている。また命題 4-4 も満足される。

一方、もし区間 $t_1 \sim t_2$ で $x(t_1)$ が唯一に決定できない場合、他の観測区間の出力値が $x(t_1)$ の決定に寄与しないであろうか。しかし、このようなことは解析的系を考えているかぎりあり得ないことである。(付録 4-IV 参照)。それゆえつぎの命題が得られる。

[命題 4-6] 動的観測系 (3-45) がパルス列入力に対して入力可観測性を有するための必要十分条件は、区間 $t_b \leq t \leq t_e$ で命題 4-4 が成立することである。区間 $t_b \sim t_e$ が任意ならば全時間的に成立する。

[命題 4-6'] 動的観測系 (3-45) がパルス列入力に対して入力可観測性を有するための必要条件は

$$\Gamma(t_e, t_i) = \int_{t_i}^{t_e} B^*(t_i) \Phi^*(t, t_i) C^*(t) C(t) \Phi(t, t_i) B(t_i) dt \quad (3-50')$$

が、 $i = 1, 2, \dots, N$ に対して正則のことである。区間が任意ならば、全時間的に成立する。

[系4-1-1] 動的観測系 (3-45) の初期状態量が既知のとき、パルス列入力可観測性が成立する必要十分条件は (3-50') 式の $\Gamma(t_e, t_i)$ が $i = 1, 2, \dots, N$ に対して正則のことである。区間 $t_b \sim t_e$ が任意ならば全時間的に成立する。

[系4-1-2] 動的観測系 (3-45) の初期状態量が既知のとき、パルス列入力可観測性成立の必要十分条件は

$$\Gamma_Q(t_e, t_i) = \int_{t_i}^{t_e} B^*(t_i) Q^*(t) Q(t) B(t_i) dt \quad (3-53')$$

が、 $i = 1, 2, \dots, N$ に対して正則のことである。区間 $t_b \sim t_e$ が任意ならば全時間的に成立する。

<0> 連続波形入力 この場合は入力の各要素が観測区間 $t_b \sim t_e$ で連続な場合の入力可観測性を検討する。また観測系 (3-45) の初期状態量 $z(t_b)$ は既知とする。 $z(t_b)$ を既知としているから (3-46) 式より、

$$\begin{aligned} w(t) &= y(t) - C(t) \Phi(t, t_b) z(t_b) \\ &= \int_{t_b}^t C(t) \Phi(t, \tau) B(\tau) x(\tau) d\tau \end{aligned} \quad (3-46')$$

両辺を微分すると次式を得る。

$$\dot{w}(t) = P_1(t) B(t) x(t) + \int_{t_b}^t P_2(t) \Phi(t, \tau) B(\tau) x(\tau) d\tau$$

ただし、 $P_i(t)$ $i = 1, 2, \dots$ は (3-51), (3-51') 式で示されるものとする。

いま、 $m \times r$ 行列 $P_1(t) B(t)$ の m 個の行ベクトルのうち、観測区間 $t_b \sim t_e$ で1次独立なものが m_1 個あるとする。このときこの m_1 個の行ベクトルを階数 m_1 の $m_1 \times m$ 行列 α_1 を使用して、

$$\alpha_1 P_1(t) B(t)$$

と表わすことができる。ただし、 α_1 は各要素が0あるいは1のみから成るものである。残りの $m - m_1$ 個の行ベクトルは独立な m_1 個の行ベクトルの線形結合として表わされるから、 β_1 を $(m - m_1) \times m$ 行列として、

$$\beta_1 P_1(t) B(t) \equiv 0 \quad t_b \leq t \leq t_e$$

とすることができる。これらの α_1, β_1 を使用してつぎのようにおく。

$$\begin{aligned} v_1(t) &= \alpha_1 \dot{w}(t) \\ w_1(t) &= \beta_1 \dot{w}(t) = \int_{t_b}^t \beta_1 P_2(t) \Phi(t, \tau) B(\tau) x(\tau) d\tau \end{aligned}$$

上式の $w_1(t)$ をさらに微分すると,

$$\dot{w}_1(t) = \beta_1 P_2(t) B(t) x(t) + \int_{t_b}^t \beta_1 P_3(t) \Phi(t, \tau) B(\tau) x(\tau) d\tau$$

$(m - m_1) \times m$ 行列, $\beta_1 P_2(t) B(t)$ の $m - m_1$ 個の行ベクトルのうち
 区間 $t_b \sim t_e$ で 1 次独立なものが m_2 個あるとする。この m_2 個の 1 次独立な
 行ベクトルは各要素が 0 あるいは 1 のみから構成される階数 m_2 の $m_2 \times (m - m_1)$
 行列 α_2' によりつぎのように表わせる。

$$\alpha_2' \beta_1 P_2(t) B(t) = \alpha_2 P_2(t) B(t)$$

残りの $m - m_1 - m_2$ 個の行ベクトルは独立な m_2 個の行ベクトルの線形結合で表
 せるから, $(m - m_1 - m_2) \times (m - m_2)$ 行列 β_2' を結合行列として,

$$\begin{aligned} \beta_2' \beta_1 P_2(t) B(t) &= \beta_2 P_2(t) B(t) \equiv 0 & t_b \leq t \leq t_e \\ \beta_2 &= \beta_2' \beta_1 \end{aligned}$$

とすることができる。これらの α_2, β_2 を使用してつぎのようにおく。

$$v_2(t) = \alpha_2' \dot{w}_1(t) = \alpha_2 \dot{w}(t)$$

$$w_2(t) = \beta_2' \dot{w}_1(t) = \beta_2 \dot{w}(t) = \int_{t_b}^t \beta_2 P_3(t) \Phi(t, \tau) B(\tau) x(\tau) d\tau$$

以下同様にして $v_3(t), \dots, v_n(t)$ を求めることができ, これらより次
 式を得る。

$$v(t) = \alpha Q(t) B(t) x(t) + \int_{t_b}^t \alpha P(t) \Phi(t, \tau) B(\tau) x(\tau) d\tau \quad (3-54)$$

ただし,

$$v(t) = \begin{bmatrix} v_1(t) \\ \vdots \\ v_n(t) \end{bmatrix}$$

$v(t)$: m' ベクトル

$$m' = m_1 + m_2 + \dots + m_n$$

$$\alpha = \begin{bmatrix} \alpha_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \alpha_n \end{bmatrix}$$

α : $m' \times m \cdot n$ 行列

$$\text{rank } \alpha = m' \leq m \quad (3-55)$$

$$Q(t) = \begin{bmatrix} P_1(t) \\ \vdots \\ P_2(t) \\ \vdots \\ P_n(t) \end{bmatrix}, \quad P(t) = \begin{bmatrix} P_2(t) \\ \vdots \\ P_3(t) \\ \vdots \\ P_{n+1}(t) \end{bmatrix}$$

(3-54) 式の左側より $B^*(t) Q^*(t) \alpha^*$ を作用すると次式を得る。

$$B^*(t)Q^*(t)\alpha^* v(t) = B^*(t)Q^*(t)\alpha^* \alpha Q(t) B(t) x(t) + \int_{t_b}^t B^*(t)Q^*(t)\alpha^* \alpha P(t) \Phi(t, \tau) B(\tau) x(\tau) d\tau \quad (3-56)$$

上式右辺第1項の $x(t)$ の係数行列が観測区間 $t_b \sim t_e$ で逆をもつならばつぎの第2種ボルテラ形積分方程式を得る。

$$x(t) - \int_{t_b}^t K(t, \tau) x(\tau) d\tau = \Omega(t) \quad (3-57)$$

ただし、

$$\Omega(t) = [B^*(t)Q^*(t)\alpha^* \alpha Q(t) B(t)]^{-1} B^*(t)Q^*(t)\alpha^* v(t) \\ K(t, \tau) = -[B^*(t)Q^*(t)\alpha^* \alpha Q(t) B(t)]^{-1} B^*(t)Q^*(t)\alpha^* \alpha P(t) \Phi(t, \tau) B(\tau)$$

(3-57) 式の右辺の $\Omega(t)$ は明らかに連続である。また積分核 $K(t, \tau)$ の各要素は解析関数であり連続且有界である。それゆえ (3-57) 式はつぎの唯一連続解をもつ。(付録4-V参照)。

$$x(t) = \Omega(t) - \int_{t_b}^t G(t, \tau) \Omega(\tau) d\tau \quad (3-58)$$

$$G(t, \tau) = -K(t, \tau) - \int_{\tau}^t K(t, \tau_1) K(\tau_1, \tau) d\tau_1 \\ - \int_{\tau}^t \int_{\tau}^{\tau_1} K(t, \tau_1) K(\tau_1, \tau_2) K(\tau_2, \tau) d\tau_2 d\tau_1, \dots \quad (3-59)$$

以上より十分条件に関するつぎの定理を得る。

[定理4-2] 動的観測系 (3-45) が連続波形入力に対して入力可観測性を有する十分条件は観測区間 $t_b \leq t \leq t_e$ 内のすべての時刻で、

$$R(t) = B^*(t)Q^*(t)\alpha^* \alpha Q(t) B(t) \quad (3-60)$$

を正則とするような (3-55) 式の α が存在することである。(証明は付録4-VI)。

必要条件に関してはつぎの定理が得られる。

[定理4-3] 動的観測系 (3-45) が連続波形入力に対して入力可観測性を有する必要条件は、

$$\Gamma_t(t_e, t_b) = \int_{t_b}^{t_e} B^*(t)Q^*(t)Q(t)B(t)dt \quad (3-61)$$

が正則であることである。(証明は付録4-VII)。

< D > 解析関数入力 入力各要素が観測区間 $t_b \sim t_e$ で解析的であるとす。この場合には観測区間内の任意の点 t_0 でテイラー級数に展開可能である。

$$x(t) = x(t_0) + \dot{x}(t_0)(t-t_0) + \frac{1}{2!} \ddot{x}(t_0)(t-t_0)^2 + \dots \quad (3-62)$$

もし、 t_0 を含む任意の開区間で $x(t)$ が唯一に決定できるならば、点 t_0 における微分値は一義的に定まり、(3-62) 式の右辺は一義的に決定できる。それゆえ解析関数に関する定理⁶⁾より $x(t)$ は観測区間 $t_b \sim t_e$ で一義的に決定されることになる。すなわち、区間 $t_b \sim t_e$ 内の任意の開区間で $x(t)$ が唯一に決定できることが入力可観測性成立の必要十分条件である。つまり、(3-60) 式の $R(t)$ をつねに正則とする開区間の存在が十分条件となる。

[系4-2-1] 動的観測系(3-45)が解析関数入力に対して入力可観測性を有する十分条件は、

$$\int_{t_b}^{t_e} R(t) dt \quad (3-63)$$

が正則となることである。(証明は付録4-VIII)。

必要条件に関しては定理4-3がそのまま適用できる。

3.5 入力可観測性に関する線形動的系の若干の性質¹⁾³⁾

3.5.1 時間連続系と時間離散系の相似性 時間離散系の状態可観測性⁷⁾および入力可観測性の決定には、 n 回までの観測が寄与する。また状態可制御性⁷⁾および出力可制御性⁸⁾に関しても同様にその決定には n 回までの操作が関与する。したがって時間離散系の場合には観測または操作の回数として最大限 n までとらないと可観測性および可制御性に関する十分な情報が得られない。一方、時間連続系の場合には有限の時間間隔であれば、それがどんなに微小であろうとも状態可制御性⁹⁾、状態可観測性⁹⁾、出力可制御性¹⁰⁾ および入力可観測性のいずれの場合をもその決定を満足させるだけの十分な情報を含んでいることがわかる。すなわち、時間離散系の n 回の観測または操作に関する情報とまったく同等の情報が時間連続系の場合には有限微小間隔に含まれ、しかもその間隔がどのように微小でもよい。

n 次の定係数系の時間連続系および時間離散系の状態可制御性成立の必要十分条件は、

$$\begin{aligned} \text{rank} [B : AB : \dots : A^{n-1}B] &= n \\ \text{rank} [F : GF : \dots : G^{n-1}F] &= n \end{aligned}$$

である。同様に出力可制御性に関しては

$$\text{rank} \begin{bmatrix} CB & CAB & \cdots & CA^{n-1}B \end{bmatrix} = m$$

$$\text{rank} \begin{bmatrix} HF & HGF & \cdots & HG^{n-1}F \end{bmatrix} = m$$

であり、また状態可観測性に関しては、

$$\text{rank} \begin{bmatrix} C^* & A^*C^* & \cdots & (A^*)^{n-1}C^* \end{bmatrix} = n$$

$$\text{rank} \begin{bmatrix} H^* & G^*H^* & \cdots & (G^*)^{n-1}H^* \end{bmatrix} = n$$

である。したがってこれら三者に関するかぎり時間連続系と時間離散系との間にまったく相似性が成立していることがわかる。

しかし、入力可観測性に関してはこのような相似性は成立しない。それは上述の三者は入力空間、出力空間の構造には制限をつけていないため、単にオペレータのみの構造に関する議論である。しかし、入力可観測性を論ずるときは、入力空間、出力空間、状態空間、オペレータ、時間領域のすべてを考慮したシステム¹¹⁾¹²⁾の構造が問題となってくる。したがって時間連続系においても、入力空間のえらび方（パルス列、連続波形、一般的波形—ラプラス変換可能—など）によって、入力可観測性を満足するオペレータの構造がかわってくる。

3.5.2 時間離散化した系の可制御性と可観測性 定係数系を考える。時間離散系を各サンプリング間隔 τ を微小とし、この間は入力量が一定として時間離散化を行うとき、係数行列間につきの関係が得られる。

$$G = e^{A\tau}$$

$$F = e^{A\tau} \int_0^\tau e^{-A\xi} d\xi B$$

$$H = C$$

これらの関係を用いると時間連続系と時間離散化した系とに関するつぎの定理を得る。

[定理5-1] 時間連続系が状態可制御性（出力可制御性、状態可観測性）を有しないとき、それを時間離散化した系もまた状態可制御性（出力可制御性、状態可観測性）を有しない。（証明は付録5-1）。

入力可観測性に関してはやゝ異なった形で述べられる。

[系5-1-1] 時間連続系が入力可観測性の必要条件

$$\text{rank} \begin{bmatrix} B^*C^* & \cdots & B^*(A^*)^{n-1}C^* \end{bmatrix} = r$$

を満足しないときは、それを時間離散化した系もまた入力可観測性を有しない。

(畧証は付録 5 - II)。

つぎに時間離散化を行なうときの係数 $\alpha_j^{(i)}$, $\beta_j^{(i)}$ (付録 5 - I 参照) に関する定理を導こう。いまつぎのようにおく。

$$[B; \dots; A^{p-1} B] = [P_1^{(1)} \dots P_r^{(1)}; \dots; P_1^{(p)} \dots P_r^{(p)}] \quad (3-64)$$

$$[F; \dots; G^{n-1} F] = [\varphi_1^{(1)} \dots \varphi_r^{(1)}; \dots; \varphi_1^{(n)} \dots \varphi_r^{(n)}] \quad (3-65)$$

$$[CB; \dots; CA^{p-1} B] = [Q_1^{(1)} \dots Q_r^{(1)}; \dots; Q_1^{(p)} \dots Q_r^{(p)}] \quad (3-66)$$

$$[HF; \dots; HG^{n-1} F] = [\psi_1^{(1)} \dots \psi_r^{(1)}; \dots; \psi_1^{(n)} \dots \psi_r^{(n)}] \quad (3-67)$$

$$[C^*; \dots; (A^*)^{p-1} C^*] = [R_1^{(1)} \dots R_m^{(1)}; \dots; R_1^{(p)} \dots R_m^{(p)}] \quad (3-68)$$

$$[H^*; G^* H^*; \dots; (G^*)^{n-1} H^*] = [\Gamma_1^{(1)} \dots \Gamma_m^{(1)}; \dots; \Gamma_1^{(n)} \dots \Gamma_m^{(n)}] \quad (3-69)$$

$$[B^* C^*; \dots; B^* (A^*)^{p-1} C^*] = [S_1^{(1)} \dots S_m^{(1)}; \dots; S_1^{(p)} \dots S_m^{(p)}] \quad (3-70)$$

$$[F^* H^*; \dots; F^* (G^*)^{n-1} H^*] = [\Delta_1^{(1)} \dots \Delta_m^{(1)}; \dots; \Delta_1^{(n)} \dots \Delta_m^{(n)}] \quad (3-71)$$

これらの関係よりつぎの関係式が得られる。

$$\begin{pmatrix} \varphi_1^{(1)} \\ \vdots \\ \varphi_r^{(1)} \\ \vdots \\ \varphi_1^{(n)} \\ \vdots \\ \varphi_r^{(n)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \beta_1^{(1)} I & \dots & \beta_p^{(1)} I \\ \vdots & & \vdots \\ \beta_1^{(n)} I & \dots & \beta_p^{(n)} I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P_1^{(1)} \\ \vdots \\ P_r^{(1)} \\ \vdots \\ P_1^{(p)} \\ \vdots \\ P_r^{(p)} \end{pmatrix} \quad (3-72)$$

I : r x r 単位行列

$$\begin{pmatrix} \psi_1^{(1)} \\ \vdots \\ \psi_r^{(1)} \\ \vdots \\ \psi_1^{(n)} \\ \vdots \\ \psi_r^{(n)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \beta_1^{(1)} I & \dots & \beta_p^{(1)} I \\ \vdots & & \vdots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Q_1^{(1)} \\ \vdots \\ Q_r^{(1)} \\ \vdots \\ Q_1^{(p)} \\ \vdots \\ Q_r^{(p)} \end{pmatrix} \quad (3-73)$$

$$\begin{pmatrix} \Psi_1^{(n)} \\ \vdots \\ \Psi_r^{(n)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \beta_1^{(n)} I & \cdots & \beta_p^{(n)} I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Q_1^{(p)} \\ \vdots \\ Q_r^{(p)} \end{pmatrix}$$

I : r × r 単位行列

$$\begin{pmatrix} \Gamma_1^{(1)} \\ \vdots \\ \Gamma_m^{(1)} \\ \vdots \\ \Gamma_1^{(n)} \\ \vdots \\ \Gamma_m^{(n)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I & 0 & \cdots & 0 \\ \bar{\alpha}_1^{(1)} I & \alpha_2^{(1)} I & \cdots & \alpha_p^{(1)} I \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \bar{\alpha}_1^{(n-1)} I & \bar{\alpha}_2^{(n-1)} I & \cdots & \bar{\alpha}_p^{(n-1)} I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} R_1^{(1)} \\ \vdots \\ R_m^{(1)} \\ \vdots \\ R_1^{(p)} \\ \vdots \\ R_m^{(p)} \end{pmatrix} \quad (3-74)$$

I : m × m 単位行列

$$\begin{pmatrix} \Delta_1^{(1)} \\ \vdots \\ \Delta_m^{(1)} \\ \vdots \\ \Delta_1^{(n)} \\ \vdots \\ \Delta_m^{(n)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{\beta}_1^{(1)} I & \cdots & \bar{\beta}_p^{(1)} I \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \bar{\beta}_1^{(n)} I & \cdots & \bar{\beta}_p^{(n)} I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} S_1^{(1)} \\ \vdots \\ S_m^{(1)} \\ \vdots \\ S_1^{(p)} \\ \vdots \\ S_m^{(p)} \end{pmatrix} \quad (3-75)$$

I : m × m 単位行列

さて、上式を用いるとつぎの定理が得られる。

[定理 5-2] (3-72) 式 [(3-73) 式, (3-74) 式, (3-75) 式] の線形結合係数行列の階数が n [m, n, r] より小さいとき、時間離散化した系は状態可制御性 [出力可制御性, 状態可観測性, 入力可観測性] が成立しない。(証明は付録 5-III)。

3.5.3 入出力双対性

出力可制御性の問題は時刻 t_1 における出力の値 $y(t_1)$ を区間 $t_0 \sim t_1$ の入力 $x(t)$ で任意に制御できるか否かの問題である。これと入出力間の関係を逆転させた問題は時刻 t_0 において任意の大きさのパルス $x(t_0)$ が印加されたとき区間 $t_0 \sim t_1$ の出力値より $x(t_0)$ が唯一に求め得るか否かである。したがって出力可制御性と双対な関係にあるのはパルス入力の可観測性の問題である。

(3-45) 式の系に双対な系としてつぎの (3-45') 式の系を考える。

$$\begin{cases} \frac{d}{d\tau} \tilde{z} = -A^*(\tau) \tilde{z} + C^*(\tau) \tilde{y} \\ \tilde{x} = B^*(\tau) \tilde{z} \end{cases} \quad (3-45')$$

ただし、 \tilde{z} : n ベクトル, \tilde{y} : m ベクトル, \tilde{x} : m ベクトル。 τ は第3-4図に示すように t とは逆行してとる。また任意の関数 f に対して

$$f(t) = f(\tau), \quad t = \tau, \quad t_1 = \tau_0, \quad t_0 = \tau_1$$

$$-\frac{d}{d\tau} f = \frac{d}{dt} f$$

が成立するとする。

(3-45') 式の系が出力可制御性を有する必要十分条件は、

$$\int_{\tau_0}^{\tau_1} B^*(\tau) \Psi(\tau_1, \tau) C^*(\tau) C(\tau) \Psi^*(\tau_1, \tau) B(\tau) d\tau$$

が正則のことである。ここで $\Psi(\tau_1, \tau)$ は (3-45') 式の系の状態遷移行列である。ところで随伴の定義より

$$\Psi^*(\tau_1, \tau) = \Psi^{-1}(\tau_1, \tau) = \Psi(\tau, \tau_1) = \Psi(t, t_0)$$

であるから、上式は

$$\int_{t_0}^{t_1} B^*(t_0) \Psi^*(t, t_0) C^*(t) C(t) \Psi(t, t_0) B(t_0) dt = \Gamma(t_1, t_0)$$

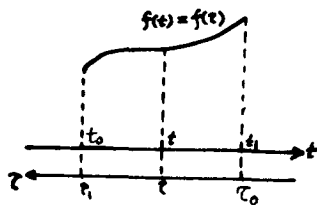
となり、(3-45) 式の系の初期状態量既知のときの入力可観測性の必要十分条件と一致する。

(3-45) 式の出力可制御性と (3-45') 式の系のパルス入力可観測性に関しても同様のことがいえる。つまり、(3-45) 式の系においてパルス入力可観測性 (出力可制御性) が成立することと、(3-45') 式の系において出力可制御性 (パルス入力可観測性) が成立することとは等価である。

3.5.4 状態可観測性と入力可観測性 状態可観測性が成立したときの入力可観測性に関してはつぎの定理が得られる。

[定理5-3] 定係数系において状態可観測性が成立したときパルス列入力可観測性が成立するための必要十分条件は $m \times r$ 行列 B の r 個の列ベクトルが1次独立のことである。(証明は付録5-IV)。

[定理5-4] 可変系において状態可観測性が成立したとき、 $t_b \leq t \leq t_e$ の観測でパルス $x(t_0)$ ($t_b \leq t_0 < t_e$) の入力可観測性が成立するための必要十分条件は r 個の $B(t_0)$ の列ベクトルが1次独立であることである。(証明は付録5-V)。



第3-4図 入出力双対系の時間軸

状態可制御性と出力可制御性とに関しても上の二つの定理とまったく同様に証明できるので、証明なしで系として与えておく。

[系5-3-1] 定係数系において状態可制御性が成立するとき、出力可制御性が成立するための必要十分条件は $m \times n$ 行列 C の m 個の行ベクトルが1次独立であることである。

[系5-4-1] 変係数系において状態可制御性が成立するとき、出力可制御性が成立するための必要十分条件は $C(s)$ の m 個の行ベクトルが1次独立のことである。

さて、上述の定理5-3，定理5-4，系5-3-1，系5-4-1よりつぎの関係が求まる。

状態可観測性（状態可制御性）が成立したとき、パルス入力可観測性（出力可制御性）が成立することと、双対な系において状態可制御性（状態可観測性）が成立したとき出力可制御性（パルス入力可観測性）が成立することとは等価である。

3章 文 献

- 1) 関口 隆, 時間離散系の入力可観測性および線形動的系の若干の性質, 計測自動制御学会論文集, Vol. 5, No. 3, 221/228, ('69)
- 2) 第2章文献1)に同じ。
- 3) 関口 隆, 動的観測系の入力可観測性と入出力双対性, 計測自動制御学会論文集, Vol. 6, No. 2, 152/160, ('70)
- 4) 柴垣和三郎, 解析学通論(上), 丸善, (昭38)
- 5) T. Sekiguchi, Input, State Observability of Time-Varying Systems With Unknown State and Input Values, Bulletin of The Faculty of Engineering, Yokohama National University, 119/126, ('69)
- 6) 藤原松三郎, 微分積分学, 第1巻, 内田老鶴圃
- 7) 第2章文献26)に同じ。
- 8) 第1章文献35)に同じ。
- 9) 第2章文献4)に同じ。
- 10) 第1章文献34)に同じ。
- 11) R. E. Kalman, Canonical Structure of Linear Dynamical Systems, Proc. N. A. S. Vol. 48, 596/600, ('62)
- 12) R. E. Kalman, Mathematical Description of Linear Dynamical Systems, SIAM J on Control Ser. A, Vol. 1, No. 2, 152/192 ('63)
- 13) 近藤 次郎, 積分方程式, 培風館, (昭36)
- 14) コルモゴロフ・フオミーソフ(山崎訳), 函数解析の基礎, 岩波, ('65)
- 15) カントロヴィッチ・アキエロフ(山崎・柴岡訳), ノルム空間の函数解析1, 2, 東京図書, ('64)
- 16) 関口・川島, 二乗平均による入力量の同定について, 第8回SICE大会, P. 193/194

第 4 章 誘導電動機系の動トルク測定

第4章 誘導電動機系の動トルク測定

4.1 入力波形の再現

測定より得られる情報の量が多くその内容が豊富なほど、きめ細かい制御が可能である。たとえば外乱・負荷トルクの波形を求めることができれば、その測定量を有効に使用した制御系の構成が考えられる。非線形系の応答が線形動的観測系を経過しなければ観測できない場合があるが、この場合には勿論入力波形を求めることは絶対必要である。

入力可観測性にもとづく入力波形の再現には基本的にデジタル処理による方法とアナログ処理による方法、および処理としてはオン・ライン処理とオフ・ライン処理との組合せによる四つの方法が考えられる。ここではオン・ライン処理、オフ・ライン処理についてはふれずに、デジタル処理およびアナログ処理について述べ、入力可観測性にもとづく方法と他の方法との比較検討を行う。

4.1.1 デジタル方式による入力波形の再現

< A > 一般入力の再現 I 入力 m 出力の線形定係数系において入力可観測性が成立する場合には、第4-1図に示すように出力 y_1, \dots, y_m から入力 x_i ($i = 1, \dots, I$) を再現するための逆系の構成が可能である。いま Y_j 端子から X_i 端子までの伝達関数を

$$G_2^{ji}(s) \cdot G_1^{ji}(s)$$

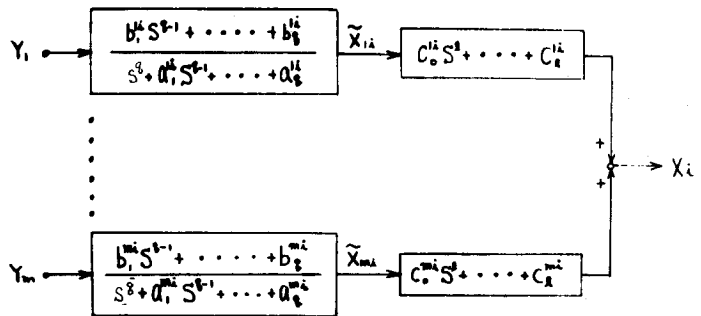
$$G_1^{ji}(s) = \frac{b_1^{ji} s^{q-1} + \dots + b_{q-1}^{ji} s + b_q^{ji}}{s^q + a_1^{ji} s^{q-1} + \dots + a_{q-1}^{ji} s + a_q^{ji}} \quad (4-1)$$

$$G_2^{ji}(s) = c_0^{ji} s^l + \dots + c_l^{ji}$$

とおこう。第4-1図は $G_1^{ji}(s)$ と $G_2^{ji}(s)$ とが縦続結合されていることを示す。いま $G_1^{ji}(s)$ の出力値を \tilde{x}_{ji} であらわそう。

$y_j(t)$ を入力とし $\tilde{x}_{ji}(t)$ を出力とする関係を状態方程式表現にて示すと次式を得る¹⁾。

$$\begin{cases} \dot{z} = A^{ji} z + B^{ji} y_j \\ \tilde{x}_{ji} = C^{ji} z \end{cases}$$



第4-1図 入力実現の逆系

ここで z は q ベクトル, A^{ji} は $q \times q$ 行列, B^{ji} は $q \times 1$ 行列, C^{ji} は $1 \times q$ 行列である。

観測値 $y_i(t)$ を微小なサンプリング間隔で一定値をとる階段波で近似すると, 上式の時間連続系は時間離散系に変換できる¹⁾。

$$\begin{cases} z(k+1) = G^{ji} z(k) + F^{ji} y(k) \\ \tilde{x}_{ji}(k) = H^{ji} z(k) \end{cases}$$

$G^{ji}(s)$ は微分系であるから, 微分を差分におきかえると, $\tilde{x}_{ji}(k)$ に差分演算を施こして入力 x_i が再現される。

< B > ベキ多項式入力の再現²⁾ 入力が N 次の多項式

$$x(t) = x_0 + x_1 t + \dots + x_N t^N \quad (4-2)$$

で表わされるとする。ただし, x_0, \dots, x_N は定数 1 ベクトルである。動的観測系の方程式を

$$\begin{cases} \dot{z} = A z + B x \\ y = C z \end{cases}$$

とすると,

$$\begin{aligned} w(t) &= y(t) - C \Phi(t) z(0) \\ &= \int_0^t C \Phi(t-\tau) B x(\tau) d\tau \\ &= \sum_{k=0}^{p-1} \sum_{i=0}^N \gamma_{ik}(t) C A^k B x_i \end{aligned}$$

上式の両辺に $\overline{\gamma_{j\ell}(t)}$ をかけて観測区間で積分すると,

$$(\overline{\gamma_{j\ell}}, w) = \sum_{i=0}^N \sum_{k=0}^{p-1} (\overline{\gamma_{j\ell}}, \gamma_{ik}) (B^* (A^*)^k C^*, x_i) \quad (3-25)$$

$$j = 0, 1, \dots, N; \quad \ell = 0, 1, \dots, p-1$$

を得る。これを解いて,

$$(B^* (A^*)^k C^*, x_i) = \beta_{ik} \quad (3-26)$$

$$i = 0, 1, \dots, N; \quad k = 0, 1, \dots, p-1$$

を得る。ただし, $\gamma_{ik}(t)$ のうち1次独立なものの数を $p(N+1) - \ell$ 個, すなわち ℓ 個は他のものの1次結合で表わせるとするとき β_{ik} には $m\ell$ 個のパラメータを含む。入力波形に関する $m\ell$ 個の情報を使用して, この (3-26) 式を各 x_i について解くことによりベキ多項式入力の各係数が得られる。

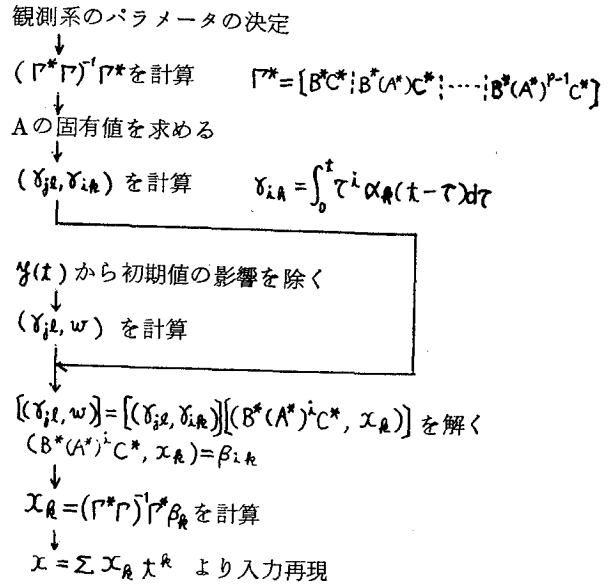
$$x_i = (\Gamma^* \Gamma)^{-1} \Gamma^* \beta_i \quad (4-3)$$

$$\Gamma^* = [B^* C^* \mid B^* (A^*) C^* \mid \dots \mid B^* (A^*)^{p-1} C^*], \quad \beta_i = \begin{bmatrix} \beta_{i0} \\ \vdots \\ \beta_{i,p-1} \end{bmatrix}$$

上述にしたがって具体的に入力波形を再現するプロセスを流れ図で示したのが第4-2図である。

4.1.2 アナログ方式による入力波形の再現 [入力 x から m 出力 y までの伝達関数行列の逆伝達関数行列は通常分子の次数が分母の次数以上になり実用上好ましくない。しかし、実際に再現に必要な入力波形は適当な周波数範囲の波形でよい。それゆえ高次高調波をカットして適当な周波数範囲のみに限定したとき入力可観測性の理論が逆回路構成の可・不可の必要十分条件を与えてくれる。

第4-3図はアナログ方式による入力波形再現の基本構成図を示す。 $G(s)$ を動的観測系の伝達関数行列とすると、逆回路 $G^+(s)$ で入力波形を再現し、フィルタ $H(s)$ で適当な周波数範囲の信号におさめる。実際の回路設計にあたっては $G^+(s)$ と $H(s)$ 両者を別々に設計するのではなく、両者の機能を兼ね具えた $F(s)$ を設計することが可能である。



第4-2図 多項式入力波形決定のためのフローチャート

4.1.3 L積分(遅延)逆系^{3) 4)}との比較 まず時間離散系

$$\begin{cases} z(k+1) = Gz(k) + Fx(k) \\ y(k) = Hz(k) \end{cases} \quad (4-4)$$

の逆系の構成を考えよう。上式の系が第L位の入力可観測性が成立するとする。このとき、

$$J_1 = HF, \quad J_2 = HGF, \quad \dots, \quad J_L = HG^L F$$

とし、 K_1, K_2, \dots, K_L を $L \times m$ 行列とすると、

$$\begin{cases} K_1 J_1 = 0 \\ K_2 J_1 + K_1 J_2 = 0 \\ \vdots \\ K_L J_1 + K_{L-1} J_2 + \dots + K_1 J_L = I \end{cases}$$

を満足する K_1, K_2, \dots, K_L が存在する。これらを用いて、

$$H_k = K_L H G + \dots + K_1 H G^L$$

とおくとき、第4-4図により $L+1$ サンプルング時刻の遅れで入力波形が再現できる¹⁾。すなわち、

$$\hat{v}(k+1+L) = u(k)$$

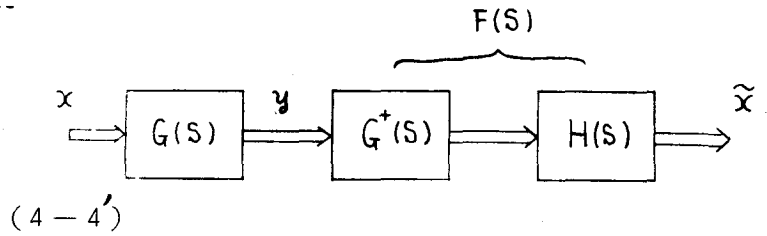
$$k = 0, 1, 2, \dots$$

$$\hat{v}(z) = z^{-L-1} u(z)$$

とあらわされる。

時間連続系

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bx \\ y = Cx \end{cases} \quad (4-4')$$



第4-3図 アナログ方式による入力波形再現の基本構成図

に対しても、前述の時間離散系との相似関係より第4-5図により入力を $L+1$ 回積分した形で求める逆系が構成できる¹⁾。ただし、つぎの J_1, \dots, J_L に関して第 L 位の入力可観測性が成立するとする。

$$J_1 = CB, J_2 = CAB, \dots,$$

$$J_L = CA^L B$$

また、 $r \times m$ 行列 K_1, K_2, \dots, K_L は、

$$\begin{cases} K_1 J_1 = 0 \\ K_2 J_1 + K_1 J_2 = 0 \\ \vdots \\ K_L J_1 + \dots + K_1 J_L = I \end{cases}$$

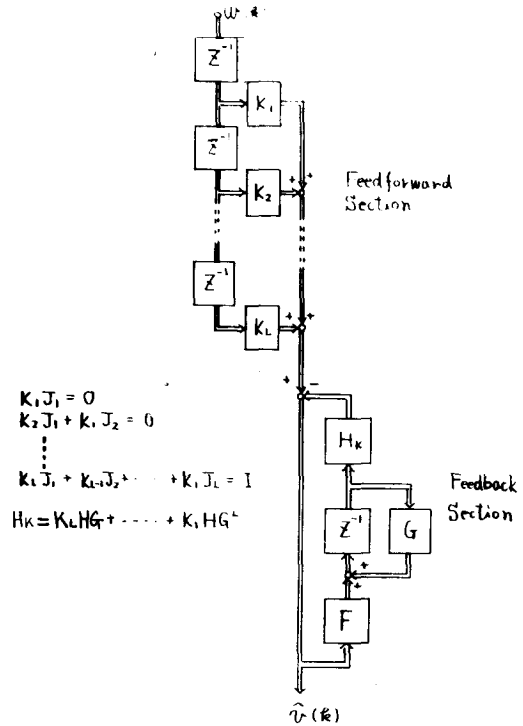
を満足する。 C_k は次式により構成される。

$$C_k = K_L C A^L + \dots + K_1 C A^L$$

このとき逆系の出力 $\hat{v}(s)$ は次式で与えられる。

$$\hat{v}(s) = s^{-L-1} u(s)$$

さて、時間離散系に対しては前述の L 遅延逆系が入力可観測性の理論のオン・ライン処理に対する具体化であるとみなせる。つまり入力可観測性の成立が L 遅延逆系構成可能の必要十分条件である。時間連続系の場合には L 積分逆系では入

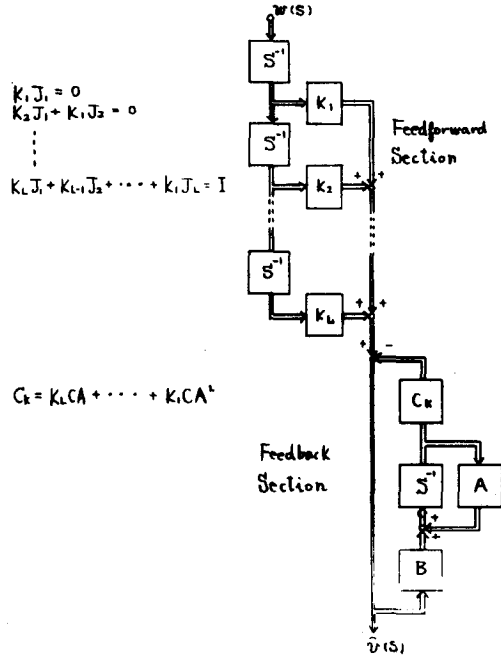


第4-4図 L -遅延逆系

力波形の再現には $L + 1$ 回の微分を行わなければならないが、これはアナログ回路ではかなりきびしい条件である。しかし、適当な周波数範囲を設定して高周波域をカットすることにより実用上必要な入力波形を再現することができる。

4・2 2入力・1出力系の入力波形の再現

入力可観測性の理論にもとづく入力波形の再現方法がもつ特徴の一つは、入力波形に対する適当な情報を使用することによりベキ多項式入力に対しては入力端子数より少ない出力端子数でも入力波形の再現が可能なことである。本節ではこの理論の妥当性の検討のため、簡単な2入力・1出力系を具体例としてデジタル計算機で解をもとめてみる。



第4-5図 L-積分逆系

つぎの2次系を考える。

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \\ y = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} \end{cases} \quad (4-5)$$

ベキ多項式入力に対する入力可観測性を吟味すると、

$$[B^* C^* : B^* A^* C^*] = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$$

明らかに上式の階数は2である。よって入力波形に対する適当な情報を使用することによりベキ多項式入力に対する可観測性が成立する。

(4-5)式の系につきの4通りの入力印加された場合を考えてみる。

$$\textcircled{1} \begin{cases} x_1(t) = t \\ x_2(t) = 0 \end{cases}$$

②	$\begin{cases} x_1(t) = 0 \\ x_2(t) = t \end{cases}$	①	$\begin{aligned} &491639121517 \\ &483531833140 \\ &487117735156 \\ &481195967340 \end{aligned}$	②	$\begin{aligned} &496933569946 \\ &491452744053 \\ &492871084200 \\ &484727800476 \end{aligned}$
③	$\begin{cases} x_1(t) = t \\ x_2(t) = -t \end{cases}$	③	$\begin{aligned} &-495294448436 \\ &-491099560738 \\ &-492159110681 \\ &-483531833140 \end{aligned}$	④	$\begin{aligned} &501512917757 \\ &493218660629 \\ &496430951770 \\ &491070763718 \end{aligned}$
④	$\begin{cases} x_1(t) = 5t \\ x_2(t) = t \end{cases}$	第4-2表 2次系の応答に対する係数との内積 ($\gamma_{j\ell}$, w)			

ただし (4-5) 式の系の初期値はすべて零とする。

この4通りの入力を 4.1.1 < B > にしたがって求めてみる。

まず、

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$$

の固有値を求めると、

$$\lambda_1 = -1, \quad \lambda_2 = -2$$

よつてスカラー量 $\alpha_0(t)$, $\alpha_1(t)$ は次式で与えられる¹⁾。

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \alpha_0(t) \\ \alpha_1(t) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} e^{-t} \\ e^{-2t} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{-t} \\ e^{-2t} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

上式より $\gamma_{i\ell}(t)$ を求めると、

$$\begin{bmatrix} \gamma_{i0}(t) \\ \gamma_{i1}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Lambda_{i0}(t) \\ \Lambda_{i1}(t) \end{bmatrix} \tag{4-6}$$

$$\begin{cases} \Lambda_{i0}(t) = t^i - i \Lambda_{i-10}(t) \\ \Lambda_{i1}(t) = \frac{1}{2} t^i - \frac{1}{2} i \Lambda_{i-11}(t) \\ \Lambda_{00}(t) = 1 - e^{-t} \\ \Lambda_{01}(t) = \frac{1}{2} (1 - e^{-2t}) \end{cases}$$

観測区間を 0 秒 ~ 1 秒として、シンプソンの積分公式 (キザミは 0.1 ms) を適用して ($\gamma_{j\ell}$, $\gamma_{i\ell}$) を求めたのが第 4-1 表である。なおこゝでは $N = 1$ としてある。また以下の計算でもすべて $N = 1$ としたが、これは計算の簡便化

とデジタル計算機での演算誤差をなるべく小さくするよう考慮したためであり、 N をもっと大きくしても本質的には何らかわらない。

GRAM(I, J)

0.2629846029426523E+00 0.5294448482707035E-01 0.1021181306211292E+00 0.1639121526468628E-01
 0.5294448482707035E-01 0.1099560743605776E-01 0.2159110688918044E-01 0.3531833151040894E-02
 0.1021181306211292E+00 0.2159110688918044E-01 0.4295031233912289E-01 0.7119735149980822E-02
 0.1639121526468628E-01 0.3531833151040894E-02 0.7119735149980822E-02 0.1195967332979977E-02

第4-1表 2次系のグラム行列 (δ_{jl}, δ_{ik})

実験	β_{00}	β_{01}	β_{10}	β_{11}
①	0.00000	0.00000	0.00000	1.00000
②	0.00000	0.00001	1.00000	-2.00000
③	0.00000	0.00000	-0.99994	2.99967
④	0.00000	-0.05399	1.05399	2.83802

第4-3表 掃き出し法による連立方程式の解

実験	x_{10}	x_{20}	x_{11}	x_{21}
①	0.00000	0.00000	1.00000	0.00000
②	0.00000	0.00000	0.00000	1.00000
③	0.00000	0.00000	0.99978	-0.99994
④	-0.05399	0.00000	4.94600	1.10539

第4-4表 ベキ多項式入力に係数

第4-2表は (δ_{jl}, w) の値を示したものである。こゝでは積分計算のキザミを 10 m s としてシンプソンの積分公式を適用した。なお第4-2表中の数字は最初の2桁が指数を示し、

$$50 + \alpha = 10^\alpha$$

を意味し、つぎの10桁が小数点以下の数を示す。たとえば、

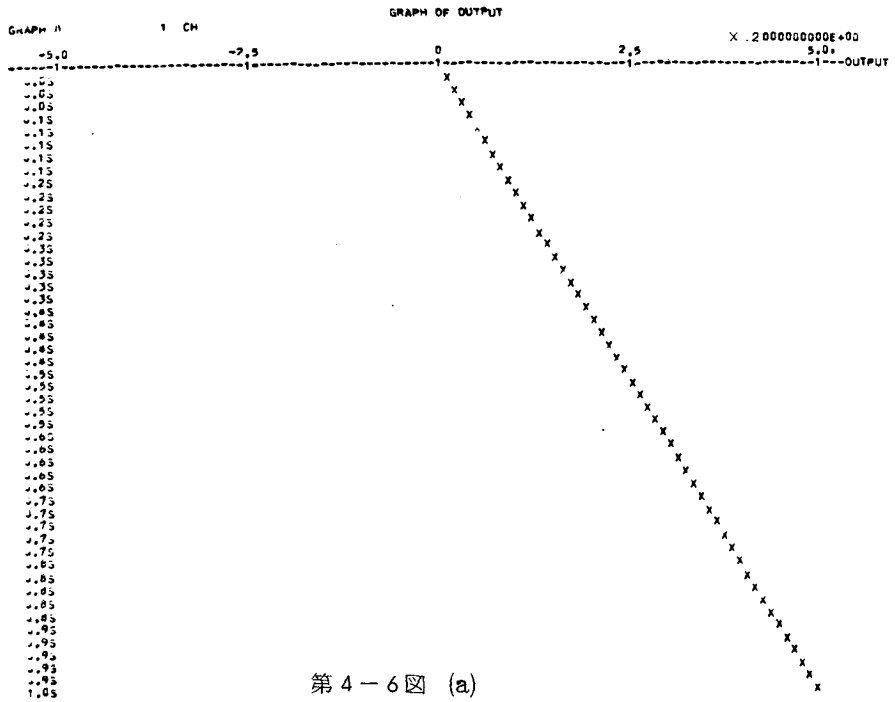
$$491639121517 = 0.1639121517 \times 10^{-1}$$

となる。

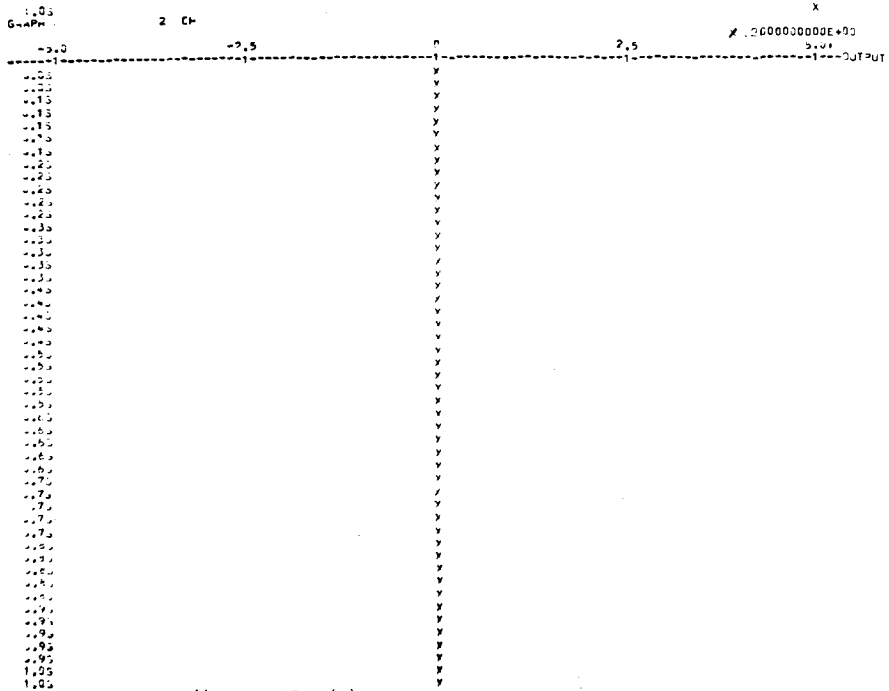
第4-1表に示す数値を係数とし、第4-2表に示す数値を応答(右辺)とする連立方程式を解くと第4-3表に示す結果が得られる。なおこゝでは解は掃き出し法によった。

(3-26)式より、

$$\begin{cases} \beta_{00} = CBx_0 \\ \beta_{01} = CABx_0 \end{cases} \quad \begin{cases} \beta_{10} = CBx_1 \\ \beta_{11} = CABx_1 \end{cases}$$

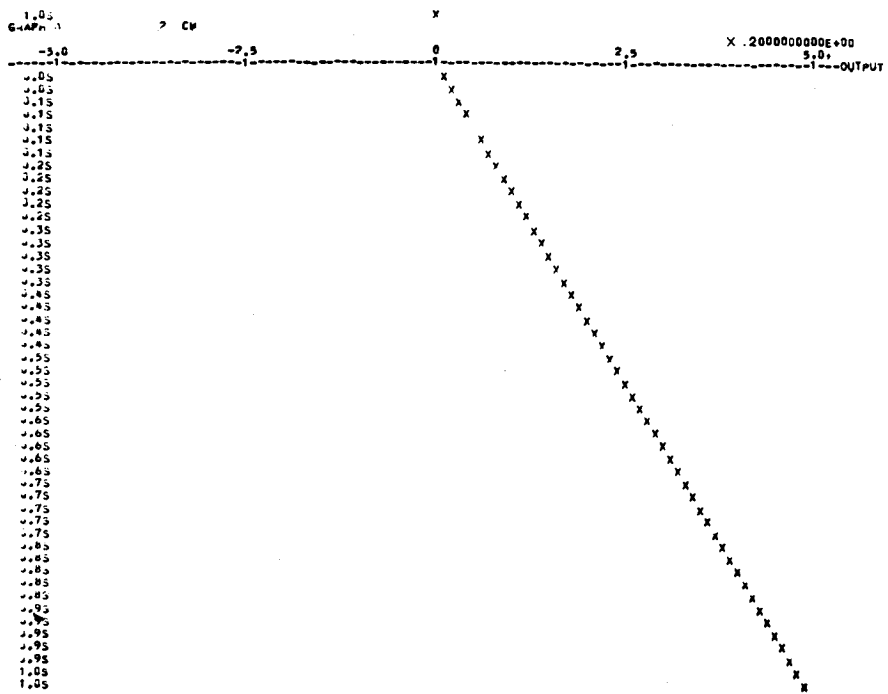
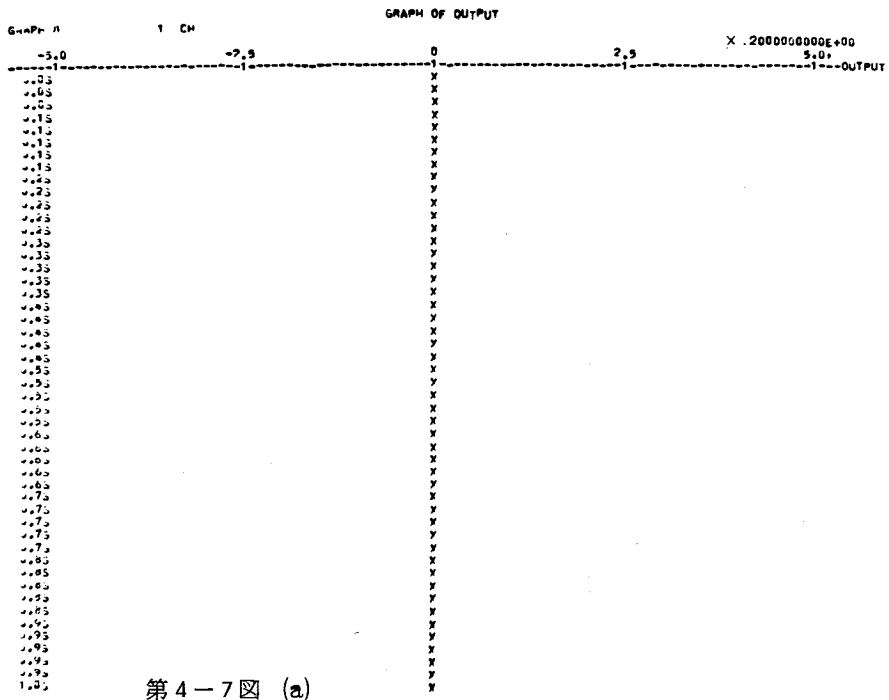


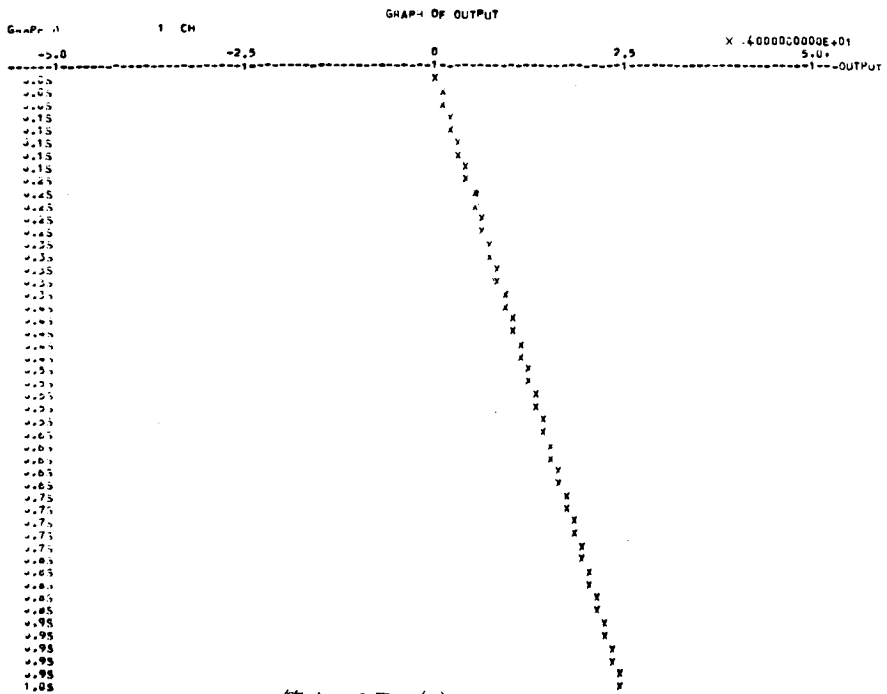
第 4 - 6 図 (a)



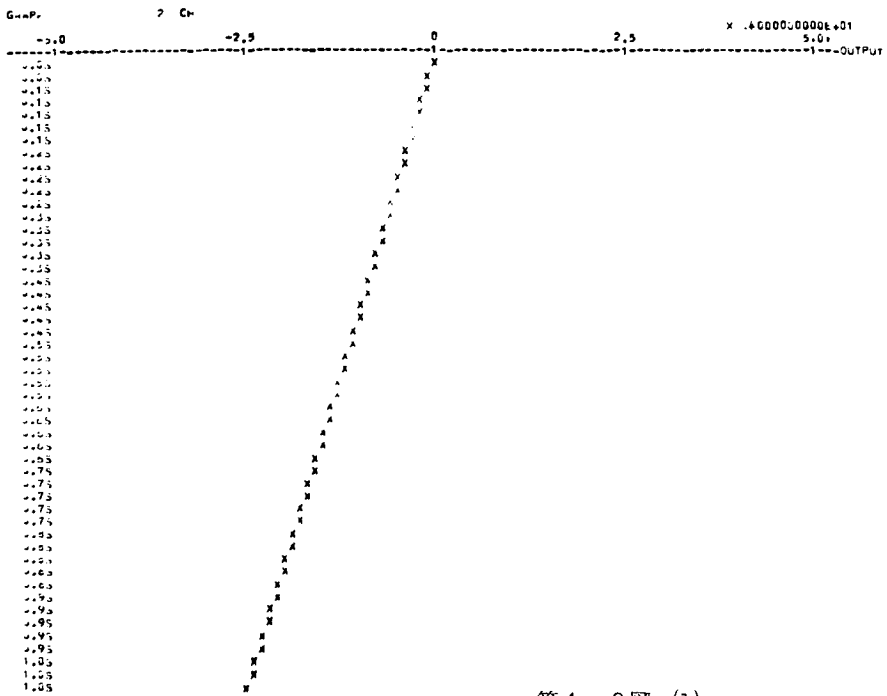
第 4 - 6 図 (b)

第 4 - 6 図 ①の再現波形



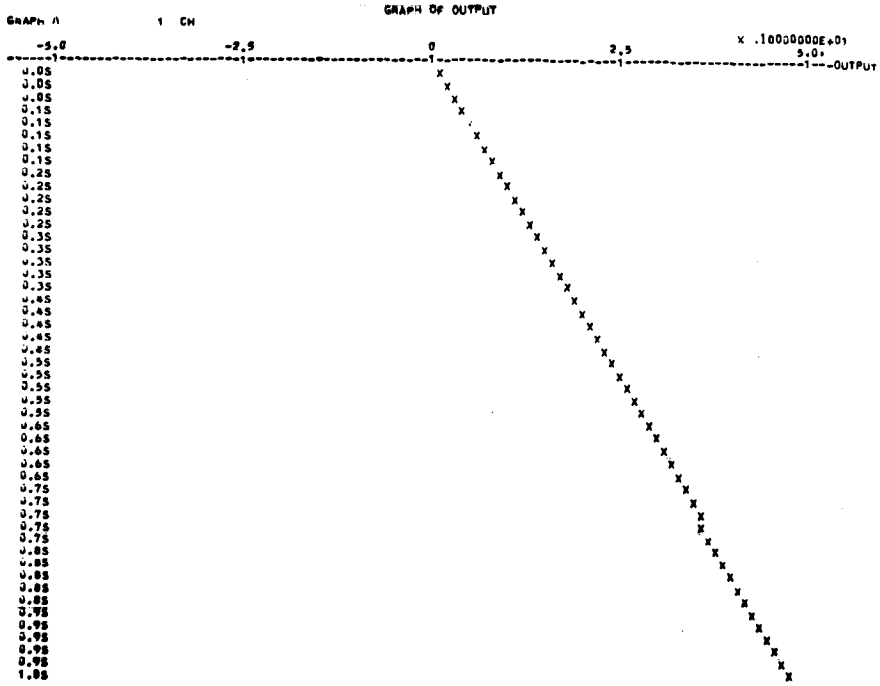


第4-8図 (a)

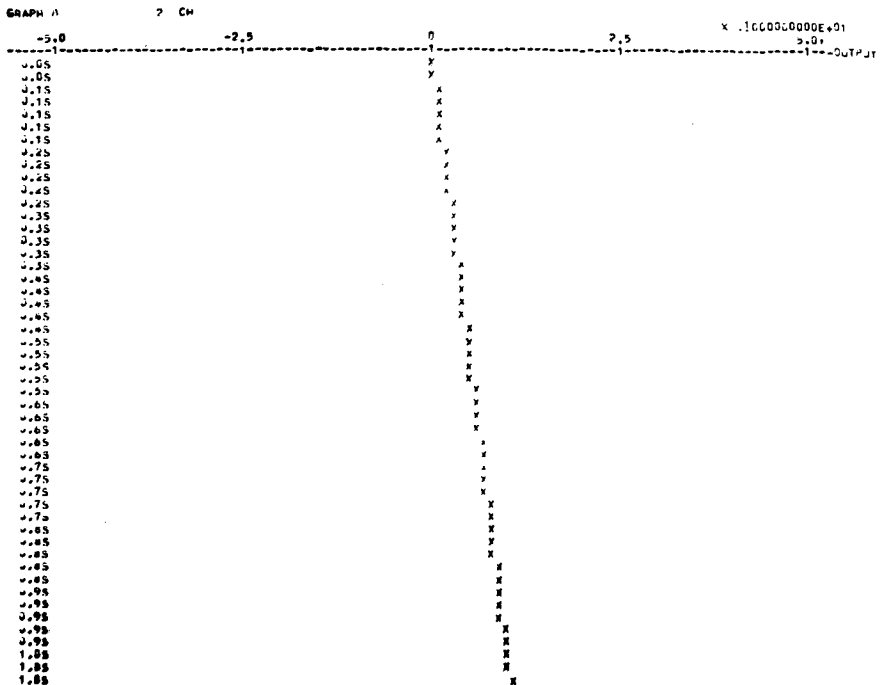


第4-8図 (b)

第4-8図 ③の再現波形



第 4 - 9 图 (a)



第 4 - 9 图 ④の再現波形 (b)

$$x_0 = \begin{bmatrix} x_{10} \\ x_{20} \end{bmatrix}$$

$$x_1 = \begin{bmatrix} x_{11} \\ x_{21} \end{bmatrix}$$

であるから，

$$x_0 = \begin{bmatrix} CB \\ CAB \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \beta_{00} \\ \beta_{01} \end{bmatrix}$$

$$x_1 = \begin{bmatrix} CB \\ CAB \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \beta_{10} \\ \beta_{11} \end{bmatrix}$$

こゝで，

$$\begin{bmatrix} CB \\ CAB \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (4-7)$$

第4-3表に与えられている結果に上式(4-7)を作用してベキ多項式入力
の各係数を得る。それを第4-4表に示す。

第4-4表によれば，入力に関する情報を $x_{10} = 0$ としてパラメータに対す
る補正を行うと実験④は，

$$x_{10} = 0.000000, \quad x_{20} = 0.000000, \quad x_{11} = 4.999999, \quad x_{21} = 1.05140$$

となり，数値計算上若干の演算誤差が入りこんだことがわかるが，ほゞ完全な形
で各入力端子の波形が再現されたことがわかる。第4-6図から第4-9図は計
算機のグラフ上に結果を示したものである。

4・3 誘導電動機系のパラメータの決定

動トルク測定系の概略を第4-10図に示す。構成機器の仕様を下記する。

誘導電動機：東芝製，0.2 Kw，4極，E Class Ins.，連続，200/220 V
50/60 Hz，1.5/1.2 A，1410/1700R. P. M.

トルク計：①新興通信工業製，TM/0.5 A，0.5Kg-m

②東洋測器製，QM-0.5 A，0.5Kg-m

負荷：①渦流制動式電気動力計，植松電機製，アルミ板製，0.25 Kw

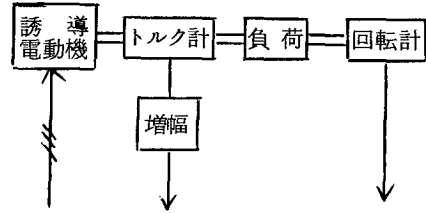
② 慣性負荷

回 転 計：① SANYO 11TG, DC6.2V/1000R. P. M.

② 山 洋 GTF, DC7V/1000R. P. M.

増 幅 器：三栄測定製, 6L2-P

演算増幅器 BB 3058/01



第4-10図 動トルク測定系の構成

4.3.1 動トルクおよび速度測定系のパラメータの決定

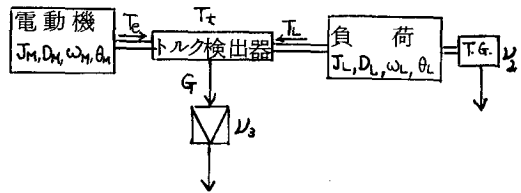
第4-11図に動トルクおよび速度測定系のパラメータと変数を示す。それぞれのパラメータと変数は下記する。

- | | |
|-----------------------------|------------------------------|
| T_e : 電動機の電氣的出力トルク | [N · m] |
| T_t : 軸伝達トルク | [N · m] |
| T_L : 負荷トルク | [N · m] |
| θ_M : 電動機軸の回転角度 | [radian] |
| θ_L : 負荷軸の回転角度 | [radian] |
| ω_M : 電動機軸の回転角速度 | [radian/sec] |
| ω_L : 負荷軸の回転角速度 | [radian/sec] |
| D_M : 電動機軸の減衰定数 | [N · m · sec/rad] |
| D_L : 負荷軸の減衰定数 | [N · m · sec/rad] |
| J_M : 電動機の慣性モーメント | [Kg · m ² /rad] |
| J_L : 負荷の慣性モーメント | [Kg · m ² /rad] |
| G : トルク計の伝達係数 | [N · m/rad] |
| μ_2 : 回転計の電圧一速度係数 | [V/rad/sec] |
| μ_3 : トルク検出部の電圧一軸ねじれ角係数 | [V/rad] |

第4-11図に示す系を解析するに

あたって、つぎの仮定をおく。

- (1) 電動機の軸受けから入るノイズは他と比較して小さいのでこれを無視する。
- (2) 負荷, トルク計の軸受けから入るノイズは負荷トルク T_L に含めて考える。
- (3) 電動機の出出力トルク T_e の大きさは軸伝達トルク T_t の大きさに等しい。
- (4) トルク計の入出力ではトルクの大きさは不変とする。すなわち, トルクは軸上を T_t の大きさで伝達されて, トルク伝達に伴うトルクの減少はないものとする。パワーの流れは $(\omega_M - \omega_L) T_t$ となる。



第4-11図 動トルクおよび速度測定系

以上の仮定のもとに第4-11図の系の運動方程式を求めると、

$$\begin{cases} T_e - T_t = J_M \dot{\omega}_M + D_M \omega_M \\ T_t = G(\theta_M - \theta_L) \\ T_t - T_L = J_L \dot{\omega}_L + D_L \omega_L \end{cases} \quad (4-8)$$

となる。いま、

$$z_1 = \omega_M$$

$$z_2 = \omega_L$$

$$z_3 = \theta_M - \theta_L$$

$$x_1 = T_e$$

$$x_2 = T_L$$

$$a_{11} = -D_M / J_M$$

$$a_{13} = -G / J_M$$

$$a_{22} = -D_L / J_L$$

$$a_{23} = G / J_L$$

$$b_{11} = 1 / J_M$$

$$b_{22} = -1 / J_L$$

とおくと、(4-8)式はつぎの状態方程式に変換される。

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_{11} & 0 \\ 0 & b_{22} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \quad (4-9)$$

回転計の出力電圧を y_2 [V]、トルク計の出力電圧を y_3 [V] とすると出力(観測)方程式はつぎのようになる。

$$\begin{bmatrix} y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \nu_2 & 0 \\ 0 & 0 & \nu_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{bmatrix} \quad (4-10)$$

以下に(4-9)、(4-10)式のパラメータ決定のための各定数測定法について述べる。

<A> 慣性負荷の慣性モーメント

慣性モーメントを測定する方法に

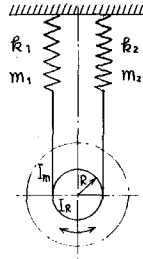
は

- (1) 2本(あるいは3本)釣りによる方法
- (2) 物理振子法
- (3) 別の重りをつける方法

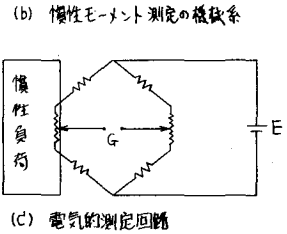
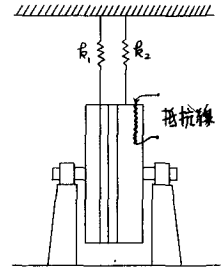
(4) トルクメータを用いる方法

(5) バネ2本を用いる方法⁵⁾

がある。(1)は被測定体が軽量且簡単に取り扱える場合に適している。(2)は適当な物理振子をつくることに、(3)は $\sin\theta \approx \theta$ なる回転角度の範囲内でしか測定できないことにそれぞれ問題点がある。(4)は被測定体に適当な回転力を与えなければならぬ。(5)は電動機回転子のように回転軸にとりつけられた回転体の慣性モーメントの測定に適する。こゝでは(5)の方法による測定について述べる。



- J_m : 回転体の慣性モーメント [kg·m²]
- J_R : 円筒の慣性モーメント [kg·m²]
- J : $J_m + J_R + (m_1 + m_2)R^2$ [kg·m²]
- R : 円筒半径 [m]
- m_1 : ヒモ質量 [kg]
- m_2 : ヒモ質量 [kg]
- m : $m_1 + m_2$; 糸の質量 [kg]
- g : 重力加速度 [m/s²]
- θ : 回転角 [rad]
- D_f : 粘り摩擦係数 [N·m/(rad/sec)]
- F : 粘性摩擦トルク [N·m]
- δ : 対数減衰率 $\delta = 5\omega_d T$
- $\omega_d = \sqrt{gR^2/I}$
- $\zeta = D_f/2\omega_0$
- $G = F/I$
- $\alpha = 1/\{(2\pi)^2 + \delta^2\}$
- T : 振動周期 [Sec]



(a) 測定系

(b) 慣性モーメント測定機構系

(c) 電気的測定回路

第4-12図(a)~(c)は測定系を示す。被測定物にヒモを巻付け、その両端を巻バネを介して壁に取付ける。このような系では数回転におよぶ振動も可能である。回転体に取り付けたポテンシオメータで回転角を検出して記録計で第4-13図のように自由振動の波形を描かせる。

第4-12図 慣性モーメント測定法

このときの運動方程式は、

$$\ddot{\theta} + 2\zeta\omega_0\dot{\theta} + \omega_0^2\theta = 0$$

$$\theta(0) = a_0$$

$$\dot{\theta}(0) = 0$$

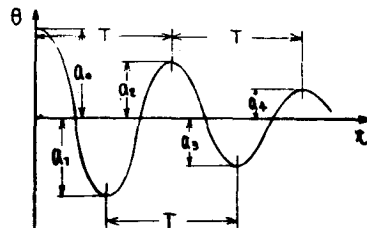
となる。第4-13図の波形の周期 T [秒] と対数減衰率 δ を測定することにより、

$$J = \alpha R^2 T^2 \quad [kg \cdot m^2] \quad (4-11)$$

$$\alpha = 1 / \{ (2\pi)^2 + \delta^2 \}$$

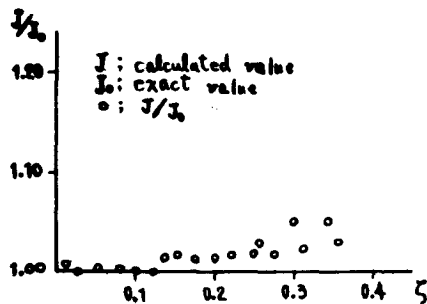
$$\zeta = \sqrt{\alpha} \cdot \delta \quad (4-12)$$

から、慣性モーメント J および ζ が求められる。



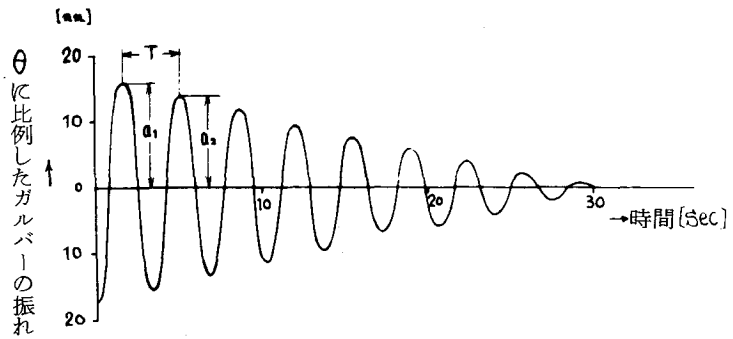
$$J = \frac{gR^2T^2}{(2\pi)^2 + \delta^2} = \alpha R^2 T^2 \quad \zeta = \frac{\delta}{\sqrt{(2\pi)^2 + \delta^2}} = \sqrt{\alpha} \cdot \delta$$

第4-13図 慣性モーメント測定の自由振動波形



第4-14図 測定誤差

周期 T および対数減衰率 δ が測定しやすいように測定系を工夫することにより測定誤差をかなり小さくおさえることができる。第4-14図は1例としてアナログシミュレーションによって求めた誤差を示す。同図によ



第4-15図 慣性モーメント実測波形

ると δ が増大すると測定誤差は増大する傾向にあるが、なお数%以下におさえられることがわかる。

実験に使用した慣性負荷に対する実測波形を第4-15図に示す。この測定波形より求めた慣性モーメントの値は

$$J_L = 0.090 \text{ [Kg } \cdot \text{ m}^2 \text{]}$$

となる。なお慣性負荷を第4-16図および第4-5表にしたがって計算すると、

$$J_L = 0.091 \text{ [Kg } \cdot \text{ m}^2 \text{]}$$

が得られる。慣性負荷の形状が簡単なので、われわれは計算値 $J_L = 0.091 \text{ Kg} \cdot \text{ m}^2$ を以後採用する。

< B > 電気動力計負荷の慣性モーメント

負荷回転体は手頃なアルミニュームの円板なのでメーカー製作時に3本つりの方法で実測した。第4-17図は測定方法とそのときの定数を示す。

実測より得られた測定値は、

$$J_L = 6.7 \times 10^{-4} \text{ [Kg } \cdot \text{ m}^2 \text{]}$$

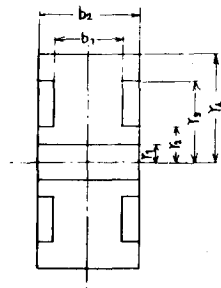
である。

また、慣性体をアルミニュームの一様材質の円板として、慣性モーメントの計算値を求めると、

$$J_L = 6.6 \times 10^{-4} \text{ [Kg } \cdot \text{ m}^2 \text{]}$$

となる。

計算上の仮定を考慮すると、



第4-16図 慣性負荷の寸法

慣性負荷	
ρ	$7.757 \times 10^3 \text{ Kg/m}^3$
b_1	0.026 m
b_2	0.050 m
r_1	0.020 m
r_2	0.045 m
r_3	0.130 m
r_4	0.200 m
慣性モーメント J	0.091 $\text{Kg} \cdot \text{m}^2$

第4-5表 慣性モーメント計算値

$$J_L = 6.7 \times 10^{-4} \text{ [Kg} \cdot \text{m}^2 \text{]}$$

が以後の解析に採用できる値である。

<C> 誘導電動機回転子の慣性モーメント

<A>と同一の方法による。

ただし、この場合は第4-18図に示すように慣性モーメント既知のカップリングでポテンショメータに接続した。

第4-19図は実測波形を示す。これより得られた測定値は、

$$J_M = 6.6 \times 10^{-5} \text{ [Kg} \cdot \text{m}^2 \text{]}$$

である。

また第4-20図の寸法として回転子の慣性モーメントを、

- (1) ファンの慣性モーメントを除外する。
- (2) 第4-20図中Aの部分は均一の材質の鉄 Fe よりできている。
- (3) 第4-20図中Bの部分は均一の材質のアルミニウム Al よりできていて回転半径を 26 mm とする。

の仮定のもとに計算すると、

$$J_M = 6.3 \times 10^{-5} \text{ [Kg} \cdot \text{m}^2 \text{]}$$

が得られる。

計算値には多くの仮定が入っているので、実測値

$$J_M = 6.6 \times 10^{-5} \text{ [Kg} \cdot \text{m}^2 \text{]}$$

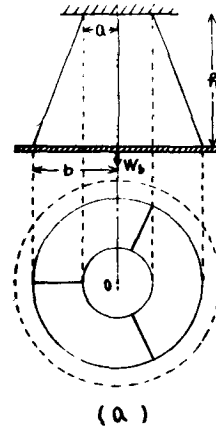
が誘導電動機回転子の慣性モーメントの値として採用できる。

<D> トルク検出器のトルク伝達係数 G 2つの検出器

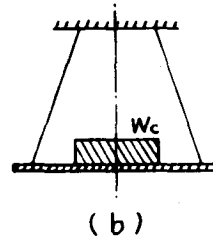
に対して別々の方法で G を求めた。すなわち、 $T_M / 0.5 \text{ A}$ (新興通信工業製) に対しては設計値より計算によって、また $Q_M - 0.5 \text{ A}$ (東洋測器製) に対しては実測値より求めた。以後の実験には前者のトルク検出器しか使用しなかったが、こゝでは両者の G の決定について述べる。

第4-21図は実測の方法を示したものである。同図の実験方法により、

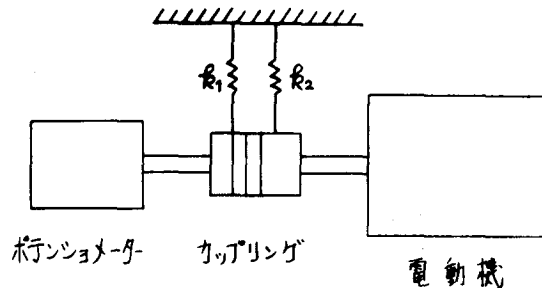
$$G = \frac{RW}{2 \left\{ \frac{\Delta l_2}{L_2} - \frac{\Delta l_1}{L_1} \right\}} \text{ [Kg} \cdot \text{m/rad]}$$



$a = 0.07 \text{ m}$
 $b = 0.14 \text{ m}$
 $r = 0.46 \text{ m}$
 $W_b = 0.248 \text{ kg}$



第4-17図
3本つりによるJの測定



第4-18図 電動機慣性モーメント測定系

R: 軸心から重りまでの長さ
[m]

W: 重りの重量 [Kg w]

L₁: 望遠鏡と固定測ミラーとの距離 [m]

L₂: 望遠鏡と加重側ミラーとの距離 [m]

Δl₁: 固定側ミラーに対する目盛板上の変位 [m]

Δl₂: 加重側ミラーに対する目盛板上の変位 [m]

から求められる。第4-22図は検出器 Q M - 0.5 A に対するトルク - ねじ角の実測結果であり、これより最小2乗法により、

$$G = 819 [N \cdot m / rad]$$

と得られる。

トルク検出器 T M / 0.5 A の受歪部を第4-23図に示す。また歪率は第4-24図に示される。これらの値をメーカーにより得て、

$$G = \frac{0.5 \times (12.95 \div 2)}{28 \times 10^{-3}} = 1.14 \times 10^3 [N \cdot m / rad]$$

が得られる。

< E > 減衰定数 D_M、D_L

電動機系を定格回転数で運転している時、電源を急に開放した場合の回転数減衰曲線から求めた。電動機系の運動方程式を、

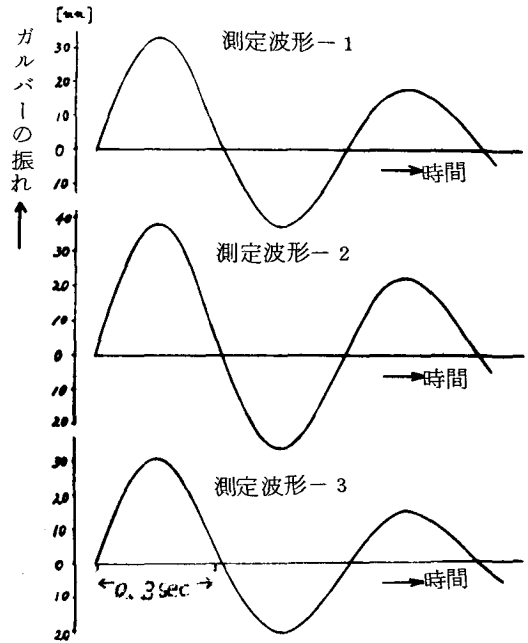
$$J \dot{\omega} + D \omega = 0, \quad \omega(0) = \omega_0$$

とすると、

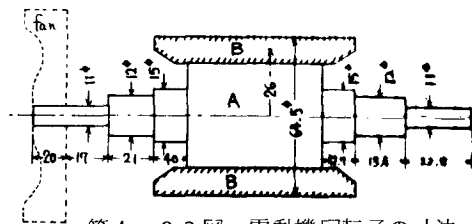
$$D = \frac{J}{\tau} \log_e \frac{\omega_0}{\omega} [N \cdot m \cdot sec / rad]$$

より減衰定数が求められる。

第4-25図は慣性負荷を結合している場合の系全体の回転数減衰特性を示している。また第4-26図は同様の電動機のみの場合である。さらに第4-27図は電気動力系負荷を結合した場合である。これらより第4-6表の結果が得ら

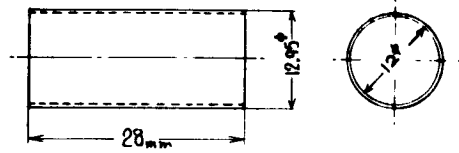
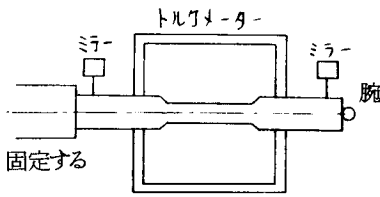


第4-19図 電動機回転子慣性モーメント実測波形

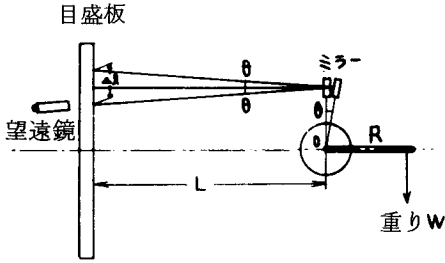


第4-20図 電動機回転子の寸法

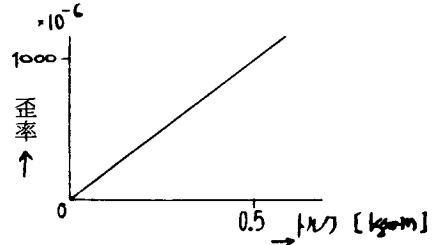
れる。



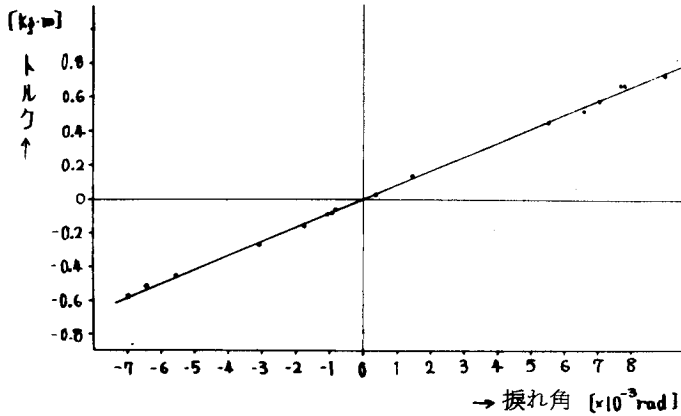
第4-23図 トルク検出器の受歪部



第4-21図 Gの測定法



第4-24図 トルク検出器の歪率



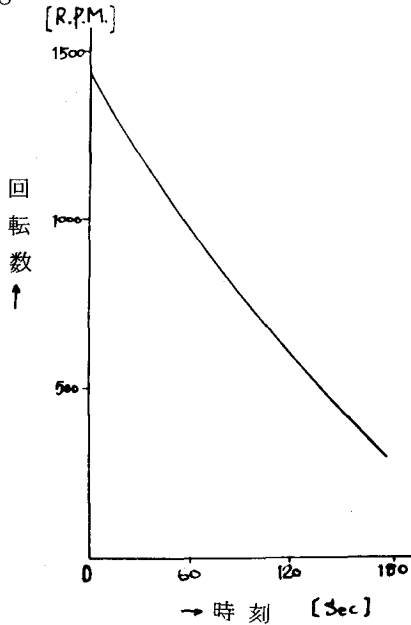
第4-22図 トルク-捩れ角の実測値

< F > 回転計発電機の定数 横河製整流器型回転計を較正用計器として使用して回転速度-電圧特性を示したのが第4-28図および第4-29図である。これらより回転計発電機の定数は、

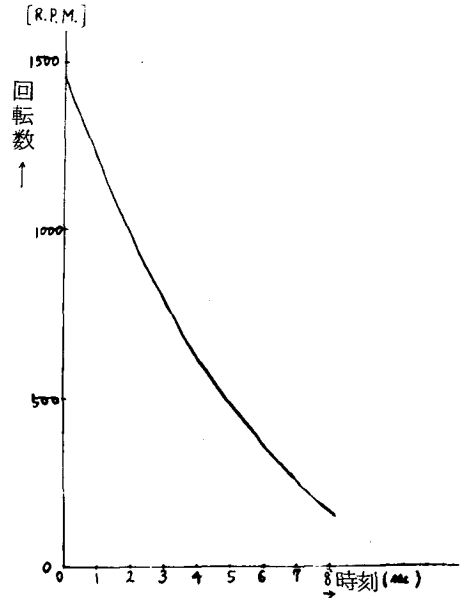
$$\begin{aligned} \text{慣性負荷のとき} \quad \omega_2 &= 84 \times 10^{-3} \text{ V/R. P. M.} \\ &= 8.02 \times 10^{-2} \text{ V/rad/sec} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{電気動力計負荷のとき,} \quad \omega_2 &= 6.1 \times 10^{-3} \text{ V/R. P. M.} \\ &= 5.82 \times 10^{-2} \text{ V/rad/sec} \end{aligned}$$

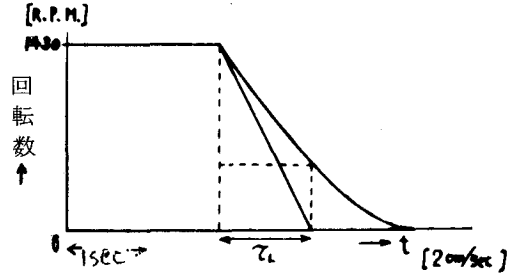
となる。



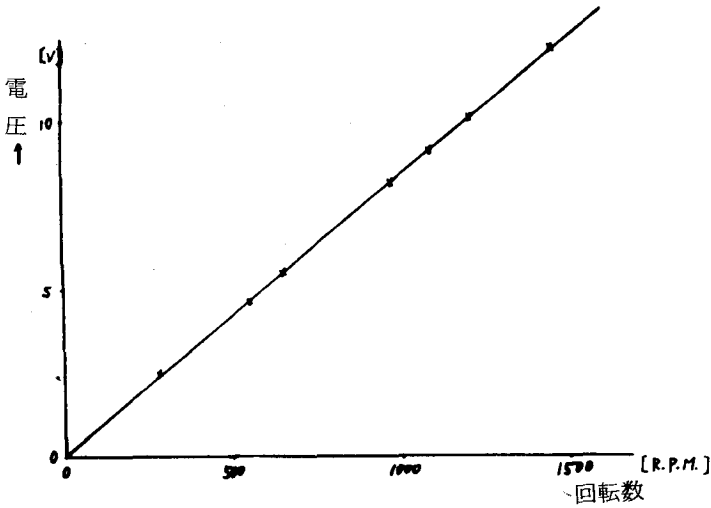
第4-25図 系全体の回転数の減衰
(電動機, トルク計, 慣性負荷を接続)



第4-26図 電動機だけの
回転数減衰曲線



第4-27図 電気動力計負荷結合時の
回転数減衰曲線



第4-28図 回転計発電機の電圧—速度特性 (慣性負荷用)

< G > トルク検出部の電圧一振り角
係数

トルク計のチェックボックスを使用して μ_3 を決定することができる。実際の実験ではこの方法によって μ_3 を決定したが、ここでは各要素の定数から μ_3 を決定する方法について述べる。

トルク計 T M / 0.5 A のトルク検出部は、

$0.5 \text{mv/V} \cdot 0.5 \text{kgw} \cdot \text{m} = 0.102 \text{mv/N} \cdot \text{m} \cdot \text{V}$
である。電源を $E_T [\text{V}]$ の電池、増幅率 A_T 倍の増幅器を使用すると、

$$\begin{aligned} & 0.102 \times 10^{-3} \cdot E_T \cdot A_T \text{ [V/N} \cdot \text{M]} \\ &= 0.102 \times 10^{-3} \cdot E_T \cdot A_T \cdot G \\ &= 0.116 \cdot E_T \cdot A_T \text{ [V/rad]} \end{aligned}$$

が得られる。すなわち、

$$\mu_3 = 0.116 E_T \cdot A_T \text{ [V/rad]}$$

となる。いま $E_T = 6$ [V]、 $A_T = 2500$ とすると、

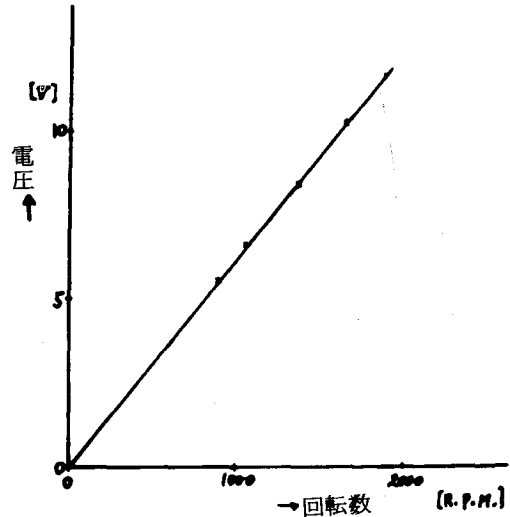
$$\mu_3 = 1.7 \times 10^3 \text{ [V/rad]}$$

が得られる。増幅器出力を A-D 変換器に接続する方法は 2 通り考えられる。

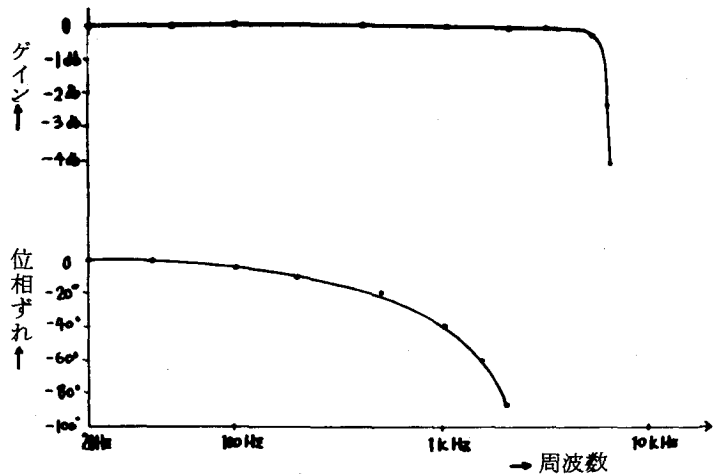
第 1 の方法はデータレコーダによって実験デ

ータを磁気テープに記録させ、データレコーダの再生信号を A-D 変換器入力とする方法である。しかし、この方法は第 4-30 図に示すようにデータレコーダの周波数特性が位相に関してあまりよくないので、本論文が取り扱うような波形の再現を問題とするときに使用するのには好ましくない。第 4-31 図はデータレコーダによる矩形波の再現性を示しているが、これを見てもわかるように 1 KHz の矩形波の再現性は非常に悪い。

第 2 の方法は同軸ケーブルによって増幅器出力を A-D 変換器入力に直結する方法である。同軸ケーブル (約 30 m) の周波数特性、とくに位相に関する特性



第 4-29 図 回転計発電機の電圧
—速度特性 (電気動力計負荷用)



第 4-30 図 データレコーダの振幅および
位相特性 (TEAC 製 R-351F)

は第4-32図に示すように非常に良好であるので、使用上ほとんど問題はない。なお増幅器の周波数特性を第4-33図に示すが、これも使用上問題がないとみなせる。

A-D変換器（NEC-TEAC製、30チャンネル、 $100\mu\text{s}$ 、 10V 、 0.1% ）の直線性を示しているのが、第4-34図である。公称誤差 0.1% より若干劣るが実用上問題はない。またサンプル間隔は 50Hz の交流電源にてチェックして $107\mu\text{s}$ が確かめられた。

<H> パラメータの値 以上の結果より(4-9)式および(4-10)式のパラメータの値を決定したものを第4-7表に示す。

4.3.2 電動機回路定数の測定

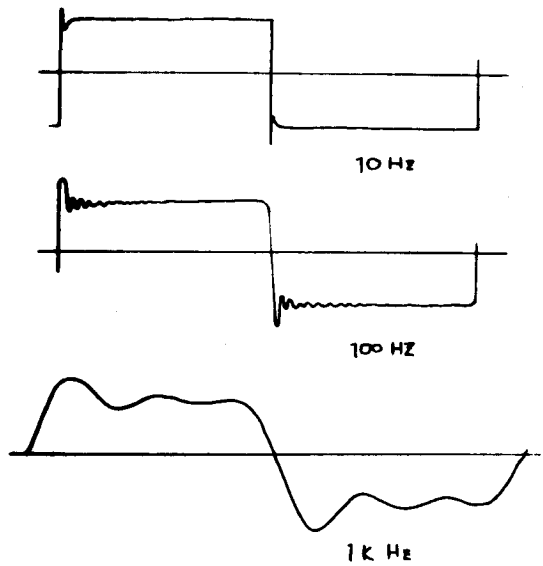
被測定電動機の固定子は24スロットである。この電動機固定子コイルの巻線法を第4-35図に、また結線法を第4-36図(a)、(b)に示す。第4-35図、第4-36図に示すよう

に各相の巻線は直列であるので、外部端子および中性点より測定して得られた各相の回路定数を $1/2$ 倍したものが毎極毎相の回路定数となる。以下各相の回路定数の測定とその結果について述べる。

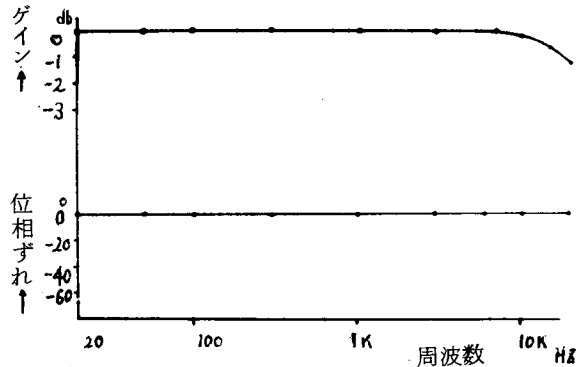
<A> 固定子抵抗 直流電位降下法によった。結果を第4-37図に示す。各相ともほぼ同一値

$$2R_s = 9.8 [\Omega]$$

である。電流増加に伴ない発熱のため若干抵抗値は増加する傾向にある。しかし、本論文では始動時および無負荷から重負荷が急激に印加されたときの過渡特性の解析に回路定数を使用するのであるから、温度補償をしないこの測定値を採用する。



第4-31図 データレコーダによる矩形波再生波形



第4-32図 同軸ケーブルの振幅および位相特性

< B > 漏洩インダクタンス l^s
 および損失抵抗 R_I^s 第 4 -
 38 図の測定回路を考える。固定
 子各相に零相電圧（正弦波）を印
 加したことになるから、

$$\begin{cases} v_\alpha^s = v_\beta^s = v_\gamma^s = V_0 \cos \omega t \\ v_\alpha^r = v_\beta^r = v_\gamma^r = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} i_\alpha^s = i_\beta^s = i_\gamma^s \\ = I_0 \cos(\omega t - \varphi) \\ i_\alpha^r = i_\beta^r = i_\gamma^r = 0 \end{cases}$$

として、

$$\dot{V}_0 = (R^s + j\omega l^s) \dot{I}_0$$

$$\dot{V}_0 = \frac{V_0}{\sqrt{2}}, \dot{I}_0 = \frac{1}{\sqrt{2}} I_0 e^{-j\varphi}$$

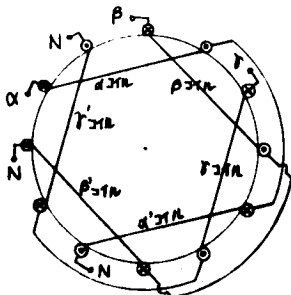
となる。よって損失
 抵抗は、

$$\begin{aligned} 2R_I^s &= R^s - R^c \\ &= \frac{W}{|I_0|^2} - 9.8 \end{aligned}$$

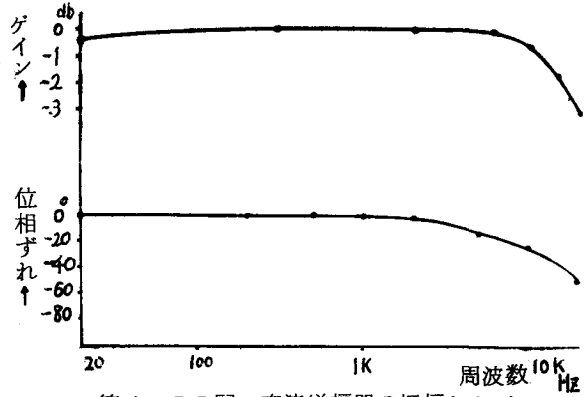
漏洩インダクタンス
 は、

$$2l^s = \frac{\sqrt{\left(\frac{V}{|I_0|}\right)^2 - \left(\frac{W}{|I_0|}\right)^2}}{\omega}$$

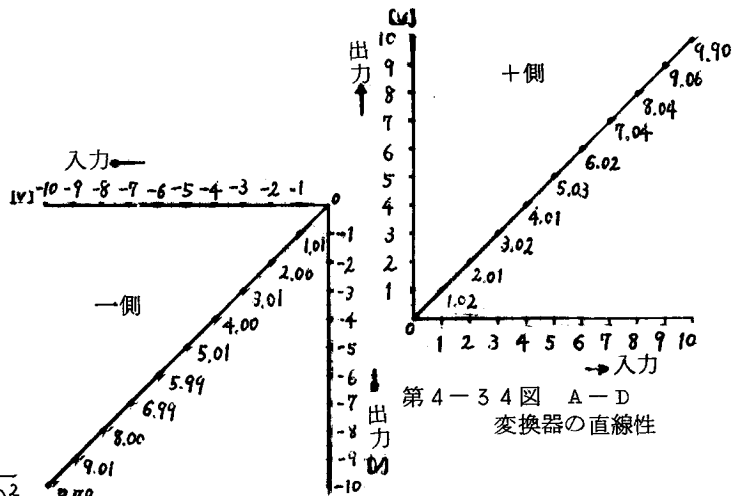
となる。



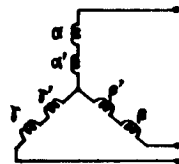
第 4 - 3 5 図 巻線法 (固定子)



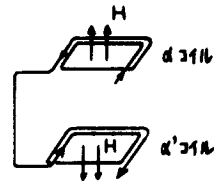
第 4 - 3 3 図 直流増幅器の振幅および
 位相特性



第 4 - 3 4 図 A - D
 変換器の直線性



(a)



(b)

第 4 - 3 6 図 結線法 (固定子)

第4-39図, 第4-40図は測定結果を示す。この測定結果によると漏洩インダクタンスは周波数および電流値に依存しないほぼ一定値

$$2l^s = 40 \text{ [mH]}$$

が得られる。損失抵抗 $2R_I^s$ は周波数に比例して増加する傾向にあり、鉄損分が主となるものと思われる。

<C> 固定子有効インダクタンス

第4-41図の測定回路で無負荷運転する。正相電圧(正弦波)を印加し、無負荷速度を同期速度に等しいと仮定すると、滑り ≈ 0 , $I^r \approx 0$ であるから、

$$V^s = (R^s + j\omega L^s) I_+^s$$

$$|I_+^s| = I^s, \quad L^s = l^s + \frac{3}{2} L^s$$

となる。よって、

$$L^s = \sqrt{|V^s|^2 - (R^s)^2 (I^s)^2}$$

となる。 $2l^s = 40$ [mH] としたときの固定子有効インダクタンス L^s の測定結果を第4-42図に示す。

有効インダクタンスの測定結果は周波数に対してほとんど一定値を示した。電流に対しては磁気飽和の影響のため電流増加に伴ってインダクタンスが減少する傾向をもつ。

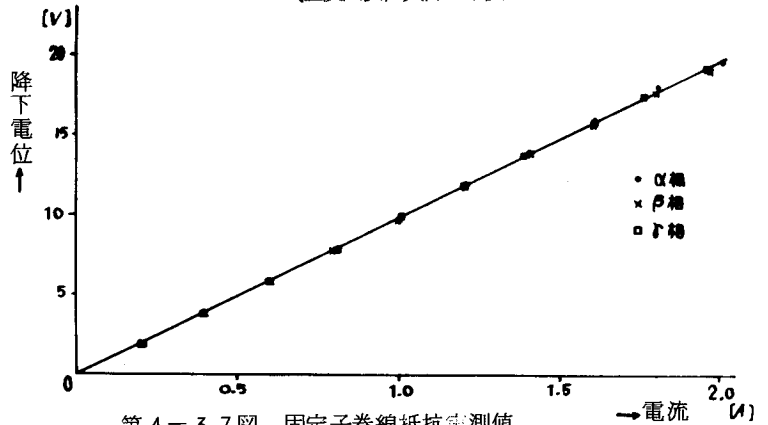
<D> 回転子抵抗 R_2^r の測定 電位降下法による。測定値は相対する短絡環の対称の位置

回転数	高速 1000~1500 RPM	中速 500~1000 RPM	低速 0~500 RPM
電動機 D_M	1.3×10^{-5}	1.5×10^{-5}	2.0×10^{-5}
慣性負荷 D_L	5.5×10^{-4}	8.0×10^{-4}	15×10^{-4}
電気動力計負荷 D_E	4.0×10^{-4}	7.0×10^{-4}	11×10^{-4}

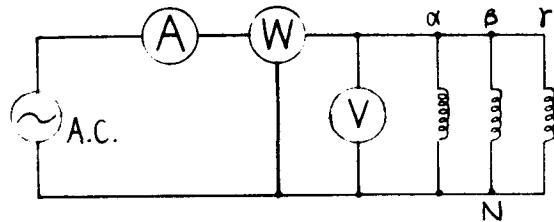
第4-6表 減衰定数 D_M, D_r の値
[N·m·sec/sec]

回転数	高速 1000~1500 RPM	中速 500~1000 RPM	低速 0~500 RPM
a_{11}	-0.2	-0.23	-0.30
a_{12}	-1.9×10^7	-1.9×10^7	-1.9×10^7
a_{21}	-0.006	-0.0088	-0.016
a_{22}	-0.6	-1.04	-1.6
a_{23}	1.25×10^4 1.7×10^6	1.25×10^4 1.7×10^6	1.25×10^4 1.7×10^6
b_{11}	1.5×10^8	1.5×10^8	1.5×10^8
b_{21}	-1.1×10 -1.5×10^3	-1.1×10 -1.5×10^3	-1.1×10 -1.5×10^3
L_1	8.02×10^{-2} 5.82×10^{-2}	8.02×10^{-2} 5.82×10^{-2}	8.02×10^{-2} 5.82×10^{-2}
L_2	1.69×10^3 5.16×10^3	1.69×10^3 5.16×10^3	1.69×10^3 5.16×10^3

第4-7表 動トルクおよび速度測定系のパラメータの値
(上段は慣性負荷, 下段は電気動力計負荷)



第4-37図 固定子巻線抵抗実測値



第4-38図 測定回路(漏洩インダクタンスと損失抵抗)

間の抵抗値を、位置をかえて
 数回測定した平均値として求
 めた。この平均値は 184
 [mΩ] である。

回転子は 30 スロットのか
 ご型であるが、1 スロットに
 2 本の導体が埋め込まれてい
 るとみなし、隣りどうしの導
 体間でループを形成するとす
 れば 30 コイルより成立して
 いると考えることができる。
 極数が 4 であるから 1 極対当
 りには 15 コイル存在する。
 1 コイルが 1 相を形成すると
 みなせるから毎極毎相の抵抗
 値は、

$$184 \times 10^{-3} \times 2 \times 15 \times 4 = 221 [\Omega]$$

3 相に変換後の抵抗値も同上
 であるから、

$$R_c^r = 221 [\Omega]$$

となる。

<E> 回転子有効インダク
 タンス L^r および相互インダ
 クタンス M 第 4-4 1

図の測定回路で回転子を拘束し、かつ軸伝達トルクを測定できるようにしておく。

第 2 章より、

$$\begin{cases} -j\omega M I_+^s = (R^r + j\omega L^r) I_+^r \\ V_s - (R^s + j\omega L^s) I_+^s = j\omega M I_+^r \\ T = -3\pi \frac{R^r}{\omega} |I_+^r|^2 \\ I_+^s = I_+^s \varepsilon^{-j\varphi^s} \end{cases} \quad s: \text{滑り}, M = \frac{3}{2} M, L^r = l^r + \frac{3}{2} L^r$$

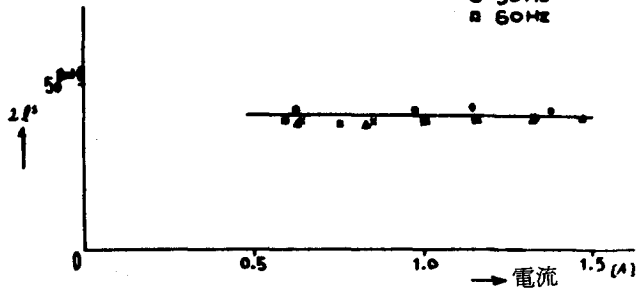
であるから、

$$M^2 = \frac{|V_s - (R^s + j\omega L^s) I_+^s \varepsilon^{-j\varphi^s}|^2}{|T|} \cdot \frac{3\pi R^r}{5\omega^3}$$

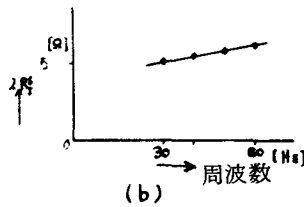
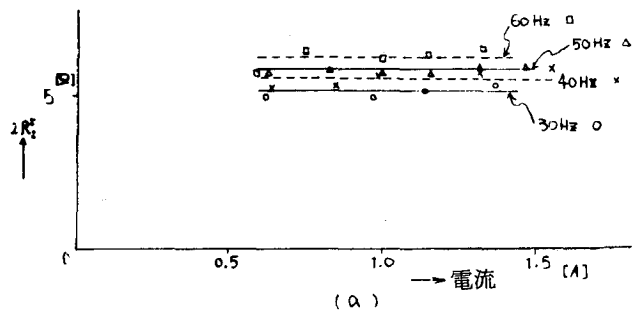
$$(L^r)^2 = \frac{1}{\omega^2 s^2} \left[M^2 \frac{3\pi s \omega R^r |I_+^s|^2}{|T|} - (R^r)^2 \right]$$

$$\varphi^s = \tan^{-1} \frac{\omega (L^s R^r + s R^s L^r)}{R^s R^r - s \omega^2 (L^s L^r - M^2)} - \tan^{-1} \frac{s \omega L^r}{R^r}$$

○ 30 Hz
 × 40 Hz
 △ 50 Hz
 □ 60 Hz



第 4-3 9 図 固定子巻線漏洩インダクタンスの測定値



第 4-4 0 図 固定子巻線損失抵抗の測定値

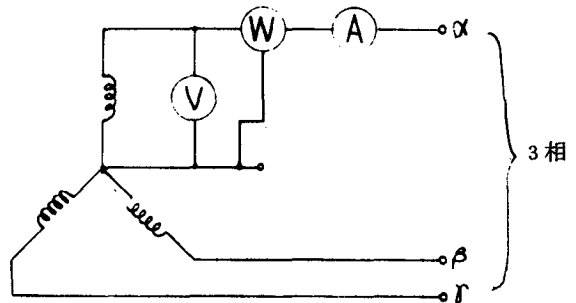
となる。

これらの式を使用して電子計算機に測定結果を入れて求めたのが、第4-43図、第4-44図、第4-45図である。ただし、ここでは $R^r = R_c^r$ とし、回転子部分の損失抵抗を無視した。また M の値は、 $M = 2\mathcal{M}/3$ より求め、 L^r の値は $L^r = M^2/L^s$ より求めた。なお、これらの結果より回転子の漏洩インダクタンスを求めると、

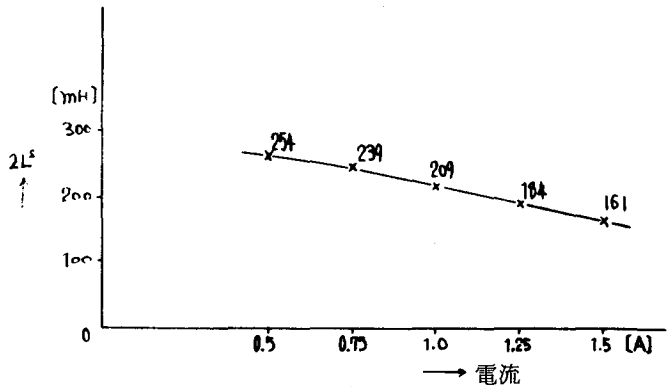
$$l^r \approx 10 \text{ [mH]}$$

である。

L^r および M の値は 50 Hz、60 Hz ではほとんど同一の値を示すが、30 Hz および 40 Hz の測定値は 50 Hz、60 Hz よりやや少ない値をとることがわかる。電流に対する傾向は L^s と同様である。



第4-41図 測定回路
(固定子有効インダクタンス)



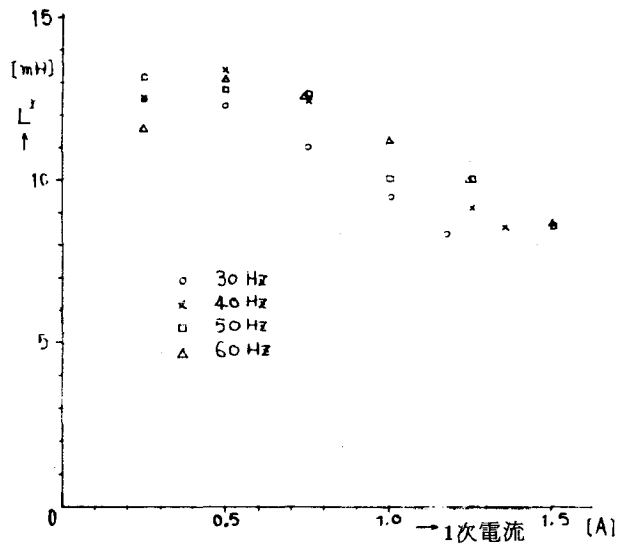
第4-42図 L^s の電流特性

4.4 誘導電動機系動トルクのデジタル測定⁶⁾

4.4.1 動トルク再現の基本式

測定系の基本方程式は(4-9)式および(4-10)式である。この測定系が人力可観測性を成立させているか否かをまず吟味する。

一般波形入力の場合は、第3章系2-2-1を適用するためにつぎの行列を検討する。



第4-43図 2次巻線有効インダクタンスの測定値

$$\begin{bmatrix} CB & 0 & 0 \\ CAB & CB & 0 \\ CA^2B & CAB & CB \\ CA^3B & CA^2B & CAB \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & \mu_2 b_{22} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & \mu_2 b_{22} a_{22} & 0 & \mu_2 b_{22} & 0 & 0 \\ \mu_3 b_{11} & -\mu_3 b_{22} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline \mu_2 b_{11} a_{23} & \mu_2 b_{22} (a_{22}^2 - a_{23}) & 0 & \mu_2 b_{22} a_{22} & 0 & \mu_2 b_{22} \\ \mu_3 b_{11} a_{11} & -\mu_3 b_{22} a_{22} & \mu_3 b_{11} & -\mu_3 b_{22} & 0 & 0 \\ \hline \mu_2 b_{11} (a_{11} + a_{22}) a_{23} & \mu_2 b_{22} (a_{22}^2 - 2a_{22} a_{23}) a_{22} & \mu_2 b_{11} a_{23} & \mu_2 b_{22} (a_{22}^2 - a_{23}) & 0 & \mu_2 b_{22} a_{22} \\ \mu_3 b_{11} (a_{11}^2 + a_{13} - a_{23}) & \mu_3 b_{22} (-a_{22}^2 - a_{13} + a_{23}) & \mu_3 b_{11} a_{11} & -\mu_3 b_{22} a_{22} & \mu_3 b_{11} & -\mu_3 b_{22} \end{bmatrix}$$

上式の各列は1次独立だから入力可観測性が成立する。二つの観測量 y_2 および y_3 を使用するかぎりこれら両式は常に成立する。

ベキ多項式入力の可観測性に対しては、2観測量 y_2 および y_3 を使用するときには常に成立する。1観測量のときは、

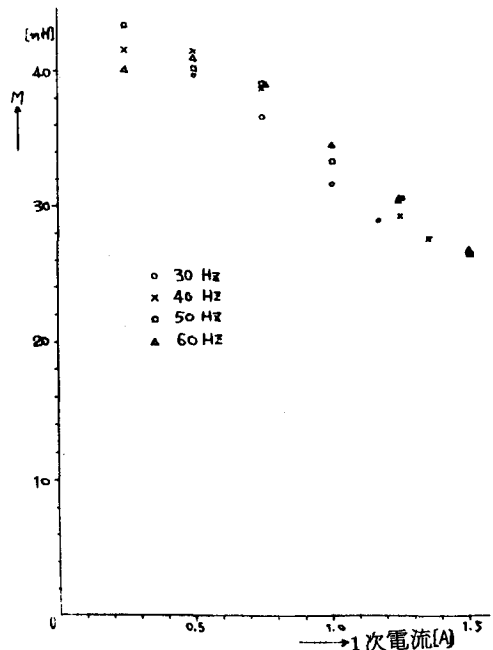
$$\begin{aligned} & \text{rank} [B^*C^* | B^*A^*C^* | B^*(A^*)^2C^*] \\ &= \text{rank} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \mu_3 b_{11} & \mu_2 b_{11} a_{23} \\ \mu_2 b_{22} & 0 & \mu_2 b_{22} a_{22} & -\mu_3 b_{22} & \mu_2 b_{22} (a_{22}^2 - a_{23}) \\ \hline & & & \mu_3 b_{11} a_{11} \\ & & & -\mu_3 b_{22} a_{22} \end{bmatrix} \\ &= 2 \end{aligned}$$

の成立を吟味すると、

$\mu_3 = 0, \mu_2 \neq 0$ の場合：成立
 $\mu_2 = 0, \mu_3 \neq 0$ の場合： $a_{11} \neq a_{22}$

i.e. $D_L/J_L \neq D_M/J_M$

ならば成立となる。

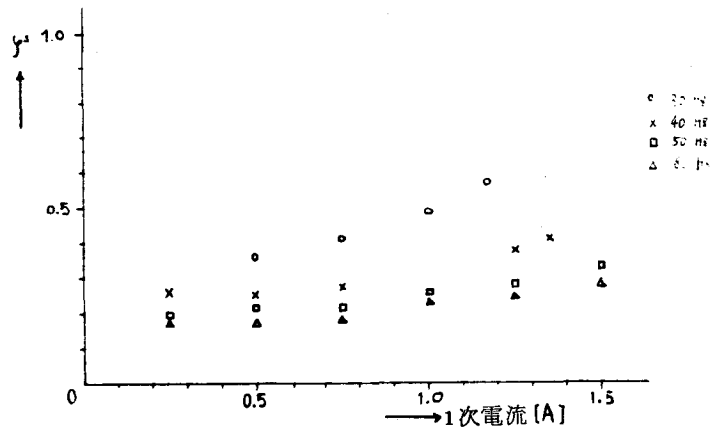


第4-44図 1次-2次巻線相互インダクタンスの測定値

実際の測定に際しては電動機系の慣性モーメントが大きいと、回転計のみからは急変する過渡電動機トルクあるいは過渡負荷トルクの再現は困難である。それは通常の回転計の感度が低いためである。

< A > 逆回路による入力波形の再現

(4-9), (4-10) 式より,



第4-45図 1次電流の位相

$$\begin{cases}
 T_L = \frac{1}{\nu_3 G} \dot{y}_3 - \frac{1}{\nu_2} (J_L \dot{y}_2 + D_L y_2) \\
 T_e = \frac{1}{\nu_2} (J_M \dot{y}_2 + D_M y_2) + \frac{1}{\nu_3 G} \left(\frac{J_M}{G} \ddot{y}_3 + \frac{D_M}{G} \dot{y}_3 + y_3 \right)
 \end{cases}$$

サンプリング周期を Δ 秒として微分を前進差分でおきかえると次式を得る。

$$\begin{aligned}
 T_L(k) &= A_{L30} \cdot y_3(k) - A_{L20} \cdot y_2(k) - A_{L21} \cdot y_2(k+1) \\
 T_e(k) &= A_{e20} \cdot y_2(k) + A_{e21} \cdot y_3(k+1) + A_{e30} \cdot y_3(k) \\
 &\quad + A_{e31} \cdot y_3(k+1) + A_{e32} \cdot y_3(k+2)
 \end{aligned} \tag{4-13}$$

$k = 2, 3, \dots$

たゞし,

$$\begin{aligned}
 A_{L30} &= 1/G \nu_3 \\
 A_{L20} &= (-J_L/\Delta + D_L)/\nu_2 \\
 A_{L21} &= J_L/\Delta \nu_2 \\
 A_{e20} &= (-J_M/\Delta + D_M)/\nu_2 \\
 A_{e21} &= J_M/\Delta \nu_2 \\
 A_{e30} &= (1 - D_M/G\Delta + J_M/G\Delta^2)/\nu_3 G \\
 A_{e31} &= (D_M - 2J_M/\Delta)/\nu_3 G^2 \Delta \\
 A_{e32} &= J_M/\nu_3 G^2 \Delta^2
 \end{aligned}$$

である。

< B > ベキ多項式入力
 の再現 ベキ多項式
 入力とした場合の入力波
 形の再現は本章の 4. 1. 1
 < B > にしたがえばよい。
 具体的手順をつぎに示す。

(1) 行列

$$\begin{bmatrix} a_{11} & 0 & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

負荷の 種類	固有 値	高 速 1000~1500 R.P.M.	中 速 500 ~ 1000 R.P.M.	低 速 0 ~ 500 R.P.M.
慣 性 負 荷	λ_1	-6.7×10^{-3}	-9.0×10^{-3}	-1.6×10^{-2}
	λ_2	$-1.0 \times 10^{-1} + j4.1 \times 10^3$	$-1.1 \times 10^{-1} + j4.1 \times 10^3$	$-1.5 \times 10^{-1} + j4.1 \times 10^3$
	λ_3	$-1.0 \times 10^{-1} - j4.1 \times 10^3$	$-1.1 \times 10^{-1} - j4.1 \times 10^3$	$-1.5 \times 10^{-1} - j4.1 \times 10^3$
電 気 制 動 機 負 荷	λ_1	-5.6×10^{-1}	-9.7×10^{-1}	-1.5
	λ_2	$-1.2 \times 10^{-1} + j4.3 \times 10^3$	$-1.5 \times 10^{-1} + j4.3 \times 10^3$	$-2.1 \times 10^{-1} + j4.3 \times 10^3$
	λ_3	$-1.2 \times 10^{-1} - j4.3 \times 10^3$	$-1.5 \times 10^{-1} - j4.3 \times 10^3$	$-2.1 \times 10^{-1} - j4.3 \times 10^3$

第 4-8 表 測定系の固有値

の固有値 λ_1 , λ_2 , λ_3 を求める。第 4-7 表の定数値に対する固有値の計算結果を第 4-8 表に示す。(計算は NFAC-2230 を使用した)。

(2) 3つの固有値 λ_1 , λ_2 , λ_3 は相異なるから次式よりスカラ関数 $\alpha_0(t)$, $\alpha_1(t)$ および $\alpha_2(t)$ を求める。

$$\begin{bmatrix} 1 & \lambda_1 & \lambda_1^2 \\ 1 & \lambda_2 & \lambda_2^2 \\ 1 & \lambda_3 & \lambda_3^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_0(t) \\ \alpha_1(t) \\ \alpha_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} \\ e^{\lambda_2 t} \\ e^{\lambda_3 t} \end{bmatrix}$$

i. e.

$$\begin{bmatrix} \alpha_0(t) \\ \alpha_1(t) \\ \alpha_2(t) \end{bmatrix} = \frac{1}{(\lambda_1 - \lambda_2)(\lambda_2 - \lambda_3)(\lambda_3 - \lambda_1)} \begin{bmatrix} -\lambda_2 \lambda_3 (\lambda_2 - \lambda_3) & -\lambda_3 \lambda_1 (\lambda_3 - \lambda_1) & -\lambda_1 \lambda_2 (\lambda_1 - \lambda_2) \\ (\lambda_2 + \lambda_3)(\lambda_2 - \lambda_3) & (\lambda_3 + \lambda_1)(\lambda_3 - \lambda_1) & (\lambda_1 + \lambda_2)(\lambda_1 - \lambda_2) \\ -(\lambda_2 - \lambda_3) & -(\lambda_3 - \lambda_1) & -(\lambda_1 - \lambda_2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} \\ e^{\lambda_2 t} \\ e^{\lambda_3 t} \end{bmatrix}$$

上式の係数行列を,

$$\begin{bmatrix} f_{11} & f_{12} & f_{13} \\ f_{21} & f_{22} & f_{23} \\ f_{31} & f_{32} & f_{33} \end{bmatrix}$$

とおくと, f_{i1} ($i = 1, 2, 3$) および λ_1 は実数, f_{i2} と f_{i3} ($i = 1, 2, 3$) は複素共役, λ_2 と λ_3 は複素共役である。よって次式で表わせる。

$$\begin{bmatrix} \alpha_0(t) \\ \alpha_1(t) \\ \alpha_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_{11} \\ f_{21} \\ f_{31} \end{bmatrix} e^{\lambda_1 t} + 2\Re \left\{ \begin{bmatrix} f_{12} \\ f_{22} \\ f_{32} \end{bmatrix} e^{\lambda_2 t} \right\}$$

こゝであらためて、

$$\begin{cases} \lambda_1 = \lambda \\ \lambda_2, \lambda_3 = \sigma \pm j\omega \end{cases}$$

とおくと、

$$\begin{bmatrix} \alpha_0(t) \\ \alpha_1(t) \\ \alpha_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{\lambda t} \\ e^{\sigma t} \cos \omega t \\ e^{\sigma t} \sin \omega t \end{bmatrix} \quad (4-14)$$

となる。たゞし、

$$A_{11} = (\sigma^2 + \omega^2) / \{(\sigma - \lambda)^2 + \omega^2\}$$

$$A_{21} = -2\sigma / \{(\sigma - \lambda)^2 + \omega^2\}$$

$$A_{31} = 1 / \{(\sigma - \lambda)^2 + \omega^2\}$$

$$A_{12} = \lambda(\lambda - 2\sigma) / \{(\sigma - \lambda)^2 + \omega^2\}$$

$$A_{22} = 2\sigma / \{(\sigma - \lambda)^2 + \omega^2\}$$

$$A_{32} = -1 / \{(\sigma - \lambda)^2 + \omega^2\}$$

$$A_{13} = -\lambda\{\sigma(\lambda - \sigma) + \omega^2\} / \omega \{(\sigma - \lambda)^2 + \omega^2\}$$

$$A_{23} = -\{\sigma^2 - \omega^2 - \lambda^2\} / \omega \{(\sigma - \lambda)^2 + \omega^2\}$$

$$A_{33} = -(\lambda - \sigma) / \omega \{(\sigma - \lambda)^2 + \omega^2\}$$

$$(*) \quad \gamma_{iR}(t) = \int_0^t \tau^i \alpha_R(t - \tau) d\tau$$

$$i = 0, 1, \dots, N; \quad R = 0, 1, 2$$

を求める。

(4-14) 式と同一の係数を使用して表現すると、

$$\begin{bmatrix} \gamma_{i0}(t) \\ \gamma_{i1}(t) \\ \gamma_{i2}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Lambda_{i0}(t) \\ \Lambda_{i1}(t) \\ \Lambda_{i2}(t) \end{bmatrix} \quad i = 0, 1, \dots, N \quad (4-15)$$

となる。たゞし、

$$\Lambda_{00}(t) = -(1 - e^{\lambda t}) / \lambda$$

$$\Lambda_{01}(t) = \{-\sigma(1 - e^{\sigma t} \cos \omega t) + \omega e^{\sigma t} \sin \omega t\} / (\sigma^2 + \omega^2)$$

$$\Lambda_{02}(t) = \{\omega(1 - e^{\sigma t} \cos \omega t) + \sigma e^{\sigma t} \sin \omega t\} / (\sigma^2 + \omega^2)$$

$$\Lambda_{i0}(t) = -\{t^i - i\Lambda_{i-10}(t)\} / \lambda$$

$$\Lambda_{i1}(t) = \{-\sigma t^i + i\{\sigma\Lambda_{i-11}(t) + \omega\Lambda_{i-12}(t)\}\} / (\sigma^2 + \omega^2) \quad i=1, 2, \dots$$

$$\Lambda_{i2}(t) = \{\omega t^i - i\{\omega\Lambda_{i-11}(t) - \sigma\Lambda_{i-12}(t)\}\} / (\sigma^2 + \omega^2)$$

(=) 初期値の影響を除く。これには2通りの方法が考えられる。第1の方法は、被測定入力測定開始時刻以前は一定であり、観測系も定常状態にあるとした場合で、この場合には観測系の状態量、入力および出力の座標原点をすべて定常状態値にとる。第2の方法は、

$$y_0(t) = C e^{At} z(0)$$

$$= \{\alpha_0(t)C + \alpha_1(t)CA + \alpha_2(t)CA^2\} z(0)$$

として、次式の $w(t)$ を解析に利用する。

$$w(t) = y(t) - y_0(t)$$

(*) つぎの内積の値を求める。

$$(\gamma_{j\ell}, w) = \int_0^1 \overline{\gamma_{j\ell}(t)} w(t) dt \quad (4-16)$$

$$j = 0, 1, \dots, N$$

ただし、上式では観測区間を0~1秒とした。

$$w(t) = \gamma_{00}(t)CBx_0 + \gamma_{01}(t)CABx_0 + \gamma_{02}(t)CA^2Bx_0 \quad (4-17)$$

$$+ \gamma_{10}(t)CBx_1 + \gamma_{11}(t)CABx_1 + \gamma_{12}(t)CA^2Bx_1$$

$$+ \dots + \gamma_{N0}(t)CBx_N + \gamma_{N1}(t)CABx_N + \gamma_{N2}(t)CA^2Bx_N$$

トルク計のみを使用する (i.e. 1出力系) ときは

$$CB = \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix}$$

である。よって (4-17) 式において

$$\gamma_{i0}(t) \quad i = 0, 1, 2, \dots, N$$

の項は最初から削除してよい。よって (4-16) 式の ℓ については、 $\ell = 1, 2$ の場合を求めればよい。

観測区間を $2L$ 分割して数値積分にシンプソンの公式を適用すると (4-16) 式はつぎのようになる。

$$(\gamma_{j\ell}, w) = \frac{1}{6L} \{ \overline{\gamma_{j\ell}(0)} w(0) + 4 \overline{\gamma_{j\ell}(1/2L)} w(1/2L) + 2 \overline{\gamma_{j\ell}(2/2L)} w(2/2L) \}$$

$$+ \dots + 4 \overline{\gamma_{j\ell}((2L-1)/2L)} w((2L-1)/2L) + \overline{\gamma_{j\ell}(1)} w(1) \}$$

(A) つぎの内積を求める。

$$(\gamma_{j\ell}, \gamma_{i\kappa}) = \int_0^1 \overline{\gamma_{j\ell}(t)} \gamma_{i\kappa}(t) dt \quad (4-18)$$

$$i, j = 0, 1, \dots, N$$

$$\kappa, \ell = 1, 2$$

(4-18) 式を $\kappa, \ell = 1, 2$ についてのみ求めればよいのは、前述(6)の場合と同様である。数値積分は上述と同様にシンプソンの公式を適用する。

(B) 連立方程式

$$(\gamma_{j\ell}, w) = \sum_{i=0}^N \sum_{\kappa=1}^2 (\gamma_{j\ell}, \gamma_{i\kappa}) CA^\kappa B x_i \quad (4-19)$$

$$j = 0, 1, \dots, N$$

$$\ell = 1, 2$$

を解いて、

$$\begin{cases} CAB x_i = \beta_{i1} \\ CA^2 B x_i = \beta_{i2} \end{cases} \quad i = 0, 1, \dots, N \quad (4-20)$$

を求める。トルク計のみを使用した1出力系の場合は上述の β_{i1} および β_{i2} はスカラー値である。

(C) (4-20) 式を解いて、

$$x_i \quad i = 0, 1, \dots, N$$

を求める。トルク計のみを使用した1出力系で考えると、

$$x_i = \begin{bmatrix} CAB \\ CA^2 B \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \beta_{i1} \\ \beta_{i2} \end{bmatrix} \quad i = 0, 1, \dots, N \quad (4-21)$$

より求められる。

$3 \times (N+1)$ 個の $CA^\kappa B x_i$ のうち $(N+1)$ 個の $C B x_i$ は常に零だから最初から除外してよい。 $\gamma_{i\kappa}(t) \quad i = 0, 1, \dots, N; \kappa = 0, 1, 2$ のうち1次独立のものは(4-15)式より $(N+3)$ 個存在することがわかる。よって、

$$2(N+1) - (N+3) = N-1$$

個の入力波形に関する情報があれば入力波形は一意に定まる。ここでは $N=5$ として4個の情報を各入力の初期値および最終値より求めた。

これら4個の入力情報で各入力波形が一意に決定し得ることをもう少し詳細に検討してみよう。出力は、

$$w(t) = \sum_{i=0}^5 \sum_{\kappa=0}^2 \gamma_{i\kappa}(t) CA^\kappa B x_i$$

と表わせる。 $5+3=8$ 個の1次独立のものを、

$$\gamma_{00}(x), \gamma_{01}(x), \gamma_{02}(x), \gamma_{12}(x), \gamma_{22}(x), \gamma_{32}(x), \gamma_{42}(x), \gamma_{52}(x)$$

とし、

$$\gamma_{j1}(x) = C_{j1} \gamma_{00}(x) + C_{j2} \gamma_{01}(x) + C_{j3} \gamma_{02}(x) + C_{j4} \gamma_{12}(x) + C_{j5} \gamma_{22}(x) + C_{j6} \gamma_{32}(x) + C_{j7} \gamma_{42}(x) + C_{j8} \gamma_{52}(x)$$

$$CABx_j = \beta_j$$

$$CBx_j = \beta_{j+5} \quad j = 1, \dots, 5$$

とする。ただし、

$$\beta_6 = \dots = \beta_{10} = 0$$

$$C_{15} = \dots = C_{18} = C_{26} = \dots = C_{28} = C_{37} = C_{38} = C_{48} = 0$$

いま、入力を、

$$x(x) = x_0 + tx_1 + \dots + t^5 x_5$$

とし、観測区間を $0 \leq x \leq 1$ としよう。このとき入力初期値は $x(0) = x_0$ 、最終値は $x(1) = x_0 + x_1 + \dots + x_5$ で表わせる。

2×2 行列 $\begin{bmatrix} CAB \\ CA^2B \end{bmatrix}$ の階数が 2 であるから、 $x(0)$ 、 $x(1)$ の値を利用する

のと、 $\begin{bmatrix} CAB \\ CA^2B \end{bmatrix} x(0)$ 、 $\begin{bmatrix} CAB \\ CA^2B \end{bmatrix} x(1)$ の値を利用するのと等価である。

よってこれら四つの値と $CBx_0 = 0$ を利用して、

$$\text{rank} \begin{bmatrix} C_{11} & \dots & C_{51} \\ C_{12} & \dots & C_{52} \\ C_{12} - 1 & \dots & C_{52} - 1 \\ C_{13} & \dots & C_{53} \\ C_{13} + \dots + C_{18} & \dots & C_{53} + \dots + C_{58} \end{bmatrix}$$

$$= \text{rank} \begin{bmatrix} 1 & \dots & 1 \\ -\tilde{C}_{11} & \dots & -\tilde{C}_{51} \\ \tilde{C}_{12} & \dots & \tilde{C}_{52} \\ -\tilde{C}_{13} & \dots & -\tilde{C}_{53} \\ - (C_{14} + \dots + C_{18}) & \dots & - (C_{54} + \dots + C_{58}) \end{bmatrix}$$

$= 5$

$$\begin{bmatrix} \tilde{C}_{i1} \\ \tilde{C}_{i2} \\ \tilde{C}_{i3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_{i1} \\ C_{i2} \\ C_{i3} \end{bmatrix} \quad i = 1, \dots, 5$$

であれば、入力波形は唯一に決定できることがわかる。観測系が構造的にパラメータ決定不能系でないことを知るには観測系の定数を適当に選んでよい。それで上式の成立が確認できれば、実際に求めた波形に検討を加えた結果、採用し得るものであれば、その再現波形が求める唯一解となる。

以下の実験では4.4.2実験(i)において逆回路方式との比較により検証した。

さて、 $\lambda = -1$, $\sigma = -1$, $\omega = 1$ とすると上述の 5×5 行列の行列式の値は 6.14×10^8 となり階数5は満足される。

なお、むろん実際の観測系の λ , σ , ω を使用して上述の階数が5であることをたしかめる場合には、上述の確認のための検証は不必要である。

なお、

$$\begin{bmatrix} CAB \\ CA^2B \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{(a_{11} - a_{22})b_{11}b_{22}\lambda_3} \begin{bmatrix} -a_{22}b_{22} & b_{22} \\ -a_{11}b_{11} & b_{11} \end{bmatrix}$$

である。

(i) ベキ多項式

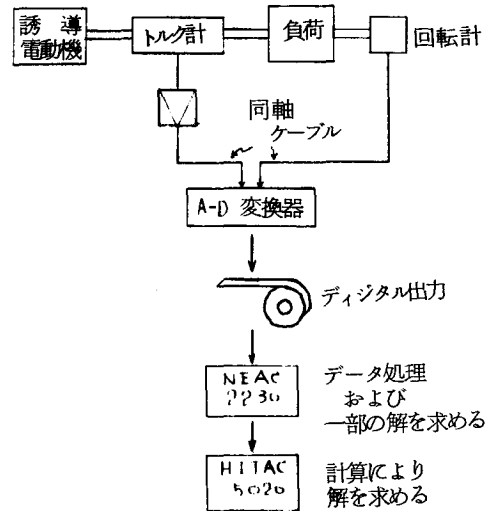
$$\begin{cases} T_e = x_{10} + x_{11}t + \dots + x_{1N}t^N \\ T_L = x_{20} + x_{21}t + \dots + x_{2N}t^N \end{cases} \quad (4-22)$$

により入力波形を再現する。

4.4.2 実験 実験各部の構成図を第4-46図から第4-52図に示す。第4-46図は全体の概略構成図を示している。第4-47図は電動機運転の主回路を、第4-48図は3相インバータ主回路を、第4-49図がインバータゲート回路増幅器を、第4-50図がゲート回路リングカウンタを、第4-51図がゲート回路パルス発振器を、そして第4-52図が電気制動機負荷の回路をそれぞれ示している。

実験はつぎに示す4通りについて行なった。

- (i) 慣性負荷。3相交流正弦波 50 Hz, 200 V で始動したときの過渡特性。
- (ii) 慣性負荷。インバータ電源で始動したときの過渡特性。
- (iii) 慣性負荷を惰性運転 (約 1200 R. P. M.) 中にインバータ電源を投入



第4-46図 測定・データ処理系の概略構成図

したときの過渡特性。

(=) インバータで無負荷運転（電気制動機負荷を直結）中に負荷急変時の動特性。

4.4.3 実測データの処理

実測結果を計算に使用する前につぎのようなデータの前処理が必要である。

< A > 実験結果のたしかめ。

A-D変換器出力をNEAC-2230を使用して計算機上でグラフに描かせる。わずか数 m sec の過渡現象がうまく観測されているか否か、増幅器の倍率が適当であったか否かなど、実験結果を計算に使用できるか否か総合的に判断する。

使用したプログラムのフローチャートを第4-53図に示す。

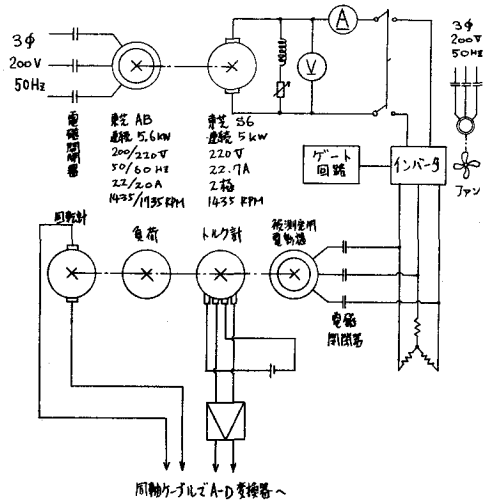
< B > Format のチェック・修正。

A-D変換器出力には約1%のFormat誤りがあるので、そのチェックと修正を行なう。Formatチェック・修正用

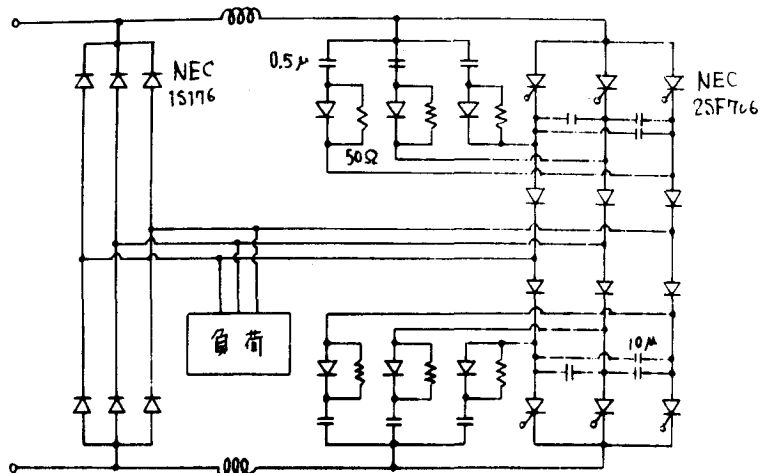
(NEAC-2230使用)のフローチャートを第4-54図に示す。

< C > 波形の修正。外乱および回転計のリップルを除去する必要がある。外乱はグラフの上で著るしくとびはなれた値をとるものを修正対象とした。回転計のリップルは回転計の1回転毎に規則的にあらわれるもので、グラフの上で直線補間により修正した。修正用プログラムのフローチャート (NEAC-2230使用) を第4-55図に示す。

< D > デジタルフィルタ。始動時の過渡トルク波形には電源と同一の周波数

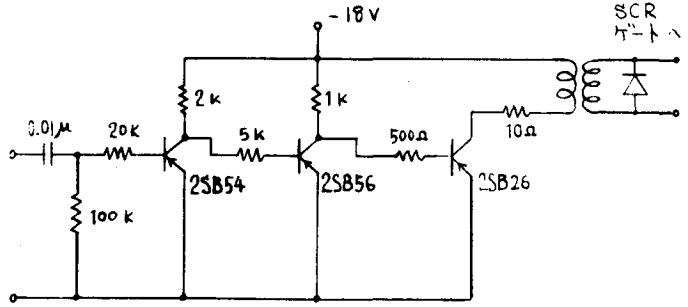


第4-47図 主回路の構成図



第4-48図 インバータ主回路

の振動成分があらわれる。
 多項式で表現するには、
 この周期的な振動波形を
 除去した方が多項式の次
 数が少なくてすむ。それ
 ゆえ本論文では周期的な
 振動波形をデジタルフ
 イルタで除去した。ディ
 ジタルフィルタは状態表
 現方式による。¹⁾



第4-49図 ゲート回路：増幅器

除去する周波数を f_N としてつぎの時間連続系のフィルタを考える。

$$G_T(s) = \frac{s^2 + \omega_c^2}{s^2 + \frac{\omega_N}{q_N}s + \omega_N^2}$$

$$\omega_N = 2\pi f_N$$

$$q_N = \frac{f_N}{f_2 - f_1} = \frac{f_N}{B_W}$$

ここで f_2 , f_1 および B_W は第4-56図に示した値である。上式のフィルタ
 を状態方程式表現にすると、

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\beta & 0 \\ 0 & -\alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} x \\ y = \frac{a}{\alpha - \beta} \begin{bmatrix} \beta & -\alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} + [1] x \end{cases}$$

ここで、

$$\alpha = \pi B_W (1 - \sqrt{1 - 4q_N^2})$$

$$\beta = \pi B_W (1 + \sqrt{1 - 4q_N^2})$$

$$a = \omega_N / q_N$$

上式をサンプリング間隔を τ として時間離散系に変換すると¹⁾

$$\begin{bmatrix} z_1((n+1)\tau) \\ z_2((n+1)\tau) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{-\beta\tau} & 0 \\ 0 & e^{-\alpha\tau} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1(n\tau) \\ z_2(n\tau) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1 - e^{-\beta\tau}}{\beta} \\ \frac{1 - e^{-\alpha\tau}}{\alpha} \end{bmatrix} x(n\tau)$$

$$y(n\tau) = \frac{\alpha}{\alpha - \beta} [\beta - \alpha] \begin{bmatrix} z_1(n\tau) \\ z_2(n\tau) \end{bmatrix} + x(n\tau)$$

上式において、 $B_w = 2.1 f_N$ としたときのプログラムのフローチャートを第4-57図に示す。

このデジタルフィルタによって $f_N H_z$ の周波数成分を除去する場合は、はじめの数サイクルの間はフィルタの過渡特性があらわれるので、これを考慮して適用する必要がある。数サイクル以後は望み通りのフィルタ特性が得られる。

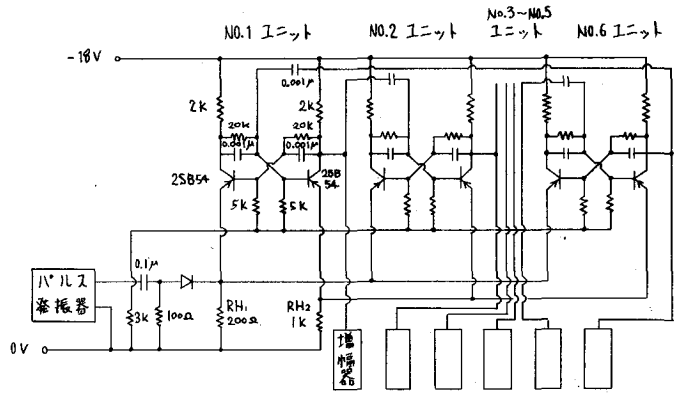
 平滑を行なう。データのバラツキをつぎの式にしたがって平滑化した。

$$x(n) = \frac{1}{4} x(n-1) + \frac{1}{2} x(n) + \frac{1}{4} x(n+1)$$

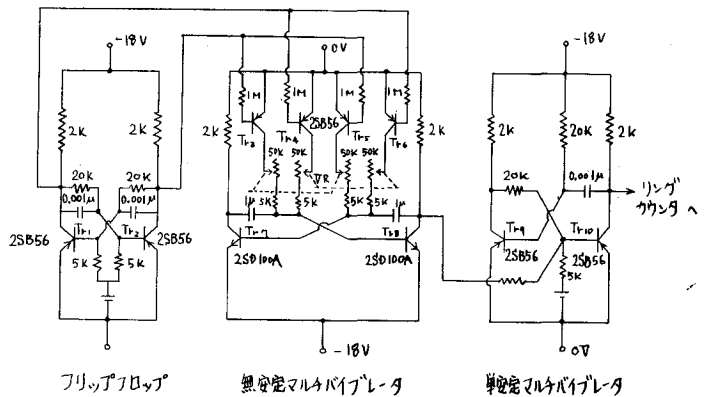
この平滑を行なうプログラムのフローチャートを第4-58図に示す。

4.4.4 計算

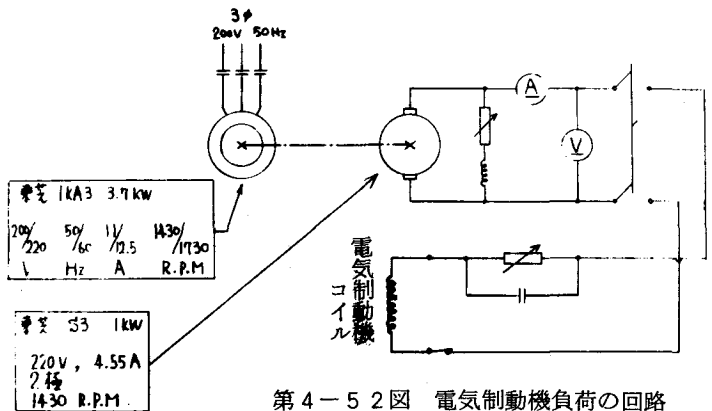
<A> 逆回路方式による入力波形の再現
 前述の(4-13)式にしたがってプログラムを組めばよい。計算プログラムのフローチャートを第4-59図に示す。実験(i), (ii)および(iii)はこの



第4-50図 ゲート回路：リングカウンタ



第4-51図 ゲート回路：パルス発振器

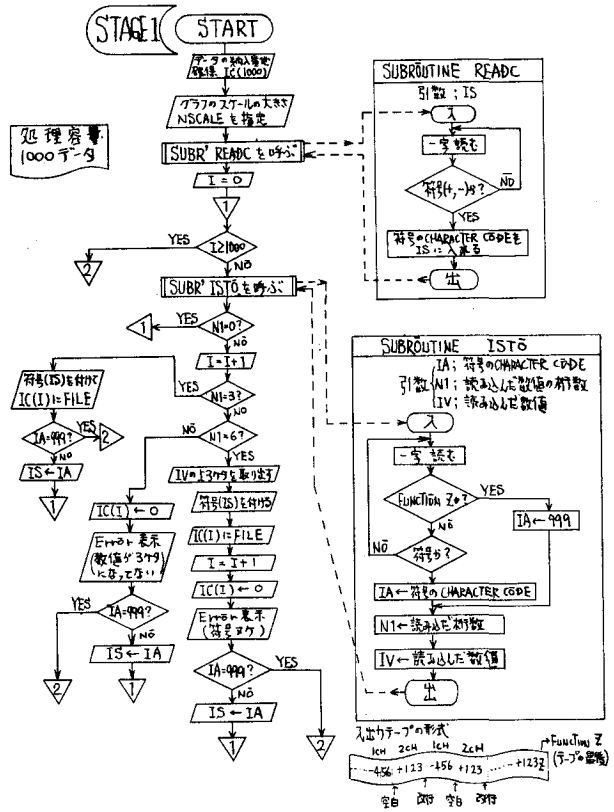


第4-52図 電気制動機負荷の回路

方式で計算を行なった。
 多項式入力としての再現 前述 4.4.1
 にしがってプログラムを組みばよい。第4-60図は初期値の影響を、

$$w(x) = y(x) - ce^{Ax} z(0)$$

として除くためのプログラムのフローチャートを示している。第4-61図は内積 (γ_{jk}, w) を求めるためのプログラムのフローチャートである。また第4-62図はグラム行列を計算するためのプログラムのフローチャートである。そして第4-63図は全体のプログラムのフローチャートである。なおこゝでは複素計算を実数計算に直さずに計算を実行するときのプログラムを示している。



第4-53図 グラフ作製のフローチャート (a)

4.4.5 結果と考察

実験(i)の測定結果並びに計算結果を第4-64図から第4-67図に示す。実験は慣性負荷時に3相200V 50Hz 正弦波を印加したときの始動時の過渡トルク波形を求めたものである。これは以後行なう実験(ii), (i)および(iii)との比較検討するときの基準を得ること、また実験方法の妥当性検証のために行なった。

第4-64図はトルク計および回転計の出力実測波形を示す。A-D変換器第1チャンネルに回転計を正符号で、第2チャンネルにトルク計増幅器を負符号で接続した。

A-D変換器のサンプリング周期を100μsに、最大電圧を10Vに選定した。計算には100μsの間隔で得られた(i.e. 同一チャンネルでは200μs間隔)データをすべて利用したが、第4-64図に示したのは5個目ごとのデータを印字したものである。したがってトルク波形のデータ間隔は1msである。

A-D変換器の出力は3桁の整数で得られ、最大値が999Vになる。第4-64図のトルク波形のピーク値はほぼ5Vであることを示す。

第4-64図では回転速度は零である。したがってここで得られたトルク波形は始動時の電動機発生トルク波形を示す。トルクは初期にわずかではあるが負になっていることが観測される。トルク計のチェックボックスを使用してトルクの校正を行なうと1.225 [N・m]でA-D変換器出力が182 (i.e. 1.82V)と得られるから、ピーク値は3.3 [N・m]となる。

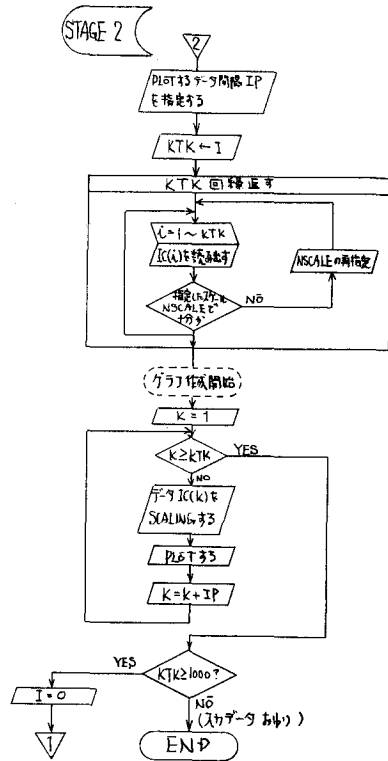
第4-65図は第4-64図の波形の50Hz除去フィルタおよび平滑操作後の波形である。この図ではデータをスキップすることなく全部印字させたグラフである。よってデータ間隔は100μs (トルク波形のみでは200μs)となっている。

50Hz成分を除去すると過渡状態がわずかに5ms i.e. 電源周波数の1/4周期で終了することがわかる。またこの定常値はフィルタ通過前後で不変とみなせるから定常値は1.1 [N・m]と得られる。したがってピーク値と定常値の比率は3.0となる。

第4-66図は逆回路方式で求めた電動機トルクであり、第4-67図はベキ多項式入力方式(5次項まで考慮)により求めた電動機トルクである。ただし、前者のデータ間隔は200μsであり、後者は100μsである。ベキ多項式近似で入力波形を求める後者の方式は前者に比し、なめらかな波形が得られることがわかる。すなわち、後者の方法は平滑操作も同時に行なっていることがわかる。

第4-68図は実験(9)の回転速度およびトルクの実測波形である。インバータ電源投入時のインバータ入力D.C.電圧は157[V]であり、インバータ出力A.C.電圧は実効値指示113[V]である。周波数はほぼ50Hzになるように設定した。観測されたトルク波形には階段状波の影響がみられる。この場合には始動時初期の負トルクがみられない。

第4-69図は第4-68図の波形を50Hzおよび300Hz除去フィルタを通



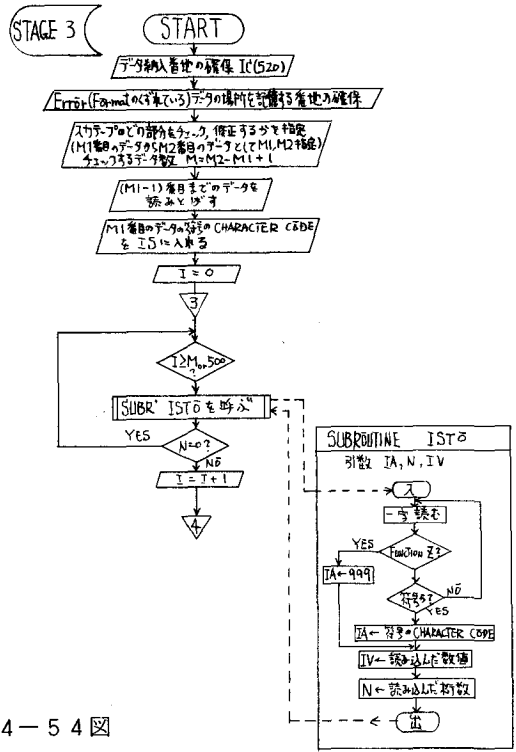
第4-53図 (b)

し、かつ平滑したときの波形である。ただし、スイッチが入る以前のデータは除去してある。データは1個おきに印字させてあるので、データ間隔は400 μ s となっている。この場合には実験(イ)に比べ定常状態に達するまでの時間が長く、ほぼ20 ms i.e. 電源周波数の1周期要している。またピーク値と定常値の比率も小さく1.9である。

第4-70図は逆回路方式により再現した電動機トルク波形である。実験(イ)に比して(電圧も小さいが)ピーク値がほぼ1/2になっているのに比し、定常値はさほどに減少せずほぼ73% (8 [N・m]) の値を保っている。

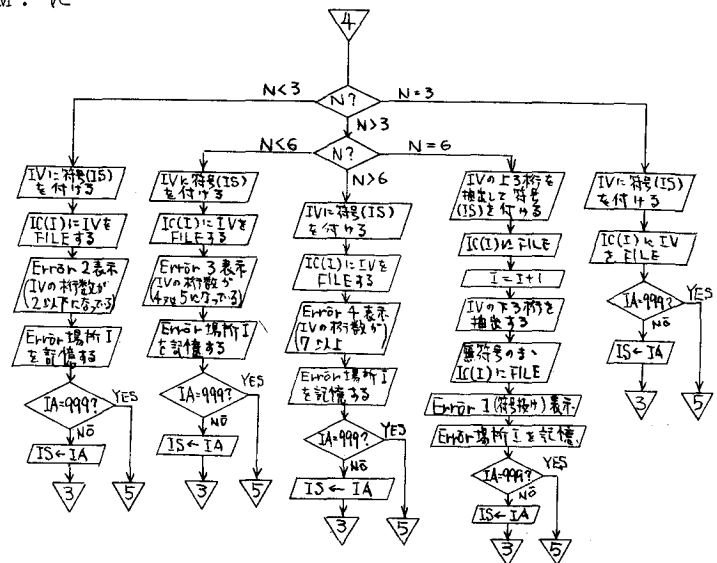
第4-71図は実験(イ)の実測波形である。電動機を惰性運転し、約1200 R. P. M. に達したときインバータ電源(D. C. 169 V. 約50 Hz 出力)を再投入したときの波形である。この場合には初期にかなり大きな負トルクが観測される。また実験(イ)、(ロ)の場合のように50 Hz 成分の振動があらわれないが全体として大きな電動機トルクがみられる。

第4-72図は初期負トルクを経過後のト



第4-54図

FORMATのチェック修正のフローチャート (a)



第4-54図 (b)

トルク波形を 50 Hz および 300 Hz 除去フィルタを通し、平滑した波形である。このグラフのデータ間隔は 600 μs にとつてあるので、定常値に達するまで約 18 ms、負トルク期間も考慮すると約 30 ms も要することがわかる。

第 4-73 図は逆回路方式によって再現した電動機トルク波形である。こゝではデータ間隔を 400 μs に選んである。

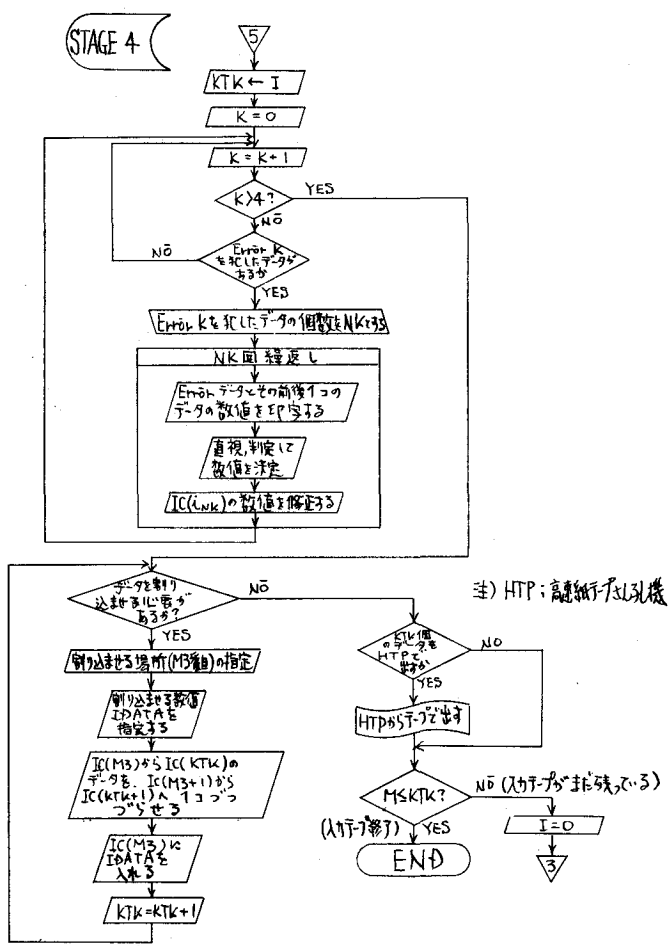
第 4-74 図は実験(⇒)の回転速度並びにトルク計出力の観測波形である。負荷電流零でインバータ D. C. 46 V ≈ 50 Hz 電源に接続し、570 [R. P. M.] で運転しているとき、負荷回路を

閉じ、0.77 [A] (定常値)を流す。速度は急減し、トルク計出力もゆるやかな単峰性の曲線を示す。全体の現象は実験(1)~(4)に比してかなりゆるやかである。同図ではデータ間隔を 1.2 ms としてある。

第 4-75 図は実験(⇒)のトルク波形のみ 120 ms 間の波形を記録したものである。こゝに示されたデータを使用して、この間の負荷トルクの波形再現を試みる。

すなわち、かなり速度変化もあるが、速度に関する情報は一切使用せず 1 出力系として多項式方式で負荷トルク波形の計算を行なう。

第 4-76 図および第 4-77 図に係数 G R A M 行列と連立方程式右辺の内積との計算結果を示す。この数値を用い掃き出し法にて解を求めてグラフにしたの



※4-54 図 (C)

が第4-78図である。同図のデータ間隔は2msに選んである。

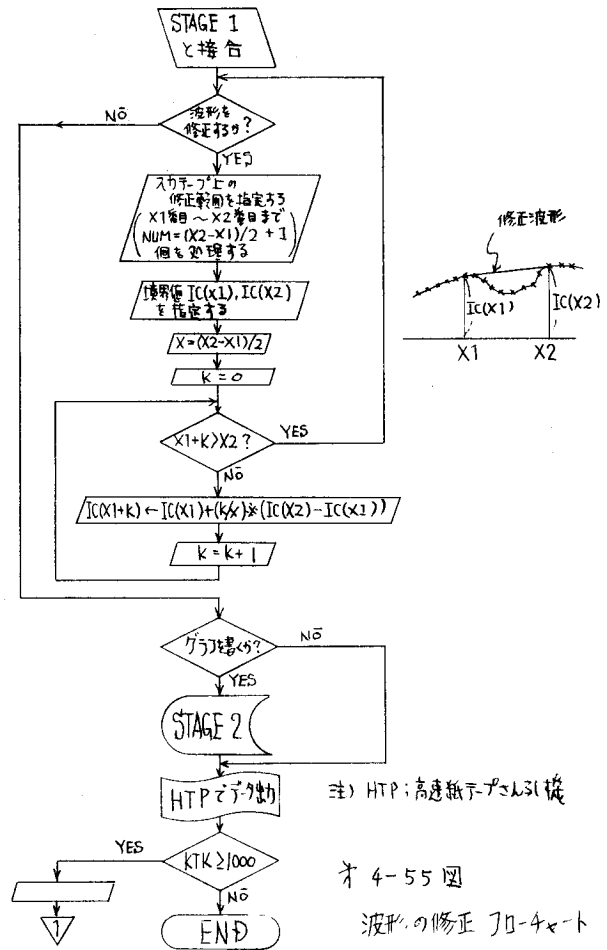
第4-78図を第4-75図と比較すると波形の平滑化が行なわれていることがわかる。

第4-75図は200μs間隔で実測したデータを5個とばして1.2ms間隔で印字したものであるが、もとの200μs間隔のデータを使用して逆回路方式で負荷トルク波形を求めようとすると不可能であることがわかる。つまり逆回路方式では微分操作が必要なため、観測データを相当になめらかにしておかなければならない。しかし、ベキ多項式方式は第4-78図(200μs間隔の全データを使用した)に示すように、ある程度観測ノイズを含んだ場合でも、むしろ平滑した形で入力波形を求めることが可能である。

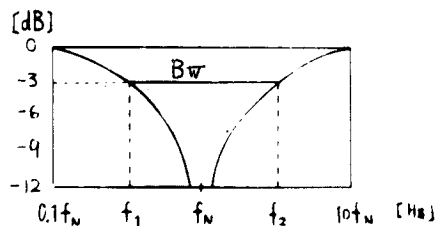
ベキ多項式方式の現状の欠点は、多項式の最大次数が連立方程式を解くときの演算誤差で抑えられてしまうため、あまり大きくとれないことである。

4.5 誘導電動機系のアナログ測定^{2) 6)}

4.5.1 測定回路



第4-55図 波形の修正フローチャート



第4-56図 フィルターの周波数特性

(4-9), (4-10) 式をラプラス変換すると,

$$W(s) = Y(s) - C(sI - A)^{-1} Z_0$$

$$= C \Phi(s) B X(s)$$

∴

$$X(s) = \{C \Phi(s) B\}^{-1} W(s)$$

i.e.

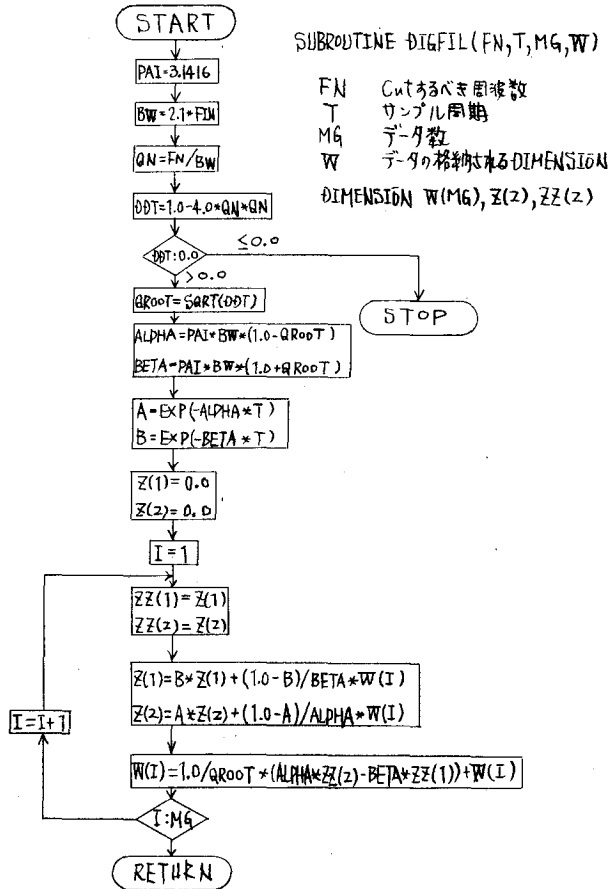
$$X(s) = \begin{bmatrix} \frac{s - a_{11}}{\nu_2 b_{11}} & \frac{s(s - a_{11}) - a_{13}}{\nu_3 b_{11}} \\ \frac{s - a_{22}}{\nu_2 b_{22}} & \frac{-a_{23}}{\nu_3 b_{22}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} W_2(s) \\ W_3(s) \end{bmatrix}$$

したがって、動トルクの変動分（定常値からのずれ）の測定は、上式より得られる第4-79図の測定回路を構成すればよい。

第4-79図の回路は微分特性をもったものであるが、全周波数領域にわたってこの回路を実現する必要はない。

制御系構成の観点からみて十分なだけの入力波形の再現が可能であればよい。

また、高周波数領域まで微分特性をもたせることは、回路の安定性の観点から非常に困難であることと、インバータからのノイズを拾いやすいので、実際上好ましくない。



第4-57図 デジタルフィルタのフローチャート

したがって、数百 Hz まで微分特性をもたせ、それ以上の周波数帯では平坦あるいは減衰特性をもたせたものでよい。

電気制動機負荷に対する 50 Hz 運転時の測定系の定数は第 4-7 表より、

$$\begin{aligned} a_{11} &= -0.2 \\ a_{13} &= -1.7 \times 10^7 \\ a_{22} &= -0.6 \\ a_{23} &= 1.7 \times 10^6 \\ b_{11} &= 1.5 \times 10^4 \\ b_{22} &= -1.5 \times 10^3 \\ \omega_2 &= 5.82 \times 10^{-2} \\ \omega_3 &= 2.58 \times 10^3 \end{aligned}$$

である。

この定数を使用した負荷動トルク測定系の構成を第 4-80 図に示す。

なお、この微分器の周波数特性を第 4-81 図に示す。

4.5.2 実験結果と考察

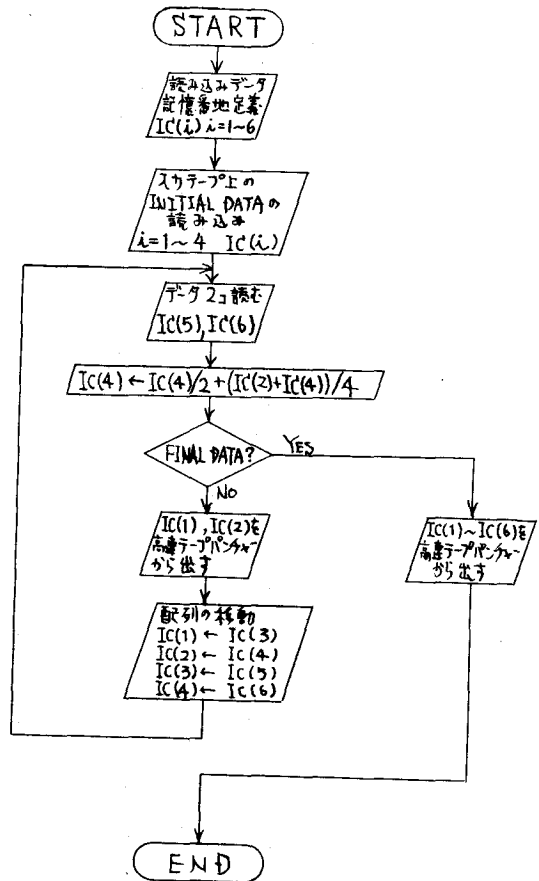
制御の観点からみたときは、負荷トルクの検出が重要であるので、負荷動トルク波形の再現を実験した。

第 4-82 図(a)は 3 相 50 Hz 200 V 商用電源で電動機を無負荷運転しているときに、負荷回路を閉じたとき、および開いたときの負荷トルク波形を示す。過渡現象はほぼ 0.1 秒以内に終ることがわかる。波形は 1 次遅れ系のステップ応答を示しており、時定数は負荷回路の回路定数により定まるものである。

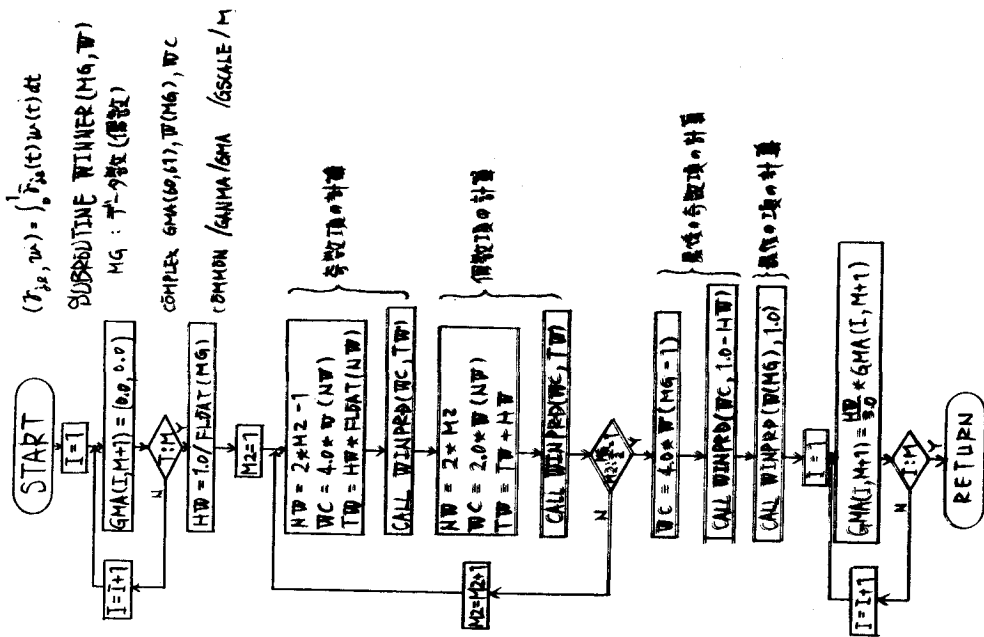
第 4-82 図(b)は、最初に負荷回路に電流 (0.77 [A]) を流しておいてから、50 Hz 200 V 商用電源を接続したときの負荷動トルク波形である。

同図(a)の場合に比し過渡現象の継続時間が長く、波形も異なり、 \tan^{-1} 形となっている。

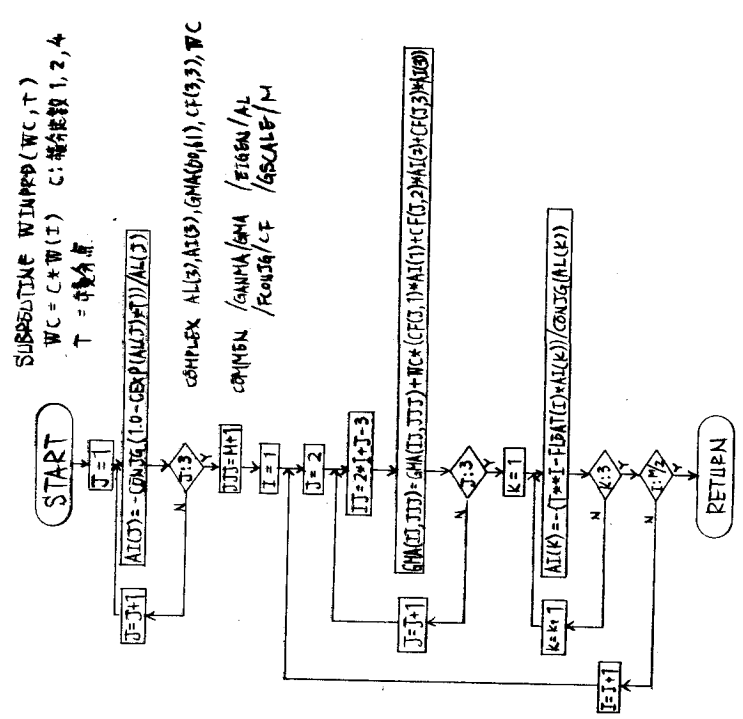
これは(b)に示す波形がほぼ電動機速度を示すものであり、電動機からみた負荷トルクが電動機速度の関数になっていることがよくわかる。



第4-58図 平滑を行なうプログラムのフローチャート

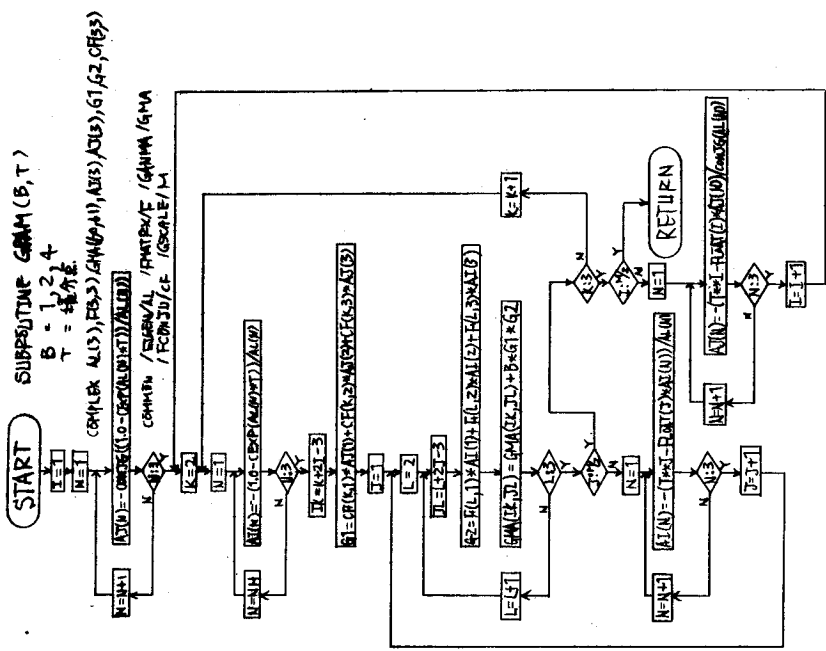


第4-61図 内積を求めるフローチャート (a)

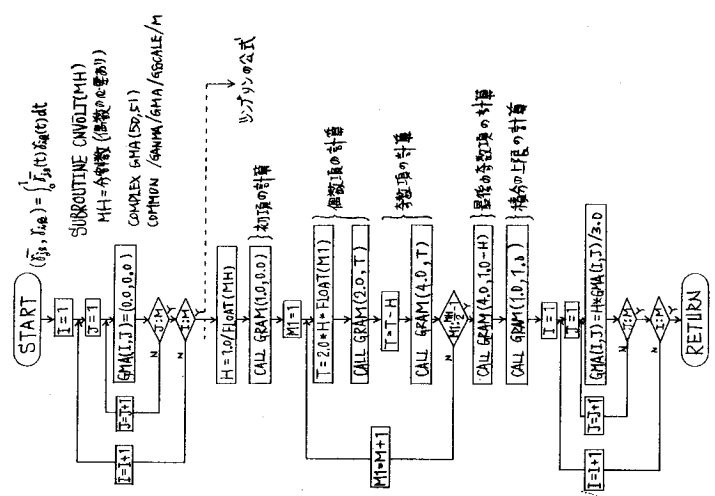


第4-61図 (b) 内積を求めるフローチャート

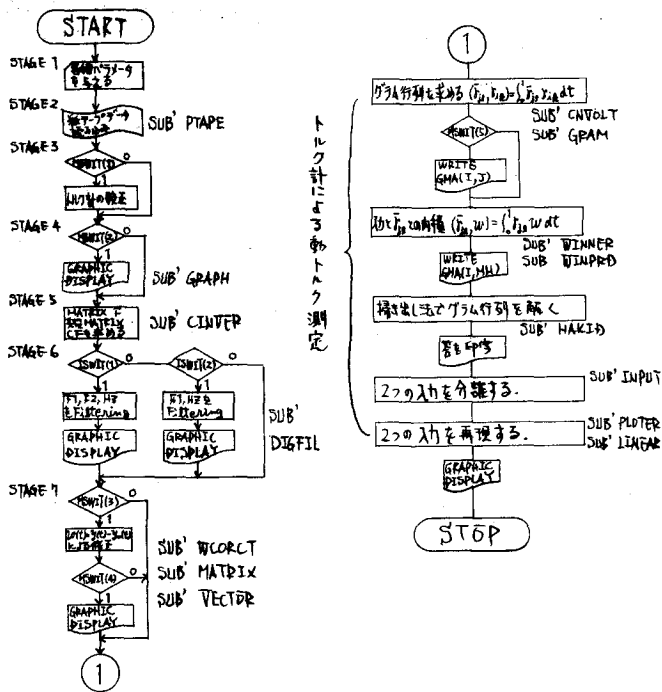
第4-61図 (b)



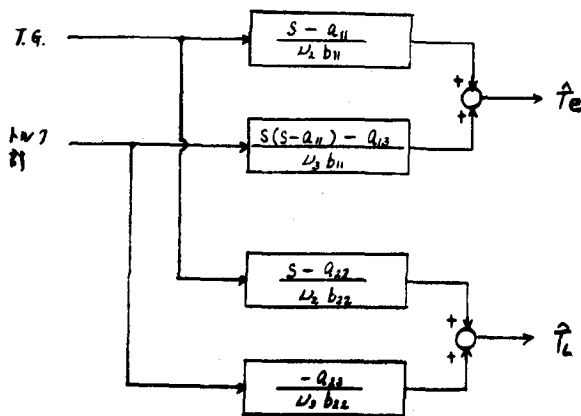
第4-62図 (b)



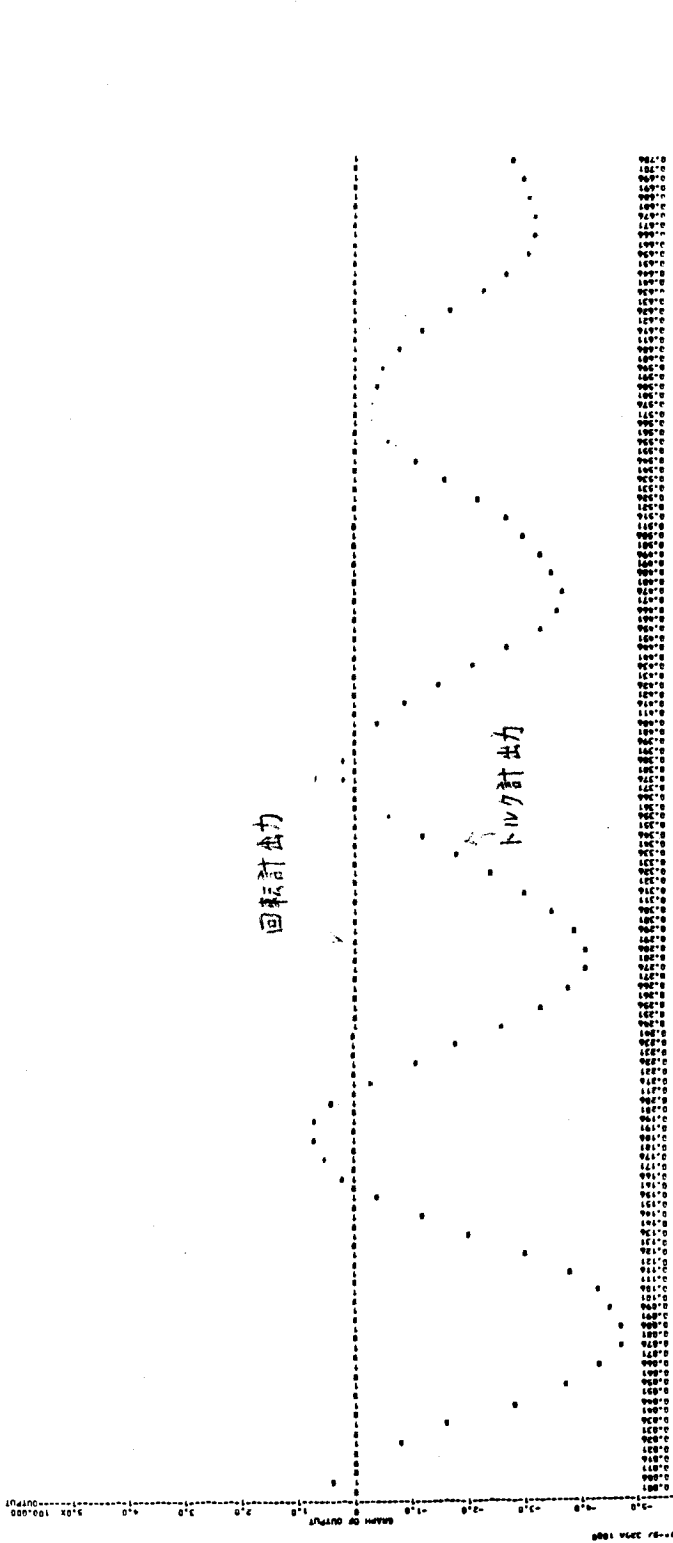
第4-62図 グラム行列を 求めるフローチャート (a)



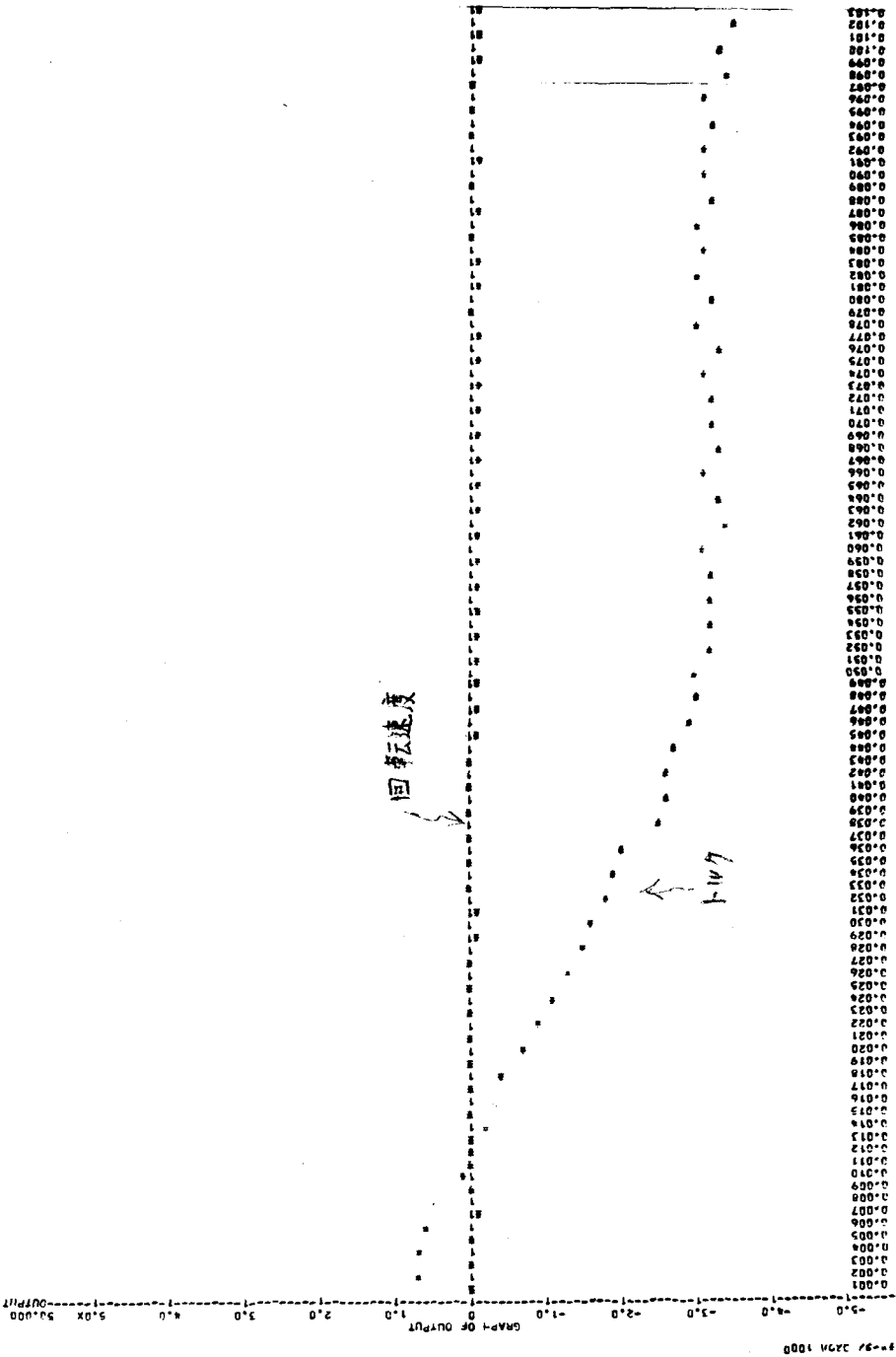
第4-63図 全体のプログラムのフローチャート



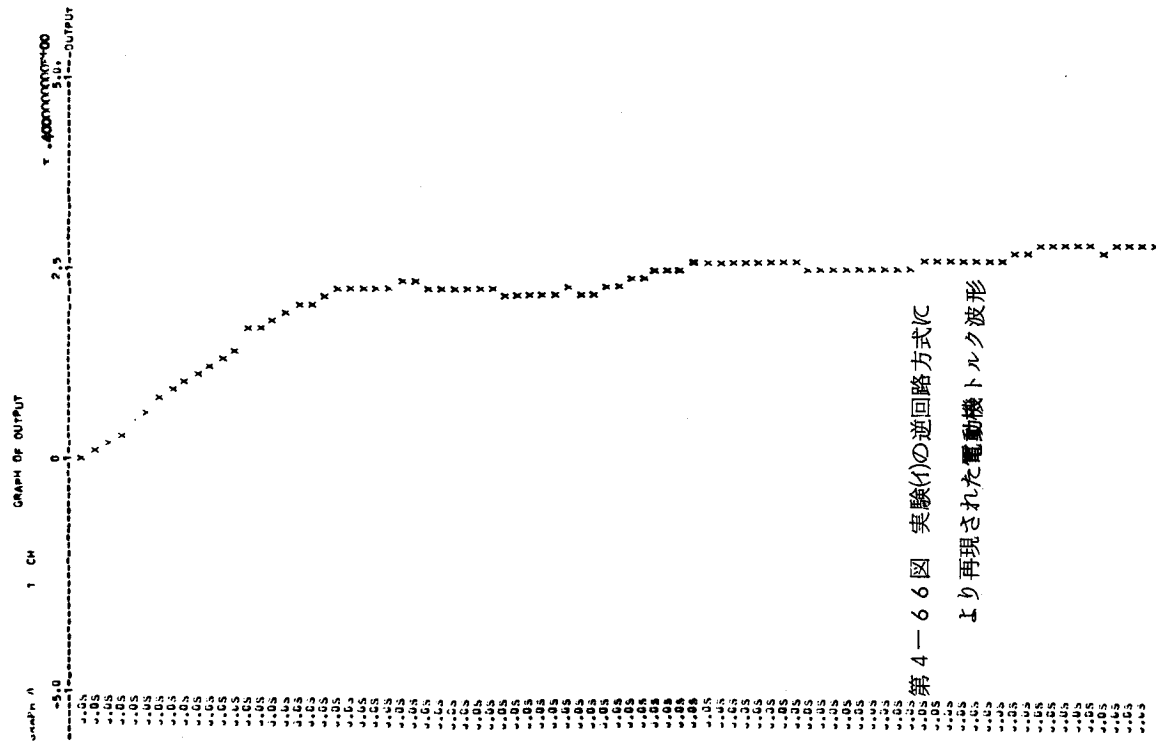
第4-79図 電動機トルクおよび負荷トルクアナログ測定回路



第4-64図 実験(1) (3相200V50Hz 正弦波印加) の回転速度およびトルク実測波形

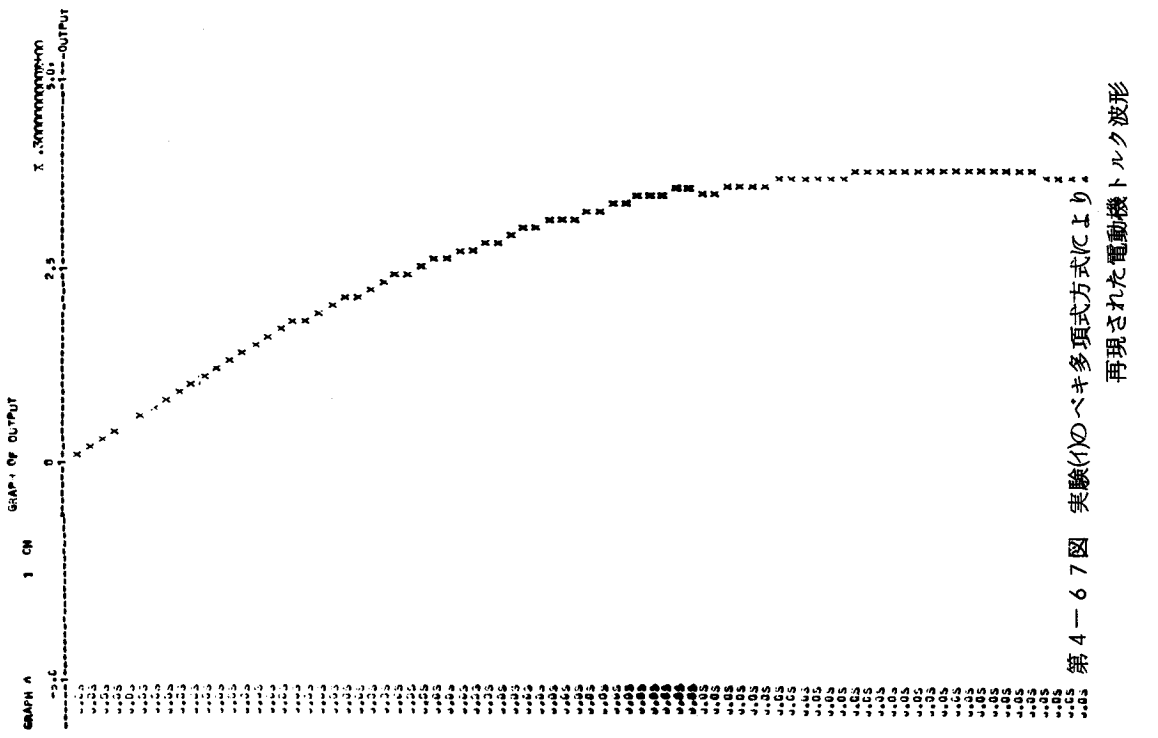


第4-65図 実験(4)の前処理(50Hz 除去フィルタ通過, 平滑操作)
後の回転速度およびトルク波形



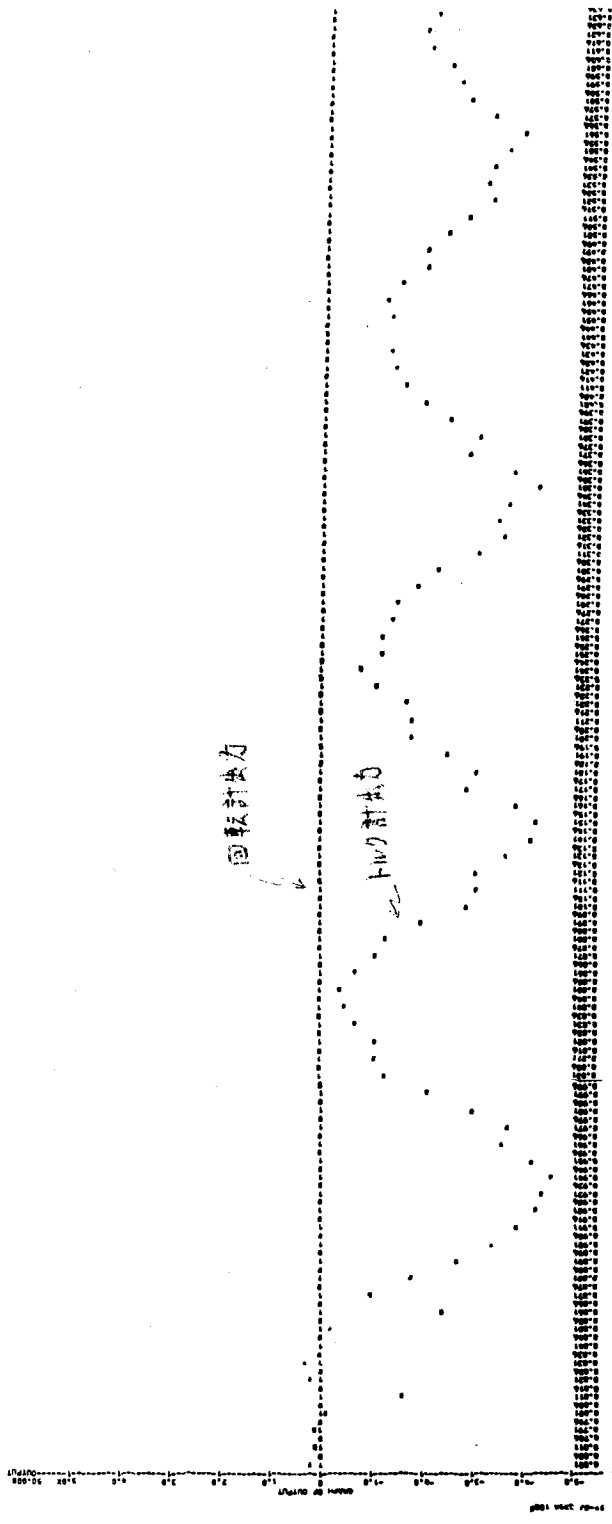
第 4-66 図 実験(4)の逆回路方式に

より再現された電動機トルク波形

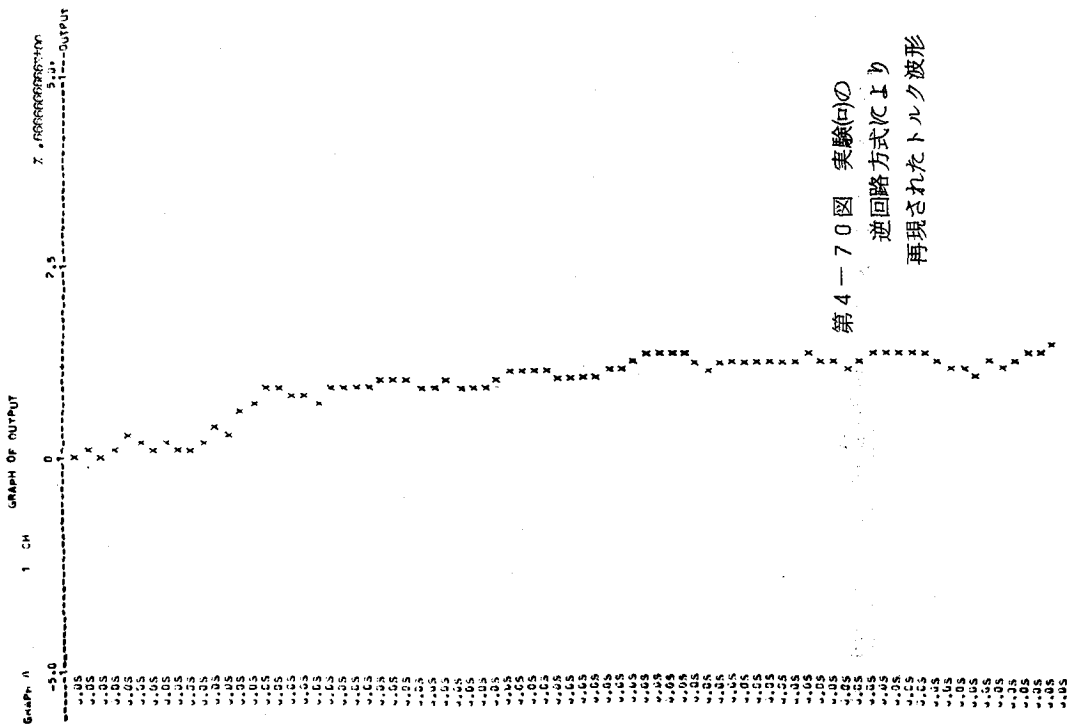


第 4-67 図 実験(4)のべき多項式方式により

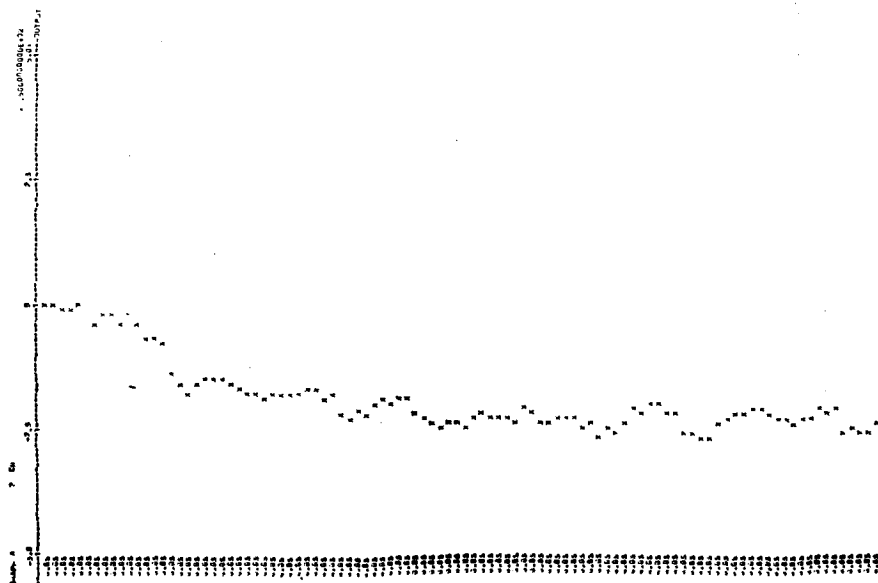
再現された電動機トルク波形



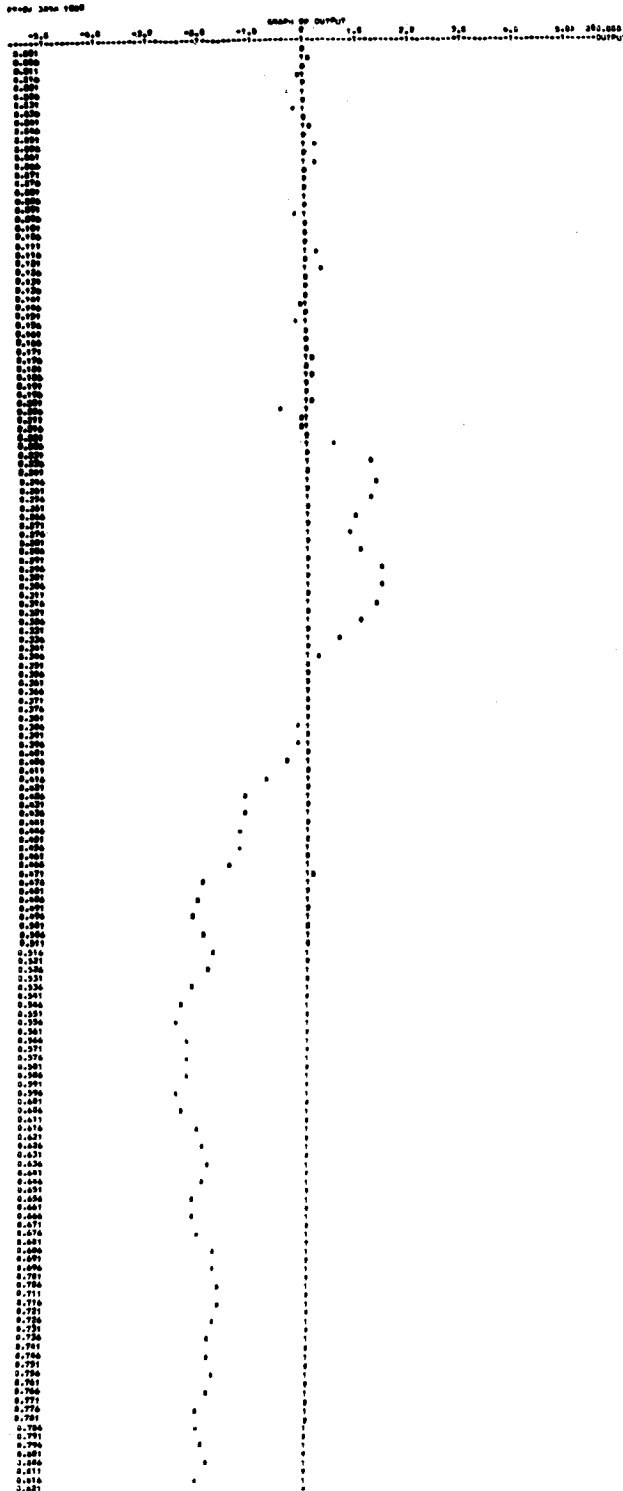
第4-68図 実験(白) (D.C.50V, 約50Hz インバータ出力印加) の回転速度およびトルク実測波形



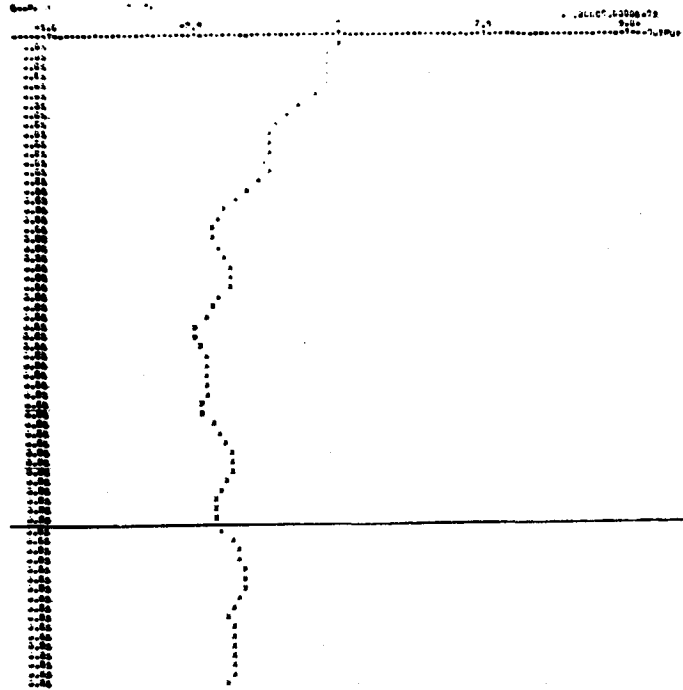
第4-69図 実験(口)の前処理 (50 Hz, 300 Hz 除去フイルタ通過, 平滑操作) 後のトルク波形



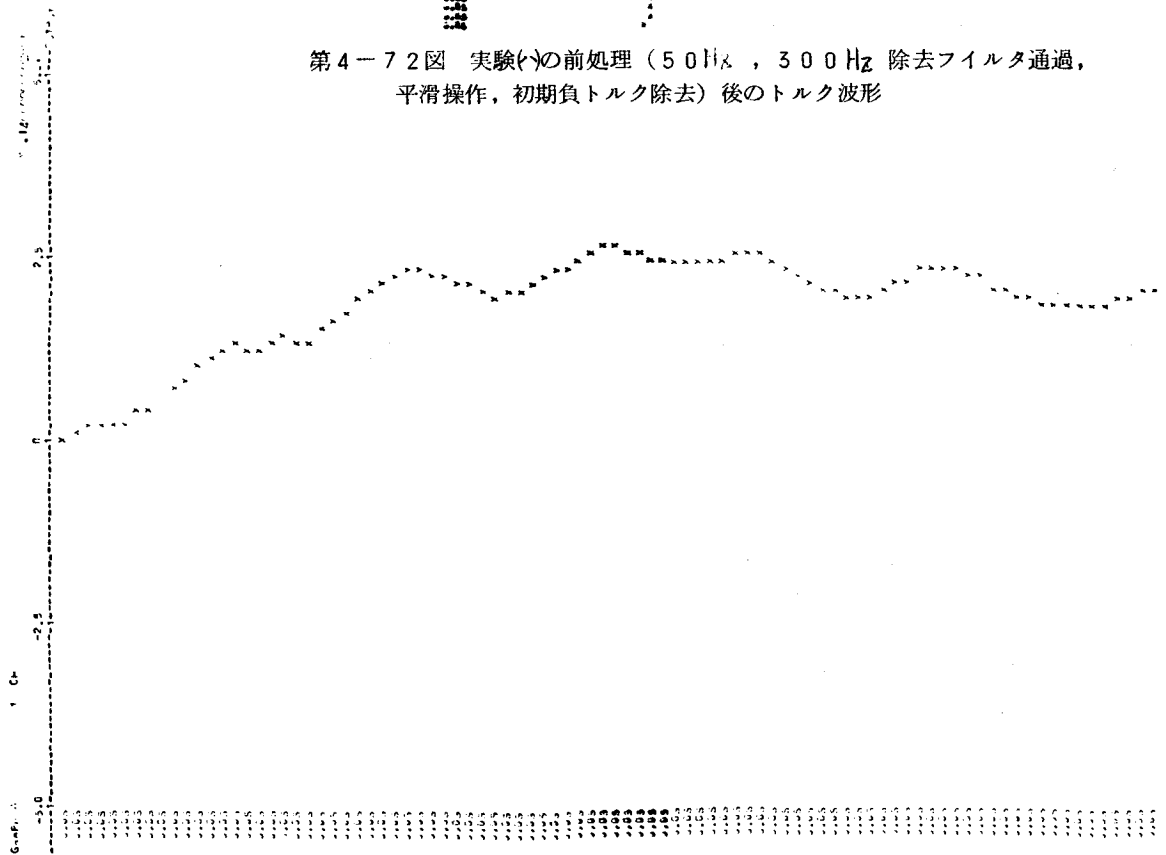
第4-70図 実験(口)の逆回路方式により再現されたトルク波形



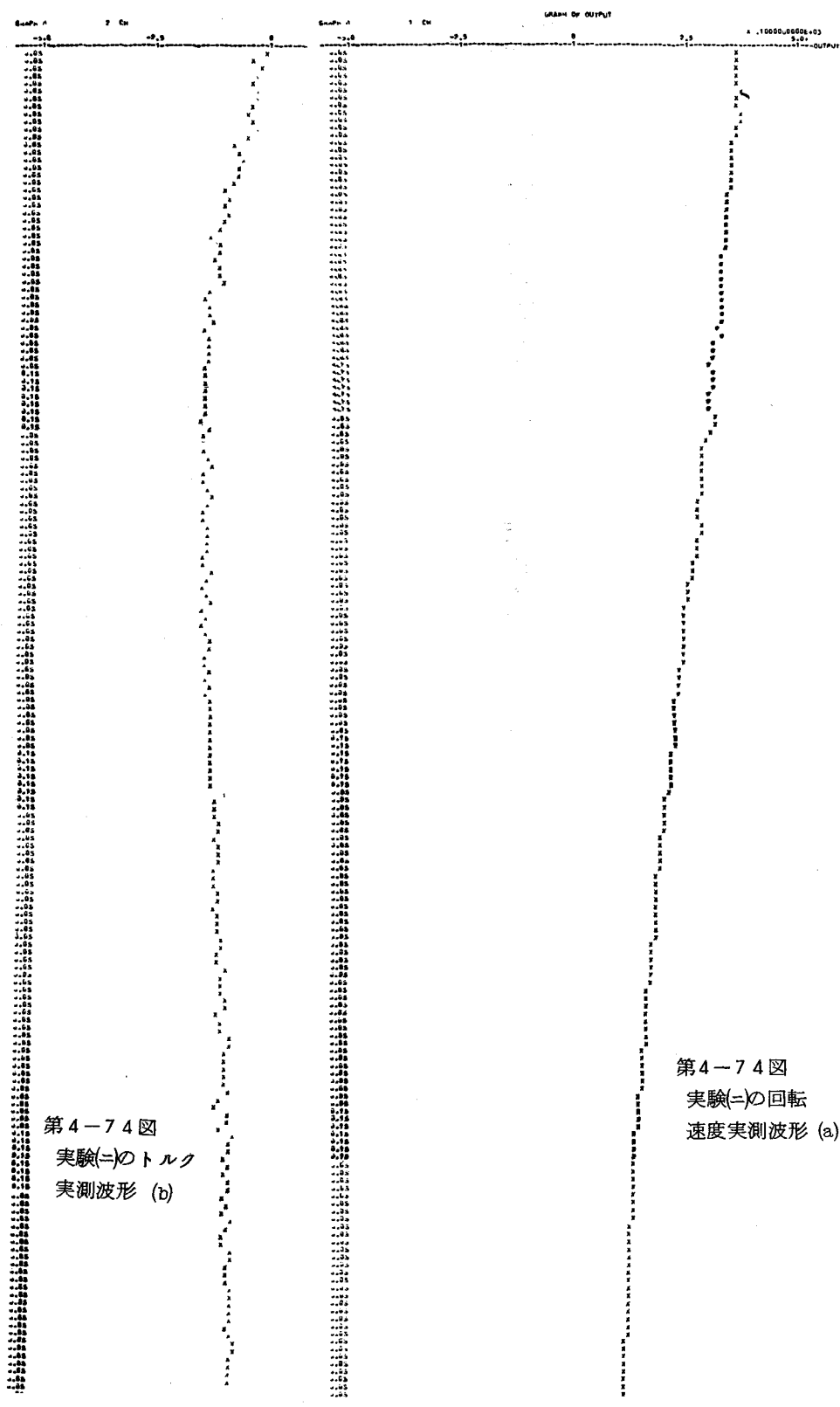
第4-71図 実験(イ) (惰性運転時一約1200R. P. M. にインバータ電源へ再投入) のトルク実測波形



第4-72図 実験(イ)の前処理 (50Hz, 300Hz 除去フィルタ通過, 平滑操作, 初期負トルク除去) 後のトルク波形

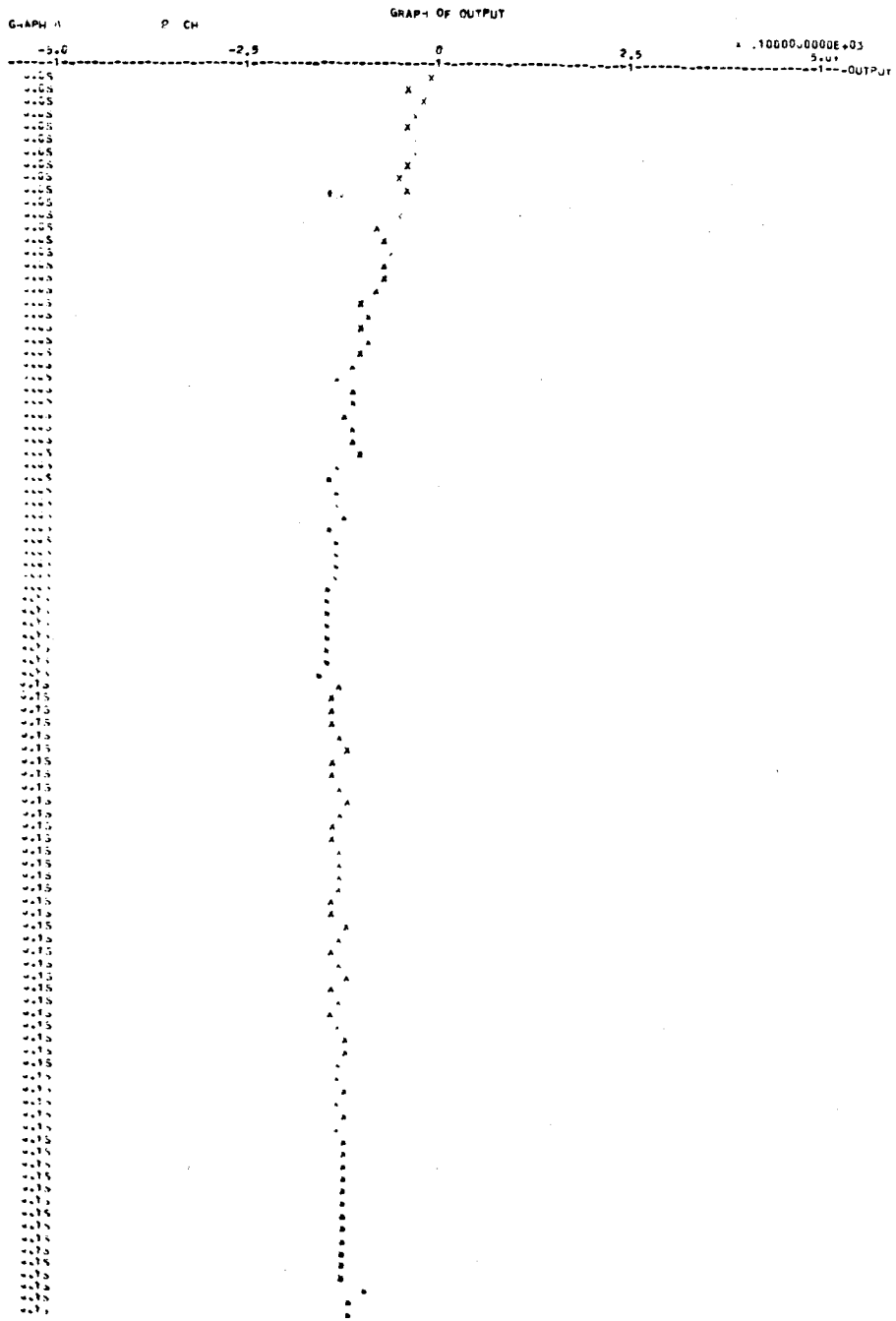


第4-73図 実験(イ)の逆回路方式により再現された電動機トルク



第4-74図
 実験(=)のトルク
 実測波形 (b)

第4-74図
 実験(=)の回転
 速度実測波形 (a)



第4-75図 実験(=)のトルク実測波形 (部分の拡大)

I J GRAM(I..J)

Table with 18 columns and 18 rows of numerical data. The values are arranged in a grid, with some cells containing multiple numbers separated by spaces. The data appears to be a sequence of integers or floating-point numbers, possibly representing a matrix or a list of values.

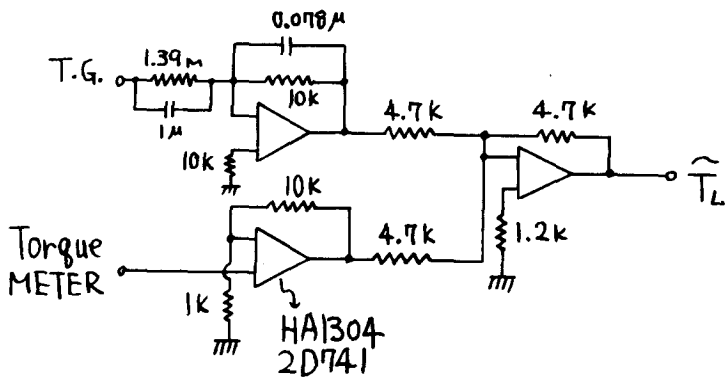
第4-7-6図 実験(□)の係数グラム行列の計算結果

13	1	0.4866478536862213E-02	0.4866478534975787E-02
13	2	0.1763527282428790E-08	0.1763527281869288E-08
13	3	0.2631956563602326E-09	0.2631956562582080E-09
13	4	0.4866477182761713E-02	0.4866477180875289E-02
13	5	0.296441621080770E-09	0.2964416209912154E-09
13	6	0.365332097846248E-11	0.365332096060667E-11
13	7	0.486647697705443E-02	0.4866476955779015E-02
13	8	0.637651021435789E-10	0.6376510211474817E-10
13	9	0.3665834236295345E-11	0.3665834234502082E-11
13	10	0.4866476914062406E-02	0.4866476912175979E-02
13	11	0.194320960652906E-10	0.1943209605634104E-10
13	12	0.366585477378731E-11	0.3665854771994102E-11
13	13	0.4866476905256735E-02	0.4866476903370312E-02
13	14	0.103540918803944E-10	0.1035409187558144E-10
13	15	0.3665861011649544E-11	0.3665861009856267E-11
13	16	0.4866476903370312E-02	0.4866476901483887E-02
13	17	0.840932550324818E-11	0.8409325499438269E-11
13	18	0.3665862769807373E-11	0.3665862766014098E-11
14	1	0.1035409489530575E-10	0.8409327990573753E-11
14	2	0.3282586658918702E-17	0.2705782927542838E-17
14	3	0.5599851591881907E-18	0.4548053627473100E-18
14	4	0.1035409247470162E-10	0.8409325985506880E-11
14	5	0.6374138103663983E-18	0.5169380902774714E-18
14	6	0.9022572919572188E-20	0.7178676746492278E-20
14	7	0.1035409200094088E-10	0.8409325599997895E-11
14	8	0.149007521984605E-18	0.1195062075827211E-18
14	9	0.9047021343159741E-20	0.7198298200601843E-20
14	10	0.1035409190192756E-10	0.8409325520406279E-11
14	11	0.469252036584066E-19	0.3746302815395568E-19
14	12	0.9047085405086174E-20	0.7198332548667988E-20
14	13	0.1035409188039444E-10	0.8409325503248182E-11
14	14	0.247262560714948E-19	0.1976447692792443E-19
14	15	0.9047077613758042E-20	0.71983343987032589E-20
14	16	0.1035409187558144E-10	0.8409325499438269E-11
14	17	0.1976427692792443E-19	0.1583653608328685E-19
14	18	0.9047081886287335E-20	0.71983347396235807E-20
15	1	0.3665862038750471E-11	0.3665863796908002E-11
15	2	0.1120745918946855E-17	0.1120750463267841E-17
15	3	0.1926295336841850E-18	0.192626287714612E-18
15	4	0.3665861222466282E-11	0.36658298062821E-11
15	5	0.2263859404978473E-18	0.2263860489246489E-18
15	6	0.333102812727790E-20	0.333104379811599E-20
15	7	0.3665861055420679E-11	0.3665862813578531E-11
15	8	0.5417194294443225E-19	0.5417196862714999E-19
15	9	0.333980056178102E-20	0.3339981629474107E-20
15	10	0.3665861019578279E-11	0.366586277736115E-11
15	11	0.1722102929521700E-19	0.1722103742095147E-19
15	12	0.3339994776528277E-20	0.3339996347830378E-20
15	13	0.3665861011649541E-11	0.3665862769807373E-11
15	14	0.9047077613758042E-20	0.9047081886287335E-20
15	15	0.333999903543414E-20	0.3340001474847955E-20
15	16	0.3665861009856267E-11	0.3665862768014098E-11
15	17	0.198343987032585E-20	0.71983347396235807E-20
15	18	0.3340001474847955E-20	0.3340003046153238E-20

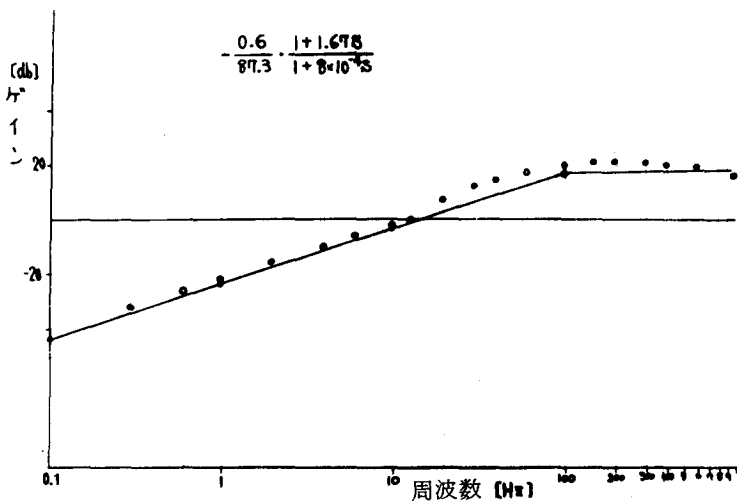
I Y(I)

1	-0.2083533211338774E-01
2	-0.1113501041596036E-07
3	-0.1126858694424094E-08
4	-0.1539121718143683E-02
5	-0.1232573697530508E-08
6	0.1963826787881160E-05
7	-0.1758343272769590E-03
8	-0.1785574675604823E-09
9	-0.9509565124300462E-11
10	-0.2484046784224223E-04
11	-0.3023484536321064E-10
12	-0.1343425189219891E-11
13	-0.3987642870761715E-05
14	-0.5647586790789226E-11
15	-0.2156582944170575E-12
16	-0.6971007347683867E-06
17	-0.1126170436713177E-11
18	-0.3769997214794444E-13

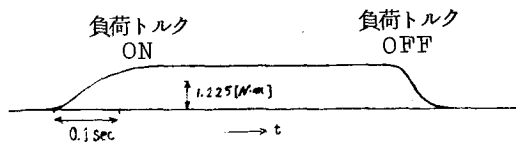
第4-7-7図 実験(□)の内積 (Y(I), W) の計算結果



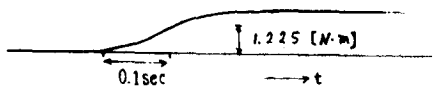
第4-80図 負荷動トルク測定回路



第4-81図 負荷動トルク測定用微分器の周波数特性



(a) 負荷ON, OFF時の再現された負荷トルク波形



(b) 負荷電流導通時に電動機電源を投入したときの負荷トルク波形

第4-82図 アナログ逆回路方式により
再現された負荷トルク波形

4 章 文献

- 1) 第 2 章文献 3) に同じ。
- 2) 関口 隆：入力可観測性による動トルクの再現，自動制御連合講演会，（'72・11）
- 3) 第 1 章文献 7) に同じ。
- 4) 第 1 章文献 9) に同じ。
- 5) 出沢，関口：回転性の慣性能率の一測定方法，第 7 回 SICE 学術講演会，433/434，（昭 43・9）
- 6) 関口 隆：入力波形の再現と準 Invariance 制御系の構成，計測自動制御学会論文集 Vol. 10, No. 6, ('74)

第 5 章 入力波形の再現によるサイリスタ・
レオナード系の Invariance 制御

第5章 入力波形の再現によるサイリスタ・レオナード系の Invariance 制御^{1) 3)}

入力可観測性の理論にもとづく入力波形の再現が可能である。再現された負荷あるいは外乱端子への入力をフィードバックすることにより Invariance 制御系の構成が可能となる。Invariance 条件を満足させる一対の入出力端子間に一つの経路しか存在しない場合は従来の理論にしたがえば Invariance 制御系の構成は不可能である。しかし、再現入力をフィードバックすることにより、一つの経路しか存在しないのに、等価的2経路系を構成して Invariance 系の実現が可能となる。

以下ではまず一般理論を述べ、つぎにサイリスタ・レオナード系への適用を、最後にアナログシミュレーションについて述べる。

5・1 入力波形の再現による Invariance 制御系構成の一般理論

第5-1図に示す制御系の u_1 と y_1 とを Invariance にする制御系の構成を考える。r 入力 m 出力間の伝達関数行列を、

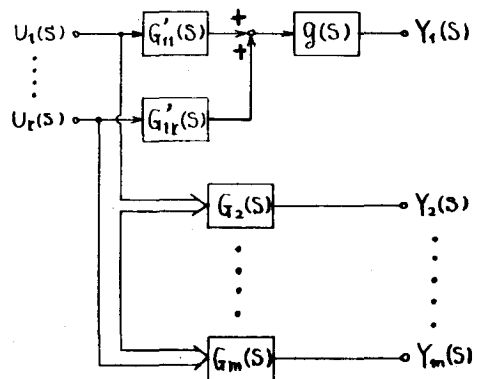
$$G(s) = \begin{bmatrix} G_1(s) \\ G_2(s) \\ \vdots \\ G_m(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} G_{11}(s) \cdots G_{1r}(s) \\ G_{21}(s) \cdots G_{2r}(s) \\ \vdots \\ G_{m1}(s) \cdots G_{mr}(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g(s)G'_{11}(s) \cdots g(s)G'_{1r}(s) \\ G_{21}(s) \cdots G_{2r}(s) \\ \vdots \\ G_{m1}(s) \cdots G_{mr}(s) \end{bmatrix} \quad (5-1)$$

とする。

ここで入力 u_1 を再現するのに適当な周波数範囲内のみの成分をもった入力波形について考えると、第5-2図に示す入力波形 u_1 の再現回路 F_1 の出力 u_1' は u_1 に等しくなる。すなわち、つぎの関数がえられる。

$$u_1'(t) \approx u_1(t) \quad (5-2)$$

つまり、この周波数範囲内のみの波形に対しては、



第5-1図 r 入力 m 出力
制御系のブロック線図

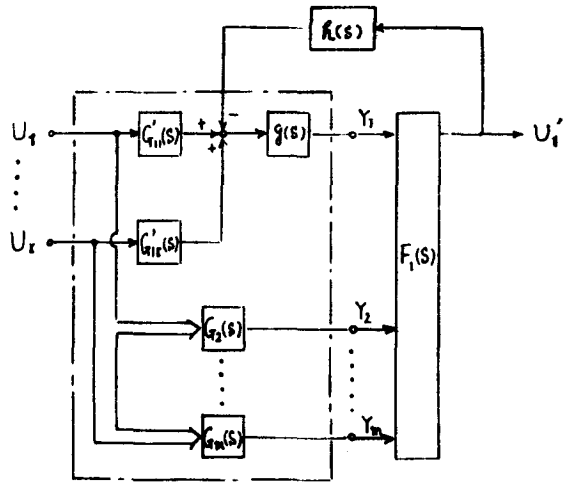
$$\begin{cases} \sum_{k=1}^m F_{1k}(s) \cdot G_{k1}(s) = 1 \\ \sum_{k=1}^m F_{1k}(s) \cdot G_{kj}(s) = 0 \quad j = 2, 3, \dots, r \end{cases} \quad (5-3)$$

$$F_1(s) = [F_{11}(s) \quad \dots \quad F_{1m}(s)]$$

が成立する。

ここで第5-2図に示すように u_1' を $h(s)$ を介してフィードバックするとつぎの関係式を得る。

$$\begin{cases} Y_1(s) = G_{11}(s)U_1(s) + G_{12}(s)U_2(s) + \dots + G_{1r}(s)U_r(s) - g(s)h(s)u_1'(s) \\ Y_2(s) = G_{21}(s)U_1(s) + G_{22}(s)U_2(s) + \dots + G_{2r}(s)U_r(s) \\ \vdots \\ Y_m(s) = G_{m1}(s)U_1(s) + G_{m2}(s)U_2(s) + \dots + G_{mr}(s)U_r(s) \end{cases}$$



第5-2図 Invariance 制御系のフィードバック構成

および、

$$u_1'(s) = F_{11}(s)Y_1(s) + \dots + F_{1m}(s)Y_m(s)$$

$Y_1(s)$ のみについて上式を整理すると、

$$\begin{aligned} & \{1 + g(s)h(s)F_{11}(s)\} Y_1(s) \\ &= [G_{11}(s) - g(s)h(s)\{F_{12}(s)G_{21}(s) + \dots + F_{1m}(s)G_{m1}(s)\}] U_1(s) \\ &+ [G_{12}(s) - g(s)h(s)\{F_{12}(s)G_{22}(s) + \dots + F_{1m}(s)G_{m2}(s)\}] U_2(s) \\ &\vdots \\ &+ [G_{1r}(s) - g(s)h(s)\{F_{12}(s)G_{2r}(s) + \dots + F_{1m}(s)G_{mr}(s)\}] U_r(s) \end{aligned}$$

上式に (5-3) 式の関係代入すると、

$$\begin{aligned} & \{1 + g(s)h(s)F_{11}(s)\} Y_1(s) \\ &= [G_{11}(s) - g(s)h(s)\{1 - F_{11}(s)G_{11}(s)\}] U_1(s) \\ &+ [G_{12}(s) + g(s)h(s)F_{11}(s)G_{12}(s)] U_2(s) \end{aligned}$$

$$\vdots$$

$$+ [G_{1r}(s) + g(s)h(s)F_{11}(s)G_{1r}(s)]u_r(s)$$

$$\therefore Y_1(s) = \frac{1}{1 + g(s)h(s)F_{11}(s)} [G_{11}(s) - g(s)h(s)\{1 - F_{11}(s)G_{11}(s)\}]u_1(s) \\ + G_{12}(s)u_2(s) + \dots + G_{1r}(s)u_r(s)$$

よってフィードバック要素 $h(s)$ を

$$h(s) = \frac{G_{11}(s)}{g(s)\{1 - F_{11}(s)G_{11}(s)\}} = G'_{11}(s) \frac{1}{1 - F_{11}(s)G_{11}(s)} \quad (5-4)$$

とすると、 $Y_1(s)$ と $u_1(s)$ との間には Invariance 関係が成立し、

$$Y_1(s) = G_{12}(s)u_2(s) + \dots + G_{1r}(s)u_r(s)$$

となる。こゝで勿論他の端子間の関係は不変である。

もし、正負反転して入力波形を再現する場合には (5-3) のかわりに、

$$\begin{cases} \sum_{k=1}^m F_{1k}(s)G_{k1}(s) = -1 \\ \sum_{k=1}^m F_{1k}(s)G_{kj}(s) = 0 \quad j = 2, \dots, r \end{cases} \quad (5-3')$$

を使用すると (5-4) 式は、

$$h(s) = \frac{G_{11}(s)}{g(s)\{-1 - F_{11}(s)G_{11}(s)\}} = -G'_{11}(s) \frac{1}{1 + F_{11}(s)G_{11}(s)} \quad (5-4')$$

となる。

上述では u'_1 を $h(s)$ を介してフィードバックしたが、仮りに (5-2) 式で与えられる u'_1 が独立の端子から印加される開ループ系を考えると Y_1 に関してはつぎの関係式が得られる。

$$Y_1(s) = G_{11}(s)u_1(s) + G_{12}(s)u_2(s) + \dots + G_{1r}(s)u_r(s) - g(s)h(s)u'_1(s) \\ \approx g(s)\{G'_{11}(s) - h(s)\}u_1(s) + G_{12}(s)u_2(s) + \dots + G_{1r}(s)u_r(s)$$

よってこの場合には

$$h(s) = G'_{11}(s) \quad (5-5)$$

により、 u_1 と y_1 との Invariance 関係が成立する。

すなわち、

$$Y_1(s) \approx 0 \cdot u_1(s) + G_{12}(s)u_2(s) + \dots + G_{1r}(s)u_r(s)$$

となる。

u_1 の等価入力端子 u'_1 が開ループ系として得られた場合には、(5-5) 式は u_1 から y_1 まで等価的に 2 経路が得られたことを意味する。

(5-4) 式を (5-5) 式と比較してみるとつぎのことがわかる。すなわち、Invariance 制御系を構成するための等価的な第 2 の経路は、開ループ系の場合の

$$G'_{11}(s)$$

に対して、フィードバックによる効果

$$\frac{1}{1 - F_{11}(s)G_{11}(s)}$$

が附加されたことになる。すなわち、前向き要素

$$G'_{11}(s)$$

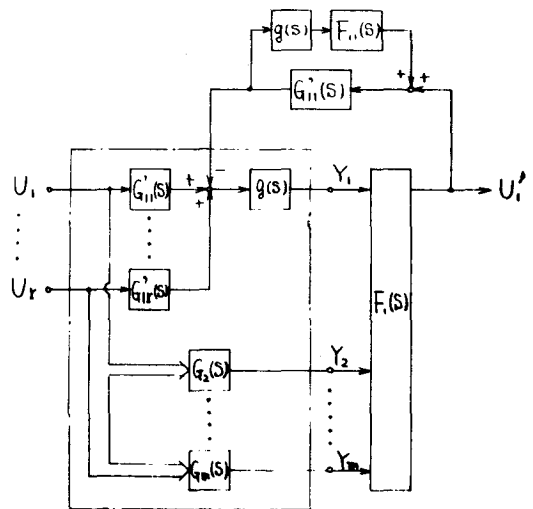
に $F_{11}(s)g(s)$ がフィードバック要素として加わって第 2 の等価経路を形成していることを意味する。

第 5-3 図に第 5-1 図の Invariance 制御系の構成を示す。

5.2 サイリスタ・レオナード系への適用

サイリスタ・レオナード系のサイリスタによる電源部分は電動機の時定数に比して時定数が著るしく小さい。それゆえこの部分の時間遅れは無視してもさしつかえない。

5.2.1 他励直流電動機の入力可観測性 第 5-4 図に他励直流電動機のブロック線図を示す。電機子電流および電動機角速度を状態量とし、また観測量はそれらの量を変換（電圧に）したものとすると、つぎの方程式が得られる。



第 5-3 図 Invariance 制御系

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} i \\ \omega_M \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{R_M}{L_M} & -\frac{K_f}{L_M} \\ \frac{K_g}{J} & -\frac{D}{J} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i \\ \omega_M \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{L_M} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{J} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v \\ T_L \end{bmatrix} \quad (5-6)$$

$$\begin{bmatrix} y_i \\ y_\omega \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mu_i & 0 \\ 0 & \mu_\omega \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i \\ \omega \end{bmatrix}$$

ただし、

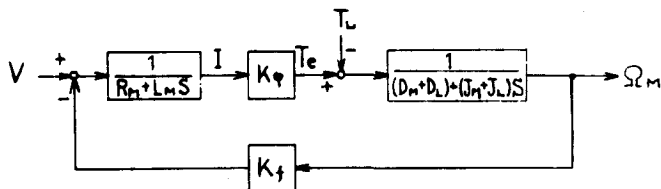
$$J = J_M + J_L, \quad D = D_M + D_L$$

上式を

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bx \\ y = Cx \end{cases}$$

として入力可観測性を検討すると、

$$CB = \begin{bmatrix} \frac{\mu_i}{L_M} & 0 \\ 0 & -\frac{\mu_\omega}{J} \end{bmatrix}$$



第5-4図 他励直流電動機のブロック線図 (電流検出方式)

であるから、一般波形入力に対する入力可観測性が成立することが容易にわかる。よって適当な周波数範囲を設定した逆回路の構成が可能である。

(5-6) 式の電動機の伝達関数表現は、

$$\begin{bmatrix} Y_\omega \\ Y_i \end{bmatrix} = \frac{1}{1 + \frac{1}{Z_E} K_g \cdot \frac{1}{Z} \cdot K_f} \begin{bmatrix} -\frac{\mu_\omega}{Z} & \frac{\mu_\omega K_g}{Z Z_E} \\ \frac{\mu_i K_f}{Z Z_E} & \frac{\mu_i}{Z_E} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_L \\ V \end{bmatrix} \quad (5-7)$$

であるから、入力波形再現の逆回路は、

$$\begin{bmatrix} \hat{T}_L \\ \hat{V} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{\hat{Z}}{\hat{D}_\omega} & \frac{\hat{K}_g}{\hat{D}_i} \\ \frac{\hat{K}_f}{\hat{D}_\omega} & \frac{\hat{Z}_E}{\hat{D}_i} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Y_\omega \\ Y_i \end{bmatrix} \quad (5-8)$$

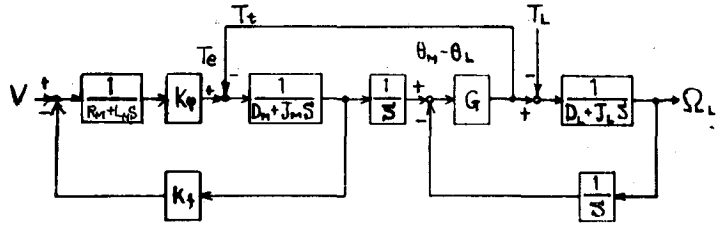
となる。ただし、 $Z = D + JS$, $Z_M = R_M + L_M S$ であり、 $\hat{\quad}$ は入力再現回路の定数とその出力を示す。

$$\begin{cases} \dot{z} = Az + Bx \\ y = Cz \end{cases}$$

として入力可観測性を検討すると、

$$CB = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -\frac{\mu_L}{J_L} \end{bmatrix}$$

$$CAB = \begin{bmatrix} 0 & \frac{\mu_t}{J_L} \\ 0 & \frac{\mu_L D_L}{J_L^2} \end{bmatrix}$$



第5-6図 他励直流電動機系のブロック線図 (軸伝達トルク検出方式)

$$CA^2 B = \begin{bmatrix} \frac{\mu_t K_\phi}{J_M L_M} & -\frac{\mu_t D_L}{J_L^2} \\ 0 & \frac{\mu_L (G - D_L / J_L)}{J_L^2} \end{bmatrix}$$

となるので、一般波形入力に対する入力可観測性が成立し、逆回路の構成が可能である。

(5-9) 式の伝達関数表現は、

$$\begin{bmatrix} Y_L \\ Y_t \end{bmatrix} = \frac{1}{\Delta} \begin{bmatrix} -\frac{\mu_L}{K_\phi G} [G Z_E + S(Z_M Z_E + K_\phi K_f)] & \mu_L \\ \frac{\mu_t}{K_\phi} [Z_M Z_E + K_f K_\phi] & \mu_t Z_L \end{bmatrix} \quad (5-10)$$

$$\Delta = \frac{1}{K_\phi G} [G Z_E Z_L + S Z_L (Z_M Z_E + K_f K_\phi)] + \frac{1}{K_\phi G} [G Z_M Z_E + K_f K_\phi G]$$

$$Z_M = D_M + J_M S, \quad Z_L = D_L + J_L S$$

であるから、入力波形再現の逆回路の伝達関数は次式で与えられる。

$$\begin{bmatrix} \hat{T}_L \\ \hat{V} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{\hat{Z}_L}{\hat{D}_L} & \frac{1}{\hat{D}_t} \\ \frac{\hat{Z}_M \hat{Z}_E + \hat{K}_\phi \hat{K}_f}{\hat{K}_\phi \hat{D}_L} & \frac{\hat{G} \hat{Z}_E + S(\hat{Z}_M \hat{Z}_E + \hat{K}_f \hat{K}_\phi)}{\hat{K}_\phi \hat{G} \hat{D}_t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Y_L \\ Y_t \end{bmatrix} \quad (5-11)$$

ゆえに \hat{T}_L 再現の回路は第5-7図で与えられる。

5.2.2 サイリスタ・レオナード系の Invariance 補償回路とその近似回路

< A > 電流検出の場合 電機子電流と電動機角速度を出力とする場合の伝

達関数表現 (5-7) 式を第5-1図の形に表わすと第5-8図を得る。この第5-8図を第5-1図と比較してつぎの関係式を得る。

$$G_{11}'(s) = -\frac{Z_E}{K_g}$$

$$G_{12}'(s) = 1$$

$$g(s) = \frac{\nu_\omega K_g / Z_E Z}{1 + K_f K_g / Z_E Z}$$

また, (5-8) 式より,

$$F_{11}(s) = -\frac{\hat{Z}(s)}{\hat{D}_\omega}$$

$$F_{12}(s) = \frac{\hat{K}_g}{\hat{D}_i}$$

を得る。よって (5-4) 式は,

$$h(s) = -\frac{Z_E}{K_g} \cdot \frac{1}{1 - \frac{\nu_\omega K_g / Z_E Z}{1 + K_f K_g / Z_E Z} \cdot \frac{Z_E}{K_g} \cdot \frac{\hat{Z}}{\hat{D}_\omega}}$$

いま,

$$\hat{Z}(s) = Z(s), \quad \hat{D}_\omega = \nu_\omega$$

とすると,

$$h(s) = -\frac{Z_E}{K_g} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{1 + K_f K_g / Z_E Z}} \quad (5-12)$$

(5-12) 式に示されるフィードバック要素 $h(s)$ の構成をブロック線図で示したのが第5-9図である。

第5-9図の正のフィードバック要素は,

$$f = \frac{1}{1 + K_g K_f / Z_E Z} = \frac{1}{1 + \frac{K_f K_g / R_M D}{(1 + T_E s)(1 + T s)}} \quad (5-13)$$

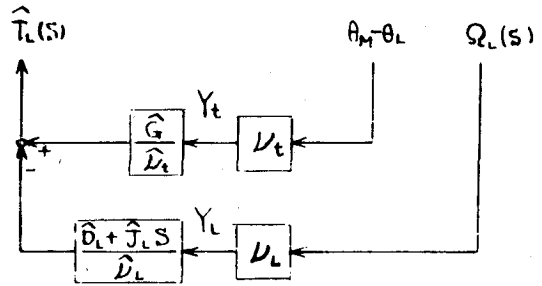
$$T_E = \frac{L_M}{R_M}$$

$$T = \frac{J}{D}$$

とあらわすことができる。上式は低周波領域では,

$$f \approx \frac{R_M D}{K_g K_f + R_M D} \ll 1 \quad (5-13')$$

また, 高周波数領域では,



第5-7図 軸伝達トルク検出方式の負荷トルク波形再現の回路

$$f \approx 1$$

であることがわかる。

それゆえ γ' を 0~1 間の値をとる量とすると、フィードバック要素 $h(s)$ の近似として次式を得る。

$$h(s) \approx -(R_M + L_M s) \cdot \frac{1}{K_\varphi} \cdot \frac{1}{1 - \gamma'}$$

$f(s)$ の式で ∞ の周波数まで考慮すると $|f(s)| \rightarrow 1$ となり、正のフィードバック補償部分のゲインは無窮大になってしまうが、入力波形再現回路において、すでに適当な周波数以上をカットしているため高周波成分は考慮しなくてもよい。中間周波数領域では、

$$\frac{K_\varphi K_f}{R_M D} \gg 1 \quad (5-14)$$

が成立するときは、

$$|f| \ll 1$$

であるから、

$$\gamma' \ll 1$$

となる。よって、

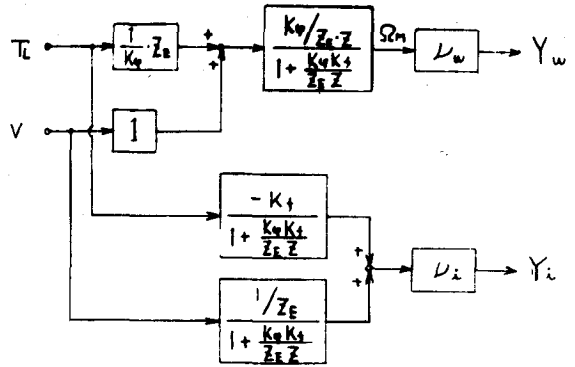
$$\gamma = \frac{1}{1 - \gamma'}$$

とおくと、

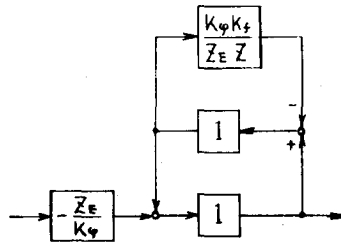
$$h(s) \approx -Z_E \cdot \frac{\gamma}{K_\varphi} \quad (5-15)$$

は (5-12) 式に示したフィードバック要素の近似形を示すことになる。第 5-10 図はこの近似回路のブロック線図を示す。

(5-10) 式の近似回路における γ はフィードバックの効果を示すものである。もし、再現された負荷トルク波形 \hat{T}_L を開ループの補償回路の信号として使用することが許されるならば、(5-5) 式より、



第 5-8 図 他励直流電動機系のブロック線図 (フィードバック端子を表現したもの)



第 5-9 図 フィードバック要素



第 5-10 図 フィードバック要素 $h(s)$ の近似回路

$$R(s) = -Z_E / K_g$$

となる。これは (5-15) 式において、

$$\gamma = 1$$

とおいた場合に相当し、したがって、

$$\gamma' = 0$$

を意味する。つまり電動機において、

$$\frac{1}{1 + (\text{ループゲイン})} = 0$$

$$(5-16)$$

が成立することである。したがって制御対象の他励直流電動機のループゲインが著るしく大きいときは開ループ系としての補償回路構成が許されることになる。
 軸伝達トルク検出の場合 (5-10)

式を第5-1図の形式に表現すると第5-11図を得る。

この第5-11図を第5-1図と比較すると、つぎの関係式を得る。

$$G_{11}'(s) = -\frac{1}{K_g G} \{ G Z_E + s(Z_M Z_E + K_g K_f) \}$$

$$G_{12}(s) = 1$$

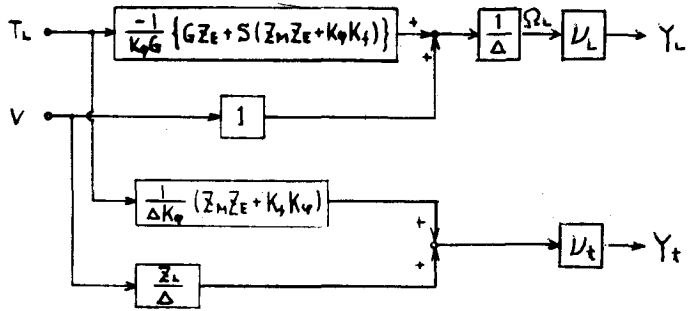
$$g(s) = \frac{U_L}{\Delta}$$

また、(5-11)式より、

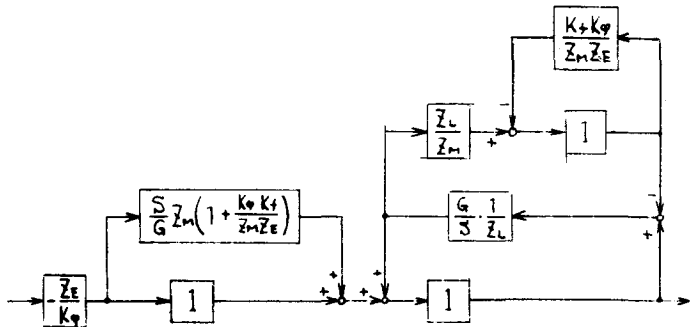
$$F_{11}(s) = -\frac{\hat{Z}_L}{\Delta}$$

$$F_{12}(s) = \frac{1}{D_x}$$

よって、



第5-11図 軸伝達トルク検出時の他励直流電動機系のブロック線図 (フィードバック端子を表現したもの)



第5-12図 フィードバック要素 (軸伝達トルク検出方式のとき)

$$\hat{Z}_L(s) = Z_L(s)$$

$$\hat{U}_x = U_x$$

とすると (5-4) 式より,

$$f(s) = -\frac{Z_E}{K_g} \left[1 + \frac{s}{G} \cdot Z_M \cdot \left(1 + \frac{K_g K_f}{Z_M Z_E} \right) \right] \quad (5-17)$$

$$\times \frac{1}{1 - \frac{\frac{G}{s} \cdot \frac{1}{Z_L}}{1 + \frac{G}{s} \cdot \frac{1}{Z_L} \cdot \frac{Z_L}{Z_M} \cdot \frac{1}{1 + K_g K_f / Z_M Z_E}}}$$

つまり, 第5-12図で表わされる。

第5-12図で並列経路の1に対するバイパス部分を検討すると,

$$e = \frac{s}{G} Z_M \left(1 + \frac{K_g K_f}{Z_M Z_E} \right) = \frac{s}{G} \cdot \frac{D_M R_M (1 + T_M s)(1 + T_E s) + K_g K_f}{R_M (1 + T_E s)} \quad (5-18)$$

$$T_M = \frac{J_M}{D_M}$$

とおいたとき e は直流でゲイン零の微分特性をもつから

$$|e| \ll 1$$

となる中間周波数以下の領域では, バイパス経路は無視してよい。

また,

$$F_{11}(s) G_{11}(s) \Big|_{s \rightarrow 0} = \frac{1}{1 + \frac{R_M D_M + K_g K_f}{R_M D_L}} \ll 1 \quad (5-19)$$

であり, かつ中間周波領域で,

$$\left| \frac{Z_M}{Z_L} f \right| \ll 1 \quad (5-20)$$

が成立するときは $G/D_L \gg 1$ とすると,

$$F_{11}(s) G_{11}(s) \approx \frac{1}{1 + \frac{G}{D_L} \cdot \frac{1}{s(1 + T_L s)}} \ll 1 \quad (5-21)$$

$$T_L = \frac{T_L}{D_L}$$

となる。

よって γ' および γ を前述と同様に定義すると,

$$f(s) \approx -Z_E \cdot \frac{1}{K_g} \cdot (1 + e) \gamma \quad (5-22')$$

あるいはバイパス経路を無視して,

$$h(s) \approx -Z_E \cdot \frac{1}{K_G} \cdot \gamma$$

(5-22)

の近似式を得る。この近似回路は前述と同様に第5-10図で表わされる。

(5-22)式の γ がフィードバックの効果を示す量であることは前述と同様である。

5.3 サイリスタ・レオナード系のパラメータの測定

実験に使用したサイリスタ・レオナード系の全体の構成を第5-13図に示す。図中の直流電動機、直流発電機および回転力計の仕様を下記する。

直流電動機：3.7 Kw, 220V,
2.03 A, 3700—
2500 RPM 連続・
分巻, 形G115,
式A (東洋電機製)

直流発電機：同上。

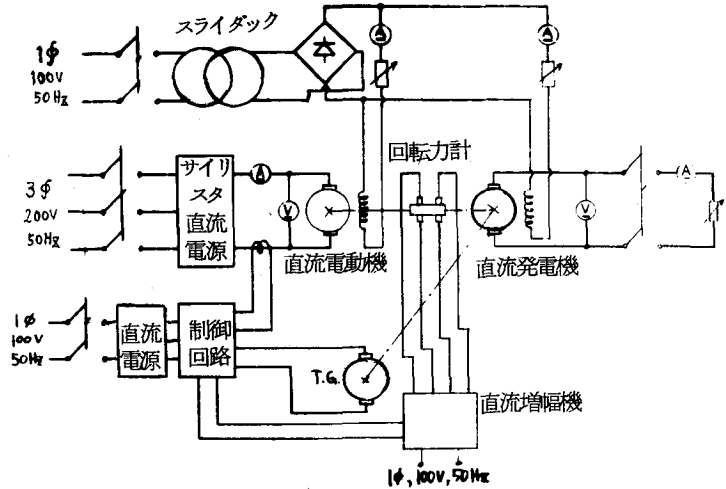
トルク計：3Kg-m

(新興通信工業製)

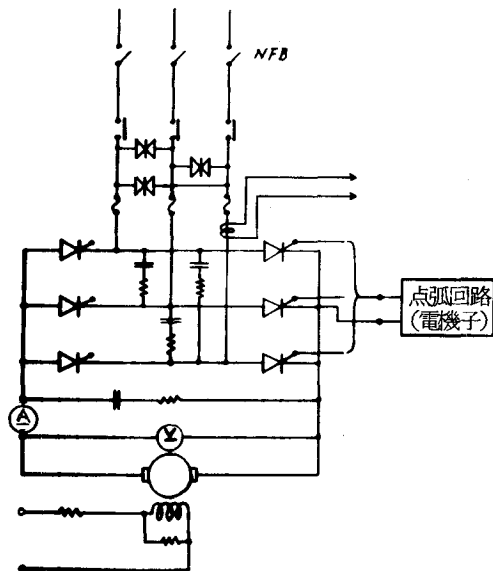
サイリスタ直流電源部分の結線図を第5-14図に示す。また、第5-15図にサイリスタゲート用点弧回路を示す。

5.3.1 機械系定数の決定

< A > 電動機・発電機の電機子の慣性モーメント J_M, J_L の測定。



第5-13図 サイリスタ・レオナード系の全体構成図



第5-14図 サイリスタ直流電源主回路

測定方法は第4章3節
 <A>および<C>の方法
 と同一である。ただし、第
 5-16図に示すリングを
 被測定体につけ、このリン
 グに回転力を与えた。なお
 このリングの慣性モーメン
 トは別に実測（2本吊り法）
 および計算から求めた。

測定結果は、
 測定用リングの慣性モーメ
 ント：0.0018 [Kg-m²]
 電動機電機子の慣性モーメ
 ント：0.10 [Kg-m²]
 発電機電機子の慣性モーメ
 ント：0.10 [Kg-m²]
 である。

トルク計は第5-17図
 に示す2個のカップリング
 により電動機および発電機
 に直結した。トルク計の回
 転体自体の慣性モーメン
 トは無視できるが、このカッ
 プリングの慣性モーメント

は無視できない。このカッ
 プリングの慣性モーメントを2本吊りの方法で測定および計算してつぎの値を得た。

$$0.03 \text{ [Kg-m}^2\text{]}$$

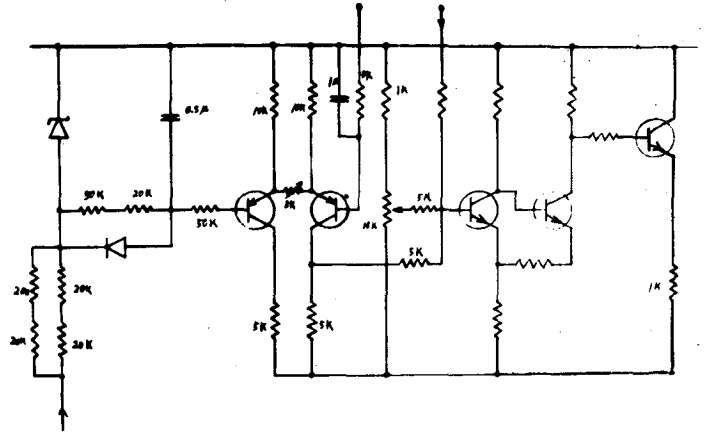
よってつぎの値を得る。

$$\text{電動機電機子慣性モーメント： } J_M = 0.10 \text{ [Kg-m}^2\text{]}$$

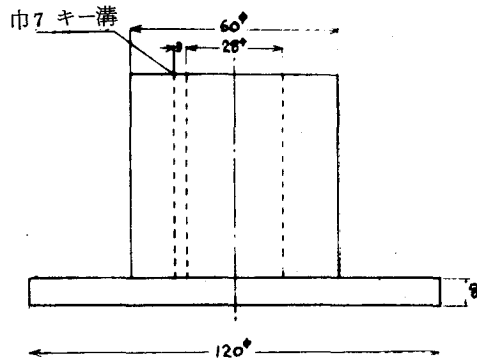
$$\text{負荷慣性モーメント： } J_L = 0.16 \text{ [Kg-m}^2\text{]}$$

$$\text{総合慣性モーメント： } J = J_M + J_L = 0.26 \text{ [Kg-m}^2\text{]}$$

 電動機・発電機の電機子の減衰定数 D_M , D_L の測定 電動機系を
 1500 R. P. M. で運転しているときに、界磁および電機子回路を同時に開
 路して電動機回転速度の減衰特性を測定したのを第5-18図に示す。第4章3
 節1項<E>に述べた方法によりこの曲線から減衰定数を求めると、高速部分に



第5-15図 サイリスタゲート点弧回路



第5-16図 慣性モーメント測定用リング

対してはつぎの値を得る。

$$D = D_M + D_L = 0.015 \quad [\text{N}\cdot\text{m}/\text{rad}/\text{sec}]$$

回転運動する力学系の散逸関数は、

$$F = \frac{1}{2} D \Omega^2$$

Ω : 角速度 [rad/sec]

で与えられ、消費パワーは、

$$P = 2 F \quad [\text{W}]$$

である²⁾よって

$$D = \frac{P}{\Omega^2} \quad [\text{N}\cdot\text{m}/\text{rad}/\text{sec}]$$

となる。

いま第5-19図に示す測定値より両機の機械損を求めると、

$$P = 210 \quad [\text{W}]$$

と得られるので、これより電動機と負荷の減衰定数は、

$$D = D_L + D_M = \frac{210}{(127.4)^2} = 0.013 \quad [\text{N}\cdot\text{m}/\text{rad}/\text{sec}]$$

と得られる。両者とも若干の測定誤差が考えられるので、両測定値の平均値をとり、

$$D = 0.014 \quad [\text{N}\cdot\text{m}/\text{rad}/\text{sec}]$$

を得る。 D_M と D_L とはほぼ等しいと仮定してつぎの値を得る。

$$D_M \approx D_L \approx \frac{1}{2} D = 0.007 \quad [\text{N}\cdot\text{m}/\text{rad}/\text{sec}]$$

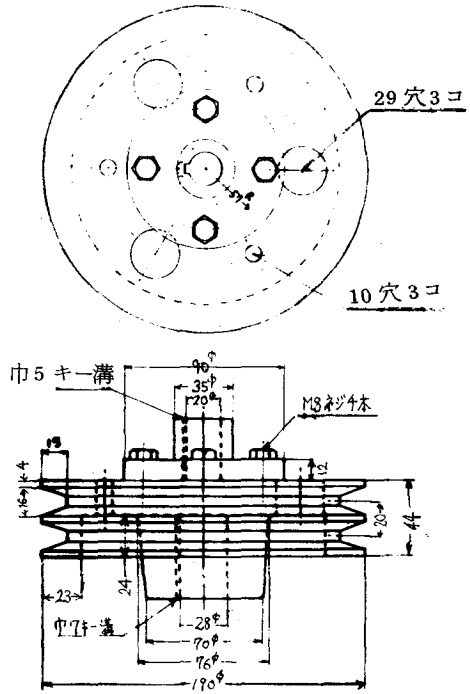
< C > トルク計のトルク伝

達係数 G 。こゝではメーカーより設計データをもらって計算により求めた。

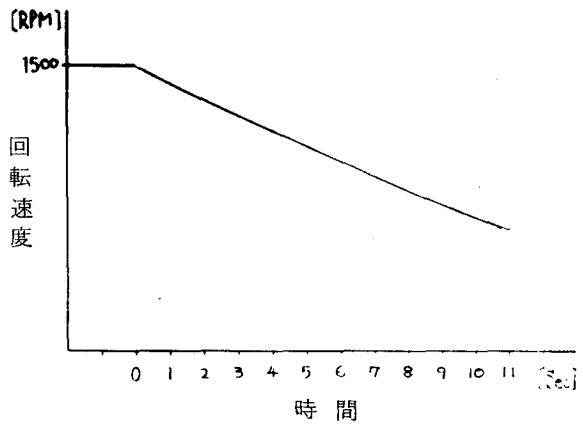
トルク計受歪部は、

長さ $l = 14 \quad [\text{mm}]$

外径 $2a = 15.46 \quad [\text{mm}]$



第5-17図 トルク計のカップリング



第5-18図 直流電動機系の速度減衰曲線

歪み率 3 Kg w - m で 1×10^{-6} である。よって T : 伝達トルク, $\Delta\theta$: ねじれ角とすると,

$$G = \frac{T}{\Delta\theta}$$

$$= \frac{T \times a}{\Delta l} = \frac{T \times a}{1 \times 10^{-6} \times l}$$

$$= 1.66 \times 10^3 \text{ [Kg w / rad]}$$

$$= 1.62 \times 10^4 \text{ [N \cdot m / rad]}$$

を得る。

5.3.2 電気回路定数の測定

< A > 抵抗値の測定。電動機電機子抵抗の測定は、交流 50 Hz を使用し、電圧と電流の比より求めた。測定結果を第 5-20 図に示す。同図より 1500 R. P. M. 定格電流値での抵抗値 R_M として,

$$R_M = 0.25 \text{ [}\Omega\text{]}$$

と決定できる。

サイリスタ直流電源の内部抵抗を求めるための電圧-電流特性を示したのが第 5-21 図である。この測定結果より電源内部抵抗として,

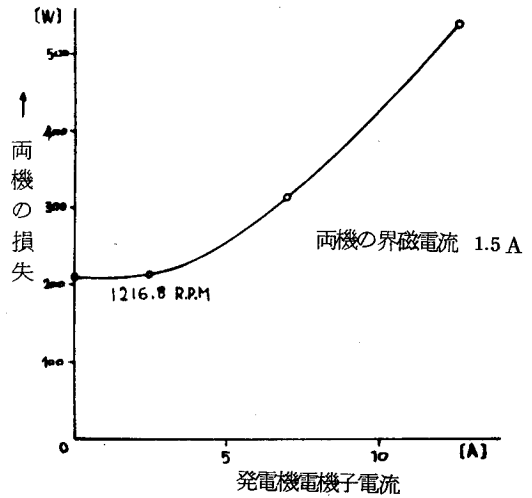
$$R_G = 2.0 \text{ [}\Omega\text{]}$$

と決定できる。

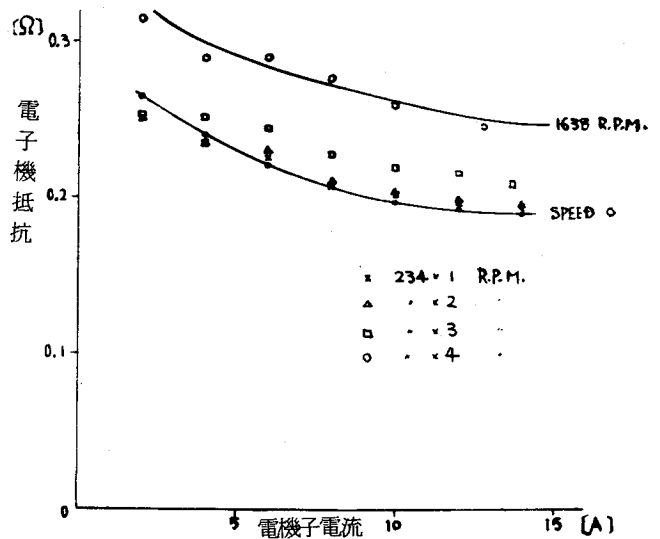
サイリスタ・レオナード系の回路抵抗としては下記を得る。

$$R = R_M + R_G = 2.25 \text{ [}\Omega\text{]}$$

< B > インダクタンスの測定。電動機を電機子回路を開路しておいて適当な回転数および界磁電流を印加している状態で,



第 5-19 図 機械損の測定



第 5-20 図 電機子回路抵抗値

電機子回路を急に閉じたときの電流の応答波形を求めたのが第5-22図である。同図より時定数を求めると、

$$1.45 \text{ [m sec]}$$

である。よつて

$$L_M = 1.45 \times 10^{-3} \times 0.25 \\ = 3.6 \text{ [m H]}$$

となる。

電動機の界磁回路を開いた状態で L_M を測定した値を参考までに第5-23図に示す。界磁回路を開いた状態では約3倍の値が得られるが、これは界磁回路を開くと2次回路(界磁巻線)を流れる電流による減磁効果が零になるためである。

電源部分のインダクタンスの大きさは同上の方法では測定できない。それは各サイリスタの導通開始時にパルスが生じるが、このパルス間隔(50Hzでは $20/6 = 3.3 \text{ m sec}$)以下ではほぼ過渡現象が終了してしまうためである。よつて、

$$L_G < 6.6 \text{ [m H]}$$

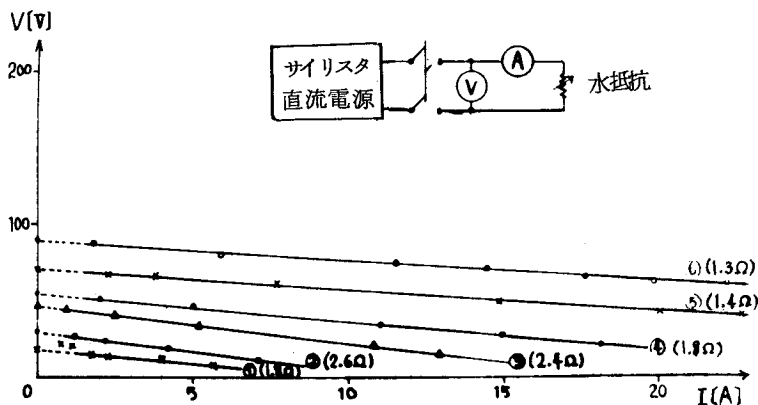
であるが、実用上

$$L_G = 0$$

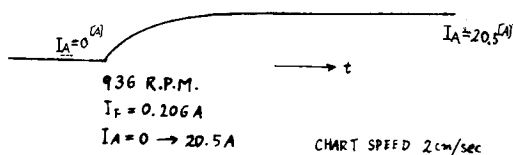
でさしつかえない。

5.3.3 その他の定数の測定

< A > 回転計発電機の定数。回転計発電機の回転速度—誘起起電力特性を求めると第5-24図が得られる。これより、



第5-21図 サイリスタ・レオナード電源内部抵抗の測定



第5-22図 電動機電機子回路時定数の測定

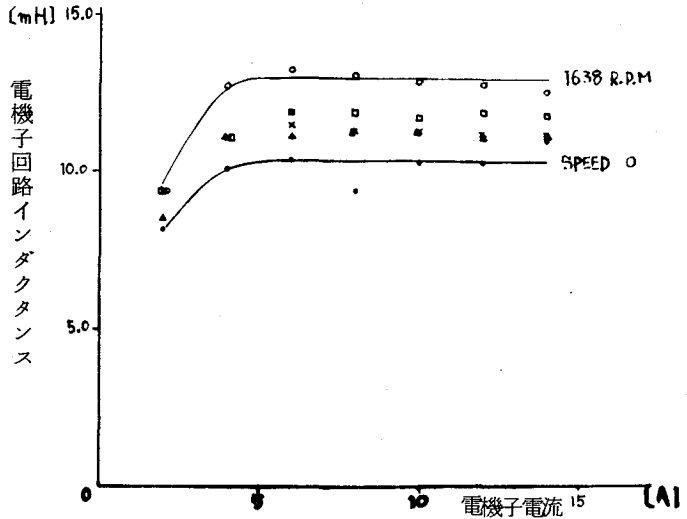
(誘起起電力) / (R. P. M.) = $1/234$,
 i.e. $1/245$
 [V/rad/sec] が得られる。

 K_f 。第5-25図は直流電動機の界磁電流値をパラメータとしたときの、誘起起電力一回転速度特性を示したものである。この図より得られる K_f の値を縦軸に界磁電流の値を横軸にとつて表わしたのが第5-26図である。

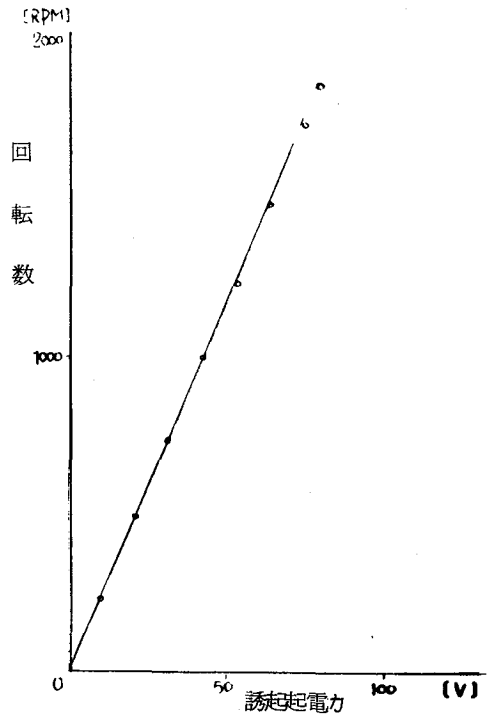
<C> K_g 。2つの直流機の界磁電流を等しくして効率測定を行なう。このとき得られる損失を入力から差引いた値は有効な電気力一機械力変換パワーであるから、トルクはこの変換パワーを回転角速度で割った値として得られる。第5-27図に電動機界磁電流 I_f をパラメータとした $K_g - I_a$ 特性を、第5-28図に $K_g - I_f$ 特性を示す。

<D> サイリスタ直流電源のゲイン K_{SCR} の決定。直流電源に使用されている6個のサイリスタの点弧角一設定電圧特性を第5-29図(a)~(c)に示す。同図より、点弧角 60° から 120° までが $0.5V$ であることがわかるから、 60° から 180° までで $1V$ である。点弧角 60° で $200V$ 出力、 180° で零出力とし、非線形特性を線形特性で近似すると、つぎの値を得る。

$$K_{SCR} = 200/1 = 200$$



第5-23図 界磁回路開放時の電機子回路インダクタンス



第5-24図 回転計較正用グラフ

5.4 実験

5.4.1 制御回路の構成

< A > 電流検出方式。前節 5.3 の結果を使用すると、(5-13) 式は、

$$f \approx \frac{1}{1 + \frac{11.5}{1 + 18s}} \quad (5-23)$$

となる。機械系の時定数 $T = J/D$ が比較的大きいので再現回路の中間周波数として機械系の自然周波数の約 10 倍 0.1 Hz を考えれば十分である。直流から 0.1 Hz まで考慮したときの (5-23)

式の値はほゞ

$$0.08 + j0$$

$$\sim 0.5 + j0.5$$

内にあり、 f は常に 1 より小とみなせるので近似回路が使用できる。このときの (5-15)

式の γ の値はほゞ

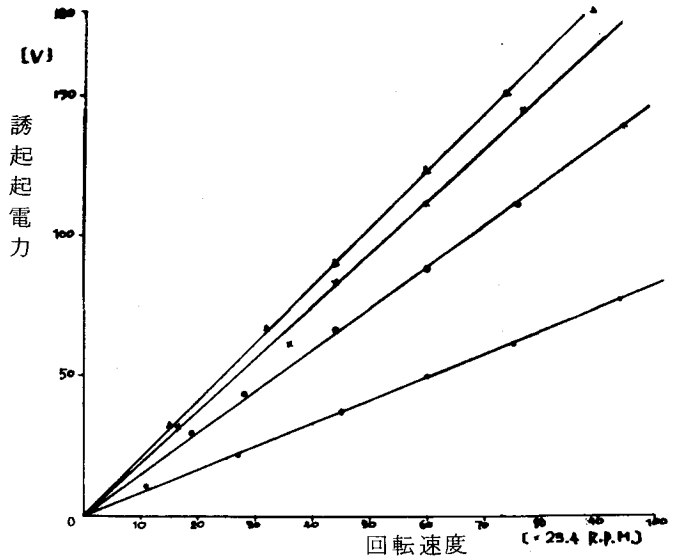
$$\gamma = 1 \sim 1.5$$

である。なお

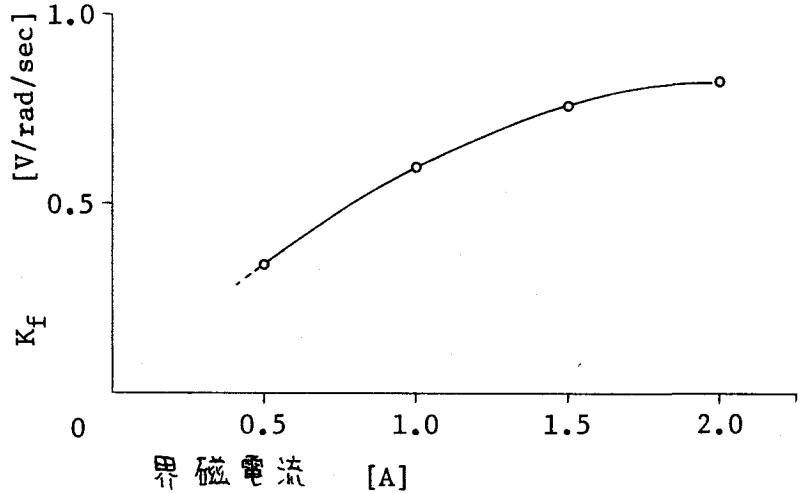
$$\frac{1}{1 + (\text{ループゲイン})} \approx 0.08$$

であるから、ほゞ (5-16) 式の関係が成立していることがわかる。

第 5-30 図は PI 制御動作をもつサイリスタ・レオナード系に Invariance 制御回路を付加した場合のブロック線図である。図中の電気回路のインピーダンス Z_E および Z_G の時定数は非常に小さい。したがって、これを無視すると、



第 5-25 図 直流電動機の誘起起電力一回転速度特性



第 5-26 図 $K_f - I_f$ 特性

Invariance 制御回路
内の δ は

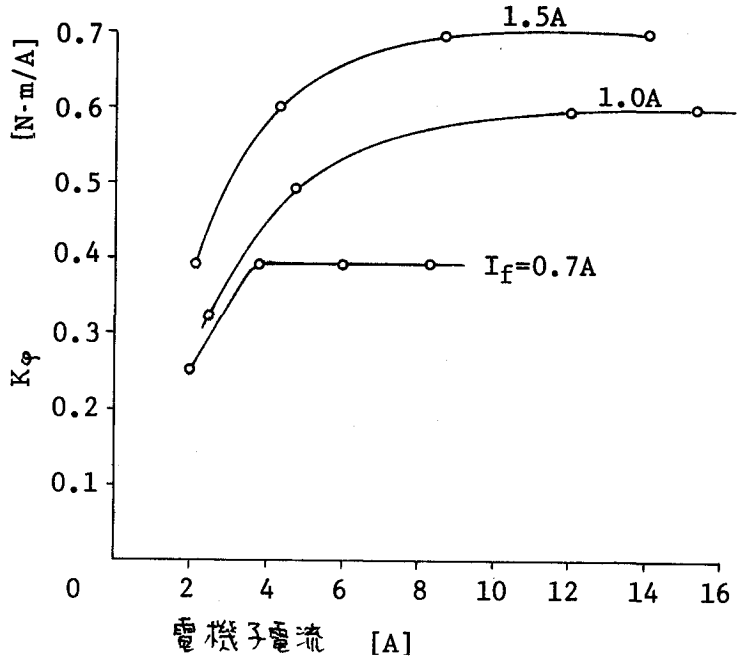
$$\delta = \frac{Z_E + Z_G}{K_{SCR} \cdot K_\phi} \cdot \gamma$$

$$\approx \frac{R_E + R_G}{K_{SCR} \cdot K_\phi} \cdot \gamma$$

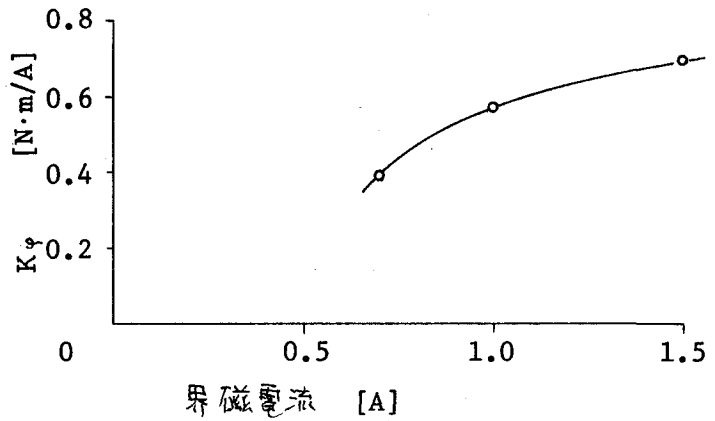
となる。

比例積分および Invariance 制御の両制御回路を除外して考えたときのサイリスタ・レオナード系の折点周波数はほぼ 0.1 Hz である。したがって、制御回路の制御特性は数 $\sim 10 \text{ Hz}$ まで考慮しておけば十分である。なお、これ以上の周波数領域まで制御特性を拡張することは不必要であるばかりでなく、ノイズ対策のうえからも好ましくない。もっとも顕著なノイズはサイリスタ電源サージの 300 Hz であり、つぎに交流電源の 50 Hz であるが、これらは制御回路のフィルタで十分減衰させておかなければならない。回転速度計用発電機のリップルは運転速度により、周波数成分が異なるが、 $1000 \sim 1500 \text{ R. P. M.}$ の高速運転時には数十 $\sim 100 \text{ Hz}$ になるので、リップル除去のフィルタもまったく同上の特性でよい。

上述の議論にしたがって構成した制御回路を第 5-32 図に示す。なお、Invariance 制御回路のフィルタ + 微分特性 (ゲイン特性) の実測値を第 5-33



第 5-27 図 K_ϕ - 電機子電流特性



第 5-28 図 K_ϕ - 界磁電流特性

図に示す。

< B > トルク検出方式。前述
< A >と同様に制御回路は数
~ 10 Hzまでの特性を考慮し
それ以上の周波数領域では減衰
特性が望ましい。

10 Hzまで考慮したとき
(5-18)式のeの値は、0
~-0.025の範囲にほゞ入る
ので、この項は無視してもよい。

また、(5-19)式の値は
~-0.04であり、10 Hzに
おいて $G_{11}(j\omega)F_{11}(j\omega)|_{\omega=20\pi}$
 ≈ 0.65 であるから(5-22)
式の近似回路を使用してよい。
このときの γ の値はほゞ、

$$1 \sim 2.8$$

である。

第5-31図に比例積分制御
並びにトルク検出方式による
Invariance 制御回路をもった
サイリスタ・レオナード系のブ
ロック線図を示す。こゝで δ は

$$\delta = \frac{Z_E + Z_G}{K_{SCR} \cdot K_{\phi}} \cdot \gamma$$

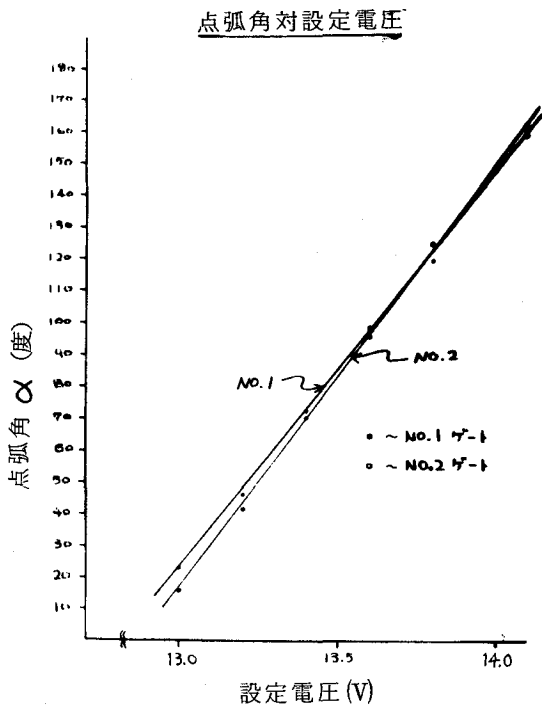
$$\approx \frac{R_E + R_G}{K_{SCR} \cdot K_{\phi}} \cdot \gamma$$

である。

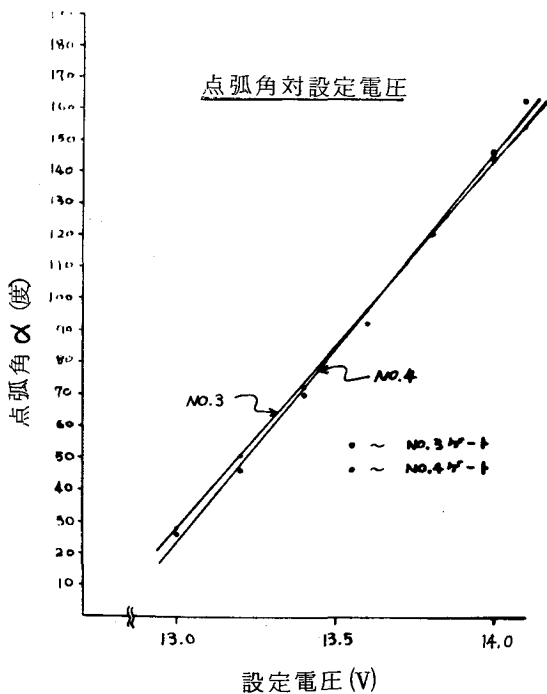
回転数検出回路は前述< A >
と同様に考えればよい。よって
第5-32図に示す制御回路を
得る。

5.4.2 実験結果と考察

実験結果を第5-34図およ
び第5-35図に示す。この両
図は無負荷 1450 R. P. M.



第5-29図 3.7KWサイリスタ・レオナード
点弧角対設定電圧 (a)



第5-29図 (b)

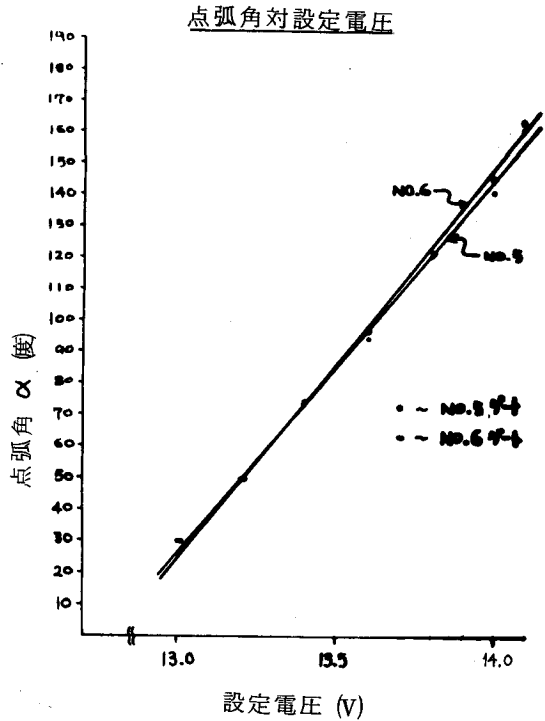
運転中に急激に負荷を入・切
 (発電機回路に水抵抗を入・切)
 したときの回転数をピシグラフ
 (三栄測器製, PR-101)
 で記録したものである。実験時
 の電動機および発電機はつぎの
 状態であった。

直流電動機：界磁電流 1.5 [A]
 電機子電圧
 120 ⇔ 126 [V]
 電機子電流
 2.2 ⇔ 11.5 [A]
 直流発電機：界磁電流 1.35 [A]
 電機子電圧
 110 ⇔ 94 [V]
 電機子電流
 0 ⇔ 10 [A]

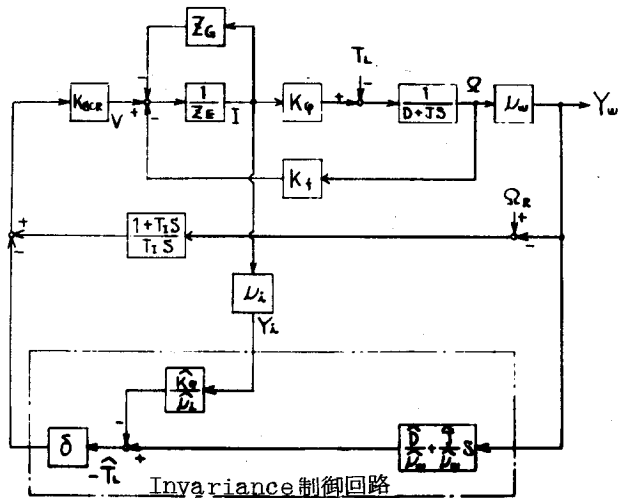
上述の測定値は可動コイル型計
 器の指示値であり、定常値に落
 付いたときの値である。

第5-34図は比例制御系の
 場合であり、第5-35図は比
 例積分制御系の場合である。い
 ずれの場合もゲインは1にして
 ある。この状態のまゝで Inva-
 riance 制御を追加したとき
 の応答をあわせて記入してある。
 ほゞ予測された通りの良好な結
 果が得られることがわかる。な
 お起動時には Invariance 制
 御ははずしておいた。

入力可観測性にもとづいて入
 力波形を再現し、それを利用し
 て Invariance 制御系の構成
 が可能であることがこの実験を
 通じてうらずけられた。サイリ

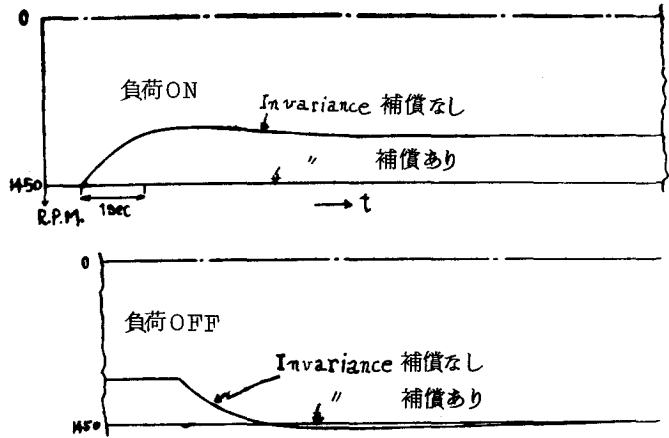


第5-29図 (c)

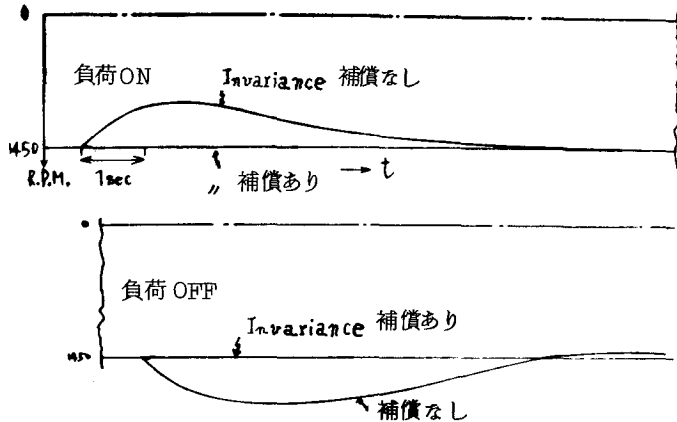


第5-30図 電流検出の Invariance 制御回路をもつサイリスタ・レオナード系

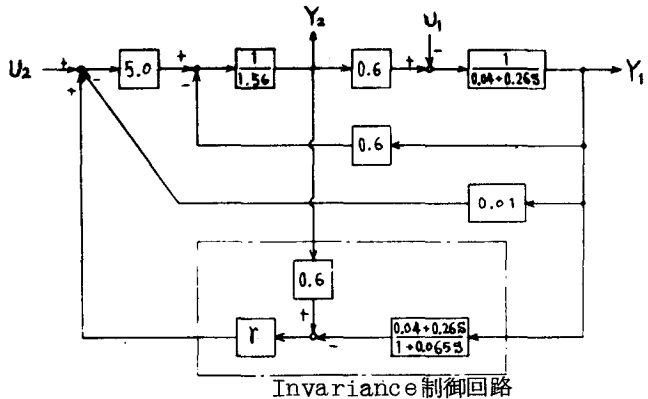
サイリスタ・インバータ系の実験を通じても確認することができた。Invariance制御回路の微分器は第5-33図に示すように10 Hz 近くまで微分特性をもたせてある。しかし、実際の運転時には高いほうの周波数に対しては演算増幅器の飽和のため高周波領域で平坦特性をもつ微分・比例器として動作している。5.4.1の(5-23)式を考察するとき0.1 Hz 以下に対して考察を加えて近似回路の妥当性を述べた。もし10 Hz まで完全に入力波形の再現特性をもたせる場合には、近似回路の近似度はさらに低下する可能性がある。しかし、ここでは波形の厳密な再現が問題ではなく、外乱の大きさを検出して制御することにねらいがあるから、0.1 Hz 近辺から減衰特性をもたせることをせずにここで述べたよう



第5-34図 比例制御系とInvariance制御系の応答



第5-35図 比例積分制御系とInvariance制御系の応答

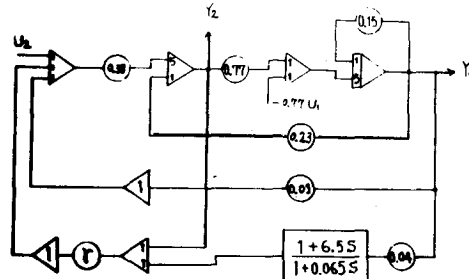


第5-36図 アナログシミュレーションの1次系ブロック線図

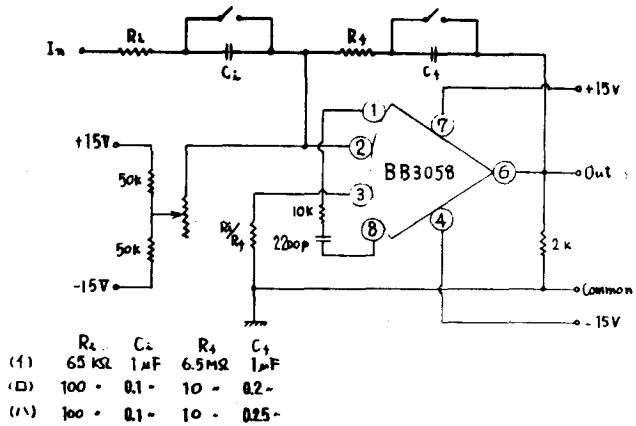
に適当な領域は平坦にしておいてもよい。

制御対象の種々のパラメータを正確に測定することは困難である。したがって広い範囲の運転で精密な Invariance 条件を実現する制御回路の実現はむずかしい。しかし、実用上は可変抵抗による適当な調節部分を設けておくことにより、ほゞ目的を達することが可能である。いわば準 Invariance 条件を実現することは容易である。また、この実験では制御の質のパラメータ変動に対する感度は実用上（実験上）困難を感ずるほどに認識されなかった。

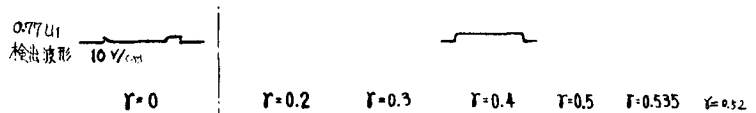
こゝで行なった実験ではノイズの周波数領域と制御に必要な周波数領域とをはっきりと分離することが可能であった。もし、制御に必要な周波数領域を拡大しなければならぬときは、第5-32図に示すようなフィル



第5-37図 1次系のアナログシミュレーション回路

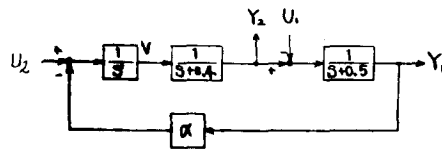


第5-38図 微分回路



$U_2 = -1.01V$ に対する
 Δ 答 $-0.77U_1 = 2.5V$
に対する3 Δ 答

第5-39図 パラメータ に対するステップ応答



第5-40図 アナログシミュレーション3次系モデル

タを制御回路に挿入する方法はとることができない。このような場合にはシールド線を使用して電磁結合からくるノイズの侵入を防がなければならない。測定器や制御器の電源を介して入ってくるノイズに対しては電源装置にも工夫が必要になってくる。

5.5 アナログシミュレーションによる検討

5.5.1 1次系 このでは第5-36図に示す系について近似 Invariance 回路の調節パラメータ α について検討する。制御回路内の微分要素は制御対象の折点周波数の100倍まで微分特性を持たせてある。第5-37図は第5-36図を具体的にアナログ計算機上に組んだときのブロック線図である。ここで Invariance 制御回路内の微分要素はアナログ計算機外に演算増幅器で作製した。その回路を第5-38図(i)に示す。

第5-36図に示した回路は前節のサイリスタ・レオナード系に対応させると各パラメータの数值は、

$$K_{SCR} = 5.0$$

$$R = R_E + R_G = 1.56$$

$$K_S = K_Y = 0.6$$

$$D = 0.04$$

$$J = 0.26$$

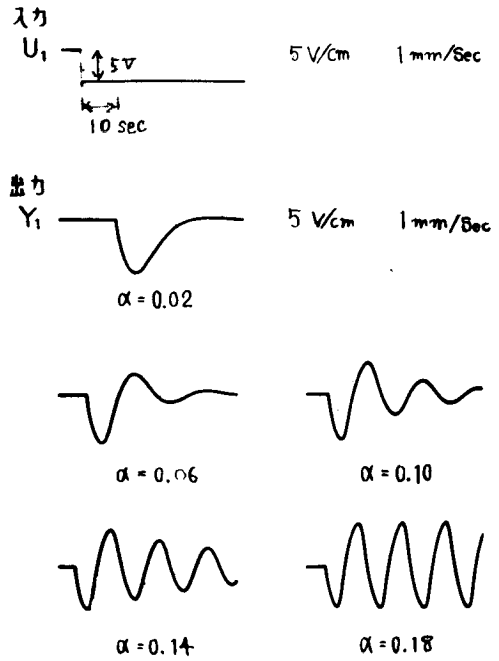
となる。また比例積分制御回路が

$$0.01 + 0/s$$

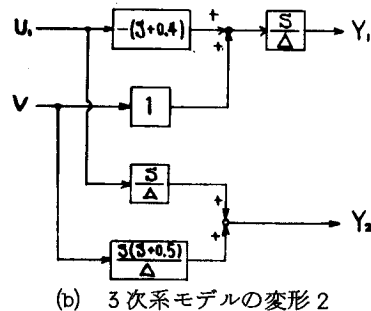
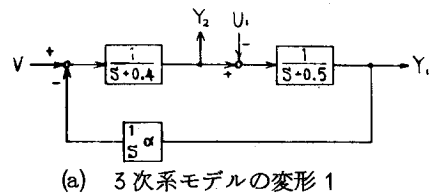
となったことになる。

電動機のループゲインに対応するのは、ここでは

$$5.76$$



第5-41図 3次系の U_1 に対する Y_1 のステップ応答



第5-42図 3次系モデルの変形

である。この値を1より十分大きいとみなして開ループ系としての Invariance 補償条件は、

$$\gamma = 1.56 / 5 \times 0.6 = 0.52$$

で与えられる。

第5-39図は第5-37図で γ をパラメータとしたときのステップ入力に対する応答波形を示す。同図の最後に $\gamma = 0.52$ のときの応答波形を示すが、この γ の値でもかなり Invariance 条件に近いことがわかる。

さらに γ を大きくしていくと、 $\gamma = 0.535$ でほとんど Invariance 条件を満足したことがわかる。開ループ系および閉ループ系として Invariance 条件を実現するときの γ の比率は、

$$0.535 / 0.52 = 1.03$$

となる。この値が(5-15)式の γ に対する値であるが、1にきわめて近い値であることがわかる。

第5-39図には U_1 の検出波形として $\gamma = 0$ および $\gamma = 0.4$ のときの波形を示した。 $0 < \gamma < 0.4$ の範囲では立上りおよび立下り部分がなまり、 $0.4 < \gamma$ になると安定な U_1 の再現波形が得難い。しかし、 U_1 の検出波形が発振状態を示しても出力 Y_1 は安定な波形が得られる。

5.5.2 3次系 前述までは安定な低次系についての議論であった。このような系に対してはことさら Invariance 制御回路を使用しなくてもループゲインを十分大きくとることにより、ほぼ所期の目的を達することができる。そこでここではループゲインを高めると不安定になる3次系の場合を例にとり、検討を加えることにする。

ここで検討する3次系モデルを第5-40図に示す。ただし、図中のVのところへ外部より操作入力を加えることができるとする。

第5-40図の系のパラメータ α を可変としたときの入力 U_1 に対するステップ応答波形を第5-41図に示す。

同図より安定限界が、

$$\alpha = 0.18$$

であることがわかる。安定限界内の α の調整だけでは、 U_1 の5Vのステップ入力に対する Y_1 の過渡応答のピーク値を6.5V以下には抑えられないことがわかる。

U_1 を一定とし、 U_1 に対する Y_1 の Invariance 条件を求めるのに、Vを操作端子として活用することを考えると、つぎの伝達関数および第5-42図(a)、(b)を得る。

$$\begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -s(s+0.4)/\Delta & s/\Delta \\ \alpha/\Delta & s(s+0.5)/\Delta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1 \\ V \end{bmatrix} \quad (5-24)$$

$$\Delta = s \cdot (s + 0.4) \cdot (s + 0.5) + \alpha$$

上式は逆伝達関数が存在し入力可観測性が成立する。

上式を逆に解くと次式を得る。

$$\begin{bmatrix} U_1 \\ V \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -(s+0.5) & 1 \\ \frac{\alpha}{s} & s+0.4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \end{bmatrix} \quad (5-25)$$

第 5.1 節の議論にしたがうと、

$$G'_{11} = -(s + 0.4)$$

$$g = s/\Delta \quad G_{11} = g G'_{11} = -s \cdot (s + 0.4) / \Delta$$

$$F_{11} = -(s + 0.5)$$

であるから (5-4) 式より、

$$h(s) = -(s + 0.4) \frac{1}{1 - \frac{1}{1 + \frac{\alpha}{s(s+0.4)(s+0.5)}}}$$

の制御回路を組み端子 V に接続すれば

U_1 と Y_1 との Invariance 条件が実現する。あるいは近似回路として、

$$h(s) \approx -(s + 0.4) \gamma$$

としてもよい。このときのブロック線図を第 5-43 図に示す。

こゝではやゝ異なる回路によっても Invariance 近似回路が求められることを示す。

第 5-44 図の回路について検討す

る。第 5-1 節の $Y_1(s)$ の式で $U_1(s)$ の係数を再記すると、

$$\left[G_{11}(s) - g(s) h(s) \{ 1 - F_{11}(s) G_{11}(s) \} \right] / (1 + g(s) h(s) F_{11}(s))$$

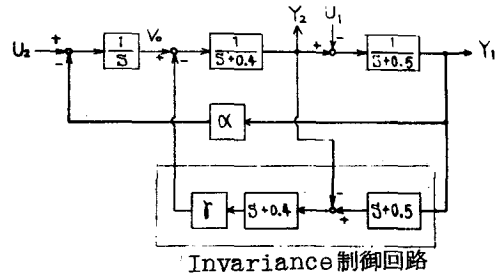
となる。いま第 5-44 図の回路にすると上式で、

$$F_{11}(s) \rightarrow \beta F_{11}(s) \quad , \quad h(s) \rightarrow \gamma G'_{11}(s)$$

とおきかえればよい。よって上式は、

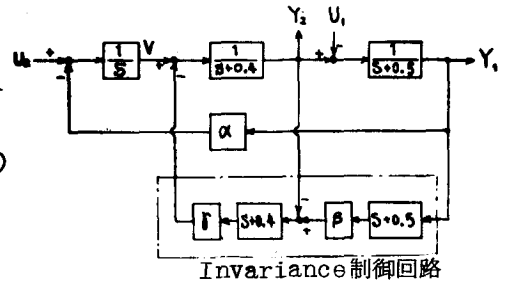
$$\frac{G_{11}(s)}{1 + \beta \gamma G_{11}(s) F_{11}(s)} [1 - \gamma + \beta \gamma F_{11}(s) G_{11}(s)]$$

となる。



第 5-43 図 3 次系の Invariance 制御系(1)

$$F_{11}(s)G_{11}(s) = \frac{1}{1 + \frac{\alpha}{s(s+0.4)(s+0.5)}}$$



第5-44図 3次系の Invariance制御系(2)

であり、 α はたかだか 0.18 であるから、かなり低い周波数より上の周波数領域で、

$$F_{11}(j\omega)G_{11}(j\omega) \approx 1.0$$

が成立する。

したがって、

$$\begin{cases} \gamma \approx 2.0 \\ \beta \approx 0.5 \end{cases}$$

で近似の Invariance 条件が成立することがわかる。

第5-45図に $\gamma = 1.95$ として

β を可変パラメータとしたときの U_1 のステップ入力に対する Y_1 の応答および U_1 の再現波形を示す。ただし、ここでは $\alpha = 0.02$ である。

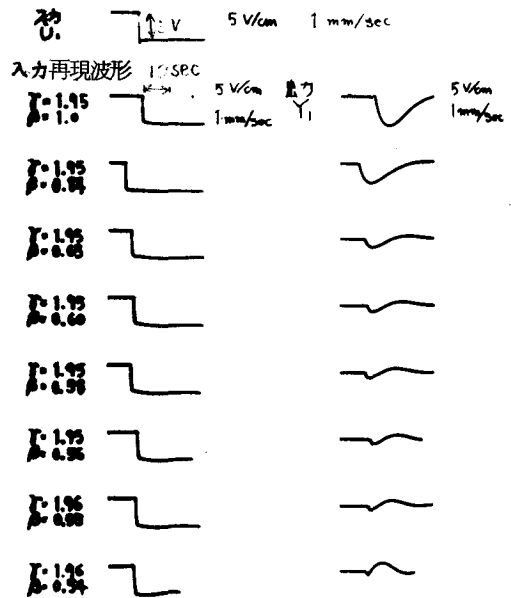
Invariance 補償用近似回路の挿入で、過渡応答のピーク値は、

$$\frac{\frac{0.16}{2} \text{ V}}{\frac{1.66}{2} \text{ V}} = 0.096$$

すなわち、約 90% 減少させ得たことがわかる。

また、第5-45図には入力の再現された波形も示すが、安定した再現波形が得られることがわかる。

なお、実際の微分回路を第5-38図(ロ)および(ハ)に示す。また、アナログ計算機は、日本電気製 NEAC-T100 を使用した。



第5-45図 Invariance 制御系のステップ応答

5章 文献

- 1) 関口 隆：入力可観測性による Invariance 制御系の構成，第 11 回計測自動制御学会学術講演会，昭 47・8
- 2) 第 2 章文献 3) に同じ。
- 3) 第 4 章文献 6) に同じ。

結 び

本論文は入力可観測性の成立条件（必要十分条件）について述べ、その応用並びに関連する問題点を論じたものである。本研究を通じて入力可観測性の理論並びに応用に関する基礎が確立された。こうした理論は従来の制御理論や制御技術と密接不可分であり、それらを質的に高めるのに有効であることがわかった。

また、入力可観測性の理論は状態可制御性、状態可観測性、出力可制御性、出力可観測性および出力再現性の理論などと同様にシステムの構造を理解するうえで非常に有効である。さらに、この理論は制御系の構成に応用できるばかりでなく、システムと伝達情報に関しても多くの示唆を与えてくれる。

最後に、筆者にはげましをいただいた横浜国立大学工学部の中西邦雄教授、池田吉堯教授、A-D変換器使用の便を考慮していただいた国枝寿博教授、研究推進上の便を考慮していただいた飯島健一教授、権藤靖夫教授、太田時男教授および御討論いただいた村上一郎教授に感謝する。

また、筆者の論文をまとめるのに大きな力になっていた大阪大学工学部・増淵正美教授、本研究の実験に協力し、かつ本論文の図面作成に努力をおしまなかつた横浜国大工学部・大里有生技官、実験に協力してくれた同上、出沢正徳・前技官、卒業研究の一環として実験に協力してくれた川瀬靖男、浜田康義、三好幸夫、須子昌一、中村惇、若松秀俊、白子宗治、奥平謙一、高橋裕、土屋泰則、中村功、新井博、学外で実験に協力してくれた阿部悦穂、1部実験の場所と設備を快よく使用させてくれ、かつ実験に協力していただいた東洋電機製造株式会社・大木創研究所長、小山悟開発室長、川島宣雄主任、および筆者の研究を支えてくれた多くの方々に感謝する。

付 録

付 録

この付録における文献番号はすべて第3章文献である。

1-1: つぎの線形連立方程式を考える。

$$w_k = \sum_{j=1}^r \varphi_{kj} x_j \quad k=1, 2, \dots, \ell, \dots, m \quad (\text{付-1})$$

こゝで係数行列 $\{\varphi_{kj}\}$ ($m \times r$ 行列) の階数を ℓ とし, $\ell \leq r \leq m$ とする。一般性を失うことなく, つぎのように仮定できる。

$$\Delta = \begin{vmatrix} \varphi_{11} & \dots & \varphi_{1\ell} \\ \vdots & & \vdots \\ \varphi_{\ell 1} & \dots & \varphi_{\ell \ell} \end{vmatrix} \neq 0 \quad (\text{付-2})$$

いま (付-1) 式をつぎのように変形する。

$$\sum_{j=1}^{\ell'} \varphi_{kj} x_j = w_k - \sum_{j=1}^{\ell'} \varphi'_{kj} \alpha_j \quad k=1, \dots, m \quad (\text{付-3})$$

たゞし, $\ell' + \ell = r$

$$\alpha_1 = x_{\ell+1}, \dots, \alpha_{\ell'} = x_r$$

$$\varphi'_{k1} = \varphi_{k\ell+1}, \dots, \varphi'_{k\ell'} = \varphi_{kr}$$

(付-3) 式を解くと, x_1, \dots, x_{ℓ} の解が得られるが, おのおのは w_k と α_j の線形結合で表わされる。

さて (付-1) 式は r 個の変数 x_1, \dots, x_r の式であるが, これをつぎに示す ℓ 個の変数 u_1, \dots, u_{ℓ} の式に変形することを考える。すなわち,

$$\sum_{j=1}^r \varphi_{kj} x_j = \sum_{j=1}^{\ell} \beta_{kj} u_j \quad (\text{付-4})$$

たゞし, 右辺の係数行列 $\{\beta_{kj}\}$ の階数を ℓ とする。上式は m 次元空間中において x の ℓ 次元部分空間から u の ℓ 次元部分空間への変換と考えることもできる。この変換は一義的でないが, こゝではつぎの場合を考える。

$$\beta_{kj} = \varphi_{kj} \quad \begin{matrix} j = 1, 2, \dots, \ell \\ k = 1, 2, \dots, m \end{matrix} \quad (\text{付-5})$$

さて, (付-3) 式を x_1 について解くと,

$$x_1 = \frac{1}{\Delta} \left[\sum_{j=1}^{\ell} w_j A_{j1} - \sum_{k=1}^{\ell'} \alpha_k \sum_{j=1}^{\ell} \varphi'_{jk} A_{j1} \right] \quad (\text{付-6})$$

ただし、上式中において A_{jk} は (付-2) 式に示される行列式の j 行 k 列の余因子である。上式より変数 x_1 とパラメータ α_1 とが結合する (同一式中に同時に存在する) ための必要十分条件は次式が成立することである。

$$\sum_{j=1}^{\ell} \varphi'_{jk} A_{j1} \neq 0 \quad (\text{ただし } k=1)$$

任意の x_k ($k=1, \dots, \ell$) および $\alpha_j = x_{\ell+j}$ ($j=1, \dots, \ell'$) に関してもまったく同様である。ゆえにつぎの補助定理が証明された。

[補助定理 1-1] (付-1) 式の x_k ($k=1, \dots, \ell$) と $x_{\ell+j}$ ($j=1, \dots, \ell'$) とが (付-2) 式および (付-5) 式の条件下で (付-4) 式の変換を行なうとき結合されるための必要十分条件はつぎの式が成立することである。

$$\sum_{i=1}^{\ell} \varphi'_{ij} A_{ik} \neq 0 \quad (\text{付-7})$$

1-II: (付-1) 式の係数行列 $\{\varphi_{ij}\}$ の中で最初の ℓ 個の列ベクトルは 1 次独立であり、他は、それらの線形結合で表わされるとした。したがって C_{ij} を定数として、

$$\begin{bmatrix} \varphi'_{1j} \\ \vdots \\ \varphi'_{mj} \end{bmatrix} = C_{1j} \begin{bmatrix} \varphi_{11} \\ \vdots \\ \varphi_{m1} \end{bmatrix} + \dots + C_{\ell'j} \begin{bmatrix} \varphi_{1\ell'} \\ \vdots \\ \varphi_{m\ell'} \end{bmatrix} \quad j=1, \dots, \ell' \quad (\text{付-8})$$

と表わせる。ところで、

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{\ell} \varphi'_{kj} A_{ki} &= \sum_{k=1}^{\ell} (C_{1j} \varphi_{k1} + \dots + C_{\ell'j} \varphi_{k\ell'}) A_{ki} \\ &= C_{1j} \sum_{k=1}^{\ell} \varphi_{k1} A_{ki} + \dots + C_{\ell'j} \sum_{k=1}^{\ell} \varphi_{k\ell'} A_{ki} \\ &= C_{1j} \sum_{k=1}^{\ell} \varphi_{ki} A_{ki} \\ &= C_{1j} \Delta \quad j=1, \dots, \ell' \end{aligned}$$

ゆえに、

$$C_{ij} = \frac{1}{\Delta} \sum_{k=1}^{\ell} \varphi'_{kj} A_{ki} \quad (\text{付-9})$$

したがって (付-6) 式より,

$$x_k = \frac{1}{\Delta} \sum_{j=1}^l w_j A_{jk} - \sum_{j=1}^{l'} C_{kj} \alpha_j \quad k = 1, \dots, l$$

すなわち,

$$x_k + \sum_{j=1}^{l'} C_{kj} \alpha_j = \frac{1}{\Delta} \sum_{j=1}^l w_j A_{jk} \quad (\text{付-10})$$

よって,

$$u_k = x_k + \sum_{j=1}^{l'} C_{kj} \alpha_j \quad k = 1, \dots, l \quad (\text{付-11})$$

とおくと (付-4) 式の変換は完成されたことになる。ゆえにつぎの補助定理が証明されたことになる。

[補助定理 1-Ⅱ] (付-2) 式の条件下で (付-9) および (付-11) 式のようにおくと, 変数 x_j から変数 u_j への変換 (付-4) 式が行なわれる。

1-Ⅲ: 本文の (3-1) 式の動的観測系が 1 位の入力可観測性を有しない場合を考える。(3-3) 式の階数が l_1 であるから (3-3) 式の独立な l_1 個の列ベクトルより $m \times l_1$ 行列 $\{\beta_{ij}\}$ を構成することにより,

$$HFx = \beta u$$

と変換することができる。ただし, u の各要素は上述の (付-11) 式にしたがって作られる。それゆえ第 2 番目のサンプリングまで考慮すると,

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} w(\tau) \\ w(2\tau) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} HF & 0 \\ HGF & HF \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(0) \\ x(\tau) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} HF & 0 \\ HGF & \beta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(0) \\ u \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (\text{付-12})$$

上式の 2 つの係数行列の階数は等しい。したがって 2 位の入力可観測性を有するための必要十分条件として, つぎの補助定理を得る。

[補助定理 1-Ⅲ] (3-1) 式の動的観測系が 2 位の入力可観測性を有するための必要十分条件はつぎの行列の階数が $r + l_1$ のことである。

$$\begin{bmatrix} HF & 0 \\ H & HF \end{bmatrix}$$

[証明] (この証明中では l_1 を l と表わす。)

(付-12) 式より十分性が成立していることは明らかである。

さて、次式の行列の階数を $r+l-\alpha$ ($\alpha > 0$) とする。

$$\left[\begin{array}{c|c} HF & 0 \\ \hline HGF & \beta \end{array} \right] = \begin{bmatrix} \varphi_{11} & \dots & \varphi_{1r} & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \varphi_{m1} & \dots & \varphi_{mr} & 0 & \dots & 0 \\ \varphi_{m+11} & \dots & \varphi_{m+1r} & \beta_{11} & \dots & \beta_{1l} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \varphi_{2m1} & \dots & \varphi_{2mr} & \beta_{m1} & \dots & \beta_{ml} \end{bmatrix} \quad (\text{付-13})$$

ここで $\alpha = 1$ とする。 $\alpha = 2, 3, \dots$ の場合もまったく同様である。(付-13) 式の $r+l$ 個の列ベクトルのうち $r+l-\alpha$ 個が 1 次独立である。他はそれらの線形結合で表わされる。もし、 α 個の従属の列ベクトルが最初の r 個の列ベクトルの中にあれば、 $x_1(0), \dots,$

$x_r(0)$ は唯一に定まらない。すなわち、2 位の入力可観測性が成立しない。もし (付-13) 式の後半の部分に存在している場合には、この $\alpha (=1)$ 個の列ベクトルは最後列のベクトルとしても一般性を失わない。したがって $C_1, \dots, C_r, C'_1, \dots, C'_{l-1}$ を定数としてつぎのように表わせる。

$$\begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \hline \beta_{1l} \\ \vdots \\ \beta_{ml} \end{bmatrix} = C_1 \begin{bmatrix} \varphi_{11} \\ \vdots \\ \varphi_{m1} \\ \hline \varphi_{m+11} \\ \vdots \\ \varphi_{2m1} \end{bmatrix} + \dots + C_r \begin{bmatrix} \varphi_{1r} \\ \vdots \\ \varphi_{mr} \\ \hline \varphi_{m+1r} \\ \vdots \\ \varphi_{2mr} \end{bmatrix} + C'_1 \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \hline \beta_{11} \\ \vdots \\ \beta_{m1} \end{bmatrix} + \dots + C'_{l-1} \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \hline \beta_{1l-1} \\ \vdots \\ \beta_{ml-1} \end{bmatrix}$$

ところで $\{\beta_{ij}\}$ の階数が l であるから $C_1 = \dots = C_r = 0$ はあり得ない。いま $C_1 \neq 0$ とすると (付-9) 式および補助定理 1-I より $x_1(0)$ は U の要素 u_l と分離して求めることができない。すなわち $x_1(0)$ は唯一に決定できず、2 位の入力可観測性が成立しない。 証明終り。

1-IV: 2 位の入力可観測性が成立しない場合は、

$$\begin{bmatrix} HF & 0 \\ HGF & HF \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(\tau) \\ x(2\tau) \end{bmatrix} = \beta u$$

β : $2m \times l_2$ 行列, 階数 l_2

u : l_2 ベクトル

として,

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} w(\tau) \\ w(2\tau) \\ w(3\tau) \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} HF & 0 & 0 \\ HGF & HF & 0 \\ HG^2F & HGF & HF \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x(0) \\ x(\tau) \\ x(2\tau) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} HF & 0 \\ HGF & \\ HG^2F & \beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x(0) \\ u \end{pmatrix} \end{aligned}$$

とおく。この場合も前述の(付-12)式の場合とまったく同様に考えていくことができる。

一般に i 位の入力可観測性に対しては,

$$\begin{pmatrix} HF & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ HG^{i-2}F & \cdots & HF \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x(\tau) \\ \vdots \\ x((i-1)\tau) \end{pmatrix} = \beta u$$

β : $(i-1) \cdot m \times l_{i-1}$ 行列 (階数 l_{i-1})

u : l_{i-1} ベクトル

として,

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} w(\tau) \\ w(2\tau) \\ \vdots \\ w(i\tau) \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} HF & 0 & \cdots & 0 \\ HGF & HF & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ HG^{i-1}F & HG^{i-2}F & \cdots & HF \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x(0) \\ x(\tau) \\ \vdots \\ x((i-1)\tau) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} HF & 0 \\ HGF & \\ \vdots & \\ HG^{i-1}F & \beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x(0) \\ u \end{pmatrix} \end{aligned}$$

とおく。よって補助定理 1-III とまったく同様にして一般の i 位の入力可観測性に対しても同様に考えていくことができる。

1-V: Cayley-Hamilton の定理より k_1, \dots, k_n をスカラーの定数として,

$$G^n = k_1 G^{n-1} + \cdots + k_n I$$

ゆえに,

$$\begin{aligned} f_{n+1} &= G f_n + F \delta_{n-1} \\ &= G^{n-1} F (k_1 \delta_1 + \delta_2) + \cdots + F (k_n \delta_1 + \delta_{n+1}) \end{aligned} \quad (\text{付-14})$$

一方, f_1, \dots, f_n の線形結合は C_1, \dots, C_n をスカラーの定数として,

$$C_1 f_n + \dots + C_n f_1 = G^{n-1} F C_1 \delta_1 + \dots + F(C_1 \delta_n + \dots + C_n \delta_1) \quad (\text{付-15})$$

ところで、次式の $n \cdot r \times n$ 行列の階数は n である。

$$\begin{bmatrix} \delta_1 & & & 0 \\ & \ddots & & \\ & & \delta_1 & \\ & & & \ddots \\ \delta_n & & & & \delta_1 \end{bmatrix}$$

ゆえに次式を満足する定数 C_1, \dots, C_n が存在する。

$$\begin{bmatrix} A_1 \delta_1 + \delta_2 \\ \vdots \\ A_n \delta_1 + \delta_{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \delta_1 & & & 0 \\ & \ddots & & \\ & & \delta_1 & \\ & & & \ddots \\ \delta_n & & & & \delta_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_1 \\ \vdots \\ C_n \end{bmatrix}$$

このような C_1, \dots, C_n により (付-14) 式と (付-15) 式の $G^i F$ の各係数は一致するから、つぎのように表わせる。 $f_{n+1} = C_1 f_n + \dots + C_n f_1$

2-I: [系 2-1-1 の証明] 十分性は本文の説明から自明である。こゝでは必要性を証明する。

入力可観測性が成立したとする。もし (3-22) 式の行列の階数が r より小ならば (3-26) 式を満足する x_i が 2 つ以上存在する。つまり、まったく異なる 2 つ以上のベキ入力を得られる。しかも (3-22) 式の条件は i の大きさには無関係であるから、任意の i に対して (3-26) 式を満足するベキ入力が 2 つ以上存在することになる。これは入力可観測性成立の仮定に矛盾する。

証明終り。

2-I': [定理 2-2 の証明] 出力波形を $N+P$ 回まで微分すると次式を得る。

$$\begin{bmatrix} \dot{w}(0) \\ \ddot{w}(0) \\ \vdots \\ w^{(N+1)}(0) \\ \vdots \\ w^{(N+P)}(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} CB & 0 & \dots & 0 \\ CAB & CB & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ CA^N B & CA^{N-1} B & \dots & CB \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ CA^{N+P-1} B & CA^{N+P-2} B & \dots & CA^{P-1} B \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_0 \\ x_1 \\ \vdots \\ x_N \end{bmatrix}$$

上式の係数行列を $\tilde{F}(N+1)$ としよう。

$\text{rank } \tilde{F}(N+1) = r \cdot (N+1)$ とすると上式より x_0, x_1, \dots, x_N が唯一に求められ入力可観測性が成立する。

$\text{rank } \tilde{F}(N+1) < r \cdot (N+1)$ とすると $\dot{w}(0) = \ddot{w}(0) = \dots = w^{(N+P)}(0) = 0$ に対する x_0, x_1, \dots, x_N が一意に決まらない。よって、 $\text{rank } \tilde{F}(N+1) = r \cdot (N+1)$ の成立が入力可観

測性の必要十分条件である。

$N+1 \geq P$ とすると $\tilde{\Gamma}(N+1) = r \cdot (N+1)$ ならば $\tilde{\Gamma}(N+1)$ の $r \cdot (N+1)$ 個の列ベクトルは一次独立となり、当然 $\tilde{\Gamma}(P)$ の $r \cdot p$ 個の列ベクトルも一次独立となる。よって $\text{rank } \tilde{\Gamma}(P) = r \cdot p$ となる。逆に $\text{rank } \tilde{\Gamma}(P) = r \cdot p$ が成立するとする。このとき $\tilde{\Gamma}(P+1)$ の最初の $r \cdot p$ 列および最後の $r \cdot p$ 列は一次独立である。いま A の最小多項式を

$$\lambda^p + C_1 \lambda^{p-1} + \dots + C_p$$

とし、 $r \cdot (P+1) \times r \cdot (P+1)$ 行列

$$T_{P+1} = \begin{bmatrix} I_r & 0 & \dots & 0 \\ C_1 I_r & I_r & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ C_p I_r & 0 & \dots & I_r \end{bmatrix} \quad (\text{付-16})$$

をつくと、 T_{P+1} の階数は $r \cdot (P+1)$ であるから、

$$\tilde{\Gamma}(P+1) \cdot T_{P+1} = \begin{bmatrix} T_{11} & 0 & \dots & 0 \\ T_{12} & CB & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ T_{1P} & CA^{P-2}B & \dots & 0 \\ 0 & CA^{P-1}B & \dots & CB \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & CA^{2P-2}B & \dots & CA^{P-1}B \end{bmatrix}$$

の階数は $\tilde{\Gamma}(P+1)$ と一致する。上式の T_{11}, \dots, T_{1P} は $\Gamma(P+1)$ の最初の $r \cdot p$ 列の一次結合であるから、上式の最初の $r \cdot p$ 列は一次独立である。また最後の $r \cdot p$ 列も一次独立であるから、上式の形より明らかに $r \cdot (P+1)$ 列がすべて一次独立である。よって $\text{rank } \tilde{\Gamma}(P+1) = r \cdot (P+1)$ である。以下同様にして、 $\text{rank } \tilde{\Gamma}(N+1) = r \cdot (N+1)$ が成立する。ただし(付-16)式に対応してつぎの(付-16')式を使用する。

$$T_{P+i} = \begin{bmatrix} I_r & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ C_1 I_r & I_r & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ C_p I_r & 0 & \dots & I_r & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & I_r & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & I_r \end{bmatrix} \quad r \cdot (P+i) \times r \cdot (P+i) \text{ 行列} \quad (\text{付-16}')$$

すなわち、 $\text{rank } \tilde{\Gamma}(N+1) = r \cdot (N+1)$ と $\text{rank } \tilde{\Gamma}(P) = r \cdot p$ とは等価である。

上述とまったく同様にして、 $\text{rank } \tilde{\Gamma}(n) = r \cdot n$ と $\text{rank } \tilde{\Gamma}(P) = r \cdot p$ とが等価であること。

がわかる。

また、あきらかに、

$$\text{rank } \tilde{\Gamma}(N+1) = \text{rank } \Gamma(N+1)$$

$$\text{rank } \tilde{\Gamma}(n) = \text{rank } \Gamma(n)$$

である。

証明終り。

2-II: [系 2-2-1 の証明] 本文の (3-29) 式を (3-28) 式に代入すると次式を得る。

$$\begin{aligned} 0 &\equiv C(sI-A)^{-1}B[s^{\delta-1}K_0 + s^{\delta-2}K_1 + \dots + K_{\delta-1}] \\ &= s^{\delta-2}CBK_0 + s^{\delta-3}CABK_0 + \dots + s^{\delta-p-3}CA^{p-1}BK_0 + \dots \\ &\quad + s^{\delta-3}CBK_1 + s^{\delta-4}CABK_1 + \dots + s^{\delta-p-4}CA^{p-1}BK_1 + \dots \\ &\quad \vdots \\ &\quad + s^{-1}CBK_{\delta-1} + s^{-2}CABK_{\delta-1} + \dots + s^{-p}CA^{p-1}BK_{\delta-1} + \dots \end{aligned} \quad (\text{付-17})$$

(付-17) 式の s の同一べき指数項の係数をすべて零とおくと次式を得る。

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} CB & 0 & \dots & 0 \\ CAB & CB & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ CA^{\delta-1}B & CA^{\delta-2}B & \dots & CB \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ CA^{\delta+p-2}B & CA^{\delta+p-3}B & \dots & CA^{p-1}B \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} K_0 \\ K_1 \\ \vdots \\ K_{\delta-1} \end{pmatrix} \quad (\text{付-18})$$

上式 (付-18) の係数行列が階数 $r \cdot \delta$ をもつことが入力可観測性成立の必要十分条件である。また (付-18) 式の係数行列の階数は Cayley-Hamilton の定理により次式の階数と一致する。

$$\Gamma(\delta) = \begin{pmatrix} CB & 0 & \dots & 0 \\ CAB & CB & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ CA^{\delta-1}B & CA^{\delta-2}B & \dots & CB \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ CA^{\delta+p-2}B & CA^{\delta+p-3}B & \dots & CA^{p-1}B \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \end{pmatrix} \quad (\text{付-19})$$

$K_i \quad i=0, 1, \dots, \delta-1$ は r ベクトルであるから、 $\text{rank } \Gamma(\delta) = r \cdot \delta$ が入力可観測性成立の必要十分条件になる。

$\delta \geq p$ であるから定理 2-2 の証明のときと同様に、 $\text{rank } \Gamma(\delta) = r \cdot \delta$ が $\text{rank } \Gamma(p) = r \cdot p$ に等価であり、かつ $\text{rank } \Gamma(n) = r \cdot n$ にも等価である。

証明終り。

3-I: [命題3-2の畧証] 付録1-Vと同様に考える。 $\gamma_0 \neq 0$ とする。 Cayley-Hamiltonの定理より k_1, \dots, k_n をスカラーの定数として、

$$G^n = k_1 G^{n-1} + \dots + k_n I$$

ゆえに

$$\begin{aligned} f_n &= G^n \gamma_0 + G^{n-1} F \gamma_1 + \dots + F \gamma_n \\ &= G^{n-1} (k_1 \gamma_0 + F \gamma_1) + \dots + I (k_n \gamma_0 + F \gamma_n) \end{aligned}$$

一方、 f_1, \dots, f_{n-1} の線形結合は、

$$\begin{aligned} &C_1 f_{n-1} + \dots + C_{n-1} f_1 \\ &= G^{n-1} (C_1 \gamma_0) + G^{n-2} (C_1 F \gamma_1 + C_2 \gamma_0) + \dots + G (C_1 F \gamma_{n-2} + \dots + C_{n-1} \gamma_0) \\ &\quad + I (C_1 F \gamma_{n-1} + \dots + C_{n-1} F \gamma_1) \end{aligned}$$

と表わせる。ところで $\gamma_0 \neq 0$ であるから次式の係数行列の階数は $n-1$ であり、次式を満足する定数 C_1, \dots, C_{n-1} が存在する。

$$\begin{pmatrix} \gamma_0 & 0 & \dots & 0 \\ F\gamma_1 & \gamma_0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ F\gamma_{n-2} & F\gamma_{n-3} & \dots & \gamma_0 \\ F\gamma_{n-1} & F\gamma_{n-2} & \dots & F\gamma_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \\ \vdots \\ C_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k_1 \gamma_0 + F \gamma_1 \\ k_2 \gamma_0 + F \gamma_2 \\ \vdots \\ k_{n-1} \gamma_0 + F \gamma_{n-1} \\ k_n \gamma_0 + F \gamma_n \end{pmatrix}$$

よってこれらの C_1, \dots, C_{n-1} により次式が成立する。

$$f_n = C_1 f_{n-1} + \dots + C_{n-1} f_1$$

また、 $\gamma_0 = 0$ のときは付録1-Vとまったく同様にして

$$f_{n+1} = C_1 f_n + \dots + C_n f_1$$

と表わせる。

いずれの場合でも $n+1$ 回目以後は独立な情報が得られないので、入力可観測性は高々 n 位である。 畧証終り。

3-II: [定理3-1の証明] G を正則とすると次式を満足する n ベクトル γ_0 および r ベクトル γ_1 が非零で必ず存在する。

$$\begin{cases} F\gamma_1 \neq 0 \\ \gamma_0 = -G^{-1} F \gamma_1 \end{cases}$$

ゆえに、

$$f_1 = G \gamma_0 + F \gamma_1 = 0$$

$$\therefore H f_1 = 0$$

いま次式を満足する非零の n ベクトル γ_0 、および任意の r ベクトル $\gamma_1, \dots, \gamma_i$ が存在する

としよう。

$$f_i = G^i \gamma_0 + G^{i-1} F \gamma_1 + \dots + F \gamma_i = 0$$

ところで、

$$F \gamma_{i+1} = 0$$

を満足する r ベクトル γ_{i+1} を選ぶことは常に可能である。それゆえ次式が成立する。

$$f_{i+1} = G f_i + F \gamma_{i+1} = 0$$

$$\therefore H f_{i+1} = 0$$

$i = 1$ のときは上述の関係式は明らかに成立する。ゆえに数学的帰納法により任意の i ($i = 1, 2, \dots$) に対して成立する。ところで命題 3-2 により入力可観測性は高々 n 位である。それゆえ観測系 (3-1) は G が正則であり、かつ状態量初期値が未知のときは常に入力可観測性が成立しない。証明終り。

3-III: [命題 3-5 の証明] (十分性) (3-35) 式が成立すると、

$$\Gamma = \begin{bmatrix} B^* C^* & B^* A^* C^* & \dots & B^* (A^*)^{n-1} C^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} CB \\ CAB \\ \vdots \\ CA^{n-1} B \end{bmatrix}$$

は正則である。よって本文の説明より、

$$\begin{bmatrix} y(t_{1+}) - y(t_{1-}) \\ \vdots \\ \overset{(n-1)}{y}(t_{1+}) - \overset{(n-1)}{y}(t_{1-}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} CB \\ \vdots \\ CA^{n-1} B \end{bmatrix} x(t_1)$$

すなわち、次式より $x(t_1)$ が唯一に求められる。

$$x(t_1) = \Gamma^{-1} \begin{bmatrix} B^* C^* & \dots & B^* (A^*)^{n-1} C^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y(t_{1+}) - y(t_{1-}) \\ \vdots \\ \overset{(n-1)}{y}(t_{1+}) - \overset{(n-1)}{y}(t_{1-}) \end{bmatrix}$$

(必要性) 入力可観測性が成立したとする。もし (3-35) 式が成立しないとすると上述の Γ は非正則である。したがって、

$$\begin{bmatrix} y(t_{1+}) - y(t_{1-}) \\ \vdots \\ \overset{(n-1)}{y}(t_{1+}) - \overset{(n-1)}{y}(t_{1-}) \end{bmatrix}^* \begin{bmatrix} y(t_{1+}) - y(t_{1-}) \\ \vdots \\ \overset{(n-1)}{y}(t_{1+}) - \overset{(n-1)}{y}(t_{1-}) \end{bmatrix} = x^*(t_1) \Gamma x(t_1) = 0$$

を満足する零でない $x(t_1)$ が存在する。一方、明らかに $x(t_1) = 0$ は、

$$\begin{bmatrix} y(x_{1+}) - y(x_{1-}) \\ \vdots \\ y^{(n-1)}(x_{1+}) - y^{(n-1)}(x_{1-}) \end{bmatrix} = 0$$

の解である。これは入力可観測性の仮定に矛盾する。よって Γ は正則であり (3-35) 式は成立しなければならない。 証明終り。

3-4: $\alpha_k(t), \gamma_{ik}(t)$ が1次独立であることを述べる。まず A の固有値がすべて相異なる場合を検討しよう。 A の固有値を $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ とし, A_{ij} を (付-20) 式の行列の i 行 j 列要素の余因子とする。

$$\begin{bmatrix} 1 & \lambda_1 & \dots & \lambda_1^{n-1} \\ 1 & \lambda_2 & \dots & \lambda_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & \lambda_n & \dots & \lambda_n^{n-1} \end{bmatrix} = [\lambda] \quad (\text{付-20})^*$$

まず $\alpha_k(t)$ を求めると,

$$\begin{bmatrix} \alpha_0(t) \\ \vdots \\ \alpha_{n-1}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & \dots & A_{n1} \\ \vdots & & \vdots \\ A_{1n} & \dots & A_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} \\ \vdots \\ e^{\lambda_n t} \end{bmatrix} \quad (\text{付-21})$$

となる。(付-20) 式は明らかに正則であり逆行列が存在する。

$$[\lambda]^{-1} = \frac{1}{\Delta} \text{adj}[\lambda]$$

ただし, Δ は (付-20) 式の行列式の値である。上式の行列式の値は零とはならない。

$$\left| \frac{1}{\Delta} \text{adj}[\lambda] \right| = |[\lambda]^{-1}| \neq 0$$

\therefore

$$\frac{1}{\Delta} \begin{vmatrix} A_{11} & \dots & A_{n1} \\ \vdots & & \vdots \\ A_{1n} & \dots & A_{nn} \end{vmatrix} \neq 0$$

よって (付-21) 式の係数行列の n 個の行ベクトルは1次独立である。ゆえに $\alpha_0(t), \dots, \alpha_{n-1}(t)$ は1次独立である。つぎに任意の i ($i=0, 1, \dots, N$) について $\gamma_{ik}(t)$ を求めると,

* この場合には最小多項式の次数は $P=n$ である。

$$\begin{pmatrix} \gamma_{i0}(t) \\ \vdots \\ \gamma_{i, n-1}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{11} & \dots & A_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ A_{i1} & \dots & A_{in} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{\lambda_1 t} \int_0^t \tau^i e^{-\lambda_1 \tau} d\tau \\ \vdots \\ e^{\lambda_n t} \int_0^t \tau^i e^{-\lambda_n \tau} d\tau \end{pmatrix} \quad (\text{付-22})$$

となる。したがって各 i に対して $\gamma_{i0}(t), \dots, \gamma_{i, n-1}(t)$ は 1 次独立である。

最後に A の固有値に等根がある場合を検討しよう。 A の p 個の固有値を $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p$ とし、いま $\lambda_1 = \lambda_2$ とし、他はすべて相異なるとしよう。このとき (付-20) ~ (付-22) に対応してつぎの式が得られる。

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2\lambda_1 & \dots & (p-1)\lambda_1^{p-2} \\ 1 & \lambda_1 & \lambda_1^2 & \dots & \lambda_1^{p-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & \lambda_p & \lambda_p^2 & \dots & \lambda_p^{p-1} \end{pmatrix} = [\lambda] \quad (\text{付-20}')$$

$$\begin{pmatrix} \alpha_0(t) \\ \alpha_1(t) \\ \vdots \\ \alpha_{p-1}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{p1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{p2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{1p} & A_{2p} & \dots & A_{pp} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t e^{\lambda_1 t} \\ e^{\lambda_1 t} \\ \vdots \\ e^{\lambda_p t} \end{pmatrix} \quad (\text{付-21}')$$

$$\begin{pmatrix} \gamma_{i0}(t) \\ \gamma_{i1}(t) \\ \vdots \\ \gamma_{i, p-1}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{p1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{p2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{1p} & A_{2p} & \dots & A_{pp} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{\lambda_1 t} \int_0^t \tau^i (t-\tau) e^{-\lambda_1 \tau} d\tau \\ e^{\lambda_1 t} \int_0^t \tau^i e^{-\lambda_1 \tau} d\tau \\ \vdots \\ e^{\lambda_p t} \int_0^t \tau^i e^{-\lambda_p \tau} d\tau \end{pmatrix} \quad (\text{付-22}')$$

ただし、 A_{ij} は (付-20') 式の i 行 j 列要素の余因子とする。(付-21'), (付-22') 式の係数行列の p 個の行ベクトルは 1 次独立であることは前述と同様にしてわかる。よって $\alpha_k(t)$ は 1 次独立であり、また各 i に対して $\gamma_{i0}(t), \dots, \gamma_{i, p-1}(t)$ は 1 次独立である。

3-V: $w = U(x); w(t) = \int_0^t c e^{\lambda(x-\tau)} \beta x(\tau) d\tau$

とすると、作用素 U は完全連続作用素であるから¹⁵⁾、 $x(t)$ に平均収束する関数列 $\{x^N(t)\}$ を入力とするときは、その出力 $\{w_N(t)\}$ も明らかに $w(t)$ に平均収束する。

いま近似入力として $x^N(t)$ を採用したときの誤差を $x_\varepsilon(t)$ とすると¹⁶⁾

$$\|w - w_N\| = \|U(x_\varepsilon)\| \leq \|U\| \|x_\varepsilon\|$$

また、次式を満足させる定数 M が存在するときは、

$$\begin{aligned} \|w - w_N\| &= \|U(x_\varepsilon)\| \\ &= \left\| \sum_{k=0}^{p-1} C A^k B \int_0^t \alpha_k(t-\tau) x(\tau) d\tau \right\| \\ &\geq M \|x_\varepsilon\| \end{aligned}$$

よって、

$$\frac{\|w - w_N\|}{M} \geq \|x_\varepsilon\| \geq \frac{\|w - w_N\|}{\|U\|}$$

一般的に M を求めることは必ずしも容易ではない。それゆえ、実際的には、

$$\|x_\varepsilon\| \approx \frac{\|w - w_N\|}{\|U\|}$$

として誤差を評価し、 $\|w - w_N\| / \|U\|$ が十分小さくなるような N を選ぶようにすることが考えられる。

4-1: [定理 4-1] $\Gamma(t_e, t_0)$ が正則のことは $\Gamma(t_e', t_0)$ が正則のことは等価である。ただし、 $t_0 < t_e \leq t_e'$ 。

[証明] $C(t) \equiv (t, t_0) B(t_0) = [F_1(t, t_0) \cdots F_r(t, t_0)]$

とする。 $\Gamma(t_e, t_0)$ が非正則とすると区間 $t_0 \leq t \leq t_e$ で次式を満足するすべては零でない定数 C_1, C_2, \dots, C_r が存在する。

$$C_1 F_1(t, t_0) + C_2 F_2(t, t_0) + \cdots + C_r F_r(t, t_0) \equiv 0 \quad (\text{付-23})$$

解析接続の定理より上式の関係は区間 $t_0 \sim t_e'$ でも成立する。それゆえ $\Gamma(t_e', t_0)$ は非正則である。

逆に $\Gamma(t_e', t_0)$ が非正則とすると、区間 $t_0 \sim t_e'$ で (付-23) 式が成立する。したがって、その部分区間 $t_0 \sim t_e$ でも成立し、 $\Gamma(t_e, t_0)$ は非正則である。 証明終り。

4-II: [補助定理 4-1] ベクトル $H_1(t, t_0), \dots, H_r(t, t_0)$ が区間 $t_0 \leq t \leq t_1$ で 1 次独立であるための必要十分条件は次式の $\Gamma_H(t_1, t_0)$ が正則のことである。

$$\Gamma_H(t_1, t_0) = \int_{t_0}^{t_1} [H_1(t, t_0) \cdots H_r(t, t_0)]^* [H_1(t, t_0) \cdots H_r(t, t_0)] dt$$

[証明] (十分性) $H_1(t, t_0), \dots, H_r(t, t_0)$ が $t_0 \leq t \leq t_1$ で 1 次従属とするとすべてが零となることはない定数 C_1, C_2, \dots, C_r が存在して次式で表わせる。

$$C_1 H_1(t, t_0) + C_2 H_2(t, t_0) + \cdots + C_r H_r(t, t_0) \equiv 0$$

∴

$$\begin{aligned}
& C_1(H_{i_1}(t, t_0), H_1(t, t_0)) + \dots + C_r(H_{i_r}(t, t_0), H_r(t, t_0)) \\
&= \int_{t_0}^{t_1} C_1 H_{i_1}^*(t, t_0) H_1(t, t_0) dt + \dots + \int_{t_0}^{t_1} C_r H_{i_r}^*(t, t_0) H_r(t, t_0) dt \\
&= \int_{t_0}^{t_1} H_{i_i}^*(t, t_0) [C_1 H_1(t, t_0) + \dots + C_r H_r(t, t_0)] dt \\
&= (H_{i_i}(t, t_0), \sum_{j=1}^r C_j H_j(t, t_0)) \equiv 0 \quad i = 1, 2, \dots, r
\end{aligned}$$

ゆえに $\Gamma_H(t_1, t_0)$ は列ベクトルが1次従属であり、 $\Gamma_H(t_1, t_0)$ は非正則である。

(必要性) $\Gamma_H(t_1, t_0)$ が1次従属とする。即ち $\Gamma_H(t_1, t_0)$ の列ベクトルが1次従属とする。

よって次式が成立する。

$$\sum_{j=1}^r C_j (H_{i_i}(t, t_0), H_j(t, t_0)) \equiv 0 \quad i = 1, 2, \dots, r$$

$$\begin{aligned}
\therefore & \left(\sum_{i=1}^r C_i H_{i_i}(t, t_0), \sum_{j=1}^r C_j H_j(t, t_0) \right) \\
&= \int_{t_0}^{t_1} \left(\sum_{i=1}^r C_i H_{i_i}^*(t, t_0) \right)^* \left(\sum_{j=1}^r C_j H_j(t, t_0) \right) dt \\
&= \int_{t_0}^{t_1} \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r \bar{C}_i C_j H_{i_i}^*(t, t_0) H_j(t, t_0) dt \\
&= \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r \bar{C}_i C_j \int_{t_0}^{t_1} H_{i_i}^*(t, t_0) H_j(t, t_0) dt = \sum_{i=1}^r \bar{C}_i \sum_{j=1}^r C_j (H_{i_i}(t, t_0), H_j(t, t_0)) \\
&\equiv 0
\end{aligned}$$

$$\therefore C_1 H_1(t, t_0) + \dots + C_r H_r(t, t_0) \equiv 0$$

証明終り。

[補助定理4-II] $P_i(t)$, $i = 1, 2, \dots$ を (3-51), (3-51') 式で示されるものとし、

$$Q_k(t) = \begin{bmatrix} P_1(t) \\ \vdots \\ P_k(t) \end{bmatrix} \quad \Gamma_k(t_e, t_0) = \int_{t_0}^{t_e} Q_k^*(t) Q_k(t) dt$$

$$k = 1, 2, \dots$$

とするとき、

$$\text{rank } \Gamma_k(t_e, t_0) = \text{rank } \Gamma_{k+j}(t_e, t_0) \quad j = 1, 2, \dots$$

とする $k \leq n$ が存在する。

[証明] $P_k = \text{rank } \Gamma_k(t_e, t_0)$ とする。あきらかに $P_1 \leq P_2 \leq \dots$ である。

$\Gamma_1(t_e, t_0)$ の階数を p_1 としたから補助定理4-Iより $Q_1(t) = P_1(t)$ には区間 $t_0 \sim t_e$ で1次独立なベクトルが P_1 個存在する。それをいま最初の P_1 個の列ベクトルとする。同様にして $Q_i(t)$ $i = 1, 2, \dots$ の1次独立な列ベクトルはそれぞれ最初の P_1 個, P_2 個,

……であるとする。まず $Q_2(t)$ を考えると、(1) $P_1 = P_2$ (2) $P_1 < P_2$ の2つの場合が考えられる。(1)の場合には $P_1(t) \rightarrow P_2(t)$ の作用によって何ら新しい1次独立な列ベクトルが生じない。ところで $P_i(t) \rightarrow P_{i+1}(t)$ の作用は $P_1(t) \rightarrow P_2(t)$ の作用と同一であり、微分と $n \times n$ 行列の作用とによる線形作用であるから $P_3(t)$ 、 $P_4(t)$ 、……も同様にして何ら新しい1次独立な列ベクトルが生じない。よってこの場合には $k=1$ である。(2)の場合には新しい1次独立な列ベクトルが $(P_2 - P_1)$ 個存在する。このときにはつぎの $Q_3(t)$ を考えると、(1) $P_2 = P_3$ (2) $P_2 < P_3$ の2つの場合が生じる。(1)の場合には(1)の場合と同様にして $k=2$ である。(2)の場合にはさらに $Q_4(t)$ を考える。以下同様にして $Q_5(t)$ 、 $Q_6(t)$ 、……を考える。ところで最大限に独立な列ベクトルの数は n であるから $k \leq n$ である。
証明終り。

[補助定理 4-III]

$$\int_{t_0}^{t_e} \Phi^*(t, t_0) C^*(t) C(t) \Phi(t, t_0) dt \quad (\text{付-24})$$

が正則のことと、次式が正則のこととは等価である。

$$\int_{t_0}^{t_e} Q^*(t) Q(t) dt \quad (\text{付-25})$$

[証明] (付-24) 式が非正則とすると次式を満足する n ベクトル $\gamma \neq 0$ が存在する。

$$P_1(t) \Phi(t, t_0) \gamma \equiv 0$$

上式を逐次微分して

$$P_2(t) \Phi(t, t_0) \gamma \equiv 0$$

⋮

$$P_n(t) \Phi(t, t_0) \gamma \equiv 0$$

$$\therefore Q(t) \Phi(t, t_0) \gamma \equiv 0$$

こゝで (付-25) 式が正則とすると $Q^*(t)Q(t)$ が正則となる t が $t_0 \sim t_e$ 間に存在する。この t に対して、

$$Q^*(t)Q(t) \Phi(t, t_0) \gamma = 0$$

$$\therefore \Phi(t, t_0) \gamma = 0$$

$\Phi(t, t_0)$ は正則だから、

$$\gamma = 0$$

これは最初の仮定に矛盾する。よって (付-25) 式は非正則である。

逆に (付-25) 式が非正則とすると $\Phi(t, t_0)$ の n 個の列ベクトルは1次独立であるから次式を満足する n ベクトル $\gamma \neq 0$ 、および $t_1 \in (t_0, t_e)$ が存在する。

$$Q(t_1) \Phi(t_1, t_0) \gamma = 0$$

∴

$$P_i(t_1) \Phi(t_1, t_0) \gamma = 0 \quad i = 1, 2, \dots, n$$

補助定理 4-II より上式は $i = n+1, n+2, \dots$ に対しても成立する。すなわち、次式が成立

する。

$$\left. \frac{d^i}{dt^i} [C(t) \Phi(t, t_0) \gamma] \right|_{t=t_1} = 0 \quad i = 0, 1, 2, \dots$$

上式の〔 〕内は解析的である。よって

$$C(t) \Phi(t, t_0) \gamma \equiv 0 \quad t_0 \leq t \leq t_e$$

すなわち、 $C(t) \Phi(t, t_0)$ の n 個の列ベクトルは 1 次従属となり補助定理 4-1 より (付-24) 式は非正則である。 証明終り。

〔補助定理 4-IV〕 下の $\Gamma(t_e, t_0)$ が正則のことは、 $\Gamma_Q(t_e, t_0)$ が正則のことは等価である。

$$\begin{aligned} \Gamma(t_e, t_0) &= \int_{t_0}^{t_e} B^*(t_0) \Phi^*(t, t_0) C^*(t) C(t) \Phi(t, t_0) B(t_0) dt \\ &= B^*(t_0) G_1 B(t_0) \end{aligned}$$

$$\Gamma_Q(t_e, t_0) = \int_{t_0}^{t_e} B^*(t_0) Q^*(t) Q(t) B(t) dt = B^*(t_0) G_2 B(t_0)$$

〔証明〕 補助定理 4-III より G_1, G_2 はともに正則であるかあるいはともに非正則であるかのいずれかである。

(1) G_1, G_2 がともに正則のとき。 r ベクトル γ に対して、 $\gamma^* B^*(t_0) G_i B(t_0) \gamma = 0 \quad i = 1, 2$ となるのは $B(t_0) \gamma = 0$ のときのみである。もし、 $\text{rank } B(t_0) = r$ ならば、 $\gamma = 0$ であり、 $\Gamma(t_e, t_0), \Gamma_Q(t_e, t_0)$ はともに正則である。 $\text{rank } B(t_0) < r$ ならば $B(t_0) \gamma = 0$ とする $\gamma \neq 0$ が存在し、明らかに $\Gamma(t_e, t_0)$ と $\Gamma_Q(t_e, t_0)$ はともに非正則である。

(2) G_1, G_2 がともに非正則のとき。 $\gamma^* B^*(t_0) G_i B(t_0) \gamma = 0 \quad i = 1, 2$ とする $B(t_0) \gamma \neq 0$ が存在する。このとき $\gamma \neq 0$ である r ベクトル γ が存在するので明らかに $\Gamma(t_e, t_0)$ と $\Gamma_Q(t_e, t_0)$ は非正則である。 証明終り。

4-III: [定理 4-1 の証明] 前述の補助定理 4-IV より命題 4-5' と定理 4-1 は等価となる。 証明終り。

4-IV: $t_1 \sim t_2$ の観測で $x(t_1)$ が唯一に決定できないとき、 $t_1 \sim t_i \ (t_2 < t_i < t_e)$ の観測で $x(t_1)$ が唯一に決定できたとする。そうすると $(C\Phi B, C\Phi B), (C\Phi, C\Phi B)$ のうち少なくとも一方は階数が r であり、

$$\begin{bmatrix} (C\Phi B, C\Phi B) \\ (C\Phi, C\Phi B) \end{bmatrix}$$

の r 個の 1 次独立な列ベクトルは他の

$$\begin{pmatrix} (C \rightarrow B, C \rightarrow) \\ (C \rightarrow, C \rightarrow) \end{pmatrix}$$

の列ベクトルでは線形結合で表現できない。これは区間 $t_1 \sim t_2$ で $x(t_1)$ の入力可観測性が成立しないことに反する。よって $t_1 \sim t_2$ で $x(t_1)$ が唯一に決定できないときには $x(t_1)$ は他の観測区間の観測値を累積しても唯一に決定できない。

4-V: ベクトル $x(t)$ のノルムをつぎのように定義する。

$$\|x\| = \sup_{t_b \leq t \leq t_e} \|x(t)\| \quad (\text{付-26})$$

|| : ベクトルの長さ

本文 (3-57) 式の $K(t, \tau)$ の各要素は連続且有界であるから、つぎの関係式を得る。

$$\begin{aligned} \|K(t, \tau)\| &= \sup_{\substack{t_b \leq \tau \leq t \leq t_e \\ \|x\|=1}} \|K(t, \tau)x(\tau)\| \\ &= \sup_{\|x\|=1} \sup_{t_b \leq \tau \leq t \leq t_e} \|K(t, \tau)x(\tau)\| \\ &= \sup_{\|x\|=1} \sup_{t_b \leq \tau \leq t} \left\| \begin{bmatrix} K_1(t, \tau) \\ \vdots \\ K_r(t, \tau) \end{bmatrix} x(\tau) \right\| \\ &= \sup_{\|x\|=1} \sup_{t_b \leq \tau \leq t \leq t_e} \left\{ \sum_{i=1}^r |(K_i(t, \tau), x(\tau))|^2 \right\}^{1/2} \\ &\leq \sup_{\|x\|=1} \sup_{t_b \leq \tau \leq t \leq t_e} \left\{ \sum_{i=1}^r (K_i(t, \tau), K_i(t, \tau))(x(\tau), x(\tau)) \right\}^{1/2} \\ &= \sup_{t_b \leq \tau \leq t \leq t_e} \left\{ \sum_{i=1}^r (K_i(t, \tau), K_i(t, \tau)) \right\}^{1/2} \\ &= M < \infty \end{aligned} \quad (\text{付-27})$$

作用素 U をつぎのように定義する。

$$U(x) = \int_{t_b}^t K(t, \tau)x(\tau)d\tau \quad t_b \leq t \leq t_e \quad (\text{付-28})$$

$$U^2(x) = \int_{t_b}^t \int_{t_b}^{\tau} K(t, \tau_1)K(\tau_1, \tau)x(\tau)d\tau_1d\tau \quad t_b \leq t \leq t_e$$

$$U^i(x) = \int_{t_b}^t \int_{t_b}^{\tau} \dots \int_{t_b}^{\tau_{i-1}} K(t, \tau_1)K(\tau_1, \tau_2) \dots K(\tau_{i-1}, \tau)x(\tau)d\tau_i \dots d\tau_1d\tau$$

$i=3, 4, \dots, t_b \leq t \leq t_e$

このときヘルダーの不等式を適用して次式を得る⁴⁾。

$$\begin{aligned} \left| \int_{t_b}^t K(t, \tau) x(\tau) d\tau \right| &\leq \int_{t_b}^t \|K(t, \tau) x(\tau)\| d\tau \\ &\leq \int_{t_b}^{te} \|K(t, \tau) x(\tau)\| d\tau \\ &\leq \int_{t_b}^{te} \|K(t, \tau)\| \|x(\tau)\| d\tau \\ &\leq (te - t_b) M \|x\| \end{aligned}$$

ゆえにつぎの関係式を得る。

$$\|U\| \leq (te - t_b) M$$

同様にしてつぎの諸関係式が得られる¹³⁾。

$$\begin{aligned} \|U^2(x)\| &= \left\| \int_{t_b}^t \int_{t_b}^{\tau} K(t, \tau_1) K(\tau_1, \tau) x(\tau) d\tau_1 d\tau \right\| \\ &= \left\| \int_{t_b}^t \int_{\tau}^t K(t, \tau_1) K(\tau_1, \tau) x(\tau) d\tau_1 d\tau \right\| \\ &\leq \int_{t_b}^t \int_{\tau}^t \|K(t, \tau_1)\| \|K(\tau_1, \tau)\| \|x(\tau)\| d\tau_1 d\tau \\ &\leq \frac{1}{2} (te - t_b)^2 M^2 \|x\| \end{aligned}$$

$$\therefore \|U^2\| \leq \frac{1}{2} (te - t_b)^2 M^2$$

同様にして、

$$\|U^i\| \leq \frac{1}{i!} (te - t_b)^i M^i \quad i = 1, 2, 3, \dots$$

よってつぎの定理が得られる。

[定理 4-Ⅱ] (3-57) 式のボルテラ形積分方程式は (3-58), (3-59) 式で表わされる唯一連続解をもつ。

[証明] ^{13) 14)} 1° 収束:

$$\begin{aligned} \|G\| &\leq \|K\| + (te - t_b) \|K\|^2 + \frac{1}{2!} (te - t_b)^2 \|K\|^3 + \dots \\ &\leq M + (te - t_b) M^2 + \frac{1}{2!} (te - t_b)^2 M^3 + \dots \end{aligned}$$

上式はあきらかに絶対収束する。また (3-59) 式の $G(t, \tau)$ の各要素は連続だから (3-59) 式の $\mathcal{X}(t)$ は連続である。

2° 相反:

$$\int_{\tau}^t K(t, \xi) G(\xi, \tau) d\xi$$

$$\begin{aligned}
&= -\left\{ \int_{\tau}^t K(t, \xi) K(\xi, \tau) d\xi + \int_{\tau}^t \int_{\tau}^{\xi} K(t, \xi) K(\xi, \tau_1) K(\tau_1, \tau) d\tau_1 d\xi + \dots \right\} \\
&= G(t, \tau) + K(t, \tau) \\
&\quad \int_{\tau}^t G(t, \xi) K(\xi, \tau) d\xi \\
&= -\left\{ \int_{\tau}^t K(t, \xi) K(\xi, \tau) d\xi + \int_{\tau}^t \int_{\xi}^t K(t, \tau_1) K(\tau_1, \xi) K(\xi, \tau) d\tau_1 d\xi + \dots \right\} \\
&= -\left\{ \int_{\tau}^t K(t, \xi) K(\xi, \tau) d\xi + \int_{\tau}^t \int_{\tau}^{\xi} K(t, \tau_1) K(\tau_1, \xi) K(\xi, \tau) d\xi d\tau_1 + \dots \right\} \\
&= G(t, \tau) + K(t, \tau)
\end{aligned}$$

よって相反性は成立する。

3° 反転：与積分方程式 (3-57) に解 (3-58) を代入すると、

$$\begin{aligned}
&(\Omega(t) - \int_{t_b}^t G(t, \tau) \Omega(\tau) d\tau) - \int_{t_b}^t K(t, \tau) \left[\Omega(\tau) - \int_{t_b}^{\tau} G(\tau, \xi) \Omega(\xi) d\xi \right] d\tau = \Omega(t) \\
&\therefore \int_{t_b}^t \int_{\xi}^t K(t, \tau) G(\tau, \xi) d\tau \Omega(\xi) d\xi - \int_{t_b}^t \{G(t, \tau) + K(t, \tau)\} \Omega(\tau) d\tau = 0 \\
&\therefore \int_{t_b}^t \left[\int_{\xi}^t K(t, \tau) G(\tau, \xi) d\tau - \{G(t, \xi) + K(t, \xi)\} \right] \Omega(\xi) d\xi = 0
\end{aligned}$$

相反の関係式より左辺の〔 〕内は零である。よって (3-58) 式の $\Omega(t)$ が解である。

4° 唯一性：(3-57) 式が同一の $\Omega(t)$ に対して $x_1'(t), x_2'(t)$ の二つの解をもつとする。

$$x_1'(t) - \int_{t_b}^t K(t, \tau) x_1'(\tau) d\tau = \Omega(t)$$

$$x_2'(t) - \int_{t_b}^t K(t, \tau) x_2'(\tau) d\tau = \Omega(t)$$

いま、

$$x_0(t) = x_1'(t) - x_2'(t) \neq 0 \quad \text{とおくと、}$$

$$x_0(t) - \int_{t_b}^t K(t, \tau) x_0(\tau) d\tau = 0$$

を得る。さて、

$$T(x) = x(t) - \int_{t_b}^t K(t, \tau) x(\tau) d\tau = 0$$

を満足する要素 x は空間 E (各要素が $C[t_b, t_e]$ に属する空間) の線形部分空間 E_1 をつくる。いま条件

$$T^i(\tilde{x}) = 0$$

を満足する要素の全体からなる部分空間を E_i とする。

部分空間 E_i が非減少な部分空間列

$$E_1 \subseteq E_2 \subseteq \dots \subseteq E_i \subseteq \dots \quad (\text{付-29})$$

となることは明らかである。

ところで、方程式 $\Omega = T(x)$ が任意の Ω に対して解けることと、 $x_0 \neq 0$ なることより、 0 でない要素の列 $x_0, x_1, x_2, \dots, x_i, \dots$ で

$$T(x_1) = x_0$$

$$T(x_2) = x_1$$

⋮

$$T(x_i) = x_{i-1}$$

⋮

を満足するものが存在する。このとき各 i に対する要素 x_i は部分空間 E_{i+1} には属するが、 E_i には属さない。なぜならば、

$$T^i(x_i) = T^{i-1}(x_{i-1}) = \dots = T(x_1) = x_0 \neq 0$$

$$T^{i+1}(x_i) = T^i(x_{i-1}) = \dots = T^2(x_1) = T(x_0) = 0$$

よって (付-29) 式の等号はどれも成立しない。

すべての部分空間 E_i が線形であることは自明である。また、 \tilde{x} を E_i の任意の集積点とすると、 E_i に属し \tilde{x} に収束する点列 $\{\bar{x}_n\}$ が存在する。作用素 T^i は連続だから、

$$T^i(\tilde{x}) = \lim_{n \rightarrow \infty} T^i(\bar{x}_n) = 0$$

よってすべての部分空間 E_i は閉である。

さて、すべての部分空間は線形で閉じているから、任意の i に対して

$$\|x_i\| = 1$$

$$\rho(x_i, E_i) = \inf_{x \in E_i} \|x_i - x\| \geq \frac{1}{2}$$

を満足する

$$x_i \in E_{i+1}$$

が存在する。なぜならば、 $\rho(x_i, E_i) = \rho_i$ とおくと $\|x_i - \tilde{x}\| \leq 2\rho$ となる $\tilde{x} \in E_i$ が存在し、これに対して、

$$\rho(x_i - \tilde{x}, E_i) = \rho(x_i - \tilde{x}, E_i - \tilde{x}) = \rho(x_i, E_i) = \rho_i$$

両辺を $\|x_i - \tilde{x}\|$ で割ると

$$\rho\left(\frac{x_i - \tilde{x}}{\|x_i - \tilde{x}\|}, E_i\right) = \frac{\rho_i}{\|x_i - \tilde{x}\|} \geq \frac{1}{2}$$

を得る。あらためて、

$$x_i = \frac{x_i - \tilde{x}}{\|x_i - \tilde{x}\|}$$

とおくと与えられた関係を満足する $x_i \in E_{i+1}$ が得られる。

いま上述の x_i に対して $\{U(x_i)\}$ を考えてみる。 U は (付-28) 式で与えられるので、 $T = I - U$ である。 U は完全連続作用素である。 $p > q$ とすると、

$$x_q + T(x_p) - T(x_q) \in E_{p-1}$$

である。(なぜならば、上式のすべての要素は T^{p-1} 作用で零となる) ゆえに

$$\|U(x_p) - U(x_q)\| = \|x_p - (x_q + T(x_p) - T(x_q))\| \geq \frac{1}{2}$$

任意の $p > q$ に対して上式が成立するから $\{U(x_i)\}$ は収束する部分列をもたないことになり、 U の完全連続性に反する。

ゆえに (3-57) 式の解 (3-58), (3-59) 式が唯一であることが証明された。

証明終り。

4-VII: [定理4-2の証明] (3-60) 式の $r \times r$ 行列 $R(t)$ が逆をもつならば明らかに (3-56) 式より (3-57) 式が得られる。定理4-IIにより (3-57) 式は (3-58), (3-59) 式の唯一解をもつ。よって $y(t)$ から唯一の $x(t)$ が決定できる。 証明終り。

4-VIII: [定理4-3の証明] (3-61) 式の $\Gamma(t, t_a, t_b)$ が非正則とすると補助定理4-Iより $Q(t)B(t)$ の r 個の列ベクトルは区間 $t_b \sim t_a$ で1次従属である。したがって

$$Q(t)B(t)x_0 \equiv 0 \quad x_0 \neq 0$$

となる非零の r ベクトル x_0 が存在する。よって

$$P_i(t)B(t)x_0 \equiv 0 \quad i = 1, 2, \dots$$

が得られ、この関係は補助定理4-IIよりすべての i について成立する。したがって次式を得る。

$$\frac{d^i}{dt^i} w(t) = \int_{t_a}^t P_{i+1}(t) \Phi(t, \tau) B(\tau) d\tau x_0 \quad i = 0, 1, 2, \dots$$

一定値入力に対する出力 $w(t)$ は解析的である。いま $x(t) \equiv x_0$ を入力とすると、出力

$w(t)$ に対して

$$\left. \frac{d^i}{dt^i} w(t) \right|_{t=t_a} = 0 \quad i = 0, 1, 2, \dots$$

が成立する。よって

$$w(t) \equiv 0$$

が得られる。

一方、 $x(t) \equiv 0$ に対する出力も明らかに

$$w(t) \equiv 0$$

である。それゆえ同一出力に対して二つの異なる入力に対応し得ることになり入力可観測性が存在

しない。

証明終り。

4-Ⅷ: [系2-1の証明] (3-63)式の $\Gamma_r(t_e, t_b)$ が正則だから $\alpha Q(t)B(t)$ の r 個の列ベクトルは区間 $t_b \sim t_e$ で1次独立である。よって $R(t)$ の逆が存在するような開区間 $t_b \sim t_1$ $t_1 \leq t_e$ が存在する。

$y(t), z(t)$ は時刻 t_b で連続であるから、

$$y(t_{b+}) = y(t_b), \quad z(t_{b+}) = z(t_b)$$

となり、定理4-2より区間 $t_b \leq t < t_1$ で $x(t)$ は唯一に決定できる。 $x(t)$ は解析関数であるから、全区間 $t_b \sim t_e$ で唯一に決定できる。証明終り。

5-1: [定理5-1の証明] $\alpha_1(\tau), \dots, \alpha_p(\tau)$ をスカラー量とし、 φ を A の最小多項式の次数とすると、

$$G = e^{A\tau} = \alpha_1(\tau)I + \dots + \alpha_p(\tau)A^{p-1}$$

$$F = \int_0^\tau e^{A(\tau-\xi)} d\xi B$$

$$= \beta_1(\tau)B + \dots + \beta_p(\tau)A^{p-1}B$$

ただし、

$$\beta_i(\tau) = \int_0^\tau \alpha_i(\tau-\xi) d\xi$$

となる。したがって $\alpha_j^{(i)} = \alpha_j^{(i)}(\tau)$, $\beta_j^{(i)} = \beta_j^{(i)}(\tau)$ をスカラー量とし、

$\alpha_j^{(1)} = \alpha_j(\tau)$, $\beta_j^{(1)} = \beta_j(\tau)$ とおくとつぎのように表わせる。

$$G^i = [I : A : \dots : A^{p-1}] \begin{bmatrix} \alpha_1^{(i)} \\ \vdots \\ \alpha_p^{(i)} \end{bmatrix} \quad i = 1, 2, \dots, n-1 \quad (\text{付-30})$$

$$G^{i-1}F = [B : AB : \dots : A^{p-1}B] \begin{bmatrix} \beta_1^{(i)} \\ \vdots \\ \beta_p^{(i)} \end{bmatrix} \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (\text{付-31})$$

$$HG^{i-1}F = [CB : CAB : \dots : CA^{p-1}B] \begin{bmatrix} \beta_1^{(i)} \\ \vdots \\ \beta_p^{(i)} \end{bmatrix} \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (\text{付-32})$$

$$H^* = C^*$$

$$(G^*)^i H^* = [C^* : A^* C^* : \dots : (A^*)^{p-1} C^*] \begin{bmatrix} \overline{\alpha_1^{(i)}} \\ \vdots \\ \overline{\alpha_p^{(i)}} \end{bmatrix} \quad i = 1, 2, \dots, n-1 \quad (\text{付-33})$$

まず状態可制御性について証明する。 G^i は (付-30) 式に示すように I, A, \dots, A^{P-1} の線形結合で示される。 P は最小多項式の次数であるから、これはまた $I, A, \dots, A^{P-1}, \dots, A^{n-1}$ の線形結合でも表わされる。よって $G^{i-1}F$ も (付-31) 式に示すようにやはり $B, AB, \dots, A^{n-1}B$ の線形結合で表わされる。もし、時間連続系が状態可制御性を有しないならば、 $B, AB, \dots, A^{n-1}B$ の $r \cdot n$ 個の列ベクトルのうち 1 次独立なベクトルの数は n より小となる。ゆえに $B, AB, \dots, A^{n-1}B$ の列ベクトルのうち、1 次独立なものの個数は n より小である。すなわち (付-31) 式を $i=1, \dots, n$ について考慮したものの階数は n より小となり、時間離散化した系も状態可制御性をもたない。

出力可制御性に関しては、 $CB, CAB, \dots, CA^{n-1}B$ および (付-32) 式の関係を使用して、また状態可観測性に関しては $C^*, A^*C^*, \dots, (A^*)^{n-1}C^*$ および (付-33) 式の関係を使用してまったく同様に証明できる。証明終り。

5-II: [系 5-1-1 の畧証]

$$F^* (G^*)^{i-1} H^* = [B^* C^* \mid B^* A^* C^* \mid \dots \mid B^* (A^*)^{P-1} C^*] \begin{bmatrix} \bar{\beta}_1^{(i)} \\ \vdots \\ \bar{\beta}_p^{(i)} \end{bmatrix} \quad i=1, 2, \dots, n \quad (\text{付-34})$$

と $B^* C^*, B^* A^* C^*, \dots, B^* (A^*)^{P-1} C^*$ の関係を使用して定理 5-I の証明とまったく同様にできる。

5-III: [定理 5-2 の証明] まず状態可制御性について証明する。(3-72) 式より $g_j^{(i)}$ は $P_1^{(1)}, \dots, P_r^{(P)}$ の線形結合である。もし (3-72) 式の線形結合係数の階数が n より小ならば、(3-72) 式の行のうち、1 次独立なものは n 個より小であり、他はそれらの線形結合で表わされる。したがって $g_j^{(i)}$ のうち 1 次独立なものは n 個より小であり、時間離散化したものは状態可制御性が成立しない。

出力可制御性は (3-73) 式について、状態可観測性は (3-74) 式、入力可観測性は (3-75) 式によりまったく同様に証明できる。証明終り。

5-IV: [定理 5-3 の証明] 状態可観測性が成立するのであるから、

$$[C^* \mid A^* C^* \mid \dots \mid (A^*)^{n-1} C^*]$$

の階数は n である。この行列の列ベクトルには 1 次独立なものが n 個存在し、他はその線形結合であらわされる。 n 個の 1 次独立の n ベクトルを G_1, \dots, G_n としよう。また $B = [B_1 \mid \dots \mid B_r]$ とする。もし B_1, \dots, B_r が 1 次従属ならばすべては零ではない定数 k_1, \dots, k_r が存在して $k_1 B_1 + \dots + k_r B_r = 0$ となる。したがって、

$$\sum_{j=1}^r \bar{k}_j (B_j, G_i) = \left(\sum_{j=1}^r k_j B_j, G_i \right) = 0 \quad i = 1, 2, \dots, n$$

が得られる。ゆえにつぎの行列の階数は r より小さい。

$$\begin{bmatrix} (B_1, G_1) & \dots & (B_1, G_n) \\ \vdots & & \vdots \\ (B_r, G_1) & \dots & (B_r, G_n) \end{bmatrix}$$

よって $[B^* C^* | B^* A^* C^* | \dots | B^* (A^*)^{n-1} C^*]$ の階数は r より小であり入力可観測性が成立しない。

逆にパルス列入力可観測性が成立しないとすると、 $[B^* C^* | B^* A^* C^* | \dots | B^* (A^*)^{n-1} C^*]$ の階数は r より小であり、次式を満足するすべは零でない定数 k_1, \dots, k_r が存在する。

$$\sum_{j=1}^r \bar{k}_j (B_j, G_i) = 0 \quad i = 1, 2, \dots, n$$

ところで k'_1, \dots, k'_n を任意の定数とすると

$$\left(\sum_{j=1}^r k_j B_j, \sum_{i=1}^n k'_i G_i \right) = \sum_{i=1}^n k'_i \sum_{j=1}^r \bar{k}_j (B_j, G_i) = 0$$

となる。ゆえに $\sum k_j B_j = 0$ または $\sum k_j B_j \perp \sum k'_i G_i$ が得られる。ところで G_1, \dots, G_n は 1 次独立で k'_1, \dots, k'_n は任意であるから $\sum k'_i G_i$ は n 次元空間を張る。したがって $\sum k_j B_j \neq 0$ はあり得ず B_1, \dots, B_r は 1 次従属である。証明終り。

5-V: [定理 5-4 の証明] 状態可観測性が成立するからつぎのグラム行列は正則である。

$$\begin{aligned} M(t_e, t_0) &= \int_{t_0}^{t_e} \Phi^*(t, t_0) C^*(t) C(t) \Phi(t, t_0) dt \\ &= [M_1(t_e, t_0) | \dots | M_n(t_e, t_0)] \end{aligned}$$

さて $B(t_0)$ の r 個の列ベクトルが 1 次従属とするとすべは零でない定数が存在して、

$$k_1 B_1(t_0) + \dots + k_r B_r(t_0) = 0$$

が得られる。また (3-50) 式のグラム行列に関してはつぎのように表わせる。

$$\begin{aligned} \Gamma(t_e, t_0) &= B^*(t_0) M(t_e, t_0) B(t_0) \\ &= \begin{bmatrix} (B_1, M_1) & \dots & (B_1, M_n) \\ \vdots & & \vdots \\ (B_r, M_1) & \dots & (B_r, M_n) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B_1 \\ \vdots \\ B_r \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} (L_1, B_1) & \dots & (L_1, B_r) \\ \vdots & & \vdots \\ (L_r, B_1) & \dots & (L_r, B_r) \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$\text{ただし, } L_1 = \begin{bmatrix} (B_1, M_1) \\ \vdots \\ (B_1, M_n) \end{bmatrix}, \dots, L_r = \begin{bmatrix} (B_r, M_1) \\ \vdots \\ (B_r, M_n) \end{bmatrix}$$

ゆえに次式が成立する。

$$\sum_{j=1}^r k_j (L_i, B_j) = (L_i, \sum_{j=1}^r k_j B_j) = 0$$

したがって $\Gamma(\mathbf{t}_e, \mathbf{t}_0)$ は非正則となりパルス入力可観測性は成立しない。

逆にパルス入力可観測性が不成立とすると $\Gamma(\mathbf{t}_e, \mathbf{t}_0)$ は非正則である。このとき L_1, \dots, L_r があるいは B_1, \dots, B_r のうち少なくとも一方は1次従属の関係にある。ところで L_1, \dots, L_r が1次従属ならば B_1, \dots, B_r は1次従属となるので、 B_1, \dots, B_r はいずれにしても1次従属である。 証明終り。

